Sulle condizioni di validità dei metodi di sommazione di Gronwall (*).

Memoria di LUIGI AMERIO (Milano)

Sunto. - *Si studiano le condizioni di validità dei metodi di sommazione (f, g) di GRONWALL, con ipotesi assai meno restrittive per le funzioni f e g di quelle fatte dal GRONWALL stesso. Si mettono in luce, successivamente, varie proprietà generali relative ai metodi (f, g), sotto le nuove condizioni, e si applicano questi alla teoria del prolungamento analitico di una serie di potenze*

Introduzione.

Una vasta classe di procedimenti di sommazione delle serie è stata definita da T. H. GRONWALL [1], con le seguenti considerazioni.

Una funzione $z = f(w)$, definita e continua per $|w| \leq 1$, sia analitica per $|w| \leq 1$, eccetto al più per $w = 1$, e dia la rappresentazione biunivoca e conforme di $|w| < 1$ in un campo aperto D interno a $|z| < 1$, facendo corrispondere $z = 0$ a $w = 0$, $z = 1$ a $w = 1$; la funzione inversa sia a sua volta regolare anche lungo il contorno l di D , eccetto al più per $z = 1$, e si abbia precisamente

$$(1) \quad 1 - w = (1 - z)^\lambda \psi(z)$$

con $\lambda \geq 1$, $\psi(z)$ analitica in D e su l , $\psi(1) > 0$, $\psi(0) = 1$.

Sia poi $g(w)$ una funzione analitica, rappresentata per $|w| < 1$ dalla serie

$$(2) \quad g(w) = \sum_0^\infty b_n w^n \quad b_n \neq 0$$

e avente l'espressione

$$(3) \quad g(w) = (1 - w)^{-\alpha} + \gamma(w)$$

con $\alpha > 0$, $\gamma(w)$ analitica per $|w| \leq 1$: si abbia inoltre $g(w) \neq 0$ per $|w| < 1$.

Chiameremo queste le *condizioni di Gronwall* per le funzioni $f(w)$ e $g(w)$.

Ciò posto, una serie $\sum_0^\infty u_v$ è detta dal GRONWALL sommabile (f, g) quando

(*) Lavoro eseguito presso il Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

le quantità $U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$ che si ricavano dall'identità

$$(4) \quad \sum_0^\infty u_\nu z^\nu = \frac{1}{g(w)} \sum_0^\infty U_n b_n w^n$$

tendono, per $n \rightarrow \infty$, a un limite finito s che si assume come somma generalizzata della serie data.

Come si vede, le operazioni con cui si passa dalle u_ν alle U_n sono due. In una prima, con la trasformazione $z = f(w)$, si muta la serie $\sum_0^\infty u_\nu z^\nu$ in una

$$(5) \quad \sum_0^\infty \gamma_m w^m.$$

Successivamente, dalla (4) si ricava

$$(6) \quad \sum_0^\infty \gamma_m w^m = \frac{1}{g(w)} \sum_0^\infty b_n U_n w^n$$

da cui, per la (2),

$$(7) \quad U_n = \sum_0^n \gamma_m \frac{b_{n-m}}{b_n}$$

cioè si applica alla serie $\sum_0^\infty \gamma_m$ un procedimento di sommazione di NOERLUND.

Si noti, a proposito della (7), che siccome è $f(0) = 0$, lo sviluppo di z^ν secondo le potenze di w comincia con la ν -ma potenza: si ha perciò

$$(8) \quad U_n = \sum_0^n a_{n,\nu} u_\nu$$

dove le $a_{n,\nu}$ dipendono dai coefficienti di $f(w)$ e $g(w)$, ma non dalle u_ν .

I metodi di GRONWALL sono molto generali e comprendono vari procedimenti di sommazione presentatisi nell'analisi.

Ad esempio, il metodo $(n, (1-n)^{-\alpha})$ è il metodo $(C, \alpha-1)$ di CESARO, con $\alpha > 0$; il metodo $\left(\frac{1-(1-n)^{\frac{1}{2}}}{1+(1-n)^{\frac{1}{2}}}, (1-n)^{-\frac{1}{2}} \right)$ è stato studiato dal DE LA

VALLÉE POUSSIN e successivamente generalizzato dal GRONWALL.

Un altro metodo di GRONWALL si è presentato in un mio recente lavoro [2] ed è stato studiato e ampliato dal BIRINDELLI; in esso si ha

$$(9) \quad U_n = \sum_0^n \frac{\binom{n}{\nu} \nu!}{n^\nu} u_\nu$$

ciò che equivale a porre, come si dimostra, $w = ze^{1-z}$, $g(w) = \frac{1}{1-z}$.

Il GRONWALL ha provato pei metodi (f, g) vari teoremi importanti. Notiamo fra questi il primo in cui si dimostra che se il $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ esiste finito, allo stesso valore tende la funzione

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} u_n z^n$$

quando $z \rightarrow 1$, restando in un campo angoloso col vertice in $z = 1$, di apertura $< \frac{\pi}{\lambda}$ e avente per bisettrice il segmento $1 \rightarrow 0$.

In un secondo teorema si prova che, se è $\lambda > 1$ e il contorno l di D ha in comune con la circonferenza $|z| = 1$ il solo punto $z = 1$, è sommabile (f, g) ogni serie sommabile (C, δ) con $\delta > -1$.

Successivamente il BIRINDELLI [3] ha ripresi e accuratamente studiati i metodi di GRONWALL, applicandoli fra l'altro alla sommazione della serie geometrica $\sum_0^{\infty} \xi^n$ verso la somma $\frac{1}{1-\xi}$ e determinando il relativo campo di sommabilità. Di qui ha ricavato, sfruttando la formula integrale di CAUCHY, un campo aperto in cui è certamente sommabile una serie di potenze $\sum_0^{\infty} a_n \xi^n$ ottenendone così il prolungamento analitico.

* * *

In questa Memoria si sono ampliate le condizioni di GRONWALL relative alle funzioni $f(w)$ e $g(w)$; si è potuto così provare che le ipotesi (1) e (3) possono essere grandemente allargate, soprattutto se ci si limita al problema del prolungamento analitico di una serie di potenze.

Inoltre si è dimostrato, sotto condizioni larghissime per la $f(w)$ e la $g(w)$, un teorema analogo al primo teorema di GRONWALL.

Infine si è completato il risultato del BIRINDELLI, perchè si è individuato per una serie di potenze un campo aperto Ω , internamente al quale è possibile la sommabilità, mentre non lo è esternamente (almeno nel caso in cui la funzione rappresentata in un intorno dell'origine dalla serie stessa sia uniforme oppure quando il campo D risulti interno ai suoi omotetici rispetto all'origine, τD , con $\tau > 1$, ciò che avviene, ad esempio, nei metodi precedentemente ricordati).

In quanto segue ammetteremo sempre che la funzione $z = f(w)$ sia analitica per $|w| < 1$, continua per $|w| \leq 1$ e stabilisca una corrispondenza biunivoca e conforme tra $|w| < 1$ e un campo aperto D semplicemente connesso in modo che sia $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Essendo poi $\frac{dz}{dw} \neq 0$ per $|w| < 1$, la funzione inversa $w = w(z)$ sarà analitica in tutti i punti di D .

Indicheremo con $\bar{D}$ il campo chiuso costituito dai punti di D e del contorno l , di equazione $z = f(e^{i\theta})$, che supporremo sia una linea di JORDAN, la quale, per noti teoremi [4], risulterà percorsa in un determinato verso dal punto $z = f(e^{i\theta})$, al variare di θ tra $-\pi$ e π ; inoltre la corrispondenza tra i due campi chiusi $|w| \leq 1$ e $\bar{D}$ sarà biunivoca e continua. Diremo infine che una proprietà vale in D , o in $\bar{D}$, quando è verificata in tutti i punti di D , o di $\bar{D}$.

1. **Condizioni relative alla funzione $z = f(w)$.** — Cerchiamo in un primo tempo di ampliare le condizioni relative alla $z = f(w)$, considerando metodi di sommazione del tipo $(f, (1-w)^{-\alpha})$ con $\alpha > 0$.

Per questo, posto

$$(10) \quad (1-w)^{-\alpha} = \sum_0^{\infty} A_n^{(\alpha)} w^n$$

e inoltre

$$(11) \quad \sum_0^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{(1-w)^{-\alpha}} \sum_0^{\infty} V_n A_n^{(\alpha)} w^n$$

dimostriamo il seguente

TEOREMA I. — *Se il contorno l di D è una curva rettificabile e $\varphi(z)$ è analitica nel campo $\bar{D}$, si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \varphi(1)$$

qualunque sia $\alpha > 0$.

DIMOSTRAZIONE. — Posto $z = x + iy$, $\varphi(z) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$ dimostriamo che le due funzioni $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ sono a variazione limitata sul contorno l .

Infatti essendo $\varphi(z)$ analitica in tutti i punti del campo chiuso $\bar{D}$, per ogni $\bar{z}$ di $\bar{D}$ si può costruire un cerchio di raggio $\bar{\rho} > 0$, finito, in modo che per $|z - \bar{z}| \leq \bar{\rho}$ sia $\varphi(z)$ analitica. Si ottiene così una famiglia di cerchi e ogni punto di $\bar{D}$ risulta interno almeno a uno di essi; essendo l'insieme $\bar{D}$ chiuso e limitato è possibile allora, per il lemma di PINCHERLE-BOREL, costruire con un numero finito di questi cerchi un campo chiuso $\bar{B}$ tale che ogni punto di $\bar{D}$ sia interno a $\bar{B}$.

Sia λ il contorno di $\bar{B}$ e $\delta > 0$ la minima distanza dei punti di l da quelli di λ . Dividiamo la curva l , di lunghezza finita v , in n parti, rispettivamente di lunghezze $v_1, v_2, \dots, v_n$, in modo che sia $v_i < \delta$, mediante i punti $P_0 = 1, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n = 1 = P_0$; sarà evidentemente $v_1 + v_2 + \dots + v_n = v$.

Considerando dapprima la funzione $\varphi_1(x, y) = \varphi_1(P)$ poniamo

$$(12) \quad \omega_n = \sum_{i=1}^n |\varphi_1(P_i) - \varphi_1(P_{i-1})|.$$

Ora il segmento $\overline{P_{r-1}P_r}$, essendo di lunghezza $d_r \leq v_r < \delta$, risulta interno a B ; inoltre in $\overline{B}$ la funzione $\varphi_1(x, y)$ è armonica e quindi esiste una costante positiva M tale che sia

$$(13) \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| \leq M \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| \leq M.$$

Siccome poi è

$$(14) \quad |\varphi_1(P_r) - \varphi_1(P_{r-1})| = d_r \left| \frac{\partial \varphi_1(T_r)}{\partial s_r} \right|$$

dove T_r è un punto interno del segmento $\overline{P_{r-1}P_r}$ e s_r ne è la direzione, si ricava per la (13)

$$(15) \quad |\varphi_1(P_r) - \varphi_1(P_{r-1})| \leq 2Md_r \leq 2Mv_r$$

perchè si ha

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_r} \right| = \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos(s, y) \right| \leq 2M.$$

Per la (15) si ricava dalla (12)

$$(16) \quad \omega_n \leq 2Mv$$

relazione che vale qualunque sia n : infatti se per un numero n_0 di divisioni qualcuno dei segmenti $\overline{P_{r-1}P_r}$ risulta di lunghezza $d_r \geq \delta$, è sempre possibile, coll'aggiunta di un numero finito di punti, sostituire al segmento stesso una spezzata i cui lati abbiano ciascuno lunghezza $< \delta$.

Compiuta la stessa operazione per tutti i segmenti $\overline{P_{r-1}P_r}$ di lunghezza $\geq \delta$ e indicando con n_1 il numero di punti che così si ottengono, si ha evidentemente

$$\omega_{n_0} \leq \omega_{n_1} \leq 2Mv.$$

Per la variazione ω di $\varphi_1(x, y)$ su l si ha perciò

$$\omega \leq 2Mv$$

cioè $\varphi_1(x, y)$ è a variazione limitata sul contorno stesso.

Allo stesso modo si ragiona per $\varphi_2(x, y)$.

Col cambiamento di variabile $z = f(w)$ la $\varphi(f(w))$ risulta analitica per $|w| < 1$: inoltre la sua parte reale e quella immaginaria risulteranno a variazione limitata sulla circonferenza $w = e^{i\theta}$, in virtù di quanto si è ora di-

mostrato e del fatto che essendo l una linea di JORDAN, ai punti P_i corrispondono sulla circonferenza $w = e^{i\vartheta}$ dei punti Q_i che si seguiranno in un determinato verso al crescere di ϑ .

Posto allora

$$(17) \quad \varphi(f(w)) = \sum_0^{\infty} \gamma_n w^n$$

il teorema sarà provato quando avremo dimostrato che la serie $\sum_0^{\infty} \gamma_n$ è sommabile $(C, \alpha - 1)$ con $\alpha > 0$.

Ora, posto $\gamma_n = \alpha_n - i\beta_n$, $w = \rho e^{i\vartheta}$, si ha per $\rho < 1$

$$(18) \quad \begin{aligned} \varphi(f(w)) &= \sum_0^{\infty} \rho^n \{ \alpha_n \cos(n\vartheta) + \beta_n \sin(n\vartheta) \} + \\ &+ i \sum_0^{\infty} \rho^n \{ -\beta_n \cos(n\vartheta) + \alpha_n \sin(n\vartheta) \} \\ &= \psi_1(\rho, \vartheta) + i\psi_2(\rho, \vartheta) \end{aligned}$$

dove è

$$\begin{aligned} \psi_1(\rho, \vartheta) &= \varphi_1(x(\rho, \vartheta), y(\rho, \vartheta)) \\ \psi_2(\rho, \vartheta) &= \varphi_2(x(\rho, \vartheta), y(\rho, \vartheta)). \end{aligned}$$

Dalla (18) si ricava in particolare

$$\psi_1(\rho, \vartheta) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} \rho^n \{ \alpha_n \cos(n\vartheta) + \beta_n \sin(n\vartheta) \}$$

e quindi

$$(19) \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(\rho, \vartheta) d\vartheta \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi \rho^n} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(\rho, \vartheta) \cos(n\vartheta) d\vartheta \\ \beta_n &= \frac{1}{\pi \rho^n} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(\rho, \vartheta) \sin(n\vartheta) d\vartheta. \end{aligned}$$

Ma, essendo $\psi_1(\rho, \vartheta)$ continua per $\rho \leq 1$, le (19) valgono anche se in esse si pone $\rho = 1$; ne segue che le costanti α_n e β_n sono i coefficienti di FOURIER della funzione $\psi_1(1, \vartheta)$ la quale è, per quanto si è visto, continua e a variazione limitata per $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$.

Per un noto teorema [5], la serie

$$(20) \quad \alpha_0 + \sum_1^{\infty} \{ \alpha_n \cos(n\vartheta) + \beta_n \sin(n\vartheta) \}$$

è allora sommabile $(C, \alpha - 1)$ con $\alpha > 0$ e vale $\psi_1(1, \vartheta)$.

Allo stesso modo si prova la sommabilità di

$$(21) \quad -\beta_0 + \sum_1^{\infty} \{ -\beta_n \cos(n\vartheta) + \alpha_n \sin(n\vartheta) \}$$

che vale $\psi_2(1, \vartheta)$.

Posto poi nelle (20) e (21) $\vartheta = 0$ ne segue che la serie $\sum_0^{\infty} \gamma_n$ è sommabile $(C, \alpha - 1)$, con $\alpha > 0$ e vale $\psi_1(1, 0) + i\psi_2(1, 0) = \varphi(1)$.

Il teorema è perciò dimostrato.

Facendo ora su α delle ipotesi più particolari possiamo provare altri due teoremi e precisamente:

TEOREMA II. — Se è $\alpha = 1$, $\varphi(z)$ analitica nel campo $\overline{D}$ e la linea l è rettificabile in un intorno di $z = 1$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \varphi(1).$$

DIMOSTRAZIONE. — Per le ipotesi fatte le funzioni $\psi_1(\rho, \vartheta)$, $\psi_2(\rho, \vartheta)$ risultano continue per $\rho \leq 1$ e inoltre le $\psi_1(1, \vartheta)$, $\psi_2(1, \vartheta)$ sono a variazione limitata in un intorno di $\vartheta = 0$.

Ne segue che le (19) valgono anche per $\rho = 1$ e le serie (20) e (21) sono convergenti per $\vartheta = 0$; da questo si deduce la tesi.

TEOREMA III. — Se è $\alpha > 1$, $\varphi(z)$ analitica nel campo D , continua nel campo $\overline{D}$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \varphi(1) \quad (*).$$

DIMOSTRAZIONE. — Bisognerà provare che la serie $\sum_0^{\infty} \gamma_n$ è sommabile $(C, \alpha - 1)$ con $\alpha > 1$.

Per questo osserviamo che, essendo $z = f(w)$ analitica per $|w| < 1$, continua per $|w| \leq 1$, lo sarà, per le ipotesi fatte, anche la $\varphi(f(w))$; sono perciò funzioni continue per $\rho \leq 1$ tanto $\psi_1(\rho, \vartheta)$ quanto $\psi_2(\rho, \vartheta)$.

Ne segue che le (19) continuano a valere se si pone in esse $\rho = 1$ e quindi le α_n e β_n sono i coefficienti di FOURIER dello sviluppo di $\psi_1(1, \vartheta)$. Essendo questa funzione continua, per un noto teorema [6] la serie (20) è sommabile $(C, \alpha - 1)$ con $\alpha > 1$ e vale $\psi_1(1, \vartheta)$.

Allo stesso modo si ragiona per la $\psi_2(1, \vartheta)$.

Ponendo poi $\vartheta = 0$ si ricava la sommabilità di $\sum_0^{\infty} \gamma_n$ che avrà per valore $\psi_1(1, 0) + i\psi_2(1, 0) = \varphi(1)$.

(*) $\varphi(1)$ è il $\lim_{z \rightarrow 1} \varphi(z)$, quando $z \rightarrow 1$ restando in $\overline{D}$.

OSSERVAZIONE. — Nel caso in cui sia soddisfatta la condizione di GRONWALL relativa alla $z=f(w)$ si può facilmente dimostrare che valgono i teoremi I, II, III.

Infatti la $z=f(w)$ è, in tale ipotesi, analitica per $|w| \leq 1$, $w \neq 1$, e della (1) segue che in un intorno di $w=1$ vale uno sviluppo del tipo

$$(22) \quad 1-z = \sum_1^{\infty} k_n (1-w)^{\frac{n}{\lambda}}$$

dove per $(1-w)^{\frac{1}{\lambda}}$ si prenderà quel ramo che si riduce a 1 per $w=0$.

Per la (22) la $z=f(w)$ è continua nel punto $w=1$; $\varphi(z)$ è perciò analitica in D , continua in $\overline{D}$, ed è applicabile il teorema III.

Dimostriamo ora che il contorno l di D è rettificabile.

Infatti dalla (22) si ricava

$$(23) \quad \frac{dz}{dw} = \sum_1^{\infty} k_n \frac{n}{\lambda} (1-w)^{\frac{n}{\lambda}-1}$$

e, siccome per $w=e^{i\vartheta}$ si ha $|1-w|=2\left|\sin \frac{\vartheta}{2}\right|$, se ne deduce che $\left|\frac{dz}{dw}\right|$ diventa infinita come $\vartheta^{\frac{1}{\lambda}-1}$ in prossimità di $\vartheta=0$.

Osservando poi che per gli altri valori di ϑ la $z=f(e^{i\vartheta})$ è analitica ne segue l'esistenza dell'integrale

$$v = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dz}{dw} \right| |dw| = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dz}{dw} \right| d\vartheta$$

che rappresenta la lunghezza della linea l .

Vale perciò il teorema I, e quindi il teorema II.

2. Condizioni relative alla funzione $g(w)$. — Cerchiamo ora di ampliare le condizioni relative alla $g(w)$.

Per questo, tenendo presenti le (10) e (11), poniamo

$$(24) \quad \begin{aligned} \sum_0^{\infty} u_{\nu} z^{\nu} &= \frac{1}{(1-w)^{-\alpha}} \sum_0^{\infty} V_n A_n^{(\alpha)} w^n \\ &= \frac{1}{g(w)} \sum_0^{\infty} U_n b_n w^n \end{aligned}$$

cioè sommiamo la serie $\sum_0^{\infty} u_{\nu}$ col metodo $(f, (1-w)^{-\alpha})$ e col metodo (f, g) .

AmMESSO che sia $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = s$, finito, cerchiamo le condizioni per cui è anche $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = s$.

Posto allora

$$(25) \quad g(w) = \sum_0^\infty b_n w^n = \frac{\sum_0^\infty \Delta_n^{(z)} w^n}{(1-w)^\alpha}.$$

si ricava

$$(26) \quad \Delta_n^{(z)} = \sum_0^n b_m A_{n-m}^{(-z)}$$

$$(27) \quad b_n = \sum_0^n \Delta_m^{(z)} A_{n-m}^{(z)}$$

dove $A_n^{(-z)}$ è il coefficiente di w^n nello sviluppo di $(1-w)^z$.

Ciò premesso, e ricordando che è $A_n^{(z)} > 0$, possiamo dimostrare il seguente

TEOREMA IV. — *Se la successione*

$$b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$$

soddisfa per $\alpha \geq 1$, alle condizioni

$$a) \quad \frac{\left| \sum_0^n \Delta_m^{(z)} A_{n-m}^{(z)} \right|}{\left| \sum_0^n \Delta_m^{(z)} \right| \left| A_{n-m}^{(z)} \right|} = \frac{|b_n|}{\left| \sum_0^n \Delta_m^{(z)} \right| \left| A_{n-m}^{(z)} \right|} > M > 0$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1}}{b_n} = 1$$

ed è $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = s$, finito, si ha pure

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = s.$$

DIMOSTRAZIONE. — Si ricava dalle (24) e (25)

$$(28) \quad U_n = \sum_0^n V_m \frac{A_m^{(z)} \Delta_{n-m}^{(z)}}{b_n}$$

e le condizioni necessarie e sufficienti perchè, essendo $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = s$, sia anche $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = s$, come è noto [7], sono:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{n-m}^{(z)}}{b_n} = 0$ per $m = 0, 1, \dots$
- 2) $\sum_0^n A_m^{(z)} \left| \frac{\Delta_{n-m}^{(z)}}{b_n} \right| < K < \infty$ per $n = 0, 1, \dots$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n A_m^{(z)} \frac{\Delta_{n-m}^{(z)}}{b_n} = 1.$

La condizione 3) è identicamente soddisfatta per la (27).

Quanto alla 2) si constata immediatamente che coincide con la condizione a) e che è $M = \frac{1}{K}$.

Resta da provare che, con le ipotesi a) e b) è soddisfatta la 1).

Per questo osserviamo che si ha per le (27) e a)

$$(29) \quad \left| \frac{b_m}{b_n} \right| < \frac{\sum_{r=0}^m |\Delta_r^{(\alpha)}| A_{m-r}^{(\alpha)}}{M \sum_{r=0}^n |\Delta_r^{(\alpha)}| A_{n-r}^{(\alpha)}} = K \frac{A_m^{(\alpha)} \sum_{r=0}^m |\Delta_r^{(\alpha)}| \frac{A_{m-r}^{(\alpha)}}{A_m^{(\alpha)}}}{\bar{A}_n^{(\alpha)} \sum_{r=0}^n |\Delta_r^{(\alpha)}| \frac{A_{n-r}^{(\alpha)}}{\bar{A}_n^{(\alpha)}}}$$

È poi, per $m \geq 1$,

$$(30) \quad A_m^{(\alpha)} = (-1)^m \binom{-\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+m-1)}{1 \cdot 2 \dots m}$$

$$(31) \quad = \left(1 + \frac{\alpha-1}{1}\right) \left(1 + \frac{\alpha-1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\alpha-1}{m}\right)$$

e quindi

$$(32) \quad \frac{A_m^{(\alpha)}}{A_{m-r}^{(\alpha)}} = \left(1 + \frac{\alpha-1}{m-r+1}\right) \dots \left(1 + \frac{\alpha-1}{m}\right).$$

Ne segue, se è $\alpha \geq 1$, per $m \leq n$,

$$\frac{A_{m-r}^{(\alpha)}}{A_m^{(\alpha)}} \leq \frac{A_{n-r}^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}}$$

e, per la (29),

$$(33) \quad \left| \frac{b_m}{b_n} \right| < K \frac{A_m^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}}.$$

Osserviamo ora che dalla condizione b) segue, per un dato m ,

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-m}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-m}}{b_{n-m+1}} \dots \frac{b_{n-1}}{b_n} = 1$$

perciò, siccome è

$$\frac{\Delta_{n-m}^{(\alpha)}}{b_n} = \frac{b_{n-m}}{b_n} \frac{\Delta_n^{(\alpha)}}{b_{n-m}},$$

posto $n-m=N$, per provare la 1), basterà dimostrare che si ha

$$(35) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta_N^{(\alpha)}}{b_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} = 0.$$

Ora è, per $m \geq 1$,

$$(36) \quad A_m^{(-\alpha)} = (-1)^m \binom{\alpha}{m} = \frac{[(m-1) - \alpha] [(m-2) - \alpha] \dots [-\alpha]}{m!}.$$

È poi $r-1 < \alpha \leq r$, con r intero positivo; ne segue che per $0 \leq m \leq r$ i termini della successione $A_0^{(-\alpha)} = 1, A_1^{(-\alpha)}, \dots, A_m^{(-\alpha)}, \dots$ hanno segni alternati, mentre per $m > r$, $A_m^{(-\alpha)}$ ha lo stesso segno di $A_r^{(-\alpha)}$ (oppure è nullo se è $\alpha = r$).

Inoltre si ha (*)

$$(37) \quad \sum_0^\infty A_m^{(-\alpha)} = 0$$

e preso $\varepsilon > 0$ si può determinare $p > r$ in modo che per $N \geq p$ sia sempre

$$(38) \quad \left| \sum_p^N A_m^{(-\alpha)} \right| = \sum_p^N |A_m^{(-\alpha)}| < \frac{\varepsilon}{2(K+1)}$$

e quindi, per la (37)

$$(39) \quad \left| \sum_0^{p-1} A_m^{(-\alpha)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(K+1)}.$$

Ora si ha, per $N \geq p$,

$$\left| \sum_0^N \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| \leq \left| \sum_0^{p-1} \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| + \sum_p^N \left| \frac{b_{N-m}}{b_N} \right| |A_m^{(-\alpha)}|$$

e quindi, per la (33),

$$(40) \quad \sum_0^N \left| \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| < \left| \sum_0^{p-1} \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| + K \left| \sum_p^N \frac{A_{N-m}^{(z)}}{A_N^{(z)}} A_m^{(-\alpha)} \right|.$$

Siccome poi è

$$(41) \quad (1-w)^z \frac{1}{(1-w)^z} = \sum_0^\infty w^N \sum_0^N A_{N-m}^{(z)} A_m^{(-\alpha)} \equiv 1,$$

si ricava, per $N \geq 1$,

$$(42) \quad \sum_0^N A_{N-m}^{(z)} A_m^{(-\alpha)} = 0$$

(*) Osserviamo che, per $r-1 < \alpha < r$, $m > r$, si ricava dalla formula di STIRLING

$$\begin{aligned} A_m^{(-\alpha)} &= \frac{(-\alpha)(-\alpha+1) \dots (-\alpha+r-1) \Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(r-\alpha) \Gamma(m+1)} \\ &= \frac{(-\alpha)(-\alpha+1) \dots (-\alpha+r-1) (m-\alpha-1)^{m-\alpha-1+\frac{1}{2}} e^{-(m-\alpha-1)+\frac{\vartheta'}{12(m-\alpha-1)}}}{\Gamma(r-\alpha) m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m+\frac{\vartheta''}{12m}}} \end{aligned}$$

con $0 < \vartheta' < 1$, $0 < \vartheta'' < 1$.

Ne segue

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A_m^{(-\alpha)}}{m^{-(\alpha+1)}} = \frac{(-\alpha)(-\alpha+1) \dots (-\alpha+r-1)}{\Gamma(r-\alpha)}.$$

e quindi, per la (40),

$$(43) \quad \left| \sum_0^N \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| < \left| \sum_0^{p-1} \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| + \\ + K \left| \sum_0^{p-1} \frac{A_{N-m}^{(\alpha)}}{A_N^{(\alpha)}} A_m^{(-\alpha)} \right| \rightarrow (1+K) \left| \sum_0^{p-1} A_m^{(-\alpha)} \right|$$

in virtù della condizione b) e della (32).

Si può allora determinare $N_0 \geq p$ in modo che per $N > N_0$ sia, per la (39),

$$(44) \quad \left| \sum_0^N \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| < \varepsilon$$

e quindi il teorema è completamente provato.

Nel caso in cui sia $0 < \alpha < 1$ vale il seguente

TEOREMA V. — *Se la successione*

$$b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$$

soddisfa, per $0 < \alpha < 1$, alle condizioni a) e b) del teorema IV e inoltre alla condizione

$$c) \quad \left| \frac{b_m}{b_n} \right| < K_1 \frac{A_m^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}}, \quad m \leq n.$$

se è $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = s$, finito, è anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = s.$$

DIMOSTRAZIONE. — Basterà provare che, mediante le condizioni poste si ha

$$(45) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta_N^{(\alpha)}}{b_N} = 0$$

ciò che è immediata conseguenza della condizione c) e delle (40), (41), (42), (43), (44), nelle quali si ponga K_1 in luogo di K .

OSSERVAZIONE. — Dimostriamo che se la $g(w)$ soddisfa alla condizione (3) di GRONWALL, soddisfa anche alle condizioni a) e b), se è $\alpha \geq 1$; a), b), c) se è $0 < \alpha < 1$.

Infatti in un tal caso è $b_n = A_n^{(\alpha)} + \beta_n$ con $|\beta_n| < B\tau^n$, $B > 0$ e $0 < \tau < 1$, per l'analiticità di $\gamma(w)$ per $|w| \leq 1$.

Ne segue immediatamente che è soddisfatta la condizione b).

Quando alla c) osserviamo che è

$$(46) \quad \frac{A_n^{(\alpha)}}{A_m^{(\alpha)}} \left| \frac{b_m}{b_n} \right| = \frac{1 + \frac{\beta_m}{A_m^{(\alpha)}}}{1 + \frac{\beta_n}{A_n^{(\alpha)}}} \quad m \leq n$$

ed è $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\beta_m}{A_m^{(z)}} = 0$. Perciò il numeratore è superiormente limitato; quanto al denominatore, ricordando che è $b_n \neq 0$, si può affermare che rimane superiore a un numero $\delta > 0$; la condizione c) è perciò verificata.

Considerando la condizione a) si ha, per la (25)

$$(47) \quad \sum_0^\infty \Delta_n^{(z)} w^n = 1 + (1-w)^z \gamma(w) \\ = 1 + \sum_0^\infty w^n \sum_0^n \beta_m A_m^{(-z)}$$

e, per la convergenza assoluta degli sviluppi di $(1-w)^z$ e di $\gamma(w)$ per $w=1$ ne segue la convergenza di $\sum_0^\infty |\Delta_n^{(z)}|$; per un noto teorema la serie stessa sarà perciò sommabile $(C, \alpha-1)$ con $\alpha \geq 1$.

Dimostriamo che è anche sommabile $(C, \alpha-1)$ con $\alpha > 0$.

Per questo basterà [8] dimostrare che è $n |\Delta_n^{(z)}| = O(1)$, cioè, per la (47),

$$(48) \quad n \left| \sum_0^n \beta_m A_m^{(-z)} \right| < k,$$

dove k è una costante positiva.

Ora si ha, indicando con q il più piccolo intero $\geq \frac{n}{2}$,

$$n \left| \sum_0^n \beta_m A_m^{(-z)} \right| \leq nB \sum_0^q \tau^{n-m} \left| A_m^{(-z)} \right| + nB \sum_{q+1}^n \tau^{n-m} \left| A_m^{(-z)} \right| \\ \leq nB \tau^{n-q} \sum_0^\infty \left| A_m^{(-z)} \right| + nB_1 n^{-(z+1)} \sum_0^\infty \tau^m \rightarrow 0$$

dove B_1 è un numero positivo (*).

La (48) è perciò dimostrata.

Ritornando alla condizione a) osserviamo che deve essere

$$\frac{|b_n|}{\sum_0^n |\Delta_m^{(z)}| \frac{A_m^{(z)}}{A_{n-m}^{(z)}}} > M > 0$$

cioè

$$\frac{\left| 1 + \frac{\beta_n}{A_n^{(z)}} \right|}{\sum_0^n |\Delta_m^{(z)}| \frac{A_m^{(z)}}{A_{n-m}^{(z)}}} > M$$

(*) V. teorema IV, (*).

ciò che avviene certamente perchè il numeratore $\rightarrow 1$ (ed è $b_n \neq 0$) e il denominatore resta limitato essendo la serie $\sum_{m=0}^{\infty} |\Delta_m^{(x)}|$ sommabile $(C, \alpha - 1)$ con $\alpha > 0$.

3. Proprietà generali dei metodi (f, g) . — *a)* Tenendo conto dei teoremi IV e V si possono generalizzare i teoremi I, II, III.

Si ha così:

TEOREMA VI. — *Se il contorno l di D è una curva rettificabile e la $g(w)$ soddisfa alle condizioni del teorema V, la serie $\sum_{v=0}^{\infty} u_v$ è sommabile (f, g) e vale $\varphi(1)$, supposta la $\varphi(z)$ analitica nel campo $\overline{D}$.*

TEOREMA VII. — *Se il contorno l è rettificabile in un intorno di $z = 1$ e la $g(w)$ soddisfa alle condizioni*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1}}{b_n} = 1 \qquad b_n \neq 0$$

$$|b_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |b_m - b_{m-1}| < K |b_n|$$

la serie $\sum_{v=0}^{\infty} u_v$ è sommabile (f, g) e vale $\varphi(1)$, supposta la $\varphi(z)$ analitica nei punti di $\overline{D}$.

TEOREMA VIII. — *Se la $g(w)$ soddisfa alle condizioni del teorema IV per un valore $\alpha > 1$, la serie $\sum_{v=0}^{\infty} u_v$ è sommabile (f, g) e vale*

$$\varphi(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \varphi(z)$$

quando la $\varphi(z)$ sia analitica in D , continua in $\overline{D}$, e $z \rightarrow 1$ restando in $\overline{D}$.

b) Una notevole conseguenza del teorema VIII è il seguente

TEOREMA IX. — *Se il contorno l di D ha tutti i punti, eccetto $z = 1$, interni alla circonferenza $|z| = 1$, e inoltre il campo D è interno a un campo angoloso T col vertice in $z = 1$, di ampiezza $< \pi$ e avente per bisettrice il segmento $1 \overline{1} 0$, è sommabile (f, g) ogni serie $\sum_{v=0}^{\infty} u_v$, la quale sia sommabile (C, δ) (con un valore $\delta > -1$), quando la $g(w)$ soddisfi alle condizioni del teorema IV per un valore $\alpha > 1$.*

DIMOSTRAZIONE. — Supposto che la serie $\sum_{v=0}^{\infty} u_v$ sia sommabile (C, δ) , con $\delta > -1$, e converga al valore s , sarà, per un noto teorema, $\lim_{z \rightarrow 1} \varphi(z) = s$, quando $z \rightarrow 1$ in T e quindi, a maggior ragione, restando nel campo $\overline{D}$. Essendo poi tutti i punti di $\overline{D}$, escluso $z = 1$, interni alla circonferenza $|z| = 1$, si può affermare che la $\varphi(z)$ è continua in $\overline{D}$, analitica in D .

Applicando il teorema precedente si ricava allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = s.$$

OSSERVAZIONE. — A proposito del teorema IX bisogna notare che due metodi (f_1, g_1) e (f_2, g_2) , soddisfacenti entrambi alle condizioni in esso richieste con due valori $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 > 1$, possono attribuire valori diversi a una serie $\sum_0^\infty u_n$ la quale non sia sommabile (C, δ) per nessun $\delta > -1$.

Si ponga ad esempio $u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{1}{2} 2^n$, sicchè sarà $\varphi(z) = \sqrt{\frac{1}{2} - z}$, e supponiamo che il campo $\bar{D}_1$ relativo alla $f_1(z)$, pur soddisfacendo alle condizioni del teorema IX, non contenga il punto singolare $z = \frac{1}{2}$ ma sia tale che per $R(z) = \frac{1}{2}$ si abbia pei suoi punti $I(z) > 0$.

Ora quando $z \rightarrow 1$ in $\bar{D}_1$ la funzione $\sqrt{\frac{1}{2} - z}$, analitica nei punti di $\bar{D}_1$, $\rightarrow \frac{-i}{\sqrt{2}}$; si ha perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^{(1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Se adesso supponiamo che il campo $\bar{D}_2$, relativo a $f_2(z)$, sia costituito dai punti coniugati di quelli di $\bar{D}_1$, quando $z \rightarrow 1$, restando in $\bar{D}_2$, la funzione $\sqrt{\frac{1}{2} - z}$, analitica nei punti di $\bar{D}_2$, $\rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}}$ e quindi si ricava

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

c) Nei teoremi VI, VII, VIII si pone in relazione l'analiticità di $\varphi(z)$ in D o in $\bar{D}$ colla sommabilità (f, g) della serie $\sum_0^\infty u_n$, relazione che è ulteriormente precisata dal

TEOREMA X. — Se $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ esiste finito e la funzione $g(w)$ è analitica e $\neq 0$ per $|w| < 1$, la $\varphi(z)$ è analitica in tutti i punti del campo D .

DIMOSTRAZIONE. — Siccome esiste finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$, esiste una costante positiva M per cui è

$$|U_n| \leq M$$

e quindi

$$(49) \quad |U_n b_n w^n| \leq M |b_n w^n|.$$

Siccome poi per $|w| < 1$ converge la serie

$$(50) \quad \sum_0^{\infty} |b_n w^n|$$

per la (49) sarà pure convergente la

$$\sum_0^{\infty} U_n b_n w^n$$

e rappresenterà una funzione analitica per $|w| < 1$.

Ne segue, ricordando che è $g(w) \neq 0$ per $|w| < 1$, l'analiticità nello stesso campo di

$$\frac{1}{g(w)} \sum_0^{\infty} U_n b_n w^n$$

cioè, per la (6), di

$$\varphi(f(w)) = \sum_0^{\infty} \gamma_m w^m$$

e quindi di $\varphi(z)$ in D , a causa della corrispondenza biunivoca e conforme tra il cerchio $|w| < 1$ e il campo D .

d) Sia σ una linea continua, aperta, avente un estremo in $z=1$. Diremo che la serie $\sum_0^{\infty} u_n$ è sommabile con un metodo di POISSON generalizzato (P, σ) , quando esiste finito il

$$\lim_{z \rightarrow 1} \varphi(z)$$

supposto che $z \rightarrow 1$ lungo σ ; come valore della serie si assumerà il limite stesso.

Ciò premesso, un'estensione del 1° teorema di GRONWALL è data dal seguente

TEOREMA XI. — *Se la $g(w)$ soddisfa alle condizioni del teorema X e per i coefficienti $b_n = \beta_n + i\delta_n$ del suo sviluppo si ha $\beta_n > 0$ per $n > n_0$ sufficientemente grande, $\sum_0^{\infty} \beta_n = +\infty$, $\sum_0^{\infty} |\delta_n| = k$, finito; e se la serie $\sum_0^{\infty} u_n$ è sommabile (f, g) , essa è anche sommabile (P, σ) , con lo stesso valore, quando come linea σ si prenda quella di equazione $z=f(w)$, con $0 \leq w \leq 1$.*

DIMOSTRAZIONE. — Posto $s = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$, pel teorema X la funzione $\varphi(z)$ è analitica in D . Col cambiamento di variabile $z=f(w)$, essa risulta analitica per $|w| < 1$ e si ha

$$\varphi(f(w)) = \frac{\sum_0^{\infty} U_n b_n w^n}{g(w)}$$

da cui

$$(51) \quad \varphi(f(w)) - s = \frac{\sum_0^\infty (U_n - s) b_n w^n}{g(w)}.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per $n > n_1$ sarà $|U_n - s| < \frac{\varepsilon}{3}$; preso N maggiore del più grande tra i numeri n_0 e n_1 , siccome è $\lim_{w \rightarrow 1} \sum_N^\infty \beta_n w^n = +\infty$ quando $w \rightarrow 1$ assumendo valori reali, per $0 \leq w_0 \leq w < 1$ sarà $\sum_N^\infty \beta_n w^n > k + \sum_0^{N-1} |b_n|$ e si avrà

$$(52) \quad |\varphi(f(w)) - s| \leq \frac{\sum_0^{N-1} |(U_n - s) b_n| + \frac{\varepsilon}{3} k + \frac{\varepsilon}{3} \sum_N^\infty \beta_n w^n}{\sum_N^\infty \beta_n w^n - (k + \sum_0^{N-1} |b_n|)}.$$

Posto $A = \sum_0^{N-1} |(U_n - s) b_n| + \frac{\varepsilon}{3} k$, $B = k + \sum_0^{N-1} |b_n|$, sarà allora

$$|\varphi(f(w)) - s| \leq \frac{A}{\sum_N^\infty \beta_n w^n - B} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{1 - \frac{B}{\sum_N^\infty \beta_n w^n}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

quando sia $w_0 \leq w_1 \leq w < 1$.

Ricordando che la funzione $z = f(w)$ è continua per $|w| \leq 1$, e quindi per $w_1 \leq w \leq 1$, ne segue la tesi.

Da questo teorema si ricava che, nelle ipotesi fatte, il metodo di sommazione (f, g) non è più potente del metodo di POISSON generalizzato.

Inoltre se una serie è sommabile coi metodi (f, g_1) e (f, g_2) i valori che si ottengono sono eguali, mentre, come risulta dall'osservazione che segue al teorema IX, non sono eguali in generale i valori ottenuti con due metodi (f_1, g_1) , (f_2, g_2) .

Bisogna però ora osservare che nella grande maggioranza dei metodi di sommazione usati in pratica (ad esempio in quelli ricordati nell'introduzione) i coefficienti dello sviluppo di $z = f(w)$ (e così pure i b_n), sono reali e quindi la linea σ è costituita dal segmento $0 \leq w \leq 1$.

Ne segue che, se si fa una tale ipotesi su $f_1(w)$ e $f_2(w)$, supposta la serie $\sum_0^\infty u_n$ sommabile (f_1, g_1) e (f_2, g_2) , i valori che si ottengono sono eguali, quando naturalmente $g_1(w)$ e $g_2(w)$ soddisfino alle condizioni del teorema XI.

Ora queste, per quel che riguarda i b_n , sono certo verificate se i b_n

sono reali e si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1}}{b_n} = 1 \quad |b_n| > H A_n^{(\alpha)} \quad \alpha > 0$$

dove H è una costante positiva, cioè quando abbiano luogo le b) e (33) del teorema IV o le b) e c) del teorema V.

Infatti in tal caso per $n > n_0$ sufficientemente grande i b_n avranno tutti lo stesso segno, per esempio positivo (se fosse $b_n < 0$, basterebbe cambiar segno alle $g(n)$, il che non altera il valore di U_n); sarà allora per $n > n_0$,

$$b_n > H A_n^{(\alpha)}$$

e la serie $\sum_0^\infty b_n$ divergerà a $+\infty$.

4. I metodi (f, g) e il prolungamento analitico di una serie di potenze.

— Nel trattare l'applicazione dei metodi (f, g) al prolungamento analitico di una serie di potenze faremo l'ipotesi che le funzioni $f(w)$ e $g(w)$ soddisfino rispettivamente alle condizioni del teorema I (contorno l rettificabile) e dei teoremi V e X. Si supporrà inoltre che tutti i punti della linea l escluso $z=1$ siano interni alla circonferenza $|z|=1$.

Si abbia ora la serie di potenze

$$F(z) = \sum_0^\infty a_\nu z^\nu$$

e si dia a z un valore $\xi \neq 0$. Indicando con ξD e $\xi \bar{D}$ i campi che si ottengono da D e C moltiplicandone i punti per ξ , possiamo dimostrare il

TEOREMA XII. — *Se la funzione $F(z)$ è analitica in $\xi \bar{D}$ la serie $\sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu$ è sommabile (f, g) e vale $F(\xi)$.*

Se in ξD esiste qualche singolarità della $F(z)$ la serie stessa non è sommabile (f, g) .

DIMOSTRAZIONE. Se $F(z)$ è analitica in $\xi \bar{D}$, posto $u_\nu = a_\nu \xi^\nu$, la funzione $\varphi(z) = \sum_0^\infty u_\nu z^\nu$ è analitica in $\bar{D}$ e pel teorema VI la serie $\sum_0^\infty u_\nu$ è sommabile (f, g) e vale $\varphi(1) = F(\xi)$.

Se in ξD esiste qualche singolarità della $F(z)$, in D esisterà qualche singolarità della $\varphi(z)$ e, pel teorema X, la serie $\sum_0^\infty u_\nu$ non sarà sommabile (f, g) .

Supponiamo ora che la $F(z)$ abbia una sola singolarità al finito nel punto $z = \xi_0$.

Indicata con l^{-1} la linea di equazione

$$z = \frac{1}{f(e^{i\vartheta})} \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi$$

dimostriamo che la serie $\sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu$ è sommabile (f, g) , e vale $F(\xi)$, per ξ appartenente al campo aperto A_0 , avente per contorno la linea $\xi_0 l^{-1}$, mentre non è sommabile (f, g) se ξ è esterno ad A_0 .

Infatti, pel teorema X, la sommabilità si ha nei punti ξ per cui è $\xi f(w) \neq \xi_0$ per ogni valore w con $|w| \leq 1$, cioè $\xi \neq \frac{\xi_0}{f(w)}$ e quindi appartenente ad A_0 ; la sommabilità viene a mancare nei punti ξ per cui esista un w_1 , con $|w_1| < 1$, tale che si abbia $\xi f(w_1) = \xi_0$, cioè per ξ esterno ad A_0 .

Nel caso in cui la funzione $F(z)$ abbia più di un punto singolare, ma sia uniforme, si indichi con ξ_i un generico punto singolare e con A_i il campo aperto costituito dai punti interni alla linea $\xi_i l^{-1}$ e con Ω l'insieme costituito dai punti comuni a tutti gli A_i .

Si dimostra [9] che Ω è un campo aperto semplicemente connesso.

Se ξ è in Ω , nessun punto singolare ξ_i della $F(z)$ cadrà nel campo $\xi \bar{D}$ e la serie $\sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu$ sarà sommabile (f, g) e varrà $F(\xi)$; se ξ è esterno a Ω almeno un punto singolare ξ_i della $F(z)$ cadrà in ξD e verrà a mancare la sommabilità (f, g) della serie stessa.

Inoltre, per l'ipotesi fatta sulla linea l , ad Ω appartengono i punti di analiticità della $F(z)$ non esterni alla circonferenza di convergenza della serie $\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$.

Nel caso in cui la $F(z)$ (considerata come complesso di tutti i suoi elementi) non sia uniforme potranno esistere dei suoi punti singolari $\bar{\xi}_p$ che cadano internamente alla circonferenza di convergenza, di raggio R , della serie $\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$.

A questi punti si giunge però eseguendo il prolungamento analitico lungo linee $\bar{\sigma}_p$ che partano da $z=0$ e avvolgano dei punti singolari non interni alla circonferenza stessa.

Sia ξ_i un punto singolare della $F(z)$, soddisfacente alla condizione $|\xi_i| \geq R$ e Ω' il campo aperto, semplicemente connesso, costituito dai punti comuni a tutti gli A_i relativi ai punti ξ_i .

Il campo Ω' contiene manifestamente i punti $\bar{\xi}_p$, però siccome non si può tracciare nessuna linea $\bar{\sigma}_p$ che non sia parzialmente esterna a Ω' , gli $\bar{\xi}_p$ non

sono da considerare come punti singolari e in Ω' la $F(z)$ risulta analitica e uniforme.

Se allora ξ appartiene a Ω' , siccome nel campo $\xi\bar{D}$ non può cadere nessun punto ξ_i , ne segue la sommabilità (f, g) di $\sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu$ che varrà $F(\xi)$.

Un altro campo Ω'' in cui è sicuramente possibile la sommabilità (f, g) della serie data, è stato indicato dal BIRINDELLI [10].

Precisamente si ha che, se l'elemento di funzione analitica si può prolungare analiticamente in un campo semplicemente connesso Σ , dando luogo a un ramo monodromo $F(\xi)$, la serie data sarà sommabile (f, g) verso la somma $F(\xi)$ per ξ interno all'insieme SA_0 , dove S è l'insieme complementare di Σ , rispetto al piano z .

Nel caso in cui Σ è la stella rettilinea, S è costituito dai punti $\tau\xi_i$, dove i punti ξ_i sono certi punti singolari del ramo (quelli che si incontrano nel prolungamento analitico della $F(z)$ lungo semirette spiccate da $z=0$), ed è $\tau \geq 1$. La sommabilità sarà allora possibile per ξ interno a tutti i campi $\xi_i A_0$ e ai loro omotetici rispetto all'origine con rapporto $\tau > 1$.

È chiaro che il ragionamento del BIRINDELLI equivale al considerare come punti singolari tutti i punti di S .

Se Ω è il campo aperto, costituito dai punti appartenenti a uno almeno dei campi Ω' e Ω'' , possiamo affermare che, per ξ in Ω , la serie $\sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu$ è sommabile (f, g) e vale $F(\xi)$.

Supponiamo ora che il campo D sia interno ai suoi omotetici rispetto all'origine, con rapporto $\tau > 1$. In tal caso, assumendo come campo Σ la stella rettilinea, Ω'' sarà costituito dalla parte comune a tutti i campi $\xi_i A_0$; inoltre conterrà Ω' e quindi coinciderà con Ω .

Se allora ξ appartiene a Ω , la serie $\sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu$ è sommabile (f, g) e vale $F(\xi)$; se invece ξ è esterno a Ω , cade entro ξD almeno uno dei punti ξ_i e il raggio vettore che lo congiunge a $z=0$: ne segue, pel teorema XII, che la serie data non è sommabile (f, g) .

BIBLIOGRAFIA

1. T. H. GRONWALL, *Summation of series and conformal mapping*, « Annals of Mathematics », Second series, Vol. 33, 1932.
2. L. AMERIO, *Un metodo di sommazione per le serie di potenze e sua applicazione alla teoria della trasformazione di Laplace*, « Ann. Sc. N. di Pisa », Serie II, 1939.
3. C. BIRINDELLI, *Contributo all'analisi dei metodi di sommazione di Gronwall*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », Tomo LXI, 1938, p. 157, 176.

-
4. C. CARATHEODORY, *Conformal representation*, « Cambridge Tracts », 1932, p. 86.
 5. E. KOGNETLIANZ, *Summation des series et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques*, « Mem. des Sc. Math. », p. 66, Paris, Gauthier-Villars, 1931.
 6. G. H. HARDY, *On the summability of Fourier's series*, « London Math. Soc. Proc. », Vol. 12, 1913, p. 365, 372.
 7. O. TOEPLITZ, *Ueber allgemeine lineare Mittelbildungen*, « Prace mat.-fiz. », Vol. 22, 1913, p. 113, 119.
 8. G. H. HARDY e J. E. LITTLEWOOD, *Contributions to the arithmetic theory of series*, « London Math. Soc. Proc. », Vol. 11, 1911, p. 462, 463.
 9. C. BIRINDELLI, *Sull'applicazione dei metodi di sommazione di Gronwall al problema del prolungamento analitico*, « Ann. Sc. N. di Pisa », Serie II, Vol. VI, 1937, p. 182.
 10. C. BIRINDELLI, v 3, p. 170, 171.
-