Ueber die nomographische Lösung einer elementarmechanischen Extremumaufgabe.

Von ALEXANDER FISCHER (Praga-Cecoslovacchia).

Uebersicht: Es wird eine graphische Rechentafel für die Bestimmung der reduzierten Länge eines physikalischen Pendels nach dem allgemeinen Verfahren des Verfassers hergeleitet und gezeigt, wie sich das Minimum der letzteren mit Hilfe der Tafel ebenfalls formelmässig festlegen lässt. Die mathematischen Grundlagen hierzu werden im Aufsatz selbst entwickelt, so dass er ohne weitere Vorstudien verständlich ist.

1. **Einleitung und Aufgabestellung.** — In der angewandten Mathematik und in den technischen Wissenschaften kommt es bekanntlich des öfteren vor, dass man nicht nur den Verlauf einer Funktionsbeziehung leicht übersehen will, sondern auch die Extremwerte der in Betracht kommenden Veränderlichen kennen muss. Im folgenden soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, dass die heutige Nomographie, dieses ebenso interessante wie nützliche Teilgebiet der angewandten « Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus » (im Sinne von FELIX KLEIN), beiden Forderungen gerecht wird. Darüber hinaus wird dasselbe aber auch zeigen, dass durch die Anwendung elementargeometrischer Sätze die mit Hilfe der Differentialrechnung erhaltenen Ergebnisse in reizvoller Weise gedeutet und bestätigt werden können.

Der Entwurf des Rechenbildes (Nomogramms), bei dem ein Rechtwinkelkreuz als Ablesegerät dienen wird, soll nach meinem allgemeinen Verfahren (*) geschehen. Wie ersichtlich sein wird, ergibt dasselbe — neben Tafeln z. B. mit einfacher Ablesegerade — auch diese Tafeln auf einfachste Weise.

Die Berechnung der reduzierten Pendellänge erfolgt bekanntlich (vgl. z. B. (5)) nach der Formel:

(A) $$l = \frac{\Theta_s}{ms} + s,$$

(*) Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf den Schriftennachweis am Ende der Arbeit.

worin Θ_s das Trägheitsmoment des Pendels für eine durch den Schwerpunkt gehende Achse,

s den Abstand zwischen Schwerpunkt und Drehachse und

m die Masse des Pendels bedeutet.

Das Minimum von l ergibt sich nach den Regeln der Differentialrechnung zu

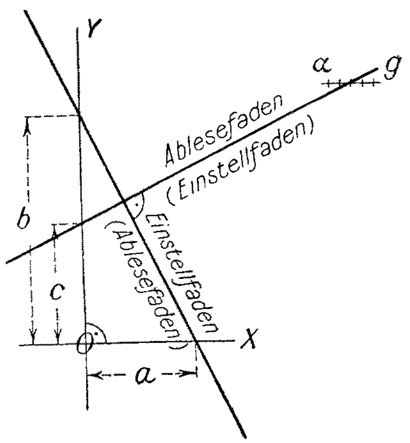
$$\text{(B1)} \quad l_{min} = 2s_b, \qquad \text{für} \qquad \text{(B2)} \quad s_b = \sqrt{\frac{\Theta_s}{m}}.$$

2. **Mathematische Grundlagen des Entwurfes.** — Dieselben sind in den folgenden paar Zeilen enthalten:

a) Die Gleichung der Geraden g mit der Richtungskonstante a/b, die auf der y-Achse eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems (xy) die Grösse c abschneidet, lautet:

$$\text{(I)} \qquad y = (a/b) \cdot x + c,$$

wodurch ein Rechtwinkelkreuz festgelegt wird. (s. Abb. 1) Hierbei ist einer der Fäden als « Ablesefaden », der andere als « Einstellfaden » zu bezeichnen, je nachdem ob er der gesuchten oder den gegebenen Veränderlichen der vorgelegten, zu vertafelnden Funktionsbeziehung zugeordnet ist.



b) Betrachtet man x und y als Funktionen eines Parameters α, also

$$\text{(II)} \quad x = x(\alpha), \qquad \text{(III)} \quad y = y(\alpha),$$

so bedeutet (I), dass die Kurve, die durch die beiden Gleichungen (II) und (III) in Parameterform definiert wird, von der Geraden g geschnitten wird.

c) Hierzu tritt schliesslich der leitende Grundgedanke (vgl. ([1])) des eingangs genannten Verfahrens: Die vorgelegte Funktionsbeziehung ist

zunächst rein formal

in die Gleichungsdreiheit:

Gleichung der « Ablesekurve » (insbesondere « Ablesegerade »);

Gleichung der « Lösenden Kurve » und

Gleichung von deren « Bezifferung »

zu zerfällen und diese Zuordnungsbeziehung ist

dann erst geometrisch

zu deuten — und zwar im vorliegenden Fall im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem. (Implizite Definition der allgemeinen « Fluchtlinientafel »!).

3. **Tafelentwurf.** — Die Anwendung des ebengesagten ergibt die Gleichungsdreiheit:

Gl. d. Ablesefadens:

(I) $$y = (\Theta_s/10m)x + l,$$

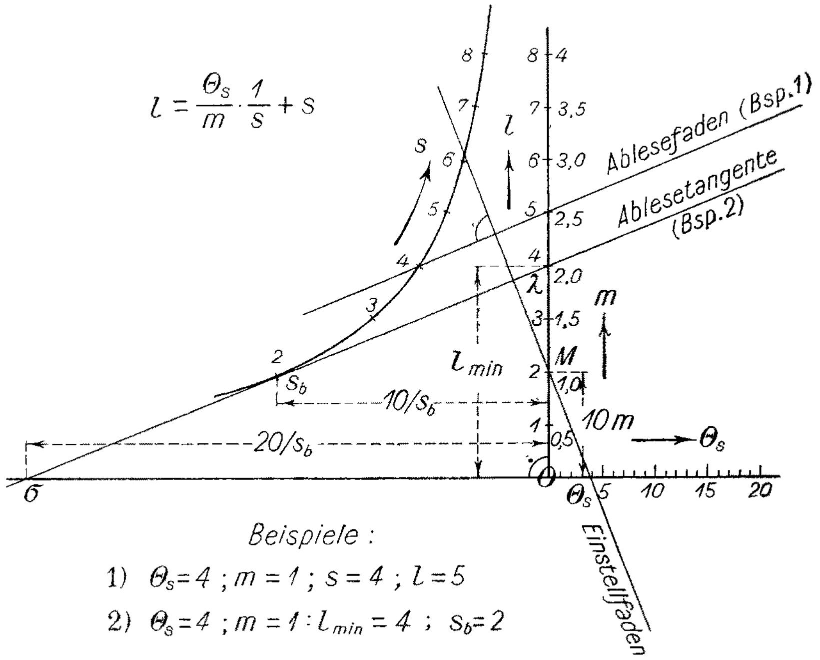
Gl. d. Lösenden Kurve und ihrer Bezifferung:

(II) $$x = -10s^{-1},$$

(III) $$y = s,$$

also die Parameterdarstellung der gleichseitigen Hyperbel $xy = -10$. Hierin ist 10 ein freigewählter Masstabfaktor, um die Tafel brauchbarer zu gestalten.

4. **Benutzung der Tafel.** — Durch die gegebenen Werte von Θ_s und m ist der Einstellfaden festgelegt. Derselbe ist hierauf solange in sich zu



verschieben, bis der Ablesefaden durch den ebenfalls gegebenen s-Wert auf der Lösenden Kurve hindurchgeht. Er schneidet dann auf der 2-Leiter das gesuchte 2 ab. (s. Beispiel 1 in Abb. 2).

5. **Extremumbestimmung mittels der Tafel.** — Wie unmittelbar ersichtlich, gelangt der Ablesefaden bei dieser Verschiebung in eine Grenzlage, die « Ablesetangente » (an die Lösende Kurve), der auf der l–Leiter ein Extremum von l, (im vorliegenden Fall das Minimum l_{min}), entspricht. (s. Beisp. 2 in Abb. 2). Der Berührungspunkt dieser Ablesetangente trägt dann die dem l_{min} entsprechende Bezifferung s_b.

Beide Grössen können aber unter Heranziehung des elementargeometrischen Satzes, dass das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer Hyperbeltangente im Berührungspunkt halbiert wird, durch folgende ganz elementaren Betrachtungen bestimmt werden.

Es ist auf Grund dieses Satzes: $2y_b = l_{min}$, oder, da nach (III) $y_b = s_b$: $2s_b = l_{min}$.

Diesem s_b entspricht nach (II): $x_b = -10s_b^{-1}$, die Ablesetangente schneidet daher auf der negativen x–Achse das Stück $O\sigma = 20s_b^{-1}$ ab. Die Betrachtung der beiden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke $MO\Theta_s$ und $\sigma O\lambda$ ergibt:

$$\frac{\Theta_s}{10m} = \frac{2s_b}{20s_b^{-1}} \quad \text{oder} \quad s_b^2 = \frac{\Theta_s}{m}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

6. **Anmerkungen.** — α) Wie leicht einzusehen, entfaltet das gegebene Verfahren seine volle Wirksamkeit erst im Falle höherer algebraischer oder transzendenter Funktionsbeziehungen, (vgl. ([2])), bei denen der Differentiationsprozess wieder auf solche führt und deren Auflösung bekanntlich allgemein rechnerisch nicht möglich ist. Die nomographische Lösungsart ergibt dann in einfachster Weise Näherungswerte, die nach Erfordernis rechnerisch beliebig verschärft werden können. Aber auch bei empirisch festgelegten Funktionsbeziehungen ist es mühelos anwendbar, es vermeidet hier die sonst unvermeidliche graphische Differentiation. (vgl. ([3])).

β) Beim neuerlichen Studium der Abhandlung von P. Luckey ([4]) — nach Abschluss meiner Arbeiten ([2]) und ([3]) — fand ich gelegentlich der Besprechung der Arbeiten von W. Margoulis daselbst die Bemerkung: « Die tangentiellen Berührungen (d. i. die Berührungen zweier Linien) haben sich für die Aufsuchung gewisser Höchst-und Niedrigstwerte brauchbar erwiesen ». Da mir die genannten Arbeiten nicht zugänglich sind, vermag ich nicht anzugeben, in welchem Zusammenhang sie mit dem Vorstehenden stehen.

SCHRIFTENNACHWEIS

([1]) A. Fischer, *Ueber ein neues allgemeines Verfahren zum Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomogrammen), insbesondere von Fluchtlinientafeln.* « Zeitschr. f. angewandte Math. u. Mech. », 7 (1927): H. 3 u. 5; 8 (1928): H. 4; 9 (1929): H. 5.

(2) A. FISCHER, *Ueber zwei Anwendungen der Nomographie auf Aufgaben der Baumechanik.* « HDI-Mitteilungen d. Hauptvereines deutsch. Ing. in d. Tschechoslow Republ. ». 21 (1932), H. 6, S. 117.

(3) A. FISCHER, *Ueber eine Anwendung der Nomographie auf eine Aufgabe aus dem Dynamobau.* Ebenda, H. 19-20, S. 405.

(4) P. LUCKEY, *Die Flächenschieber oder zweidimensionalen ebenen Rechenschieber.* « Zeitschr. f. angewandte Math. u. Mech. », 5 (1925), H. 3, S. 254.

(5) R. W. POHL, *Einführung in die Mechanik und Akustik.* 2, Aufl., Berlin 1931, S. 83.