Sul calcolo plurivettoriale negli spazi S_n e applicazioni alla meccanica dei sistemi rigidi.

Memoria di MARIO MANARINI (a Bologna).

Sunto. - *Si stabiliscono alcuni complementi sulle omografie vettoriali e in particolare sulle omografie assiali; si applicano i risultati ottenuti per sviluppare il Calcolo plurivettoriale in modo assoluto, cioè senza l'uso dell'ordinario Calcolo tensoriale.*

Come conseguenza, si estende allo spazio S_n, *con* $n > 3$, *l'operatore* $\wedge$ *(prodotto vettoriale) ed il concetto di vettore di una omografia, finora considerati soltanto nello spazio ordinario. Così si sviluppa una teoria vettoriale che con altre ad essa riattaccantesi si presta utilmente per le indagini geometriche e fisico-matematiche negli spazi a più dimensioni.*

Infine, come esempio illustrativo, si è fatta una applicazione meccanica, stabilendo i fondamenti della Cinematica dei sistemi rigidi negli spazi S_n, *ottenendosi rapidamente una discussione più esauriente di quelle già note.*

Molti Autori [1] rielaborando il *Calcolo differenziale assoluto* per applicarlo allo studio degli spazi curvi usano enti geometrici chiamati bivettori, trivettori ecc. (che estendono l'ordinario concetto di vettore) riferendosi alle coordinate cioè considerandone le componenti covarianti e contravarianti e trattandoli come particolari tensori.

Il BOGGIO ed il BURALI-FORTI trattarono pure i principali argomenti relativi agli spazi curvi con metodo assoluto, cioè senza l'uso delle componenti, operando esclusivamente sul vettore ed estendendo invece la teoria delle omografie vettoriali nella teoria delle iperomografie od omografie di ordine n [2].

Nondimeno con questo ultimo modo di procedere, ottimo sotto molteplici aspetti per le semplificazioni notevoli che apporta, permane, nell'ordinaria analisi vettoriale, l'impossibilità di estendere in modo naturale agli spazi

---

(1) Cfr. ad es.: E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann,* Gauthier-Villars, Paris, 1928: E. CARTAN, *La Géométrie des Espaces de Riemann,* « Mémorial des Sciences Mathématiques », Fasc. IX, Gauthier-Villars, Paris, 1925; J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül,* Springer, Berlin, 1924; A. DUSCHEK e W. MAYER, *Lehrbuch der Differentialgeometrie,* B. II, W. MAYER, *Riemannsche Geometrie,* B. G. Teubner, Leipzig, 1930.

(2) Cfr. C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO, *Espaces Courbes et critique de la Relativité,* Sten, Torino, 1924; *Analisi Vettoriale Generale,* Vol. II, P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI; *Geometria differenziale,* Parte II, BOGGIO, Zanichelli, Bologna, 1930.

$S_n (n > 3)$ le teorie che in S_3 dipendono dall' operatore $\wedge$ (prodotto vettoriale) e conseguentemente dagli operatori *rot* per i vettori e *Rot* per le omografie [1], e che trovarono applicazioni importantissime specialmente nella geometria e nella fisica-matematica dello spazio ordinario.

Allo spazio S_n, coi detti metodi, si può soltanto estendere il gradiente di uno scalare e la divergenza di un vettore.

In questa Memoria, mediante l'uso delle omografie vettoriali, stabilisco *in modo assoluto* [2] cioè senza l'uso delle coordinate, i fondamenti del calcolo plurivettoriale, trattato cartesianamente nel senso detto dagli Autori citati.

Questo studio mi permette poi di estendere allo spazio S_n l'operatore $\wedge$ (prodotto vettoriale), il concetto di vettore d'una omografia, l'operatore *rot* e teoremi relativi, ed ancora l'operatore *div* in modo più generale di quello fatto fino ad ora.

Queste due ultime estensioni di carattere differenziale saranno trattate in altri lavori che appariranno nei « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei ».

Si comprende come si affacciano tosto importanti applicazioni allo studio degli spazi curvi con un *nuovo metodo vettoriale d'indagine* che opera direttamente sugli enti geometrici a questi collegati. Qui, invece, come applicazione del solo calcolo plurivettoriale e per mostrarne l'utilità, mi sono limitato a trattare la cinematica dei sistemi rigidi negli spazi S_n, già trattata da vari Autori con metodi diversi. Molte altre applicazioni si intravedono facilmente.

Premetto, in questa Memoria, un'introduzione sulle omografie vettoriali nello spazio S_n, nella quale studio in particolar modo le omografie assiali, sviluppando quelle proposizioni, in parte nuove, con le quali mi è stato possibile fare la trattazione e l'estensione accennate.

Presuppongo invece nel lettore la conoscenza della teoria delle *omografie*

---

(1) Cfr. C. Burali-Forti e T. Boggio, *Espaces Courbes ecc.*, loc. cit., pagine 19, 56, 58; P. Burgatti, « Boll. Un. Mat. It. », 1928, pag. 70.

(2) Mi permetto a questo proposito di citare quanto afferma il Cartan nella prefazione alla Tesi del prof. Delens, *Méthodes et Problèmes des Géométries differentielles Euclidienne et conforme*, Gauthier-Villars, Paris, 1927 e cioè: « *L'idéal serait de raisonner et de calculer sur les êtres géométriques eux mêmes...* », ed a questo ideale corrisponde in modo lusinghiero il metodo vettoriale della Scuola italiana. Gioverà anche riflettere su quanto dice l'Appell a proposito del Calcolo Vettoriale in *Elements de Calcul Tensoriel*, vol. V del *Traité de Mécanique rationnelle*, 1926, Gauthier-Villars, Paris. Ivi, a pag. 21, l'illustre Scienziato accetta detto calcolo per lo spazio S_3, rimanendone titubante per gli spazi S_n specie se non sono euclidei.

Ancora il Severi nel suo Discorso « La matematica italiana », tenuto a Trento nel 1930, (« cfr. Atti della Soc. It. per il Progresso delle Scienze », 1931, Vol. I, pag. 194) giudica « .... la moderna teoria dei vettori, *tanto importante* in numerose questioni matematiche e fisiche ».

vettoriali per quanto può trovare nelle opere fondamentali seguenti: *Analisi vettoriale Generale*: Vol. I, C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, 1928, Zanichelli, Bologna; Vol. II, P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, loc. cit. ed ancora C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO, *Les Espaces Courbes*, loc. cit.

Nel primo paragrafo tratto la teoria dei plurivettori in S_n con metodo puramente vettoriale, riservando al paragrafo successivo la traduzione cartesiana degli enti e delle operazioni considerate; in tal modo intendo anche collegare il metodo da me seguito con quello adoperato dagli Autori citati. Infine nel terzo paragrafo sviluppo l'accennata applicazione alla cinematica dei sistemi rigidi, come esempio scelto fra le tante altre che si potrebbero fare, stabilendo nuovi semplici caratteri differenziali fra spazi di indice pari e dispari.

A proposito di questa applicazione mi sia concesso di osservare che il metodo facile e assai celere da me seguito nello stabilire i fondamenti della cinematica in S_n può manifestamente essere adoperato, con vantaggio rispetto a quelli in uso, nello sviluppo degli stessi argomenti nella Meccanica ordinaria qualora siano conosciuti gli elementi delle omografie vettoriali.

INTRODUZIONE

1. Complementi sulle Omografie. — Per ottenere in S_n una esatta classificazione delle omografie vettoriali in proprie ed improprie come in S_3 e specialmente per avere le varie specie di omografie improprie, è importante il seguente teorema generale che estende l'analogo ben noto dello spazio S_3:

Se una n*-pla di vettori* $\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n$ *non linearmente dipendenti è trasformata dall'omografia* α *in una* n*-pla di vettori pure linearmente indipendenti, lo stesso accade per ogni altra* n*-pla di vettori non linearmente dipendenti che si consideri; se invece* $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$ *vengono da* α *trasformati in una* n*-pla di vettori paralleli ad una giacitura* p*-dimensionale* (1) *con* $p \leq n-1$, *senza essere paralleli ad una giacitura* q*-dimensionale con* $q < p$ *e parallela alla precedente, ogni altra* n*-pla* $\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n$ *di vettori anche linearmente indipendenti gode della stessa proprietà.*

Non ne espongo per brevità la dimostrazione che ho stabilito in modo quasi analogo a quello che trovasi, per lo spazio S_3, in Vol. I dell'*Analisi Vettoriale Generale*, loc. cit., pag. 54.

Con questo teorema classifico le omografie vettoriali in *proprie* le prime e *degeneri* o *improprie* o *singolari* e di *specie* o *rango* $n-p$ le altre.

---

(1) Con ciò intendo il « quid » comune a tutti gli spazi S_p di S_n paralleli fra loro.

Ne consegue facilmente che *le omografie degeneri di rango* p *sono tutte e soltanto quelle che ammettono* p *direzioni nulle distinte* [1] ossia per le quali *esistono* p *direzioni linearmente indipendenti e quindi un'intera giacitura* p-*dimensionale tale che ogni vettore ad essa parallelo, viene trasformato da* α *nel vettore nullo.*

Allora si ha l'osservazione, sfruttata spesso nel seguito, che le omografie degeneri di specie p sono tutte e soltanto quelle che, usando una scrittura ben nota, possono mettersi sotto la forma

$$\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{n-p} & 0 & \dots 0 \\ \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-p} & \mathbf{a}_{n-p+1} & \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix},$$

con $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{n-p}$ non nulli e non appartenenti ad uno stesso S_{n-p-1}.

Per esempio la diade $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ che come è noto trasforma i vettori dello spazio, o in vettori nulli, quelli perpendicolari ad $\mathbf{a}$, o in vettori paralleli a $\mathbf{b}$, gli altri, è *un'omografia degenere di rango* n — 1.

Vedremo in seguito che questo teorema si può invertire.

Per le considerazioni che seguiranno, mi sarà utile riferirmi spesso alla cosidetta *forma diadica* delle omografie.

Se α è determinata dalla n-pla $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ che viene trasformata nell'altra $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n$, risolvendo un sistema algebrico vettoriale facilmente ottenibile, ho dimostrato che α è sempre possibile porla sotto forma di somma di n diadi:

$$\alpha = H(\mathbf{a}_1', \mathbf{u}_1) + \dots + H(\mathbf{a}_n', \mathbf{u}_n),$$

con

$$\mathbf{a}_r' = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{r-1}\, \mathbf{a}_{r+1} \dots \mathbf{a}_n)}{\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{r-1}\, \mathbf{a}_{r+1} \dots \mathbf{a}_n) \times \mathbf{a}_r},$$

dove $\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{r-1}\, \mathbf{a}_{r+1} \dots \mathbf{a}_n)$ è il ben noto [2] vettore perpendicolare agli $n-1$ vettori scritti entro parentesi.

Da questi teoremi traggo subito la proposizione, importante per il seguito, che: *un'omografia degenere di rango* r *si può sempre esprimere come somma di* n — r *diadi e non di un numero inferiore.*

---

[1] In tal modo si ricade nella definizione di rango di altri Autori: cfr. B. De Finetti, *Studio delle omografie vettoriali in relazione alle radici di* $I_n(\alpha - x) = 0$, « Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei », Anno LXXXII, 1929, pag. 387; per il caso delle assiali cfr. P. Burgatti, *Proprietà delle omografie assiali in un* S_n *euclideo con applicazione alle formule di Frenet*, « Rend. della R. Accademia dei Lincei », 1928, 1° sem., Vol. VII, pag. 791.

Si potrà consultare utilmente anche S. Pincherle e U. Amaldi, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*, Cap. III e IV, Zanichelli, Bologna, 1901.

[2] Cfr. C. Burali-Forti e T. Boggio, *Espaces Courbes ecc.*, loc. cit., pag. 7, oppure Vol. II, *dell'Analisi Vettoriale Generale*, loc. cit., pag. 158.

In particolare: *ogni omografia degenere di rango* n — 1 *si può porre sempre in forma di diade.* In tal modo si ha l'inversione della proposizione poco fa accennata.

La forma diadica permette inoltre di stabilire con metodo assoluto che *un'omografia* α *e la sua coniugata* $K\alpha$ *sono proprie o degeneri contemporaneamente e quando sono degeneri lo sono della medesima specie.*

In particolare, come è noto, è

$$KH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = H(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

2. Complementi sulle omografie assiali. — Indicherò, seguendo altri Autori, con A l'operatore lineare che applicato ad un'omografia α dà la sua assiale:

$$A\alpha = \frac{\alpha - K\alpha}{2}.$$

In particolare osserviamo che per la diade $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ si ha:

$$AH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \{ H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - H(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \},$$

dalla quale si scorge che $AH(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ è *un'assiale sempre degenere* qualunque sia l'indice n dello spazio, *e lo è di rango* n — 2.

Vedremo fra breve che questa proposizione si potrà invertire.

È ben noto che le omografie assiali possono essere proprie soltanto se l'indice n dello spazio è pari; le assiali in genere ed in specie quelle di rango $n - 2$, hanno importanti proprietà che useremo nel seguito e delle quali si è occupato in modo particolare anche il prof. Burgatti [1].

Nella Nota ora citata il prof. Burgatti dimostra che « *un'omografia assiale non può essere di rango maggiore di* n — 2 » e ricordiamo che ad esempio un'assiale di rango $n - 2$ è data dall'assiale di una qualsiasi diade.

Inoltre il prof. Burgatti, nello stesso lavoro, in base all'osservazione che *per un'assiale tutti gli invarianti di ordine dispari sono nulli,* ricorrendo all'equazione in x

$$I_n(\gamma - x) = x^n - I_1\gamma \cdot x^{n-1} + \dots + (-1)^n I_n\gamma = 0,$$

alle cui radici reali corrispondono *direzioni unite* per l'omografia γ, fa notare che questa equazione, nel caso di γ assiale, contiene soltanto i termini di grado n, $n - 2$, $n - 4$, ecc.

---

[1] Cfr. P. Burgatti, *Proprietà delle omografie assiali in* S_n *ecc.*, loc. cit.

Ne deduce che allora *essa non può avere che radici reali nulle* (¹) e che *la radice nulla potrà essere di ordine di molteplicità* 0, 2, 4, 6 ... n — 2 cioè pari *se* n *è pari*, 1, 3, 5 ... n — 2 cioè dispari *se* n *è dispari*; corrispondentemente l'omografia γ *potrà avere* 0, 2, 4 ... $n-2$, oppure 1, 3 ... $n-2$ *direzioni nulle distinte a seconda che* n *è pari oppure dispari.*

Quindi possiamo aggiungere che *le assiali in* S_n *potranno avere interi spazi* (o meglio giaciture) *di direzioni nulle con dimensioni pari o dispari variabili da* 0 *a* n — 2 *a seconda che l'indice* n *di* S_n *è pari o dispari.*

Di questo risultato me ne servirò spesso nel seguito ed in particolare nella applicazione cinematica annunciata.

Poichè anche dell'ultima parte della proposizione del prof. Burgatti nella Nota citata non figura la dimostrazione e dato che sarà da me applicata nel seguito, mi permetto di darne la seguente.

Supponiamo che lo zero sia radice multipla dell'equazione scritta sopra e dell'ordine di molteplicità r, pari se n è pari, dispari se n è dispari. Dico, con il Burgatti, che γ *dovrà avere* r *direzioni nulle distinte* cioè linearmente indipendenti. Infatti per l'ipotesi si ha:

$$I_n\gamma = 0, \quad I_{n-1}\gamma = 0, \dots \quad I_{n-r+1}\gamma = 0, \quad I_{n-r} \neq 0.$$

Essendo $I_n\gamma = 0$, γ è degenere e quindi esisterà almeno un vettore $\mathbf{a}_1$ non nullo, tale che $\gamma\mathbf{a}_1 = 0$.

Essendo $I_{n-1}\gamma = 0$, considerando l'espressione di questo invariante prendendo la n-pla di vettori linearmente indipendenti $\mathbf{a}_1\, \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n$, ne viene di conseguenza $\mathbf{a}_1\, \gamma\mathbf{b}_2 \dots \gamma\mathbf{b}_n$ linearmente dipendenti, per modo che esisteranno gli $n-1$ numeri reali $m_2 \dots m_n$ non tutti nulli tali che

$$(*) \qquad \mathbf{a}_1 = m_2\gamma\mathbf{b}_2 + m_3\gamma\mathbf{b}_3 + \dots + m_n\gamma\mathbf{b}_n .$$

Allora il vettore

$$\mathbf{a}_2 = m_2\mathbf{b}_2 + \dots + m_n\mathbf{b}_n ,$$

indipendente linearmente da $\mathbf{a}_1$ per l'ipotesi, è tale che

$$\gamma\mathbf{a}_2 = 0$$

risultando per (*) $\gamma\mathbf{a}_2 = \gamma\mathbf{a}_1$.

Quindi *se* $I_n\gamma = I_{n-1}\gamma = 0$, *esisteranno due direzioni nulle distinte* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Così seguitando, stante l'ipotesi del teorema in parola, si possono costruire r vettori $\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_r$ linearmente indipendenti e direzioni nulle di γ.

(¹) Invero se avesse una radice reale non nulla, m, si avrebbe che $\gamma - m$ sarebbe degenere ed esisterebbe $\mathbf{u}$ tale che $(\gamma - m)\mathbf{u} = 0$, ossia $\gamma\mathbf{u} = m\mathbf{u}$ con $m \neq 0$, ciò che non può essere per γ assiale.

Inoltre γ, nelle ipotesi adottate, non può ammettere più di r direzioni nulle distinte perchè altrimenti risulterebbe degenere di ordine maggiore di r e quindi sarebbero nulli altri invarianti d'ordine minore di $n-r+1$, contro l'ipotesi [1]. c. d. d.

3. Assiali semplici. — Per quanto seguirà è particolarmente interessante lo studio delle omografie assiali di rango $n-2$. Anzitutto stabiliamo il seguente:

TEOREMA. — *Tutte le assiali di rango* $n-2$ *aventi le stesse direzioni nulle distinte* $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-2}$ *non differiscono che per un fattore di proporzionalità.*

Infatti se $\mathbf{b}$ è un vettore non parallelo alla giacitura $(n-2)$-dimensionale determinata da $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-2}$, e γ è un'assiale avente quelle direzioni nulle si ha:

$$\gamma\mathbf{b} = m\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{b}),$$

con $m \neq 0$ *e dipendente soltanto da* γ, cioè indipendente da $\mathbf{b}$, una volta fissati $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-2}$.

Siano invero $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$ altri due vettori indipendenti fra loro e dai precedenti $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-2}$ cioè tali che:

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{a}_{n-1}) \times \mathbf{a}_n \neq 0;$$

si consideri il vettore $\gamma\mathbf{a}_{n-1}$; esso non risulterà nullo ma perpendicolare ad $\mathbf{a}_{n-1}$ stesso, essendo

$$\gamma\mathbf{a}_{n-1} \times \mathbf{a}_{n-1} = 0$$

per le proprietà delle assiali. Inoltre è:

$$\gamma\mathbf{a}_{n-1} \times \mathbf{a}_r = -\mathbf{a}_{n-1} \times \gamma\mathbf{a}_r = 0 \quad \text{per } r = 1, 2, \ldots, n-2,$$

e perciò $\gamma\mathbf{a}_{n-1}$ risulta perpendicolare alla giacitura $(n-1)$-dimensionale determinata dai vettori $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-2}\, \mathbf{a}_{n-1}$.

Quindi sarà parallelo al vettore $\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{a}_{n-1})$ ed avremo:

$$\gamma\mathbf{a}_{n-1} = m\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{a}_{n-1}); \tag{1}$$

con $m \neq 0$, numero reale.

Analogamente si potrà scrivere

$$\gamma\mathbf{a}_n = \bar{m}\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{a}_n) \tag{2}$$

con $\bar{m}$ numero reale non nullo.

---

(1) A questo proposito richiamo l'attenzione del lettore sulla Memoria del DE FINETTI loc. cit., ove si tratta il caso generale di una omografia α qualunque e in particolare quello delle dilatazioni; la discussione che l'A. fa per queste ultime mi pare che potrebbe essere ripetuta anche per le assiali.

Dico che è $m = \bar{m}$. Infatti essendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{a}_{n-1}) \times \mathbf{a}_n = -\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{a}_n) \times \mathbf{a}_{n-1}$$

si ha per le (1) e (2):

$$\frac{1}{m}\gamma \mathbf{a}_{n-1} \times \mathbf{a}_n = -\frac{1}{\bar{m}}\gamma \mathbf{a}_n \times \mathbf{a}_{n-1} = \frac{1}{\bar{m}}\gamma \mathbf{a}_{n-1} \times \mathbf{a}_n$$

da cui

$$m = \bar{m}.$$

Così resta provato che per ogni $\mathbf{b}$ non parallelo alla giacitura $(n-2)$-dimensionale determinata da $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$ si ha effèttivamente

$$\gamma \mathbf{b} = m\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{b}).$$

Ne consegue che per un'altra assiale γ_1 avente le stesse direzioni nulle si ha

$$\gamma_1 \mathbf{b} = m_1 \mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{b}), \qquad m_1 \neq 0$$

ed allora per ogni vettore $\mathbf{b}$ dello spazio si ha:

$$\frac{1}{m}\gamma \mathbf{b} = \frac{1}{m_1}\gamma_1 \mathbf{b}$$

ossia

$$\gamma = \frac{m}{m_1}\gamma_1 . \qquad \text{c. d. d.}$$

In particolare esiste l'omografia γ tale da dare proprio

$$\gamma \mathbf{b} = \mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{b}).$$

Essa si può formare nel seguente modo: si considerino i due vettori $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$ ortogonali alla giacitura $(n-2)$-dimensionale determinata dalle direzioni nulle $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$; inoltre il valore assoluto dell'area del parallelogramma formato con i due vettori $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$ sia uguale al valore assoluto del volume del parallelepipedo $(n-2)$-dimensionale costruito sopra $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$ ed ancora i due vettori siano tali che il verso della n-pla $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\, \mathbf{a}_{n-1}\, \mathbf{a}_n$ sia quello positivo prefissato per le n-ple di S_n.

Allora l'assiale

$$\gamma = H(\mathbf{a}_{n-1},\ \mathbf{a}_n) - H(\mathbf{a}_n,\ \mathbf{a}_{n-1}) = 2AH(\mathbf{a}_{n-1},\ \mathbf{a}_n)$$

per ogni $\mathbf{b}$ dà appunto

$$\gamma \mathbf{b} = \mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{b}).$$

Ciò si può vedere direttamente oppure vedremo che risulterà manifesto dopo quanto avremo detto più avanti al n. 15.

Un'altra proposizione usata nel seguito è il seguente:

TEOREMA. — *In uno spazio di dimensioni pari se γ è un' assiale non degenere anche l' inversa γ^{-1} è pure un' assiale non degenere.*

Invero, essendo $\gamma = -K\gamma$, esistendo γ^{-1} ed applicandola ai due membri (a sinistra) abbiamo:

$$1 = -\gamma^{-1}K\gamma.$$

Essendo $K\gamma$ non degenere, esisterà $(K\gamma)^{-1}$ che applicata, a destra, nella precedente dà:

$$K\gamma^{-1} = -\gamma^{-1}. \qquad \text{c. d. d.}$$

Assai importante per quanto ci occuperà più oltre è il:

TEOREMA. — *Un' omografia assiale γ qualsiasi, di qualunque rango, può sempre considerarsi, in infiniti modi, come somma di* n *assiali di rango* n — 2.

Invero, diamo all' assiale γ la forma diadica, che, ricorrendo ad una n–pla fondamentale $\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n$, assumerà l' espressione semplice:

$$\gamma = H(\mathbf{i}_1, \gamma\mathbf{i}_1) + H(\mathbf{i}_2, \gamma\mathbf{i}_2) + \dots + H(\mathbf{i}_n, \gamma\mathbf{i}_n).$$

Considerando la coniugata

$$K\gamma = H(\gamma\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1) + H(\gamma\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_2) + \dots + H(\gamma\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_n)$$

si ha subito:

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma \quad K\gamma) = \frac{1}{2}[H(\mathbf{i}_1, \gamma\mathbf{i}_1) - H(\gamma\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1)] + \dots + \frac{1}{2}[H(\mathbf{i}_n, \gamma\mathbf{i}_n) - H(\gamma\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_n)],$$

ove evidentemente gli n addendi sono del tipo $AH(\mathbf{i}_r, \gamma\mathbf{i}_r)$ ossia assiali di rango $n - 2$. c. d. d.

Per questa ragione chiamo *assiale semplice* l' assiale di una diade e *assiale multiple* le altre. Queste ultime sono quindi *decomponibili in una somma di assiali semplici.*

Si noti che il prodotto di un' assiale semplice per un numero reale è ancora un' assiale semplice.

OSSERVAZIONE. — Poichè un' assiale di rango r può scriversi sotto forma di somma di $n - r$ diadi (e non di un numero minore, cfr. n. 1), ne consegue che *un' assiale multipla di rango* r *potrà scriversi sotto forma di somma di* n — r *assiali semplici ed anche però di un numero inferiore,* come avviene per esempio per un' assiale semplice stessa che, essendo di rango $n - 2$, può ridursi alla somma di due diadi, dalle quali applicando l' operatore A consegue la somma di due assiali semplici, che debbono ridursi all' assiale semplice primitiva.

Ci sarà anche utile il seguente:

TEOREMA. — *Condizione neccessaria e sufficiente affinchè in* S_n *un' assiale sia semplice è che sia di rango* n — 2.

Già sappiamo che le assiali semplici sono di rango $n-2$; viceversa dimostriamo ora che un'assiale di rango $n-2$ è un'assiale semplice. Ciò è anche conseguenza di una osservazione precedente di cui però per la dimostrazione rimandammo ad un n.° più innanzi. Diamone perciò la seguente dimostrazione diretta.

Se γ è di rango $n-2$, ammetterà $n-2$ direzioni nulle non linearmente dipendenti ed esisteranno, in infiniti modi, $n-2$ versori $\mathbf{i}_3 \ldots \mathbf{i}_n$ linearmente indipendenti ortogonali a due a due, tali che:

$$\gamma \mathbf{i}_r = 0 \qquad r=3, \ldots, n. \tag{1}$$

Insieme a questi consideriamo nella giacitura 2-dimensionale perpendicolare alla giacitura $(n-2)$-dimensionale determinata dai versori precedenti, altri due versori $\mathbf{i}_1$ e $\mathbf{i}_2$ tali che con i precedenti $n-2$, formino in S_n una n-pla fondamentale. Scrivendo la γ in forma diadica, mediante questa n-pla, abbiamo semplicemente

$$\gamma = H(\mathbf{i}_1, \gamma \mathbf{i}_1) + H(\mathbf{i}_2, \gamma \mathbf{i}_2). \tag{2}$$

Si ha per la (1)

$$\gamma \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_r = 0, \qquad r=3, \ldots, n,$$

ed inoltre

$$\gamma \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 = 0,$$

per le proprietà delle assiali; quindi ne consegue

$$\gamma \mathbf{i}_1 = m \mathbf{i}_2,$$

con m numero reale non nullo.

Analogamente risulta

$$\gamma \mathbf{i}_2 = \bar{m} \mathbf{i}_1, \qquad \text{con } \bar{m} \text{ reale, } \neq 0,$$

e per essere γ assiale:

$$\gamma \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = -\gamma \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1,$$

onde si deduce che è

$$\bar{m} = -m.$$

Perciò la (2) diviene

$$\gamma = m \{ H(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) - H(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1) \},$$

cioè γ è un'assiale semplice, essendo l'assiale della diade $H(2m\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$. c. d. d.

Dopo queste considerazioni possiamo affermare che le *assiali semplici* sono senz'altro le *assiali degeneri di rango* n — 2.

§ I. **Calcolo plurivettoriale.**

4. Ricordiamo che il vettore di cui tratta l'ordinario calcolo vettoriale è un ente geometrico determinato da un numero reale positivo (il suo modulo) da una direzione e da un verso. Si suole in generale rappresentare geometricamente o con una coppia di punti A, B, scrivendo in questo caso $B - A$, oppure con una lettera minuscola latina scritta in grassetto.

Si chiama *bivettore semplice* o soltanto *bivettore* (almeno fino a che non darà luogo ad equivoco) un ente geometrico determinato da una *giacitura* duedimensionale, da un numero reale positivo e da un « verso ».

Per rappresentarlo completamente si potrebbe far uso di una terna di punti non in linea retta; ma è preferibile far uso col CARTAN di una coppia di vettori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ non paralleli, considerati in un dato ordine, e paralleli a quella giacitura; l'area del parallelogramma costruito con essi presa in valore assoluto ci dà il modulo del bivettore, il loro ordine determina il verso ossia determina il senso del percorso dell'area del parallelogramma considerato. Evidentemente per rappresentare lo stesso bivettore disponiamo di infinite coppie di vettori. Il bivettore considerato lo rappresenteremo con la scrittura $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, oppure più semplicemente con $\underset{2}{\mathbf{a}}$.

Se il bivettore è di modulo unitario, lo chiamerò *biversore*. L'uguaglianza dei bivettori si avrà con le uguaglianze dei moduli, delle giaciture e dei versi.

Più avanti considereremo altri bivettori che si diranno bivettori multipli.

5. Si chiama *trivettore* un ente geometricamente rappresentabile mediante una terna *ordinata* di vettori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ non appartenenti ad uno stesso S_2, e che indicheremo con $\underset{3}{\mathbf{a}}$. Questo ente è determinato ancora da un modulo, un « verso » ed una giacitura (tridimensionale): il modulo è dato dal valore assoluto del parallelepipedo tridimensionale avente gli spigoli rappresentati dai tre vettori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$; il verso è determinato dall'ordine dei tre vettori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, che si conserva per una permutazione pari eseguita sui vettori; esso stabilisce l'orientamento positivo o negativo delle terne di vettori negli spazi S_3 paralleli alla giacitura tridimensionale determinata da essi; la giacitura (tridimensionale) di $\underset{3}{\mathbf{a}}$ è quella dianzi accennata, determinata dai tre vettori.

L'uguaglianza si definisce in modo analogo a quello per i bivettori e se ne deduce l'infinità dei modi per rappresentare uno stesso trivettore mediante terne ordinate di vettori.

Se il modulo del trivettore è unitario si può chiamare *triversore*.

Così si può seguitare e definire in generale il p-vettore $\underset{p}{\mathbf{a}}$ con $p \leq n$ essendo n le dimensioni dello spazio entro cui si opera.

Nello spazio ordinario S_3 esistono soltanto vettori, bivettori e trivettori; questi ultimi poi hanno tutti la medesima giacitura (tridimensionale) che è quella stessa di S_3.

Nello spazio S_n si possono considerare plurivettori fino all'n–vettore e tutti gli n–vettori sono fra loro paralleli ossia hanno la stessa giacitura (n–dimensionale) che è quella di S_n.

6. I bivettori in relazione alle omografie vettoriali. — Dato il bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}}$, rappresentabile geometricamente con la coppia di vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, consideriamo la diade $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ed il doppio della sua assiale:

$$2AH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - H(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Osservando che fra i bivettori semplici e le assiali delle diadi, ossia le assiali semplici, intercede una corrispondenza biunivoca, *chiameremo* $\underset{2}{\mathbf{a}}$ *il bivettore semplice corrispondente all'assiale semplice* $2\mathrm{AH}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

In generale le assiali dello spazio S_n possono essere di rango 0, 1, 2,... fino ad $n-2$, escluso lo zero nel caso di n dispari, e sappiamo che in ogni caso si può *sempre* (cfr. n.° 3) decomporle nella somma di assiali semplici. Estendendo la corrispondenza con i bivettori anche alle assiali multiple, chiamando *bivettore multiplo* il corrispondente dell'assiale multipla, assumeremo questo come *somma* dei bivettori *semplici* corrispondenti alle assiali semplici secondo cui si può decomporre l'assiale multipla assegnata. All'assiale nulla corrisponderà il bivettore nullo e il concetto di somma così stabilito soddisfa alle leggi ordinarie di tale operazione giacchè queste sono soddisfatte dalla somma delle omografie e in particolare delle assiali.

Il bivettore multiplo così introdotto corrisponde, come si vedrà meglio al § 2 allorchè tratteremo della rappresentazione cartésiana, all'ente geometrico chiamato dal CARTAN, « *Système de bivecteurs* » (¹), e dallo SCHOUTEN, « *Allgemeine bivektor* » (²).

L'uguaglianza dei *bivettori multipli sarà, per definizione, conseguenza dell'uguaglianza delle assiali multiple corrispondenti* e così pure attraverso la somma delle assiali multiple si definirà la *somma dei bivettori multipli.*

In particolare, essendo

$$\underset{2}{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad -\underset{2}{\mathbf{a}} = (\mathbf{b}, \mathbf{a}),$$

si avrà

$$\underset{2}{\mathbf{a}} + (-\underset{2}{\mathbf{a}}) = 0,$$

come in corrispondenza è

$$2AH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 2AH(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0.$$

(¹) Cfr. E. CARTAN, *Leçons sur les Espaces de Riemann*, loc. cit., pag. 11.
(²) Cfr. J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, loc. cit.

Diremo *rango* del bivettore multiplo il rango dell'assiale corrispondente; i *bivettori di rango* n — 2 *sono bivettori semplici,* essendo l'assiale corrispondente un'assiale semplice (cfr. n.° 3). Ricordando la decomposizione delle assiali multiple vista al n.° 3 possiamo affermare che:

Un *bivettore multiplo* (corrispondente ad un'assiale multipla) *può sempre pensarsi decomposto nella somma di* n *bivettori semplici*; se r è il rango del bivettore, si può anche pensare decomposto nella somma di $n - r$ bivettori semplici (e anche di un numero minore).

Nello spazio S_n, con n dispari, ogni bivettore è almeno di rango 1; negli spazi di indice pari può essere di rango zero.

Come si è visto, la somma di bivettori semplici deve considerarsi come un bivettore, in generale *multiplo*; ma può anche risultare un bivettore semplice; basta pensare al bivettore semplice corrispondente ad una assegnata assiale semplice; questa può scriversi, in infiniti modi, sotto forma di somma di n assiali semplici riferendosi ad es. ad una n–pla fondamentale qualsiasi; a ciascuna corrisponde un particolare bivettore semplice e la somma di questi è manifestamente il bivettore semplice iniziale.

Nello spazio S_3 *tutte le assiali sono semplici* (*di rango* 1) e quindi in esso la somma delle assiali è ancora un'assiale semplice a cui corrisponderà un bivettore semplice. Ne consegue che *in* S_3 *non esistono che bivettori semplici la cui somma è sempre un bivettore semplice* che si ottiene facilmente attraverso la somma delle assiali corrispondenti.

7. Prodotto scalare di due bivettori. — Cominciando da due bivettori semplici, siano essi $\underset{2}{\mathbf{a}}$ e $\underset{2}{\mathbf{b}}$, rappresentabili geometricamente con le coppie di vettori $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ e $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ rispettivamente.

Si chiama prodotto scalare di questi due bivettori l'espressione

$$\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) - (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}$$

che, come si vede, è riconducibile all'operazione di prodotto scalare per i vettori.

Se ci poniamo nello spazio S_3 e ci rappresentiamo $\underset{2}{\mathbf{a}}$ e $\underset{2}{\mathbf{b}}$ con due coppie di vettori $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ tali che sia $\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_2 = 0$ e $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$ siano i lati della sezione rettilinea del diedro formato dai piani dei bivettori, essendo

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1 = 0,$$

si ha che $\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}}$ viene ad essere uguale al prodotto dei moduli dei due bivettori per il coseno dell'angolo diedro formato dai piani dei due bivettori; in tal modo si scorge la naturale estensione ai bivettori della nozione di prodotto scalare di due vettori.

In particolare per il quadrato di un bivettore si ha

$$\underset{2}{\mathbf{a}}^2 = \mathbf{a}_1^2 \cdot \mathbf{a}_2^2 - (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1^2 \\ \mathbf{a}_2^2 & \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}$$

e la sua radice quadrata è il modulo del bivettore che coincide appunto con l'area del parallelogramma detta in principio, come si verifica facilmente.

Si hanno le-proprietà:

$$\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}} = \underset{2}{\mathbf{b}} \times \underset{2}{\mathbf{a}},$$

$$m(\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}}) = m\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}} = \underset{2}{\mathbf{a}} \times m\underset{2}{\mathbf{b}},$$

con m numero reale.

Osserviamo che con l'uso delle assiali si può anche scrivere

$$\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}} = 2AH(\mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_2)\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = 2AH(\mathbf{b}_1, \ \mathbf{b}_2)\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \tag{1}$$

e quindi

$$\underset{2}{\mathbf{a}}^2 = 2AH(\mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_2)\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 .$$

Per completare le proprietà del prodotto scalare di due bivettori semplici, dimostriamone la *proprietà distributiva rispetto alla somma*:

$$(\underset{2}{\mathbf{a}} + \underset{2}{\mathbf{b}}) \times \underset{2}{\mathbf{c}} = \underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{c}} + \underset{2}{\mathbf{b}} \times \underset{2}{\mathbf{c}}.$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned}(\underset{2}{\mathbf{a}} + \underset{2}{\mathbf{b}}) \times \underset{2}{\mathbf{c}} &= [2AH(\mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_2) + 2AH(\mathbf{b}_1, \ \mathbf{b}_2)]\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 = \\ &= 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 + 2AH(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 = \underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{c}} + \underset{2}{\mathbf{b}} \times \underset{2}{\mathbf{c}}. \qquad \text{c. d. d.}\end{aligned}$$

Questa proprietà ci permette di estendere il prodotto scalare ai bivettori multipli e di questo diremo fra poco.

Consideriamo ancora il prodotto scalare $\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}}$ e sia $\underset{2}{\mathbf{j}} = (\mathbf{j}_1, \ \mathbf{j}_2)$ il biversore del bivettore $\underset{2}{\mathbf{b}}$, per modo che si avrà

$$\underset{2}{\mathbf{b}} = \operatorname{mod} \underset{2}{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{j}_2 .$$

Ne consegue:

$$\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}} = \operatorname{mod} \underset{2}{\mathbf{b}} \cdot \underset{2}{\mathbf{a}} \times \mathbf{j}_2 .$$

Come si vede facilmente in S_3 e come si vedrà in generale più avanti, nel § 2, ove tratteremo delle rappresentazioni cartesiane, l'espressione $\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{j}}$ misura la *proiezione ortogonale del bivettore* $\underset{2}{\mathbf{a}}$ sul *piano del bivettore* $\underset{2}{\mathbf{b}}$. Perciò possiamo affermare che: *il prodotto scalare di due bivettori è uguale al modulo dell'uno per la proiezione ortogonale dell'altro su questo.*

E veniamo ora al prodotto scalare dei bivettori multipli. Potendoli considerare come somma di bivettori semplici e valendo la proprietà distributiva per il prodotto scalare di somme di bivettori semplici, ne consegue la possibilità di definire e di calcolare il prodotto scalare di due bivettori multipli, come somma dei prodotti scalari di bivettori semplici, seguendo l'algoritmo algebrico del prodotto dei polinomi.

Osserviamo che se γ è un'assiale multipla e $\underset{2}{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ un bivettore semplice, il prodotto scalare del bivettore multiplo corrispondente a γ per il bivettore $\underset{2}{\mathbf{b}}$ è rappresentabile con $\gamma \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$, poichè questa espressione vale appunto la somma dei prodotti scalari dei bivettori semplici costituenti il bivettore multiplo per il bivettore $\underset{2}{\mathbf{b}}$.

Poichè, se γ e γ_1 sono assiali qualunque, condizione necessaria e sufficiente perchè esse siano uguali è che per ogni coppia di vettori arbitrari $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ si abbia

$$\gamma \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \gamma_1 \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2,$$

ne consegue, in virtù della condizione di uguaglianza di due bivettori multipli, che:

Condizione neccessaria e sufficiente affinchè due bivettori multipli siano uguali è che, moltiplicati scalarmente per uno stesso bivettore semplice arbitrario $\underset{2}{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ diano lo stesso risultato (cfr. Cartan, loc. cit., pag. 11).

Questa condizione acquisterà anche un'altra forma più avanti al n. 10.

8. Ortogonalità totale di due bivettori (semplici). — Due bivettori $\underset{2}{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, $\underset{2}{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ si dicono *totalmente ortogonali* quando ogni vettore parallelo alla giacitura di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ è ortogonale ad ogni vettore parallelo alla giacitura di $\underset{2}{\mathbf{b}}$.

Condizione neccessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è che sia

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1)^2 + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2)^2 + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1)^2 + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2)^2 = 0.$$

Poichè nel seguito noi non sfrutteremo che questa osservazione, ci limitiamo a questo cenno, rimandando per tale argomento ad altri lavori (1).

(1) Cfr. Enea Bortolotti, *Invarianti angolari nella metrica bivettoriale*, « Rend. del Seminario della Facoltà di Scienza di Cagliari », 1932, Vol. II, pag. 4-5 e le opere citate in questa Nota.

9. Angolo di due bivettori (semplici) e di due giaciture bidimensionali in S_n. — Si definisce l'angolo φ di due bivettori semplici ponendo

$$(1) \qquad \cos\varphi = \frac{\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}}}{\mathrm{mod}\,\underset{2}{\mathbf{a}} \cdot \mathrm{mod}\,\underset{2}{\mathbf{b}}} = \frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) - (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1)}{\sqrt{\mathbf{a}_1^2\mathbf{a}_2^2 - (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^2}\,\sqrt{\mathbf{b}_1^2\mathbf{b}_2^2 - (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^2}},$$

ove il secondo membro è in valore assoluto minore di 1, come si può verificare.

Due bivettori $\underset{2}{\mathbf{a}}$, $\underset{2}{\mathbf{b}}$ si dicono semplicemente (1) ortogonali quando è

$$\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}} = 0.$$

Si può verificare che se il bivettore $\underset{2}{\mathbf{b}}$ è parallelo ad $\underset{2}{\mathbf{a}}$, cioè se $\underset{2}{\mathbf{a}}$ e $\underset{2}{\mathbf{b}}$ hanno la stessa giacitura, è $\cos\varphi = \pm 1$ e si verifica pure che l'espressione di $\cos\varphi$ è indipendente dalla scelta delle coppie di vettori atte a rappresentarci i bivettori.

Considerati in S_n due piani S_2, si dirà angolo dei due piani o delle giaciture bidimensionali da essi determinate, l'angolo di due bivettori o biversori semplici aventi le giaciture parallele ai due piani e la sua espressione sarà data da (1).

10. Prodotto vettoriale interno di un bivettore semplice o multiplo per un vettore. — Sia $\underset{2}{\mathbf{a}}$ un bivettore semplice ed $\mathbf{u}$ un vettore.

Chiameremo *prodotto vettoriale interno* di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ per $\mathbf{u}$ e lo indicheremo con $\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u}$ oppure $\mathbf{u} \dot{\times} \underset{2}{\mathbf{a}}$, *il vettore* che si ottiene applicando ad $\mathbf{u}$ l'assiale semplice corrispondente al bivettore:

$$\mathbf{u} \dot{\times} \underset{2}{\mathbf{a}} = \underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u} = 2AH(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)\mathbf{u} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{u})\mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{u})\mathbf{a}_1 .$$

Si noti che il risultato è un vettore parallelo ad $\underset{2}{\mathbf{a}}$ ed è perpendicolare ad $\mathbf{u}$; esso è nullo quando il vettore $\mathbf{u}$ è perpendicolare alla giacitura del bivettore; è un'operazione distributiva rispetto alla somma di bivettori e alla somma di vettori ed è permutativa con il prodotto per un numero.

(1) L'ortogonalità semplice non porta la conseguenza che ogni vettore parallelo ad uno dei bivettori sia ortogonale ad ogni vettore parallelo all'altro. Nello spazio S_3 ciò non avviene mai e quindi i bivettori in esso non possono essere che semplicemente ortogonali.

Invero:

$$\mathbf{u} \dot{\times} (\underset{2}{\mathbf{a}} + \underset{2}{\mathbf{b}}) = [2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + 2AH(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)]\mathbf{u} =$$

$$= 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{u} + 2AH(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)\mathbf{u} = \mathbf{u} \dot{\times} \underset{2}{\mathbf{a}} + \mathbf{u} \dot{\times} \underset{2}{\mathbf{b}},$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \dot{\times} \underset{2}{\mathbf{a}} = 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{u} +$$

$$+ 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{v} = \mathbf{u} \dot{\times} \underset{2}{\mathbf{a}} + \mathbf{v} \dot{\times} \underset{2}{\mathbf{a}}.$$

Similmente

$$m\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u} = \underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} m\mathbf{u} = m(\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u}).$$

La condizione di ortogonalità di un vettore **u** *con un bivettore* $\underset{2}{\mathbf{a}}$ *è data dall'annullarsi del loro prodotto vettoriale interno*:

$$\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u} = 0.$$

Se diciamo $\underset{2}{\mathbf{i}}_{12} = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ il biversore parallelo ad $\underset{2}{\mathbf{a}}$, il vettore

$$\mathbf{u}_1 = (\mathbf{u} \times \mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1 + (\mathbf{u} \times \mathbf{i}_2)\mathbf{i}_2$$

è la componente ortogonale di **u** secondo il piano del bivettore. È facile vedere allora che è:

$$\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u} = \underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u}_1,$$

cioè *il prodotto vettoriale interno di un bivettore per un vettore è lo stesso di quello che si ottiene sostituendo il vettore con la sua componente ortogonale secondo il piano del bivettore.*

Infatti la componente di **u** secondo l' S_{n-2} perpendicolare al piano del bivettore data da $\sum_{r=3}^{n} (\mathbf{u} \times \mathbf{i}_r)\mathbf{i}_r$, essendo $\mathbf{i}_3 \dots \mathbf{i}_n$ vettori tali che con $\mathbf{i}_1$ e $\mathbf{i}_2$ formano una n-pla fondamentale, si vede che non dà contributo al prodotto vettoriale interno, risultando perpendicolare al piano del bivettore.

Se **u** è parallelo al piano del bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}}$, si ha

$$\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u} = \operatorname{mod} \underset{2}{\mathbf{a}} \cdot \underset{2}{\mathbf{i}}_{12} \dot{\times} \mathbf{u} =$$

$$= \operatorname{mod} \underset{2}{\mathbf{a}} \cdot [(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{u})\mathbf{i}_2 - (\mathbf{u} \times \mathbf{i}_2)\mathbf{i}_1]$$

$$= \operatorname{mod} \underset{2}{\mathbf{a}} \cdot \operatorname{mod} \mathbf{u} \cdot \mathbf{k},$$

essendo **k** un versore del piano del bivettore perpendicolare ad **u** e nel senso del bivettore. Ne consegue che:

se $\mathbf{u}$ è nel piano del bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}}$, si ottiene il *prodotto vettoriale interno di* $\underset{2}{\mathbf{a}}$ *per* $\mathbf{u}$, *facendo ruotare* $\mathbf{u}$ *d'un angolo retto parallelamente al piano del bivettore nel senso del bivettore e alterandolo nel rapporto di* 1 *a* $\operatorname{mod} \underset{2}{\mathbf{a}}$ (¹).

Dalle due ultime osservazioni segue che qualunque sia $\mathbf{u}$, se $\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u}$ non è nullo, è un vettore del piano di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ perpendicolare alla componente ortogonale di $\mathbf{u}$ nel piano di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ e nella direzione positiva del bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}}$; ossia il bivettore $(\mathbf{u},\ \mathbf{a} \dot{\times} \mathbf{u})$ ha lo stesso verso di $\underset{2}{\mathbf{a}}$.

In particolare se $\underset{2}{\mathbf{i}}$ è il biversore di $\underset{2}{\mathbf{a}}$, risulta che $\mathbf{u} \dot{\times} \underset{2}{\mathbf{i}}$ è lo stesso vettore $\mathbf{u}$ girato di 90° nel piano del bivettore e nel senso del bivettore stesso. Quindi l'operazione $\underset{2}{\mathbf{i}} \dot{\times}$ per i vettori paralleli ad $\underset{2}{\mathbf{i}}$ può essere sostituita con l'operatore i di Tait, analogamente a quanto si fa per i vettori. Fra breve vedremo che quest'operatore i sostituirà una operazione che sarà più particolarmente analoga di quella che sostituisce nello spazio S_3.

Osserviamo per ora che nello spazio a tre dimensioni per tale prodotto vettoriale interno si ha:

$$\operatorname{mod} (\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u}) = \operatorname{mod} \underset{2}{\mathbf{a}} \cdot \operatorname{mod} \mathbf{u} \cdot \cos \varphi,$$

essendo φ l'angolo che $\mathbf{u}$ forma col piano di $\underset{2}{\mathbf{a}}$.

Basta pensare che ivi esso vale anche $(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \wedge \mathbf{u}$.

In base a ciò si dice angolo φ di un bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}}$ con un vettore $\mathbf{u}$, in un S_n qualunque, quello definito da

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{mod} (\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u})}{\operatorname{mod} \underset{2}{\mathbf{a}} \cdot \operatorname{mod} \mathbf{u}}.$$

Osserviamo infine col Cartan, sempre a proposito del prodotto vettoriale interno di un bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)$ per un vettore $\mathbf{u}$, che *se il vettore* $\mathbf{w} = \underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u}$ *lo moltiplichiamo scalarmente per un altro vettore* $\mathbf{v}$, *si ottiene il prodotto scalare del bivettore* $\underset{2}{\mathbf{a}}$ *per il bivettore semplice determinato dai due vettori* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *presi in quest'ordine,* $\underset{2}{\mathbf{b}} = (\mathbf{u},\ \mathbf{v})$.

(¹) Cfr. E. Cartan, *Leçons sur les Espaces de Riemann*, loc. cit., pag. 10.

Invero si ha

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{u})(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{v}) - (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{u})(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{v}) = \underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}}.$$

Questa osservazione ci sarà utile per determinare l'espressione cartesiana di $\mathbf{w}$ servendoci dell'espressioni cartesiane di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ e di $\mathbf{u}$, ciò che faremo più avanti al n.° 18.

Diremo *prodotto vettoriale interno* di un bivettore multiplo per un vettore $\mathbf{u}$, il vettore risultato dell'applicazione al vettore $\mathbf{u}$ dell'assiale multipla corrispondente al bivettore; viene ad essere il vettore somma dei prodotti vettoriali interni per $\mathbf{u}$, dei bivettori semplici secondo cui si decompone il bivettore multiplo.

Osserviamo ancora col CARTAN che moltiplicando scalarmente il risultato per un vettore $\mathbf{v}$ si ottiene il prodotto scalare del bivettore multiplo per il bivettore semplice $\underset{2}{\mathbf{b}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Ricordando un risultato del n.° 7 si capisce allora che due bivettori multipli saranno uguali se e soltanto se, moltiplicati internamente per uno stesso vettore $\mathbf{u}$ danno lo stesso risultato.

11. $(n-2)$-vettore supplementare di un bivettore semplice o multiplo. — Dato un bivettore semplice $\underset{2}{\mathbf{a}}$, *chiamasi* (n — 2)-*vettore supplementare di* $\underset{2}{\mathbf{a}}$, l' $(n-2)$-vettore semplice, che indicheremo con $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$, tale che la giacitura $(n-2)$-dimensionale a cui è parallelo, sia *totalmente* normale alla giacitura 2-dimensionale di $\underset{2}{\mathbf{a}}$, il che avviene evidentemente quando ciascuno dei vettori $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n$ rappresentanti l' $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ sia ortogonale a sciascuno dei vettori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ rappresentanti l' $\underset{2}{\mathbf{a}}$:

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^2 + \dots + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_n)^2 + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^2 + \dots + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_n)^2 = 0;$$

inoltre il volume del parallelepipedo $(n-2)$-dimensionale costruito sopra $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n$ sia in valore assoluto uguale al valore assoluto dell'area del parallelogramma costruito sopra $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, cioè:

$$\operatorname{mod} \underset{n-2}{\mathbf{a}} = \operatorname{mod} \underset{2}{\mathbf{a}};$$

infine l' n-vettore rappresentato dai vettori $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n$ abbia orientamento uguale a quello dell' n-pla fondamentale di S_n.

Se $\underset{2}{\mathbf{a}}$ è un bivettore multiplo, si definisce suo $(n-2)$-vettore multiplo supplementare la somma degli $(n-2)$–vettori semplici supplementari dei bivettori semplici che costituiscono l' $\underset{2}{\mathbf{a}}$, la cui definizione è manifesta.

La definizione di plurivettori supplementari si può trattare in modo analogo anche in generale (cfr. CARTAN, *Leçons sur les Espaces de Riemann*, loc. cit., pag. 16); noi ci limiteremo al caso accennato. Soltanto osserviamo che il bivettore supplementare del $(n-2)$–vettore $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ è, reciprocamente, il bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}}$ e ciò dipende dal fatto che la disposizione degli indici $3 \dots n, 1, 2$ è di classe pari.

12. Prodotto vettoriale esterno di un $(n-2)$–vettore per un vettore. — Chiameremo prodotto vettoriale esterno dell' $(n-2)$–vettore semplice $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ per il vettore $\mathbf{u}$, il vettore $\mathbf{E}(\mathbf{a}_3\, \mathbf{a}_4 \dots \mathbf{a}_n\, \mathbf{u})$ la cui definizione è stata richiamata al n. 1, ove $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n$ sono $n-2$ vettori atti a rappresentarci l' $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$. Indicheremo quest' operazione scrivendo

$$\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{E}(\mathbf{a}_3\, \mathbf{a}_4 \dots \mathbf{a}_n\, \mathbf{u}).$$

Come si vede risulta un vettore di grandezza $\mathrm{mod}\, \underset{n-2}{\mathbf{a}} \cdot \mathrm{mod}\, \mathbf{u} \cdot \cos\varphi$, essendo φ l'angolo che $\mathbf{u}$ forma col bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}}$ supplementare di $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$, di direzione ortogonale alla giacitura $(n-1)$–dimensionale determinata da $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n\, \mathbf{u}$, e verso tale che l' n–vettore determinato da $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n\, \mathbf{u}\, \mathbf{E}(\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{u})$ abbia il verso positivo fissato a priori per le n–ple di vettori in S_n.

Si ha subito il teorema:

$$\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u} = \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u}, \tag{1}$$

cioè *il prodotto vettoriale interno di un bivettore semplice per un vettore è uguale al prodotto vettoriale esterno per lo stesso vettore dell'* (n — 2)*–vettore supplementare del bivettore.*

Infatti, per le cose dette, i due vettori risultati hanno manifestamente ugual modulo, ugual direzione ed ugual verso. Circa quest' ultimo ci si convince subito pensando che nell' espressione di $\mathbf{E}(\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n\, \mathbf{u})$ si può sostituire $\mathbf{u}$ con la componente $\mathbf{u}_1$ considerata in precedenza.

La proprietà distributiva del prodotto vettoriale esterno rispetto a somme di (n — 2)*–vettori o a somme di vettori* è conseguenza della validità della stessa proprietà per il prodotto vettoriale interno, del teorema espresso da (1) e della definizione di supplementarità data per i bivettori.

Nello spazio a tre dimensioni il supplementare del bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ è il vettore dato da $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$.

Quindi si ha, sempre in S_3,

$$\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{u} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \wedge \mathbf{u} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{u})\mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{u})\mathbf{a}_1 .$$

Tornando allo spazio S_n, nel caso particolare che $\underset{2}{\mathbf{a}}$ sia unitario, anche l'$(n-2)$–vettore supplementare $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ è unitario; indicandoli con $\underset{2}{\mathbf{i}}$ e $\underset{n-2}{\mathbf{i}}$ rispettivamente, abbiamo

$$\underset{2}{\mathbf{i}} \dot{\times} \mathbf{u} = \underset{n-2}{\mathbf{i}} \wedge \mathbf{u};$$

se $\mathbf{u}$ è nel piano di $\underset{2}{\mathbf{i}}$ ciascuno dei due membri rappresenta il vettore $\mathbf{u}$ girato di 90° nel verso di $\underset{2}{\mathbf{i}}$. Ne consegue che la naturale estensione dell'operatore i usato in S_3 (¹) e già accennata al n. 10 è quella di rappresentarci qui l'operazione $\underset{n-2}{\mathbf{i}} \wedge$ da applicarsi ai vettori della giacitura 2–dimensionale perpendicolare ad $\underset{n-2}{\mathbf{i}}$.

Per note proprietà dell'operatore $\mathbf{E}$ essendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{n-2}\, \mathbf{u}) = (-1)^n \mathbf{E}(\mathbf{u}\, \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2})$$

si ha

$$\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} = (-1)^n \mathbf{u} \wedge \underset{n-1}{\mathbf{a}}.$$

Inoltre: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè il vettore* $\mathbf{u}$ *appartenga alla giacitura di* $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ *è espressa da*

$$\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} = 0;$$

essa coincide con la condizione di ortogonalità di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ con $\mathbf{u}$ espressa come sappiamo da $\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u} = 0$.

Per un $(n-2)$–vettore multiplo, somma di $(n-2)$–vettori semplici, si definirà il *prodotto vettoriale esterno per un vettore* $\mathbf{u}$ come la somma dei prodotti vettoriali esterni per $\mathbf{u}$ dei $(n-2)$–vettori semplici secondo cui quello si decompone.

Ciò è conseguenza della validità della proprietà distributiva accennata.

(¹) Cfr. P. Burgatti, *Lezioni di Meccanica razionale*, Zanichelli, Bologna, Introduzione.

13. Prodotto vettoriale di due vettori in S_n. — Dati due vettori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, chiameremo *prodotto vettoriale* di essi l'$(n-2)$-vettore semplice supplementare del bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}}$ rappresentabile con i due vettori.

Lo indicheremo usando ancora il segno $\wedge$:

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \underset{n-2}{\mathbf{a}}.$$

Nello spazio S_3 coincide con l'ordinario prodotto vettoriale.

Le sue proprietà sono identiche a quelle che esso ha nello spazio S_3. In particolare è manifestamente $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1$ e dimostriamo la *proprietà distributiva rispetto alla somma.* Osserviamo che essendo

$$2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3),$$

per i bivettori semplici corrispondenti abbiamo la relazione

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)$$

e quindi la stessa relazione passerà fra i rispettivi $(n-2)$-vettori supplementari. Ne consegue che è

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \wedge (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3).$$

Condizione di parallelismo dei due vettori $\mathbf{a}_1$ *e* $\mathbf{a}_2$ *è*: $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = 0$.

14. Prodotto misto. — Sia $\mathbf{v}$ un vettore non parallelo alla giacitura $(n-1)$-dimensionale determinata dai vettori $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\, \mathbf{u}$ del n. 12, ossia:

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\, \mathbf{u}) \times \mathbf{v} \neq 0.$$

Si ha, essendo $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ l'$(n-2)$-vettore determinato da $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$,

$$\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\, \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \operatorname{vol}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\, \mathbf{u}\ \mathbf{v}).$$

Si hanno le proprietà

$$\begin{aligned}\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{u} &= -\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \\ &= (-1)^{n-1} \mathbf{u} \wedge \underset{n-2}{\mathbf{a}} \times \mathbf{v} \\ &= (-1)^{n} \mathbf{v} \wedge \underset{n-2}{\mathbf{a}} \times \mathbf{u}.\end{aligned}$$

In particolare

$$\mathbf{u} \wedge \underset{n-2}{\mathbf{a}} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \underset{n-2}{\mathbf{a}} \times \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} \times \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u}.$$

Ho dimostrato che anche nello spazio S_n *nella espressione* $\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ *è possibile, come in* S_3, *scambiare i due segni* $\wedge$ *e* $\times$. La scrittura che si ottiene con lo scambio ha un facile significato trattandosi di prodotto scalare di due $(n-2)$-vettori semplici. La dimostrazione sarà accennata più avanti al n. 21.

Ora limitiamoci a far notare che il prodotto scalare di due p-vettori $\underset{p}{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_p)$, $\underset{p}{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_p)$, si ottiene estendendo l'espressione che dà il prodotto scalare di due bivettori e cioè:

$$\underset{p}{\mathbf{a}} \times \underset{p}{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_p \\ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_p \\ \dots & \dots \\ \mathbf{a}_p \times \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_p \times \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{a}_p \times \mathbf{b}_p \end{vmatrix}$$

(cfr. CARTAN, loc. cit., pag. 13).

Si noti che $(\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v}$ rappresenta un $(n-2)$-vettore parallelo alla giacitura $(n-1)$-dimensionale determinata da $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ e da $\mathbf{u}$, mentre $(\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u}) \wedge \underset{n-2}{\mathbf{b}}$ rappresenta un vettore parallelo alla stessa giacitura.

Se $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ è un $(n-2)$-vettore multiplo, basta pensare che esso è la somma, in infiniti modi, di $(n-2)$-vettori semplici che sono i supplementari dei bivettori semplici di cui si compone il bivettore multiplo supplementare di $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$.

L'omografia $\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge$ risulta la somma delle assiali semplici corrispondenti agli $(n-2)$-vettori semplici componenti, quindi *risulta un'assiale; chiamo* $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ *l'* $(n-2)$*-vettore di questa assiale.*

Essendo K il solito operatore che applicato ad un'omografia dà la coniugata, verifichiamo che, essendo $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ multiplo o semplice, si ha appunto la ben nota proprietà caratteristica

$$K(\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge) = - \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge .$$

Invero, presi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ arbitrari abbiamo:

$$\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times K(\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge)\mathbf{v}.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} &= - \mathbf{u} \times \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \times (- \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge)\mathbf{v} \end{aligned}$$

e dal confronto si ha l'asserto.

15. $(n-2)$-vettore di una omografia. — Da quanto precede abbiamo che se si considera l'assiale della diade $H(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ si ha

$$(1) \qquad 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} = \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge ,$$

essendo $\underset{2}{\mathbf{a}}$ il bivettore semplice rappresentato dai vettori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ che determinano la diade e $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ l'$(n-2)$-vettore semplice supplementare [1].

Chiamo (n — 2)-*vettore della assiale della diade* $H(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ *ed anche della diade stessa,* l'$n-2$-vettore $\frac{1}{2}\underset{n-2}{\mathbf{a}}$.

Per quanto dicemmo al n. 13, esso può anche venire indicato con la scrittura $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)$.

In generale, presa un'omografia qualunque di S_n:

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n \\ \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

la si scriva nella forma diadica:

$$\alpha = H(\mathbf{a}_1', \mathbf{u}_1) + H(\mathbf{a}_2', \mathbf{u}_2) + \dots + H(\mathbf{a}_n', \mathbf{u}_n)$$

come si è detto al n. 1.

Calcolando l'assiale di α abbiamo

$$A\alpha = AH(\mathbf{a}_1', \mathbf{u}_1) + \dots + AH(\mathbf{a}_n', \mathbf{u}_n)$$

e per la (1) del n.° precedente risulta

$$A\alpha = \frac{1}{2}(\underset{2}{\mathbf{a}_1} + \underset{2}{\mathbf{a}_2} + \dots + \underset{2}{\mathbf{a}_n}) \dot{\times}$$

$$= \frac{1}{2}(\underset{n-2}{\mathbf{a}_1} + \underset{n-2}{\mathbf{a}_2} + \dots + \underset{n-2}{\mathbf{a}_n}) \wedge$$

ove i simboli hanno evidente significato.

---

[1] Ora è il momento di completare la dimostrazione lasciata in sospeso al n. 3.

Se $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$ sono le direzioni nulle distinte dell'assiale γ, di rango $n-2$ ivi considerata, esse definiscono un $(n-2)$-vettore semplice $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$; se $\underset{2}{\mathbf{a}}$ è il bivettore supplementare determinato dai vettori $\mathbf{a}_{n-1}$ e $\mathbf{a}_n$ si ha, essendo $\mathbf{b}$ un vettore qualunque di S_n:

$$2AH(\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n)\mathbf{b} = \underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{b} = \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b} = E(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{b})$$

e poichè

$$2AH(\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n) = H(\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n) - H(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n-1}) = \gamma,$$

è

$$\gamma \mathbf{b} = E(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{b})$$

come appunto dicevamo allora.

Dunque l'assiale γ in parola è $\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge$.

L' $(n-2)$-vettore (multiplo in generale)

$$\underset{n-2}{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}\,(\underset{n-2}{\mathbf{a}_1} + \dots + \underset{n-2}{\mathbf{a}_n})$$

sarà detto l' (n — 2)-*vettore dell'omografia* $A\alpha$ *ed anche dell'omografia* α *e l'indicheremo con* $V\alpha$. In generale quindi si tratterà di un $(n-2)$-vettore multiplo.

Si dirà rango di questo (n — 2)-*vettore il rango di* $A\alpha$ e se $A\alpha$ è semplice il suo rango sarà $n-2$ e viceversa.

Nello spazio ordinario, $n=3$, l' $(n-2)$-vettore di una qualunque omografia α diventa semplicemente un vettore ed è il *ben noto vettore dell'assiale di* α, ossia il *vettore di* α che si suole indicare appunto con $V\alpha$. Per questa ragione ho conservato lo stesso simbolo V che con maggiore espressività si potrebbe indicare con $\underset{n-2}{V}$.

Per la diade si avrà $VH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)$; anche in S_3 si ha, come è noto, $VH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ (1).

Se n è dispari il rango di $A\alpha$ è almeno uno e quindi l' $(n-2)$-vettore di α è almeno di rango 1.

Con più esattezza, per quanto abbiamo visto al n.° 2 sul rango delle assiali e più precisamente sulle direzioni nulle delle assiali, ciò che equivale, possiamo dire che negli spazi di indice pari gli $(n-2)$-vettori sono di rango nullo o pari fino ad $n-2$, negli spazi di indice dispari sono di rango dispari che può variare da 1 a $n-2$.

Potendosi scrivere $\alpha = D\alpha + A\alpha$, ove $D\alpha$ è la dilatazione di α, abbiamo anche l'altra espressione

$$\alpha = D\alpha + \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge = D\alpha + V\alpha \wedge,$$

che estende *formalmente* e *concettualmente* allo spazio S_n la formula analoga dello spazio S_3.

Come conseguenza della linearità dell'operatore A per le omografie in S_n, ne risulta la *linearità dell'operatore* V *che applicato ad una omografia dà il suo* (n — 2)-*vettore*.

Allora posta l'omografia α sotto la forma:

$$\alpha = H(\mathbf{i}_1, \alpha\mathbf{i}_1) + \dots + H(\mathbf{i}_n, \alpha\mathbf{i}_n),$$

essendo $\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n$ una n-pla fondamentale di S_n, si ha subito

$$2\,V\alpha = \mathbf{i}_1 \wedge \alpha\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \wedge \alpha\mathbf{i}_2 + \dots + \mathbf{i}_n \wedge \alpha\mathbf{i}_n,$$

(1) Cfr. *Analisi vettoriale generale*, Vol. I, C. Burali-Forti e R. Marcolongo, loc. cit., pag. 86.

la quale è una formula del tutto analoga a quella dello spazio S_3; qui però i singoli addendi sono $(n-2)$-vettori semplici, supplementari dei bivettori semplici rappresentabili dalle coppie di vettori $\mathbf{i}_r$, $\alpha\mathbf{i}_r$ che determinano le diadi.

In tal modo l' $(n-2)$-vettore di una omografia α, che in generale è multiplo, è decomposto nella somma di n $(n-2)$-vettori semplici, servendosi di una n-pla fondamentale.

§ II. **Rappresentazioni cartesiane.**

16. Consideriamo nello spazio S_n una n-pla di vettori fondamentali $\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n$ che determinerà l'ordinamento positivo delle n-ple di vettori dello spazio.

Essa, in sostanza, costituisce l'n-versore $\underset{n}{\mathbf{i}}$ dello spazio S_n che determina il verso in S_n, in modo analogo a quello per cui si dice che un versore $\mathbf{i}$ determina il verso sulle rette ad esso parallele.

Con i vettori di $(\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n)$ si possono determinare $\frac{n(n-1)}{2}$ *bivettori fondamentali* (biversori) combinandoli a due a due, senza ripetizione, e facendo in modo che le disposizioni dei due indici siano di classe pari.

Sia dato il bivettore qualunque $\underset{2}{\mathbf{a}}$ rappresentabile con la coppia di vettori $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Si chiamano componenti (cartesiane) di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ rispetto alla n-pla scelta, le proiezioni di $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sui piani dei bivettori fondamentali accennati. Sia $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ il primo di questi e diciamo a_1, a_2, b_1, b_2 rispettivamente le proiezioni di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, sugli assi determinati dai versori $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$; la proiezione di $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sul piano $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ sarà l'area del parallelogramma proiezione su $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ del parallelogramma costruito su $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ portati ad esempio a partire dall'origine; essa proiezione come è noto è data da

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ossia dalla differenza

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

Così si ha il valore algebrico della componente cartesiana di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ secondo il biversore $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$, che indicheremo con $\underset{2}{a_{12}}$.

In generale la componente cartesiana $\underset{2}{a_{rs}}$ di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ sarà la proiezione di $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ su $(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ ed è data da

$$\underset{2}{a_{rs}} = a_r b_s - a_s b_r .$$

È da notare subito che è

$$\underset{2}{a}_{rs} = -\underset{2}{a}_{sr}.$$

Le condizioni geometriche di uguaglianza di due bivettori mediante l'uguaglianza dei moduli, delle giaciture e dei versi vengono tradotte analiticamente mediante il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due bivettori siano uguali è che siano rispettivamente uguali le $\frac{n(n-1)}{2}$ *componenti rispetto ad un riferimento cartesiano qualsiasi* (¹).

Se calcoliamo le componenti cartesiane a_{rs} dell'assiale $2AH(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ rispetto alla scelta n–pla fondamentale, in corrispondenza della quale è

$$\mathbf{a} = \sum_1^n a_r \mathbf{i}_r, \quad \mathbf{b} = \sum_1^n b_s \mathbf{i}_s,$$

si scorge che esse coincidono con le componenti cartesiane di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ secondo i biversori coordinati e testè calcolate.

Invero si ha

$$\begin{aligned} a_{rs} &= 2AH(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_s = (\mathbf{a} \times \mathbf{i}_r)(\mathbf{b} \times \mathbf{i}_s) - (\mathbf{b} \times \mathbf{i}_r)(\mathbf{a} \times \mathbf{i}_s) \\ &= a_r b_s - a_s b_r = \underset{2}{a}_{rs}. \end{aligned}$$

In estensione di ciò, diremo componenti cartesiane $\underset{2}{a}_{rs}$ di un bivettore multiplo, le componenti cartesiane dell'assiale multipla corrispondente; esse soddisfano pure alla relazione

$$\underset{2}{a}_{rs} = -\underset{2}{a}_{sr}$$

e, disposte secondo una matrice quadrata, questa risulta gobba; i suoi elementi si otterranno sommando gli elementi corrispondenti delle matrici gobbe delle componenti cartesiane corrispondenti ai bivettori semplici secondo cui si decompone il bivettore multiplo.

Tornando al bivettore semplice $\underset{2}{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ osserviamo che per le posizioni fatte è:

$$2AH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2AH\left(\sum_1^n a_r \mathbf{i}_r, \ \sum_1^n b_s \mathbf{i}_s\right) = \sum_{(rs)} (a_r b_s - a_s b_r) \cdot 2AH(\mathbf{i}_r, \ \mathbf{i}_s),$$

(¹) Cfr. E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann,* loc. cit., pag. 7. In questa dimostrazione si fa uso delle componenti covarianti e contravarianti del bivettore che nel caso nostro coincidono essendo gli assi ortogonali.

ove la sommatoria è estesa a tutte le combinazioni degli indici 1, 2,... n a due a due.

Poichè all'assiale sotto il segno di sommatoria corrisponde la componente del bivettore $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ secondo il piano $(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$, ossia secondo il biversore $(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$, per la precedente relazione si ha che il bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ può considerarsi come la somma delle sue componenti secondo i bivettori fondamentali coordinati e si può scrivere perciò

$$\underset{2}{\mathbf{a}} = \sum_{(rs)} \underset{2}{a_{rs}} (\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s) = \sum_{(rs)} \underset{2}{a_{rs}} \underset{2}{\mathbf{i}_{rs}}, \tag{1}$$

indicando con $\underset{2}{\mathbf{i}_{rs}}$ il biversore determinato dai due vettori $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_s$.

La (1) si dirà, analogamente a quanto avviene per i vettori, *rappresentazione cartesiana del bivettore semplice* $\underset{2}{\mathbf{a}}$.

Per un bivettore multiplo, se ne potrà ottenere la rappresentazione cartesiana in forma analoga considerandolo decomposto nella somma di bivettori semplici.

Si può notare che le componenti cartesiane $\underset{2}{a_{rs}}$ secondo gli $\frac{n(n-1)}{2}$ piani coordinati del bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}}$ e calcolate sopra, sono date da

$$\underset{2}{a_{rs}} = \underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{i}_{rs}},$$

essendo $\underset{2}{\mathbf{i}_{rs}}$ il biversore corrispondente al piano di $\mathbf{i}_r$ e $\mathbf{i}_s$.

Si può quindi anche scrivere, analogamente a quanto avviene per i vettori,

$$\underset{2}{\mathbf{a}} = \sum_{(rs)} \underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{i}_{rs}} \cdot \underset{2}{\mathbf{i}_{rs}},$$

la sommatoria essendo estesa agli $\frac{n(n-1)}{2}$ biversori fondamentali.

Questa si dirà pure come per i vettori *espressione cartesiana del bivettore* $\underset{2}{\mathbf{a}}$.

Servendosi della (1) del n. 7 si può verificare che presi quattro indici h, k, l, m, percorrenti la permutazione 1, 2,... n, fra le componenti cartesiane di un bivettore semplice aventi quegl'indici passa l'identità:

$$\underset{2}{a_{hk}} \cdot \underset{2}{a_{lm}} + \underset{2}{a_{hl}} \cdot \underset{2}{a_{mk}} + \underset{2}{a_{hm}} \cdot \underset{2}{a_{kl}} = 0 \text{ [1]}.$$

Per $n = 3$ questa è sempre verificata; non ha luogo per i bivettori multipli.

[1] Cfr. E. CARTAN, loc. cit., pag. 11.

17. Veniamo ora a stabilire le espressioni cartesiane degli altri enti ed operazioni studiate nel § I.

Incominciamo col prodotto scalare di due bivettori semplici o multipli. Avendosi per questi le espressioni cartesiane

$$\underset{2}{\mathbf{a}} = \sum_{(rs)} \underset{2}{a_{rs}} \mathbf{i}_{rs}, \quad \underset{2}{\mathbf{b}} = \sum_{(rs)} \underset{2}{b_{rs}} \mathbf{i}_{rs},$$

dalle proprietà studiate discende immediatamente che è:

$$\underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}} = \sum_{(rs)} \underset{2}{a_{rs}} \underset{2}{b_{rs}},$$

con la quale si ha l'*espressione cartesiana del prodotto scalare di due bivettori* (semplici o multipli).

Come si nota, essa è del tutto analoga a quella dei vettori.

18. Determiniamo ora l'espressione cartesiana del prodotto vettoriale interno

$$\mathbf{w} = \underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u}.$$

Posto $\mathbf{w} = \sum_r w_r \mathbf{i}_r$ si ha

$$w_r = \mathbf{w} \times \mathbf{i}_r$$

e per l'osservazione fatta alla fine del n. 10, si ha che questa componente w_r è anche uguale al prodotto scalare di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ per il bivettore $\underset{2}{\mathbf{b}} = (\mathbf{u}, \mathbf{i}_r)$.

Le componenti cartesiane del bivettore $\underset{2}{\mathbf{b}}$ sono evidentemente in parte nulle riducendosi ad $n-1$ quelle diverse da zero; precisamente queste sono:

$$\underset{2}{b_{sr}} = u_s \qquad s = 1, 2, \dots, n \text{ e con } s \neq r.$$

Allora si ha subito:

$$w_r = \underset{2}{\mathbf{a}} \times \underset{2}{\mathbf{b}} = \sum_{s=1}^{n} \underset{2}{a_{sr}} u_s;$$

quindi l'espressione cartesiana di $\mathbf{w}$ è:

$$\mathbf{w} = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} \underset{2}{a_{sr}} u_s \right) \mathbf{i}_r.$$

Espressione analoga vale nel caso che $\underset{2}{\mathbf{a}}$ sia un bivettore multiplo.

19. Come abbiamo fatto per i bivettori, si possono ottenere le componenti cartesiane dei plurivettori, calcolando con opportune estensioni le proiezioni di questi plurivettori sugli *spazi coordinati fondamentali* determinati dai vettori $\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n$, opportunamente raggruppati.

Per un p-vettore semplice con $p \leq n$, le componenti cartesiane distinte sono $\binom{n}{p}$ e sono date dai minori di ordine p estratti dalla matrice a p linee ed n colonne formata con le componenti cartesiane dei p vettori che servono a determinare il p-vettore.

A noi interessa accennare in particolare alla *rappresentazione cartesiana dell'* (n — 2)-*vettore* $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$, supplementare del bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}}$ avente per espressione cartesiana

$$\underset{2}{\mathbf{a}} = \sum_{(s_1 s_2)2} a_{s_1 s_2} \underset{2}{\mathbf{i}}_{s_1 s_2},$$

ove $(s_1 s_2)$ sono le combinazioni degli indici 1, 2,... n a due a due.

Si riesce facilmente a vedere che in corrispondenza si ha

$$\underset{n-2}{\mathbf{a}} = \sum_{(s_1 s_2)(r_1 r_2 \dots r_{n-2})} \underset{2}{a_{s_1 s_2}} \underset{n-2}{\mathbf{i}}_{r_1 r_2 \dots r_{n-2}},$$

ove $(s_1 s_2)$ ha il significato detto sopra, $(r_1 \dots r_{n-2})$ sono le combinazioni degli indici 1, 2,... n ad $n-2$ ad $n-2$; $s_1 s_2 r_1 \dots r_{n-2}$, insieme, sono permutazioni di classe pari degli indici medesimi 1, 2,... n e infine gli $\underset{n-2}{\mathbf{i}}_{r_1 \dots r_{n-2}}$ sono gli $\frac{n(n-1)}{2}$ $(n-2)$-vettori fondamentali.

20. Prendiamo ora l'espressione del prodotto vettoriale esterno $\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u}$ studiato al n. 12.

Come è noto, le componenti cartesiane del vettore $\mathbf{E}(\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n\, \mathbf{u})$ sono i minori di ordine $n-1$ che si ricavano dalla matrice di $n-1$ linee ed n colonne formata con le componenti cartesiane dei vettori $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n\, \mathbf{u}$; le stesse componenti varranno quindi anche per $\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u}$, nel caso di $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ semplice.

Oppure, se sono date le componenti cartesiane di $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ invece di quelle dei vettori che lo costituiscono, nel qual caso le considerazioni valgono anche se esso è multiplo, è facile convincersi che *dette componenti sono uguali anche a quelle del bivettore supplementare* $\underset{2}{\mathbf{a}}$; allora ricordando che è (n. 12)

$$\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} = \underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u},$$

si ottiene l'espressione cartesiana di $\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u}$ applicando la formula che dà l'espressione cartesiana di $\underset{2}{\mathbf{a}} \dot{\times} \mathbf{u}$ (n. 18).

21. Il prodotto misto $\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ nel caso di $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ semplice essendo uguale a $\mathbf{E}(\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n\, \mathbf{u}) \times \mathbf{v}$, per cose note, avrà come espressione cartesiana il determinante di ordine n formato con le componenti cartesiane di $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \dots \mathbf{a}_n, \mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Ciò vale se $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ è determinato dagli $n-2$ vettori $\mathbf{a}_3 \ldots \mathbf{a}_n$; se invece è dato senz'altro mediante le sue componenti cartesiane, nel qual caso le considerazioni valgono anche se esso è multiplo, si ha

$$\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \underset{2}{\mathbf{a}} \times \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{s_1=1}^{n} \sum_{s_2=1}^{n} \underset{2}{a_{s_1 s_2}} u_{s_2} v_{s_1} =$$
$$= \sum_{(s_1 s_2)} \underset{2}{a_{s_1 s_2}} \underset{2}{b_{s_1 s_2}} = \sum_{(s_1 s_2)(r_1 \ldots r_{n-2})} \underset{n-2}{a_{r_1 \ldots r_{n-2}}} b_{s_1 s_2},$$

essendo $\underset{2}{b_{s_1 s_2}}$ le componenti cartesiane del bivettore semplice $\underset{2}{\mathbf{b}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e $\underset{n-2}{a_{r_1 \ldots r_{n-2}}}$ quelle di $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ che sono numericamente uguali alle componenti $\underset{2}{a_{s_1 s_2}}$ del bivettore supplementare $\underset{2}{\mathbf{a}}$.

Osserviamo che $\underset{n-2}{\mathbf{a}} \times \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ viene ad essere il prodotto scalare di due $(n-2)$-vettori dei quali il secondo è semplice; ma esso è anche uguale al prodotto scalare dei bivettori supplementari, poichè l'espressione cartesiana di questo è ancora $\sum_{(s_1 s_2)} \underset{2}{a_{s_1 s_2}} \underset{2}{b_{s_1 s_2}}$.

Ne segue che è

$$\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \underset{n-2}{\mathbf{a}} \times \mathbf{u} \wedge \mathbf{v},$$

cioè i due segni $\wedge$ *e* $\times$ *quando si seguono si possono scambiare.*

22. Prendiamo il prodotto vettoriale

$$\underset{n-2}{\mathbf{v}} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 .$$

Se diciamo $\underset{2}{a_{rs}}$ le componenti cartesiane del bivettore $\underset{2}{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, per quanto è stato detto in precedenza si ha

$$\underset{n-2}{\mathbf{v}} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \sum_{(s_1 s_2)(r_1 \ldots r_{n-2})} \underset{2}{a_{s_1 s_2}} \underset{n-2}{\mathbf{i}_{r_1 \ldots r_{n-2}}}$$

ove i simboli hanno il significato già detto sopra.

23. Veniamo infine alla *espressione cartesiana dell'* (n — 2)*-vettore di una omografia* α.

Essendo (n. 15)

$$2 V\alpha = (\mathbf{i}_1 \wedge \alpha \mathbf{i}_1) + (\mathbf{i}_2 \wedge \alpha \mathbf{i}_2) + \ldots + (\mathbf{i}_n \wedge \alpha \mathbf{i}_n),$$

posto

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{i}_1 &= a_{11} \mathbf{i}_1 + \ldots + a_{1n} \mathbf{i}_n \\ \alpha \mathbf{i}_2 &= a_{21} \mathbf{i}_1 + \ldots + a_{2n} \mathbf{i}_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha \mathbf{i}_n &= a_{n1} \mathbf{i}_1 + \ldots + a_{nn} \mathbf{i}_n , \end{aligned}$$

si ottiene subito, per le cose dette

$$2\,V\alpha = \sum_{(s_1 s_2)} (a_{s_1 s_2} - a_{s_2 s_1})(\mathbf{i}_{s_1} \wedge \mathbf{i}_{s_2}) = \sum_{(s_1 s_2)(r_1 \dots r_{n-2})} (a_{s_1 s_2} - a_{s_2 s_1}) \underset{n-2}{\mathbf{i}_{r_1 \dots r_{n-2}}},$$

ove i simboli hanno il significato noto.

Per $n = 3$ si ottiene la formula ben nota

$$2\,V\alpha = (a_{23} - a_{32})\mathbf{i} + (a_{31} - a_{13})\mathbf{j} + (a_{12} - a_{21})\mathbf{k},$$

ove $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sono i vettori fondamentali.

In altri lavori che saranno pubblicati nei « Rendiconti della Reale Acc. dei Lincei » svilupperò l'Analisi plurivettoriale, estendendo e studiando in particolare gli operatori *div*, *rot*, *Rot* dello spazio ordinario [1].

Qui mi limito a fare applicazioni cinematiche del calcolo plurivettoriale svolto.

§ III. Cinematica dei sistemi rigidi in uno spazio S_n.

24. Moto di un corpo rigido con un punto fisso. — Sia O il punto fisso, M ed N due punti qualsiasi del corpo, naturalmente ad n dimensioni; per la rigidità dovremo avere durante il movimento

$$(N - M)^2 = \text{cost.}$$

e quindi, derivando rispetto al tempo:

$$\left(\frac{dN}{dt} - \frac{dM}{dt}\right) \times (N - M) = 0\,; \tag{1}$$

questa esprime una ben nota proprietà delle velocità dei punti di un corpo rigido in movimento.

Se consideriamo N vicinissimo ad M e diciamo $\mathbf{v}$ la velocità di M, la precedente si può scrivere volendo:

$$d\mathbf{v} \times dM = 0. \tag{1'}$$

Osserviamo che la corrispondenza fra i vettori $M \quad O$ nel corpo e le velocità dei punti M, $\frac{dM}{dt}$, è lineare giacchè se è:

$$M_3 - O = (M_1 - O) + (M_2 - O)$$

[1] Cfr. M. MANARINI, *Rotazionale di un vettore negli spazi* S_n, « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1° sem., 1933-XI, pag, 706-712.

si ha
$$\frac{dM_3}{dt}=\frac{dM_1}{dt}+\frac{dM_2}{dt}$$
e se è $M_2-O=m(M_1-O)$, con m numero reale, si ha $\frac{dM_1}{dt}=m\frac{dM_2}{dt}$.

Questa corrispondenza *è perciò un' omografia vettoriale* e indicandola con α, possiamo scrivere

(2) $$\mathbf{v}=\frac{dM}{dt}=\alpha(M-O);$$

si ha subito

(3) $$\frac{dN}{dt}-\frac{dM}{dt}=\alpha(N-O)-\alpha(M-O)=\alpha(N-M)$$

che, per N vicinissimo a M, diviene

(3') $$d\mathbf{v}=\alpha dM.$$

Per le (1) e (3) risulta per ogni coppia di punti M ed N collegati col corpo
$$\alpha(N-M)\times(N-M)=0,$$
il che assicura che α *è un' omografia assiale*, essendo M ed N arbitrari nel corpo.

L' omografia α è la cosidetta *omografia di rotazione* ([1]); essendo un' assiale, indicando con $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ il suo $(n-2)$-vettore che in generale sarà multiplo, possiamo scrivere (n. 15)

(4) $$\alpha=\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}\wedge$$

e la (2) può mettersi sotto la forma

(5) $$\frac{dM}{dt}=\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}\wedge(M-O)=(-1)^{n-1}(O-M)\wedge\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}},$$

(cfr. n. 14) la quale è del tutto analoga a quella dello spazio S_3 dove l' $(n-2)$-vettore $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ diventa il vettore $\boldsymbol{\omega}$ che definisce la velocità angolare. Nello spazio S_n si può dire *che il corpo avente il punto fisso* O *è animato in*

([1]) Per un' altra maniera di introdurre l' omografia di rotazione cfr.: *Analisi vettoriale Generale*, loc. cit., Vol. II, Parte II (BOGGIO), pag. 149; BURALI-FORTI e BOGGIO, *Espaces Courbes ecc.* (loc. cit.), pag. 244, ove l' assiale α è messa in relazione con i « *coefficienti di Rotazione* » che il RICCI considerò nel suo *Calcolo differenziale assoluto* (cfr. in proposito T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, Alberto Stock, Roma, 1925, pag. 284 e *Analisi Vett. Gen.*, loc. cit., Vol. II, BOGGIO, pag. 265); E. CARTAN, loc. cit., pag. 19; C. AGOSTINELLI in loc. cit. più avanti. Esistono su tali argomenti antichi lavori del DE FRANCESCHI, pubblicati nei « Rend. della R. Acc. delle Scienze di Napoli », trattati, s' intende, con il calcolo cartesiano. Cfr. ancora: GEORGES TIERCHY, *Sur les éléments immobiles dans une rotation dans l' Espace à* n *dimensions*, « L' Enseignement Mathématique », 1926, XXV année, nn. 1-2-3, pag. 11-21.

ogni istante da una « rotazione » istantanea rappresentata dall' (n — 2)*-vettore-applicato* $[O, (-1)^{n-1} \cdot \underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}]$.

La rotazione si dice *semplice* quando l' $(n-2)$-vettore $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ è semplice e rappresentabile quindi da una $(n-2)$-pla di vettori; in tal caso i punti che sono nello spazio S_{n-2} condotto per O e parallelo ad esso, hanno velocità nulla; ed allora si dice che la « *velocità angolare* » è uguale al modulo di quel $(n-2)$-vettore $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ e che la rotazione istantanea *si compie intorno a quell'* S_{n-2}.

Per $n = 3$, questo S_{n-2} esiste sempre ed è una retta: *l'asse istantaneo di rotazione.*

Potendosi in generale considerare (n. 15) $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ come somma di n $(n-2)$-vettori semplici mediante la relazione

$$\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}(\mathbf{i}_1 \wedge \alpha \mathbf{i}_1 + \ldots + \mathbf{i}_n \wedge \alpha \mathbf{i}_n),$$

ove $\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_n$ è una n-pla fondamentale, abbiamo che, in generale la « rotazione » del corpo con un punto fisso O *può in ogni istante considerarsi sempre come la somma di* n *rotazioni semplici intorno agli* n *spazi ad* n — 2 *dimensioni condotti per* O *e determinati dagli* (n — 2)*-vettori semplici* $\mathbf{i}_r \wedge \alpha \mathbf{i}_r$ $(r = 1, \ldots n)$.

Oppure, riferendosi all'espressione cartesiana di $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$, la rotazione può sempre pensarsi somma di $\binom{n}{2}$ rotazioni semplici intorno agli $\binom{n}{2}$ S_{n-2} coordinati determinati dal riferimento $(O, \mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_n)$.

Se l'indice n dello spazio è dispari, l'$(n-2)$-vettore multiplo $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ è almeno di rango 1, ossia l'assiale $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge$ è degenere almeno di prima specie; quindi *esiste almeno un vettore* $\mathbf{u}$ *tale che sia*

$$\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{u} = 0;$$

tutti i punti dell'asse per O e parallelo ad $\mathbf{u}$ hanno velocità nulla.

Se $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge$ non è degenere di specie superiore, esso è l'*asse istantaneo di rotazione per il corpo*; ma quest'asse non è sufficiente come in S_3 a determinare il moto, cioè a calcolare ad es. le direzioni delle velocità dei punti del corpo.

Se n *è pari e se* $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ *è di rango zero, non esistono punti di velocità nulla all'infuori di* 0.

Questo si verifica ad es. nello spazio S_2.

Per quanto abbiamo visto al n.° 2 possiamo dire *che se* n *è dispari o pari* l'assiale $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge$ potrà avere rispettivamente $1, 3, \dots n-2$ oppure $0, 2, \dots n-2$ direzioni nulle distinte, ciò che in corrispondenza porta l'esistenza di uno spazio di dimensioni dispari $1, 3, \dots n-2$ o di dimensioni pari $0, 2, \dots n-2$ tirato da 0 i cui punti stanno fermi e quindi intorno ai quali ruoterà il corpo.

Per un caso particolare trattato cartesianamente si può confrontare la Nota del Tiercy già citata.

Osserviamo che per quanto vedemmo al n. 12 si può far uso del bivettore $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$ supplementare di $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ e porre:

$$\alpha = \underset{2}{\boldsymbol{\omega}} \dot{\times} \tag{4'}$$

adoperando cioè l'operazione di prodotto vettoriale interno.

Quindi si può anche scrivere

$$\frac{dM}{dt} = \underset{2}{\boldsymbol{\omega}} \dot{\times} (M - O), \tag{5'}$$

in modo che la rotazione istantanea può essere *rappresentata anche dal bivettore* $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$, in generale multiplo, e se si vuole *dalla somma dei bivettori semplici corrispondenti alle assiali* $2\mathrm{AH}(\mathbf{i}_r, \alpha\mathbf{i}_r)$.

25. Formule di Poisson. Moto di un corpo libero. Velocità di trascinamento. — Se $\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n$ costituiscono una n-pla fondamentale collegata con un corpo mobile, dalla formula (5) si ha in particolare, ponendo $M_r - O = \mathbf{i}_r$,

$$\frac{d\mathbf{i}_r}{dt} = \underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{i}_r, \qquad (r = 1, 2, \dots n), \tag{6}$$

ove $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ definisce lo stato cinetico di rotazione di un corpo fittizio che si muove intorno ad un punto fisso mantenendosi costantemente parallelo al corpo dato.

Se poi $\mathbf{u}$ è un vettore costante nel corpo si ha, sempre per la (5), ponendovi $M - O = \mathbf{u}$:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{u}. \tag{7}$$

Qualora invece il vettore $\mathbf{u}$ sia variabile anche nel corpo cioè variabile rispetto all'osservatore fisso O e all'osservatore (O_1) collegato al corpo mobile si ha, ragionando come in S_3 [1],

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_1 + \underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{u}, \tag{8}$$

ove $\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_1$ è la derivata di $\mathbf{u}$ calcolata dall'osservatore mobile col corpo.

Si ricavano allora subito le due formule fondamentali per la cinematica in S_n, analoghe a quelle di S_3.

Per la velocità di un punto M appartenente ad un corpo libero che si muove *(velocità di trascinamento)* essendo O_1 un punto collegato con questo, si ha

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dO_1}{dt} + \underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge (M - O_1) \tag{9}$$

e per la velocità del punto M, mobile rispetto ai due osservatori (O) ed (O_1) in moto fra loro, si ha:

$$\frac{dM}{dt} = \left(\frac{dM}{dt}\right)_1 + \left\{ \frac{dO_1}{dt} + \underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge (M - O_1) \right\} \tag{10}$$

che esprime il *teorema della composizione della velocità.*

Per indagare sulla generalizzazione delle formule riguardanti l'accelerazione, bisogna introdurre regole per la derivazione dei plurivettori, ciò che si può fare, sempre pensando all'intimo legame di questi con le omografie assiali.

Osserviamo che la (9) esprime un teorema il cui enunciato è del tutto analogo a quello che si suol dare nello spazio ordinario [2]: basta sostituirvi il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di S_3 con l'$(n-2)$-vettore $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$. E sempre in relazione alla formula (9) osserviamo che l'assiale $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge$ può essere degenere o no (quest'ultimo caso potrà avvenire soltanto se n è pari) e se è degenere, a seconda del suo rango, esisterà un S_1 (retta), oppure un S_2 (piano) ecc., fino alla possibilità d'esistenza di un S_{n-2} tale che tutti i punti contenuti in esso e collegati col corpo hanno soltanto velocità di traslazione.

Possiamo poi anche affermare, in base a quanto dicemmo nel n.° precedente, che a seconda della parità o disparità dell'indice n dello spazio S_n, detti spazi di punti con sola velocità di traslazione sono rispettivamente di dimensioni pari o dispari.

Se questa velocità poi risulta parallela a questi stessi spazi si tratta allora dell'estensione dell'asse istantaneo elicoidale considerato in S_3.

---

(1) Cfr. P. BURGATTI, *Lezioni di Mecc. razionale*, Zanichelli, Bologna, Cap. III.

(2) P. BURGATTI, *Lezioni di Meccanica razionale*, loc. cit., Cap. III, n.° 2.

Se $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ è di rango $n-2$, ossia è un $(n-2)$-vettore semplice, si avrà uno *stato cinetico elicoidale* intorno all' S_{n-2} parallelo ad $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ condotto per un punto O_1 del luogo dei punti del corpo che in quell' istante hanno soltanto velocità di traslazione.

Se $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge$ non è un' assiale degenere ossia è di rango zero, il che può avvenire soltanto se n è pari, esiste allora un punto C ed uno solo che ha velocità nulla. Invero, in tal caso (n. 3) anche l' assiale $(\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge)^{-1}$ non è degenere e, se diciamo C questo punto di velocità nulla, esso è dato da

$$0 = \frac{dO_1}{dt} + \underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge (C - O_1), \tag{11}$$

da cui si ricava

$$C - O_1 = -(\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge)^{-1} \frac{dO_1}{dt}. \tag{11'}$$

Sottraendo la (11) dalla (9) abbiamo

$$\frac{dM}{dt} = \underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge (M - C),$$

la quale esprime che *lo stato cinetico del corpo è una rotazione intorno a* C *definita da un* (n — 2)*-vettore multiplo* $\underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}}$ *il quale può sempre pensarsi somma di* n (n — 2)*-vettori semplici; quindi detta rotazione risulta in ogni istante la somma di* n *rotazioni semplici intorno ad* n S_{n-2} *passanti per* C [1].

---

[1] In una Memoria apparsa in due puntate negli « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », Vol. LXVII, 1932, avente per titolo: *Sul movimento dei sistemi rigidi in uno spazio di* n *dimensioni,* il dott. CATALDO AGOSTINELLI tratta, in maniera diversa, lo stesso argomento di Cinematica inspirandosi a fondamenti posti dal BOGGIO. Egli afferma che l' omografia di rotazione, che in sostanza è la nostra assiale $\alpha = \underset{n-2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge$, è per n pari *sempre propria* e da ciò ne trae la *sempre esistenza in un* $\mathrm{S_n}$ *pari* del centro istantaneo di rotazione C, considerato anche da noi.

Ora ciò non è vero poichè quell' omografia *può essere anche degenere* come lo mostrano casi particolari di movimento e la possibilità di poterne costruire arbitrariamente di tali.

L' affermazione inesatta dell'AGOSTINELLI dipende da un' altra errata affermazione dello stesso Autore. Invero Egli afferma che per una assiale « sarà l' I_n (invariante ennesimo) differente od uguale allo zero a seconda che l' S_n in cui si muove il sistema è di un numero pari o dispari di dimensioni ». Invece se n è dispari ciò è senz' altro vero, ma se n è pari, l' I_n dell' assiale può essere nullo e quindi l' assiale considerata dall'AGOSTINELLI può essere anche degenere.

Ne consegue che anche le altre deduzioni trattate dall'AGOSTINELLI nel caso di n pari, e fatte conseguire dal fatto di essere l' assiale considerata *sempre propria* non sono vere che allorquando si faccia esplicita ipotesi che quell' assiale sia effettivamente propria.

26. Casi particolari di movimento in un S_4. — In S_4 la formula fondamentale (9) che dà la velocità di trascinamento diviene

$$\frac{dM}{dt}=\frac{dO_1}{dt}+\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}\wedge(M-O_1), \tag{9'}$$

ove $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$ è un bivettore semplice o multiplo e potrà essere di rango 0 o 2.

Lo stato cinetico di rotazione potrà avvenire intorno ad un punto, nel primo caso, oppure intorno ad un piano, nel secondo caso.

Veniamo ora a trattare i seguenti casi particolari di movimento in S_4 che possono servire a mettere meglio in evidenza l'efficacia del metodo assoluto seguito.

Possiamo prospettarci le seguenti due questioni particolari:

1) Studio del moto di un corpo parallelamente ad un S_2, equivalente allo studio del moto di una figura (s_2) a due dimensioni nel suo S_2.

2) Studio del moto di un corpo parallelamente ad un S_3, equivalente allo studio del moto di una figura (s_3) a tre dimensioni nel suo S_3.

Consideriamo il primo movimento; sia $\underset{2}{\mathbf{a}}$ un bivettore semplice che definisce la giacitura (2–dimensionale) dell'S_2 entro cui avviene il movimento della figura piana (s_2). Sia $\underset{2}{\mathbf{u}}$ il bivettore supplementare di $\underset{2}{\mathbf{a}}$ il quale quindi risulterà semplice e totalmente ortogonale ad $\underset{2}{\mathbf{a}}$ e poniamo che possa essere rappresentabile mediante la coppia di vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$.

Nel nostro caso vale la formula fondamentale (9') essendo M ed O_1 due punti qualsiasi di (s_2).

Moltiplicandola scalarmente per $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, tenendo conto dell'ipotesi, abbiamo

$$\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}\wedge(M-O_1)\times\mathbf{u}_1=0,$$
$$\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}\wedge(M-O_1)\times\mathbf{u}_2=0,$$

ossia

$$\mathbf{u}_1\times\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}\wedge(M-O_1)=0,$$
$$\mathbf{u}_2\times\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}\wedge(M-O_1)=0,$$

e ricordando il n. 14, oppure la validità della permutabilità dei due segni $\times$ e $\wedge$, abbiamo

$$(M-O_1)\times\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}\wedge\mathbf{u}_1=0,$$
$$(M-O_1)\times\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}\wedge\mathbf{u}_2=0;$$

per l'arbitrarietà di $M - O_1$ risulta allora

$$\underset{2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{u}_1 = 0, \quad \underset{2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{u}_2 = 0,$$

ossia l'assiale $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge$ è degenere di seconda specie e $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$ è un bivettore di rango 2. Tenendo presente che siamo in uno spazio S_4, *possiamo concludere che* $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge$ *è un' assiale semplice e* $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$ *un bivettore semplice.*

Dunque: *In uno spazio* S_4, *nel moto di un corpo parallelamente ad un* S_2, *lo stato cinetico di rotazione è istante per istante definito da un bivettore semplice ossia è in ogni istante una rotazione semplice* (n. 25).

Inoltre $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$ risulta parallelo ad $\underset{2}{\mathbf{u}}$ e quindi anche totalmente ortogonale al piano S_2. Perciò la rotazione istantanea avviene intorno ad un S_2' totalmente ortogonale a S_2.

Sia C il punto di S_2 che per la figura piana (s_2) ha velocità nulla; esso è definito dalla relazione

$$0 = \frac{dO_1}{dt} + \underset{2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge (C - O_1).$$

Per quanto vedemmo al n. 12, $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge (C - O_1)$ equivale al vettore che si ottiene girando $C - O_1$ in S_2 di un angolo retto nel senso del bivettore semplice supplementare di $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$ e moltiplicandolo quindi per $\omega = \operatorname{mod} \underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$; usando l'operatore i (n. 12), abbiamo come in S_3:

$$C - O_1 = \frac{1}{\omega}\, i\, \frac{dO_1}{dt},$$

che ci permette la costruzione di C.

Veniamo ora allo studio del moto del corpo a tre dimensioni (s_3) che si muove nel suo S_3. Sia $\mathbf{n}$ il versore di S_4 normale ad S_3 che definisce l'orientamento di S_3. Dalla (9') moltiplicando scalarmente per $\mathbf{n}$, ricaviamo come in precedenza

$$\underset{2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{n} = 0,$$

da cui risulta che $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$ è in tal caso un bivettore almeno di rango 1.

D'altra parte il caso in esame non è altro che il moto ordinario di un corpo nello spazio S_3, onde per quanto insegna la cinematica classica, in questo S_3 (non in S_4) possiamo scrivere, essendo M ed O_1 due punti qualsiasi di (s_3),

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dO_1}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge (M - O_1),$$

ove $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore che definisce lo stato cinetico di rotazione di (s_3) in S_3 (non in S_4) e il prodotto vettoriale che vi figura è quello che ordinariamente si adopera nell' S_3. Per tutti i punti M_1 di questo S_3, che si trovano sull' asse per O_1 parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$ e per i quali si ha

$$M_1 - O_1 \wedge \boldsymbol{\omega} = 0,$$

abbiamo

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{dO_1}{dt};$$

tenendo presente ciò dalla (9'), per il vettore $\boldsymbol{\omega}$ di S_3 testè considerato abbiamo

$$\underset{2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{\omega} = 0,$$

con

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0.$$

Con ciò si vede che $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}} \wedge$ è omografia assiale degenere di seconda specie ed ha per direzioni nulle il vettore costante $\mathbf{n}$ esterno all' S_3 e perpendicolare ad esso ed il vettore $\boldsymbol{\omega}$ di S_3 variabile da istante a istante.

Perciò $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$ *è anche in questo caso un bivettore semplice* ed il moto del corpo (s_3) in S_4 è istante per istante una rotazione semplice.

Dunque: *in uno spazio* S_4, *il moto di un corpo* (s_3) *nel suo* S_3 *è istante per istante una rotazione semplice, definita da un bivettore semplice che è parallelo al vettore costante* $\mathbf{n}$ *normale all'* S_3 *ed al vettore* $\boldsymbol{\omega}$ *variabile col tempo che in* S_3 *definisce lo stato cinetico di rotazione del corpo* (s_3). L' S_2 determinato dal bivettore $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$ condotto per O_1 intorno al quale ruota in ogni istante il corpo (s_3) $\left(\text{essendo inoltre soggetto alla traslazione } \frac{dO_1}{dt}\right)$ è normale allo spazio S_3 ed è il luogo dei punti di (s_3), o collegati con esso, che hanno velocità di rotazione nulla avendo velocità di traslazione uguale a quella di O_1.

Se si considera un punto O_2 di (s_3) appartenente all' asse istantaneo elicoidale del moto di (s_3) nel suo S_3, la sua velocità $\frac{dO_2}{dt}$ sarà parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ e quindi anche ad $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$ ed ancora sarà parallela all' S_2 dianzi considerato. Allora, analogamente ed in estensione di quanto avviene nella cinematica ordinaria, si può dire che in ogni istante vi è uno *stato cinetico (atto di moto, moto tangenziale) elicoidale* e che l' S_2 condotto per O_2 parallelamente ad $\underset{2}{\boldsymbol{\omega}}$ è il *piano istantaneo elicoidale.*

Lo spazio S_5 avrà proprietà diverse da quello considerato di indice pari. Intanto il trivettore $\underset{3}{\boldsymbol{\omega}}$ che definirà lo stato cinetico di rotazione potrà essere di rango 1 oppure 3 ed esisterà nel primo caso una direzione **u** tale che

$$\underset{3}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{u} = 0;$$

nel secondo caso il trivettore è semplice e si avrà rotazione semplice intorno ad un S_3.

Perciò, in S_5, un corpo mobile intorno ad un punto fisso, anche se $\underset{3}{\boldsymbol{\omega}}$ non è semplice, ammette sempre un asse appartenente al corpo o collegato col corpo passante per il punto fisso e parallelo ad **u** i cui punti hanno velocità nulla. Questa retta però non è sufficiente a determinare le direzioni delle velocità dei punti del corpo.

A questo proposito riportandoci all'Appell, in loc. cit., pag. 87, bisognerà concludere che la risoluzione del sistema di equazioni omogenee che ivi figura

$$\omega_{ik} x^k = 0,$$

e che dovrebbe dare i punti di velocità nulla in S_n, porterà a punti che staranno in spazi pari se n è pari, dispari se n è dispari, come appunto ha in parte analizzato il Tierchy in loc. cit.

Naturalmente dopo questi sviluppi non sarà difficile l'estensione di alcune teorie della dinamica dei sistemi rigidi ed altre teorie fisico-matematiche o geometriche che anche in S_3 dipendono soltanto dal calcolo e non dall'analisi vettoriale.