Sur la solution de l'équation générale du cinquième degré réduite à la forme libre.

par K. Bohlin (à Stockholm).

1. Il est bien connu qu'au moyen de réductions élémentaires, on peut éliminer des équations algébriques complètes, en outre du second terme, encore un certain nombre des termes suivants. La forme *normale* des équations du troisième, du quatrième et du cinquième degré devient ainsi

$$\begin{aligned} z^3 + 3sz &= 2\tau \\ z^4 + 4sz &= 3\tau \\ z^5 + 5sz &= 4\tau. \end{aligned} \tag{1}$$

Ces équations possèdent les résolvantes

$$\begin{aligned} w^2 + 2\tau w &= s^{3|1} \\ w^3 + 3\tau w &= 2s^{4|2} \\ w^4 + 4\tau w &= 3s^{5|3}. \end{aligned} \tag{2}$$

C'est au moyen des *substitutions* suivantes

$$\begin{aligned} u &= \frac{\left(\frac{w}{1}\right)^{2|3}}{s}; \qquad & \zeta &= z\cdot\frac{\left(\frac{w}{1}\right)^{1|3}}{s} \\ u &= \frac{\left(\frac{w}{2}\right)^{3|4}}{s^{1|2}}; \qquad & \zeta &= z\cdot\frac{\left(\frac{w}{2}\right)^{1|4}}{s^{1|2}} \\ u &= \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{4|5}}{s^{1|3}}; \qquad & \zeta &= z\cdot\frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{1|5}}{s^{1|3}} \end{aligned} \tag{3}$$

qu'on peut réduire la forme normale des équations à celle qu'on a nommé la *forme libre*, savoir

$$\begin{aligned} \zeta^3 + 3u\zeta &= 1 - u^3 \\ \zeta^4 + 4u\zeta &= 1 - 2\cdot2\cdot u^4 \\ \zeta^5 + 5u\zeta &= 1 - 3\cdot3\cdot3\cdot u^5 \end{aligned} \tag{4}$$

qui, dans les cas du troisième et du quatrième degré, donne les solutions bien simples

$$\zeta = 1 - u$$

$$\zeta = -u + \sqrt{1 - u^2}; \qquad \zeta = -u + \sqrt{1 + u^2} \tag{5}$$

dont, en particulier, la solution de l'équation du quatrième degré paraît offrir un calcul plus expéditif que les formules anciennement proposées.

Au moyen de la substitution

$$\eta = \frac{\zeta}{u}$$

les équations se simplifient encore, devenant [1]

$$\begin{aligned} \eta^3 + \frac{3}{u}\eta &= \frac{1}{u^3} - 1 \\ \eta^4 + \frac{4}{u^2}\eta &= \frac{1}{u^4} - 4 \\ \eta^5 + \frac{5}{u^3}\eta &= \frac{1}{u^5} - 27 \end{aligned} \tag{6}$$

et possédant les *résolvantes*

$$\begin{aligned} v_i + \frac{1}{u^3} &= 0 \\ v_i^2 + v_i + \frac{1}{4u^4} &= 0 \\ v_i^3 + v_i^2 + v_i + \frac{1}{27u^5} &= 0. \end{aligned} \tag{6a}$$

Ayant formé, pour l'équation du cinquième degré, les trois racines de la dernière résolvante, et en posant

$$p_1 = \left(\frac{v_1}{3}\right)^{3/5}; \quad p_2 = \left(\frac{v_2}{3}\right)^{3/5}; \quad p_3 = \left(\frac{v_3}{3}\right)^{3/5}, \tag{7}$$

c'est au moyen de ces éléments qu'on peut chercher d'abord les solutions convenables [2] de l'équation du cinquième degré, savoir

$$\eta^5 + \frac{5}{u^3}\eta = \frac{1}{u^5} - 27, \tag{8}$$

et cela de plusieurs manières. En particulier on peut adopter la formule

$$\frac{\eta}{K} = 1 + p_1 + p_2 + p_3 \qquad\qquad K = -\frac{3^{3/5}}{3} \tag{9}$$

à condition qu'on fasse varier la constante k, qui entre dans les quantités

$$v_2 = \rho \cdot e^{i\theta + 2k\pi i}; \quad v_3 = \rho \cdot e^{-i\theta - 2k\pi i}$$

---

[1] I. *Sur une équation algébrique remarquable, se trouvant en rapport à la Mécanique Celeste*, « Astron, iaktt. o. undersökn. Stockholms Observatorium », Band 8, n. 7, Stockholm 1907.

[2] II. *Sur l'équation algébrique du cinquième degré*, « Annali di Matematica pura ed applicata », Bologna, Tome XI; 4, 1933.

de la manière exposée dans le memoire II, n°. 2 [1]. La formule (9) se trouve ainsi expéditive dans les environs de *l'origine* des $\frac{1}{u^5}$.

2. Considérons maintenant le développement, dit *racinal*, de la racine de l'équation (8), subsistant tout d'abord pour des valeurs petites du paramètre u, c. a. d. aux environs du point $\frac{1}{u^5} = \infty$.

Cette expression, élaborée jusqu'aux termes du degré u^{20} entre les parenthèses, est la suivante (cfr. II (61))

$$
\begin{aligned}
\eta = \frac{1}{u}&\left[1 - \frac{6}{5}u^5 - \frac{52}{5^2}u^{10} + \frac{234}{5^3}u^{15} + \frac{46644}{5^4}u^{20}\dots\right]\\
-&\left[1 + \frac{3}{5}u^5 + \frac{77}{5^2}u^{10} + \frac{1672}{5^3}u^{15} + \frac{18964}{5^4}u^{20}\dots\right]\\
-u&\left[1 + \frac{2}{5}u^5 - \frac{33}{5^2}u^{10} - \frac{2352}{5^3}u^{15} - \frac{83961}{5^4}u^{20}\dots\right]\\
-u^2&\left[1 + \frac{11}{5}u^5 + \frac{168}{5^2}u^{10} + \frac{721}{5^3}u^{15} - \frac{107406}{5^4}u^{20}\dots\right]\\
+u^3&[* \quad * \quad * \quad * \quad \dots\dots \quad]
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ou bien, pour abréger,

$$\eta = \frac{1}{u}A - B - uC - u^2D, \tag{10a}$$

Théorème I. — Les termes de la dernière ligne s'évanouissent. Il y a, dans ce cas, une nouvelle résolvante aux même points doubles que dans le cas antérieur, savoir II, (67)

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 3u^5 = 0 \tag{11}$$

et on peut, en prenant la petite racine α correspondant à une petite valeur de u^5, évidemment employer la quantité α comme élément de développement au lieu de u^5 dans la formule (10). Il sera même avantageux d'introduire une nouvelle quantité β, liée à α par la relation

$$\beta = \alpha + \alpha^2 \tag{11a}$$

d'où il s'ensuit

$$
\begin{aligned}
A &= 1 + \frac{6}{15}\beta - \frac{52}{15^2}\beta^2 + \frac{1116}{15^3}\beta^3 - \frac{37506}{15^4}\beta^4\\
B &= 1 - \frac{3}{15}\beta + \frac{77}{15^2}\beta^2 - \frac{2347}{15^3}\beta^3 + \frac{83989}{15^4}\beta^4
\end{aligned}
\tag{12}
$$

[1] II. *Sur l'équation algèbrique du cinquième degré,* « Annali di Matematica pura ed applicata », Bologna, Tome XI; 4, 1933.

$$C = 1 - \frac{2}{15}\beta - \frac{33}{15^2}\beta^2 + \frac{1902}{15^3}\beta^3 - \frac{78561}{15^4}\beta^4$$
$$D = 1 - \frac{11}{15}\beta + \frac{168}{15^2}\beta^2 - \frac{3116}{15^3}\beta^3 + \frac{79569}{15^4}\beta^4.$$

En réduisant ces séries à la forme de produits [II. (77)], on va trouver

(13)
$$\begin{aligned}
A &= (1+\beta)^{+\frac{6}{15}}(1+\beta^2)^{-\frac{1}{9}}(1+\beta^3)^{+\frac{1}{5}+\frac{9}{81}}(1+\beta^4)^{-\frac{1}{9}-\frac{4}{5}+\frac{1}{81}}\\
B &= (1+\beta)^{-\frac{3}{15}}(1+\beta^2)^{+\frac{2}{9}}(1+\beta^3)^{-\frac{3}{5}+\frac{3}{81}}(1+\beta^4)^{+\frac{2}{9}+\frac{7}{5}-\frac{7}{81}}\\
C &= (1+\beta)^{-\frac{2}{15}}(1+\beta^2)^{-\frac{2}{9}}(1+\beta^3)^{+\frac{3}{5}-\frac{1}{81}}(1+\beta^4)^{-\frac{2}{9}-\frac{7}{5}-\frac{1}{81}}\\
D &= (1+\beta)^{-\frac{11}{15}}(1+\beta^2)^{+\frac{1}{9}}(1+\beta^3)^{-\frac{1}{5}-\frac{7}{81}}(1+\beta^4)^{+\frac{1}{9}+\frac{4}{5}-\frac{9}{81}}
\end{aligned}$$

— expressions formant le point de départ du mémoire présent. De l'observation, faite à la fin du mémoire II, sur les exposants de ces expressions en produits, savoir qu'en général

(14)
$$a + d = b + c$$

a, b, c, d désignant les numérateurs des exposants dans A, B, C, D, et que de plus
$$a + d = 0; \quad b + c = 0$$

pour les exposants ayant les dénominateurs autres que 15 ou 81, il s'ensuit qu'on a

Théorème II.

(15)
$$AD = BC$$

— relation fondamentale, qui se vérifie, en formant ces produits d'après les expressions (10), ce qui donne en effet

$$AD = BC = 1 + u^5 - 2u^{10} - 5u^{15} - 114u^{20} \ldots.$$

Pour simplifier, nous allons introduire les quantités

(16)
$$\gamma = \frac{\beta}{3}; \qquad \Big| \qquad \delta = \frac{\alpha}{3}.$$

Selon que u^5, γ ou δ sont prises comme éléments des développements, on trouve des expressions diverses. Soit

(17)
$$AD = BC = 1 - s.$$

Le plus simple des développements possibles de s est alors le suivant

$$s = \gamma \quad 2\gamma^2 + 4\gamma^3 - 3\gamma^4 \tag{17a}$$

— expression finie, qui jusqu'aux termes du quatrième degré possède *l'inversion*:

$$\gamma = s + 2s^2 + 4s^3 + 3s^4. \tag{17b}$$

En posant encore

$$p = \frac{AC}{D}, \tag{18}$$

on remarquera, parmi les diverses représentations possibles de cette quantité, la suivante de simplicité prépondérante

$$p = 1 + 3\delta + 5\delta^2 - 4\delta^3 - 4\delta^4. \tag{19}$$

3. On déduit des formules (15) et (18) les relations suivantes

$$D = \frac{1-s}{A}$$

$$C = p \cdot \frac{D}{A} = \frac{p(1-s)}{A^2}$$

$$B = \frac{1-s}{C} = \frac{A^2}{p},$$

de manière qu'on aura tout de suite

$$\eta = \frac{1}{u} \cdot A - \frac{A^2}{p} - u \cdot \frac{p}{A^2} \cdot (1-s) - u^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot (1-s). \tag{20}$$

Il s'agit maintenant de la détermination du coëfficient A, quantité qui, des quatre séries A, B, C, D, paraît en effet la plus convenable pour notre but.

Toutefois, comme cette série A résiste encore à la déduction d'une expression acceptable au point de vue de la simplicité, nous avons procédé à en former la cinquième puissance, et parmi plusieurs représentations de A^5 avec l'une ou l'autre de nos variables, on a ainsi trouvé la suivante, jouissant de la symétrie analytique:

$$A_0^5 = 1 + 6\delta + 22\delta^2 + 36\delta^3 + 22\delta^4 + 6\delta^5 + \delta^6. \tag{21}$$

Mais, ainsi que pour ce qui concerne les autres quantités entrant dans l'expression (20), nous avons aussi considéré comme élément de développement la quantité s à côté des autres, comme γ, δ: cela fut réitéré pour A^5

et conduisit encore à une expression symétrique, savoir

$$A^5 = 1 + 6s + 16s^2 + 52s^3 + 16s^4 + 6s^5 + s^6, \tag{21a}$$

qui pourtant ne paraît pas appartenir à notre question proprement dite.

Ayant par suite choisi la formule (21), il s'agit encore d'en donner une extension propre à tenir compte des termes supérieurs au quatrième degré de u^5 dans le développement (10). Prenons à ce but le cas spécial

$$\frac{1}{u^5} = +3$$

où, comme on se persuade (cfr. II, page 2), on a

$$\eta = -3^{2/5} = -1.5518461.$$

On a encore dans ce cas

$$\alpha = -1; \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0; \quad \delta = -\frac{1}{3}; \quad s = 0; \quad A_0^5 = \frac{262}{729}.$$

Faisant usage des formules (21) et (20), on obtient avec un accord avec la valeur vraie de $\eta = -1.55185$, qui à ce point éloigné de $\frac{1}{u^5} = \infty$ ne serait guère attendu, la valeur de

$$\eta = -1.58149,$$

présentant pourtant la différence $\Delta\eta = +0.02964$, propre à la détermination de l'extension dont il s'agit. L'étude numérique du cas conduit d'abord à *l'équation du quatrième degré*:

$$A_0^5 = A_1^5[1 + 66\delta^5 A_1^5 + 66\delta^{10}(A_1^5)^2 + \delta^{15}(A_1^5)^3] \tag{22}$$

pour la détermination de la quantité A_1, devant remplacer au premier abord la quantité A dans l'équation (20), après quoi on trouve encore la seconde *équation du quatrième degré*:

$$(A_1^5)^3 = (A^5)^3[1 + \delta^{10} A^5], \tag{23}$$

tenant à un écart petit, restant après l'emploi de (22). Cette équation (23) fait déterminer la valeur de A, qui, en définitive, appartient à la formule (20), et qui maintenant fournit la valeur de la racine pour $\frac{1}{u^5} = +3$, savoir

$$\eta = -1.5518462; \quad \text{valeur vraie:} \quad \eta = -1.5518461.$$

Les expressions entre parenthèses de (22) et (23) devant être considérées, par rapport à leurs coëfficients, comme engendrées par l'expression (21), on voit que les moyens de correction par cette voie sont bien épuisés par les deux équations (22) et (23).

4. Comme, au cas spécial considéré de $\frac{1}{u^5} = +3$, on a $s = 0$, il n'est pas cependant exclu qu'il y existe encore quelque correction, dépendant de s, et cela se trouve en effet être le cas. Considérons en effet en second lieu le point

$$\frac{1}{u^5} = 27$$

où l'on a $\eta = 0$ et, comme on trouve aisement,

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -\frac{1}{9}; \quad \alpha = -0.1247277; \quad \beta = -0.1091707; \quad \gamma = -0.0363902$$
$$A_0^5 = +0.7860507; \quad \delta = -0.0415759; \quad p = +0.8841906; \quad s = -0.0392366.$$

Dans ce cas, ainsi qu'à la plupart des cas appartenant à la formule (20), il est superflu de résoudre directement les équations (22) et (23), les valeurs de A_1 et de A s'obtenant par une ou deux approximations faciles. On trouve

$$\eta = -0.0000030 \quad \text{et par suite} \quad \Delta\eta = +0.0000030.$$

C'est la différence susdite, tenant à la quantité s, pour laquelle il n'y a plus de directive directe, parce que cette correction n'a pas lieu pour les équations de degré moindre. La seule chose dont on peut s'assurer sans calcul, c'est que le terme de correction dont il s'agit doit se trouver en dehors de l'expression (20), à laquelle par cela, et par quelques méditations numériques, nous allons substituer en définitive la formule

$$\begin{aligned} \eta = -k\frac{s^5}{u^5} &+ \frac{1}{u}\cdot A \\ &- \frac{A^2}{p} \\ &- u \cdot \frac{p}{A^2}\cdot(1-s) \\ &- u^2\cdot\frac{1}{A}\cdot(1-s), \end{aligned} \tag{20A}$$

où pour des valeurs de $\left|\frac{1}{u^5}\right|$ excédant la valeur de 27 on peut admettre

$$k = 1.$$

En général le terme correspondant est insensible pour ce domaine de $\frac{1}{u^5}$.

Pour $k = 1$, la dernière formule remplit la valeur de la racine pour $\frac{1}{u^5} = 27$.

Dans le cas de $\frac{1}{u^5} = 3$, où l'on a $s = 0$, le terme accessoire de (20A) s'évanouit.

Au sujet de ce terme — soit $\eta_0(u^5, s)$ — on peut à l'aide des écarts ayant lieu pour $\frac{1}{u^5} = 7$ et $\frac{1}{u^5} = -9$ chercher, au moyen de la formule d'interpolation de LAGRANGE, une expression remplissant la condition d'accord absolu aussi pour ces points, par exemple en mettant

$$\eta_0(u^5, s) = \frac{s^5}{u^5}\left[\frac{27 - \frac{1}{u^5}}{16.36} + \frac{9 + \frac{1}{u^5}}{20.36}\right]\cdot\left(7 - \frac{1}{u^5}\right)$$
$$+ s^6\left[\frac{10\cdot\left(27 - \frac{1}{u^5}\right)^2\left(9 + \frac{1}{u^5}\right)}{16} - \frac{8\left(7 - \frac{1}{u^5}\right)}{16}\right]\cdot\left(27 - \frac{1}{u^5}\right),$$

mais, parce qu'il s'ensuivrait de petits inconvénients pour d'autres motifs, il faut préferer la formule (20A). Aussi, parceque en tout cas il sera nécessaire de contrôler le calcul — qui n'est guère plus long que, par exemple, pour l'équation du quatrième degré — en mettant la valeur trouvée de la racine dans l'équation originale (8), on trouvera aussitôt la correction tenant au terme

$$-k\frac{s^5}{u^5},$$

sans qu'il soit nécessaire de connaître l'expression analytique du coëfficient k.

5. Pour le domaine s'approchant de l'origine $\frac{1}{u^5} = 0$, il faut avoir recours à la formule (cfr. II, n.° 2)

$$\frac{\eta}{K} = 1 + p_1 + p_2 + p_3, \tag{24}$$

avec les conditions exposées *loco citato*, y inclus la relation remarquable

$$2f \mp p_1^2 = 0,$$

ayant lieu au voisinage immédiat de $\frac{1}{u^5} = 0$.

6. Pour le procédé de solution décrit dans ce qui précède, le point $\beta = -\frac{1}{4}$, appartenant à l'argument $\frac{1}{u^5} = 8$, mérite d'être considéré en particulier, mais il n'y a pas lieu à s'en occuper ici.

7. Par rapport à l'expression secondaire de A^5 (21a) on peut considérer le cas de $\frac{1}{u^5} = 3$. On trouverait ainsi

$$\begin{array}{ll} (\eta) = \frac{1}{u} & = 3^{1/5} \\ \quad - 1 & - 1 \\ \quad - u & - \frac{1}{3^{1/5}} \\ \quad - u^2 & - \frac{1}{3^{2/5}} \end{array}$$

d'où, parce que dans ce cas $\eta = -3^{2/5}$, il s'ensuit

$$\begin{array}{ll} (\eta) = i\sqrt{\eta}\,. & \\ \quad - & 1 \\ \quad + & \frac{i}{\sqrt{\eta}} \\ \quad + & \frac{1}{\eta} \end{array}$$

c. a. d. une quantité nouvelle, ne coïncidant pas avec la valeur de la racine.

8. *Exemple de calcul pour* $\frac{1}{u^5} = 54$. On a dans ce cas

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -\frac{1}{18}; \qquad \alpha = -0.0588108.5 \qquad \begin{array}{l} \gamma = -0.0184507.1 \\ \delta = -0.0196036.5 \\ s = -0.0191570.3. \end{array}$$

Les corrections successives sont insensibles, et l'on obtient

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{u}\cdot A & = +2.1697610 \\ -\quad \frac{A^2}{p} & = -1.0122550 \\ -u\cdot\frac{p}{A^2}\cdot(1-s) & = -0.4533905 \\ -u^2\cdot\frac{1}{A}\cdot(1-s) & = -0.2115195. \\ \text{Somme: } \eta & = +0.4925960; \\ \text{valeur vraie: } \eta & = +0.4925958. \end{array}$$

9. Exposé succinct des formules, pour l'équation du cinquième degré,

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 3u^5 = 0 \qquad \beta = \alpha + \alpha^2$$

$$\gamma = \frac{\beta}{3} \qquad \delta = \frac{\alpha}{3}$$

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} p &= 1 + 3\delta + 5\delta^2 - 4\delta^3 - 4\delta^4 \\ s &= \gamma - 2\gamma^2 + 4\gamma^3 - 3\gamma^4 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} A_0^5 &= 1 + 6\delta + 22\delta^2 + 36\delta^3 + 22\delta^4 + 6\delta^5 + \delta^6 \\ A_0^5 &= A_1^5[1 + 66\delta^5 A_1^5 + 66\delta^{10}(A_1^5)^2 + \delta^{15}(A_1^5)^3] \\ (A_1^5)^3 &= (A^5)^3[1 + \delta^{10} A^5] \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} \eta = -\frac{s^5}{u^5} &+ \frac{1}{u} A \\ &- \frac{A^2}{p} \\ &- u \cdot \frac{p}{A^2} \cdot (1 - s) \\ &- u^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot (1 - s). \end{aligned}$$