Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni dipendenti dal tempo.

Memoria di DARIO GRAFFI (a Bologna).

Sunto. - *Si estendono, sotto opportune ipotesi, i teoremi di reciprocità di BETTI e MAXWELL alla dinamica dei corpi elastici e i teoremi di LORENTZ-SOMMERFELD nell'elettromagnetismo a fenomeni non sinusoidali. Vengono anche stabiliti teoremi di reciprocità per la trasmissione del calore non stazionaria. I risultati sono conseguiti mediante sistematica applicazione della trasformazione di LAPLACE.*

Introduzione.

Numerosi sono i teoremi di reciprocità ⁽¹⁾ che si incontrano nei vari capitoli della meccanica e della fisica-matematica ma, almeno i più noti, sono validi per fenomeni indipendenti dal tempo. Così il teorema di BETTI si riferisce all'equilibrio elastico, i teoremi di VOLTERRA e DONATI principalmente alle correnti elettriche stazionarie, ecc..

È ovvio come l'estensione dei teoremi di reciprocità a fenomeni variabili nel tempo, presenti, talvolta, notevole interesse. Perciò sono già state fatte numerose ricerche in proposito ⁽²⁾. In alcune di queste si completano con opportuni termini le equazioni valide per fenomeni indipendenti dal tempo. Così, ad esempio, il teorema di BETTI si estende alla dinamica dei corpi elastici aggiungendo alle forze applicate le forze d'inerzia col segno cambiato. Ma, come si comprende anche da questo esempio, detti termini complemen-

⁽¹⁾ I principali teoremi di reciprocità stabiliti in Italia sono ottimamente esposti nella comunicazione del PUPPINI al Congresso Internazionale dei Matematici di Toronto, 1924, vol. II dei « Proceedings », pag. 429. Il prof. LELLI (« Annali di Matematica pura e applicata », serie IV, tomo III, pag. 133, 1925) ha dimostrato come i teoremi di reciprocità più noti possono farsi discendere da alcune equazioni fondamentali da lui stabilite.

⁽²⁾ Il teorema di reciprocità sulle acque filtranti (incompressibili) dovuti al PUPPINI per quanto mi consta è l'unico valido tanto se il moto delle acque dipende dal tempo quanto nel caso contrario. Ma qui si presenta la fortunata circostanza che le equazioni differenziali che reggono il fenomeno sono indipendenti dal tempo

tari sono, in generale incogniti, quindi l'utilizzazione pratica del teorema di reciprocità è, di solito, assai limitata ⁽¹⁾.

Altre ricerche invece presuppongono il fenomeno variabile col tempo in modo periodico o meglio sinoidale. Ad esempio se il moto è sinoidale il teorema di BETTI è valido senza aggiungere le forze d'inerzia. Un gran numero di teoremi di questo genere si trova enunciato nella « Theory of Sound » di Lord RAYLEIGH, dove sono stabilite anche relazioni di reciprocità per le oscillazioni libere dei corpi elastici ⁽²⁾. Ad essi bisogna aggiungere i teoremi di DONATI ⁽³⁾ sulle correnti alternate e quelli della radiotelegrafia dovuti a LORENTZ, SOMMERFELD ⁽⁴⁾, CARSON ⁽⁵⁾. Ricorderemo infine il recente teorema di E. FROLA ⁽⁶⁾.

Ci proponiamo, in questo lavoro, di stabilire teoremi di reciprocità validi per fenomeni variabili in modo qualunque col tempo. Per raggiungere i risultati useremo sistematicamente la trasformazione di LAPLACE che ci permetterà stabilirli in modo semplice e rapido. È ben vero che per applicare questa trasformazione dovremo fare alcune ipotesi sulle funzioni che rappresentano alcune grandezze. Ma tali ipotesi sono, come si vedrà, così intuitive dal punto di vista fisico, che non sarà difficile ammetterle. E del resto vedremo in appendice che, almeno in un caso particolare, esse sono superflue e forse si avrebbe potuto farne sempre a meno, a prezzo però di appesantire inutilmente il nostro lavoro.

Si potrebbe obiettare che certi teoremi stabiliti in queste pagine possono dedursi da quelli validi per fenomeni periodici con una opportuna applicazione dell'integrale di FOURIER. Ma se si vuol spingere a fondo la questione col dovuto rigore, sono necessarie ipotesi molto meno intuitive delle nostre ⁽⁷⁾.

⁽¹⁾ Non è escluso però che in qualche caso, anche questi teoremi possano rendere utili servizi. Così il teorema di reciprocità esteso alla trasmissione del calore non stazionaria ha permesso al PUPPINI (« *Monitore Tecnico* » 1916) di ottenere interessanti risultati sulla trasmissione del calore nelle condotte in pressione.

⁽²⁾ Vol. I, pp. 134-35, 150 e segg. È da notare che tutti i teoremi sono provati per sistemi discreti e sono enunciati senza dimostrazione per sistemi continui. L'ultimo teorema che veramente vale anche per fenomeni non periodici, non è provato dall'Illustre Scienziato e sarà da noi dimostrato più innanzi.

⁽³⁾ *Le correnti alternative e la legge di reciprocità*, « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Bologna », 1917. Memorie e note Scientifiche (Bologna, Zanichelli, 1925), pag. 261.

⁽⁴⁾ RIEMANN-WEBER, *Differential Gleichungen der Physik*, (1927), vol. II, pag. 575.

⁽⁵⁾ « Bell System Technical Journal », 1924, pag. 393.

⁽⁶⁾ « Rendiconti Lincei », 1937, I sem., pag. 586.

⁽⁷⁾ W. ALEXANDER, (*Het Reciprociteitstheorema in de electricitet*, « Tijdschrift van het Nederlandsch Radio geneatschap », 5, 69, 1931) ha studiato con l'integrale di FOURIER alcuni teoremi di reciprocità nell'elettromagnetismo ma, se interpreto bene questo lavoro scritto in lingua olandese, senza preoccupazioni di rigore.

Poi varie funzioni che incontreremo (come ad esempio lo spostamento di un punto di un corpo elastico senza resistenze passive) non sono sviluppabili in integrale di FOURIER.

Veniamo ora ad esporre brevemente i risultati conseguiti nel presente lavoro.

Considerato un corpo elastico sul quale possano agire due sistemi di forze attive $\rho \mathbf{F}_1$, $\mathbf{R}_1$, $\rho \mathbf{F}_2$, $\mathbf{R}_2$ (le $\rho \mathbf{F}$ volumetriche, le $\mathbf{R}$ superficiali, ρ densità del corpo) tali che il loro valore sia rispettivamente $G(t)\mathbf{a}_1$, $G(t)\mathbf{b}_1$, $G(t)\mathbf{a}_2$, $G(t)\mathbf{b}_2$ con $G(t)$ funzione continua del tempo t , $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ vettori indipendenti dal tempo ma anche variabili da punto a punto; per questi sistemi di forze e i relativi spostamenti vale ancora, istante per istante, il teorema di BETTI, purchè il corpo, all'istante $t=0$, si trovi allo stato naturale e la sua energia cinetica sia nulla.

In particolare se il primo sistema si riduce ad una forza $\mathbf{H}_1$ applicata nel punto A , il secondo ad una forza $\mathbf{H}_2$ applicata nel punto B , vale la relazione (perfettamente analoga al teorema di MAXWELL):

$$\mathbf{H}_1 \times \mathbf{S}_2(A) = \mathbf{H}_2 \times \mathbf{S}_1(B),$$

dove $\mathbf{S}_2(A)$, $\mathbf{S}_1(B)$ sono gli spostamenti di A e B rispettivamente causati da $\mathbf{H}_2$ e $\mathbf{H}_1$.

Si vedrà poi che alla espressione delle forze si potrà sostituirne un'altra un po' diversa, e si potrà anche in questo caso stabilire alcuni teoremi di reciprocità. Passeremo poi a considerare un corpo che all'istante $t=0$ non è allo stato naturale. Limiteremo però lo studio al caso particolare di un corpo per valori negativi del tempo in equilibrio sotto l'azione di alcune forze, che vengono rimosse all'istante $t=0$ ⁽¹⁾.

Considerando allora due stati, nel primo dei quali il corpo è in equilibrio per $t \leq 0$ sotto l'azione delle forze $\rho \mathbf{F}_1$ e $\mathbf{R}_1$, nel secondo sotto l'azione di $\rho \mathbf{F}_2$ e $\mathbf{R}_2$, se $\mathbf{S}_1(t)$, $\mathbf{S}_2(t)$ sono gli spostamenti del corpo all'istante t vale il teorema:

$$\int_v \rho \mathbf{F}_1 \times \mathbf{S}_2(t) dv + \int_\sigma \mathbf{R}_1 \times \mathbf{S}_2(t) d\sigma = \int_v \rho \mathbf{F}_2 \times \mathbf{S}_1(t) dv + \int_\sigma \mathbf{R}_2 \times \mathbf{S}_1(t) d\sigma,$$

dove v è il volume del corpo, σ la superficie che lo limita.

Questo teorema si semplifica nel caso in cui le forze $\rho \mathbf{F}$ o $\mathbf{R}$ siano concentrate in qualche punto e si ritrova così per altra via, forse più rigorosa, un teorema di Lord RAYLEIGH.

Passeremo poi alla trasmissione del calore per conduzione. Come è noto questi problemi si possono schematizzare nei seguenti modi. Nel corpo si

⁽¹⁾ Cioè in sostanza si considerano le oscillazioni libere da una posizione di equilibrio.

trasmette calore perchè si trova a contatto con altri corpi di temperatura diversa, o perchè entro il corpo si trovano alcune sorgenti di calore, o per l'una e per l'altra delle cause ora enunciate.

Nel primo caso sono, in generale, note le temperature del corpo su alcuni pezzi σ_i della superficie σ che lo limita, mentre gli altri pezzi di σ sono a contatto con l'ambiente esterno che verrà supposto sempre alla stessa temperatura ⁽¹⁾. Allora se T_1 e T_2 sono due distribuzioni di temperature nel corpo riferite all'ambiente esterno ⁽²⁾ corrispondenti a due diverse distribuzioni di temperatura su σ_i dimostreremo, qualora $\frac{\partial T_1}{\partial n}, \frac{\partial T_2}{\partial n}$ indichino le derivate di T_1 e T_2 normali a σ_i , che vale la formula:

$$\int_{\sigma_i} T_1 \frac{\partial T_2}{\partial n} d\sigma_i = \int_{\sigma_i} T_2 \frac{\partial T_1}{\partial n} d\sigma_i.$$

Equazione questa valida però supponendo le temperature T_1 e T_2 nulle per $t=0$ in tutto il corpo e tali che su σ_i sia:

$$T_1 = G(t)\varphi_1(P), \quad T_2 = G(t)\varphi_2(P),$$

dove $\varphi_1(P)$ e $\varphi_2(P)$ sono due funzioni arbitrarie dei punti P della σ_i e $G(t)$ una funzione continua qualunque del tempo t .

L'equazione ora scritta è analoga a quella che si incontra nel caso stazionario e da essa si possono trarre utili conseguenze.

Se invece la trasmissione di calore avviene per effetto di alcune sorgenti di calore, poste nel corpo di volume v , mentre tutta la sua superficie è a contatto dell'ambiente esterno noi troveremo la seguente relazione analoga al caso stazionario. Se Q_1 e Q_2 sono due sistemi di sorgenti, T_1 e T_2 rispettivamente le corrispondenti temperature nel corpo, supposto $Q_1 = G(t)\psi_1(P)$, $Q_2 = G(t)\psi_2(P)$ con $\psi_1(P)$, $\psi_2(P)$ due funzioni dei punti P del corpo, vale, ammesse le T_1 e T_2 nulle all'istante $t=0$, l'equazione:

$$\int_v T_1 Q_2 dv = \int_v T_2 Q_1 dv.$$

Dalla relazione ora scritta scende, in particolare, che se una sorgente posta nel punto A genera in B all'istante t una certa temperatura $T(t)$ la stessa sorgente posta in B genera in A allo stesso istante la stessa tempera-

⁽¹⁾ Cioè sono a contatto con un ambiente al quale cedono calore secondo la legge Newtoniana.

⁽²⁾ Ossia si prende come zero della scala termometrica la temperatura dell'ambiente esterno.

tura $T(t)$. Questo teorema è stato enunciato da Lord RAYLEIGH in un caso più particolare, ma in cui la T non è nulla all'istante iniziale. Noi però vedremo come si possano estendere le nostre considerazioni e provare il teorema in discorso.

Abbiamo invece omessa qualsiasi ricerca nel caso in cui il calore venga trasmesso da altri corpi e da sorgenti, per non complicare troppo il nostro studio, sebbene le difficoltà, a questo proposito, siano più formali che concettuali.

Passeremo poi all'elettromagnetismo. Qui interessa generalizzare il teorema di LORENTZ-SOMMERFELD valido per dipoli alternativi, teorema che, sotto certe condizioni, si applica alle antenne radio. Abbiamo perciò creduto opportuno stabilire piuttosto una relazione di reciprocità fra le correnti in due antenne e i campi da esse generati; relazione valida anche se le correnti nelle antenne non sono sinusoidali, purchè in ogni punto soddisfino alle stesse condizioni delle forze in elasticità e il campo elettromagnetico sia uguale a zero per valori negativi e nulli del tempo. Nel caso in cui l'antenna abbia piccole dimensioni, le nostre formule diventano analoghe e anzi generalizzano quelle del SOMMERFELD. Così in particolare il teorema di reciprocità rimane esteso, per antenne a onde smorzate, per antenne che emettono impulsi, per i fenomeni transienti ecc.. Non solo, ma ci sembra che le nostre considerazioni permettano di eliminare certe questioni un po' sottili nell'annullarsi all'infinito di alcuni integrali ⁽¹⁾. Il teorema di reciprocità risulterà però provato solo per antenne con onde di tipo stazionario, ma ne mostreremo la validità anche nelle antenne a onde progressive. Con i nostri metodi sarebbe possibile estendere il teorema del CARSON, ma ometteremo la ricerca che, dopo quanto diremo, non offrirebbe alcuna difficoltà. Non è però inutile notare che tale estensione richiederebbe ipotesi ancora più larghe di quelle che ci saranno necessarie per generalizzare il teorema del SOMMERFELD.

CAPITOLO I.

Teoremi di reciprocità nella dinamica dei corpi elastici.

1. Consideriamo un corpo elastico, isotropo, di volume v limitato dalla superficie σ , con densità ρ (che può essere anche variabile) eventualmente soggetto a vincoli fissi. Ad esso siano applicate le forze attive di massa $\rho \mathbf{F}$

⁽¹⁾ Tali questioni si presentano appunto ammettendo senz'altro sinusoidale il campo elettromagnetico come si fa nelle ricerche più comuni.

e le forze attive superficiali $\mathbf{R}$ in generale variabili col tempo. Sappiamo che se $\mathbf{S}$ è lo spostamento di un punto generico P del corpo, B l'omografia delle tensioni valgono in ogni punto di v le equazioni ⁽¹⁾:

$$(1) \quad \rho \frac{d^2 \mathbf{S}}{dt^2} = \rho \mathbf{F} - \text{grad } B, \quad (2) \quad B = -U_1 \left(\frac{d\mathbf{S}}{dP} \right) - 2mD \frac{d\mathbf{S}}{dP},$$

dove l e m sono le costanti di LAMÉ del corpo, $\frac{d\mathbf{S}}{dP}$ ovviamente l'omografia delle deformazioni, t il tempo; gli altri simboli il significato ben noto dall'analisi vettoriale.

Si ha poi sulla parte di σ non vincolata

$$(3) \quad B\mathbf{n} = \mathbf{R},$$

qualora $\mathbf{n}$ indichi il vettore unitario normale a σ diretto verso l'interno di v .

Le forze di massa e superficiali saranno supposte funzioni, finite e continue di t , oltre che dei punti P del corpo, ma le supporremo nulle, per t maggiore di un certo istante k positivo e del resto comunque grande. Questa ipotesi non è affatto, come può sembrare a prima vista, restrittiva. A noi interessa per la pratica stabilire delle relazioni valide un intervallo $(0, k_1)$ di ampiezza qualunque, ma finito. Ora se scegliamo $k > k_1$, gli spostamenti elastici e di conseguenza le deformazioni nell'intervallo $(0, k_1)$ non dipendono ⁽²⁾ dal valore delle forze per $t > k$, che si possono perciò supporre, per $t \geq k$, nulle.

Noi supporremo inoltre la $\mathbf{S}$ e le sue derivate prime continue e limitate e le derivate seconde generalmente continue e limitate per ogni punto di v e per ogni valore di t compreso nell'intervallo $(0, +\infty)$ ⁽³⁾. Questa è l'ipotesi più

⁽¹⁾ BURGATTI, *Teoria Matematica della elasticità*, Bologna, Zanichelli, 1931, pag. 133. In seguito questo volume verrà indicato con « T. M. E. ».

È opportuno aggiungere che noi supporremo il corpo vincolato, o che il suo moto sia relativo ad un opportuno sistema di riferimento, così da potere escludere un moto rigido globale del corpo stesso. In altre parole supporremo che se il corpo fosse rigido le forze applicate lo manterrebbero in una posizione di equilibrio rispetto s'intende al nostro riferimento. Ammetteremo inoltre ρ , l , m variabili con continuità. Ciò per evitare qualche complicazione tanto più che il caso di ρ , l , m variabili con discontinuità si può considerare caso limite di quello che ora trattiamo.

⁽²⁾ Infatti dalla dimostrazione del teorema di unicità segue subito che $\mathbf{S}$ è determinato in tutto l'intervallo $(0, k_1)$ dagli spostamenti e loro derivate per $t=0$ e dalla conoscenza delle forze in $(0, k_1)$ estremo incluso. Quindi $\mathbf{S}$ e di conseguenza le sue derivate non dipendono dal valore delle forze per $t \geq k > k_1$. In altre parole, meno precise, ma più efficaci, i valori futuri delle forze non hanno alcuna influenza sui valori attuali dello spostamento.

⁽³⁾ Cioè noi intendiamo che le derivate seconde siano continue ad eccezione di alcune superfici dello spazio-tempo C costituito da valori di (x, y, z) compresi entro v e dagli istanti t fra $(0, \infty)$. Supporremo però queste superfici siano in numero finito in ogni pezzo di C o

restrittiva che noi faremo, ipotesi già accennata nell'introduzione. Il supporto S , le sue derivate prime e seconde finite e almeno generalmente continue in tutto v , per ogni valore del tempo compreso in un intervallo finito, è ipotesi che si ammette spesso nelle questioni della fisica-matematica e del resto si potrebbe controllare con i teoremi di esistenza. Meno usuale invece è il ritenere lo spostamento e derivate limitati anche se i valori del tempo sono compresi in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$. Però anche questa ipotesi è conforme all'intuizione fisica, perchè, potendosi ritenere le forze nulle da un certo istante in poi, si intuisce che gli spostamenti, le loro derivate prime e seconde siano limitati; tanto più che le derivate prime e seconde rispetto al tempo rappresentano rispettivamente le velocità e le accelerazioni dei punti del corpo, quelle rispetto alle coordinate le deformazioni e le derivate di tali deformazioni.

Del resto per la nostra trattazione sarebbe a rigore soltanto necessario che gli spostamenti e le loro derivate moltiplicati per $e^{-\alpha t}$ con α reale, positivo e qualunque restino limitati per $t \rightarrow +\infty$.

In altre parole perchè le nostre considerazioni non siano valide bisognerebbe ammettere, per es., che lo spostamento di un punto e le sue derivate tendano all'infinito in modo più rapido di un esponenziale mentre le forze da un certo istante in poi sono nulle, il che ripugna alla più elementare intuizione fisica (¹).

Per queste ragioni, e anche perchè almeno nel caso particolare che verrà esaminato in appendice, queste ipotesi sono superflue ci sembra non valga la pena, verificare in base alle equazioni (1), (2), (3) il comportamento all'infinito di S e delle sue derivate.

Ciò posto consideriamo un corpo elastico che all'origine dei tempi si trovi allo stato naturale e abbia energia cinetica nulla. Poichè escludiamo

meglio: che si possa dividere ogni pezzo finito di C in un numero finito di parti in cui le derivate seconde di S siano continue. Ammetteremo poi il contorno di questi campi che è formato dalle superfici di discontinuità in discorso sia incontrato in due punti al più da una retta parallela all'asse delle t . Ciò equivale in sostanza ad ammettere l'ipotesi, ben intuitiva dal punto di vista fisico, che in un punto P di v passi, in un intervallo di tempo finito un numero finito di superfici di discontinuità. Notiamo che questa ipotesi è giustificata dal fatto che le superfici di discontinuità coincidendo con le caratteristiche sono, come discende dalle ricerche del LAMPARIELLO (*Propagazione delle onde nei mezzi elastici isotropi anche non omogenei*, « Rendiconti Lincei », 1931, 1° sem., pag. 856) variabili col tempo, sicchè una superficie caratteristica non può rimanere fissa in un punto P .

(¹) È opportuno aggiungere che le ipotesi sopra enunciate sono necessarie solo per tutte le derivate prime e seconde rispetto alle coordinate e per le derivate prime e seconde pure rispetto al tempo cioè non è necessario considerare le derivate miste rispetto alle coordinate e al tempo.

moti di corpo rigido sarà per $t=0$ in ogni punto di v $\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = 0$. Allora se p è un numero reale positivo o un numero complesso con parte reale positiva, avremo per ogni punto P del corpo (poichè fissato P per le nostre ipotesi $\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2}$ è funzione generalmente continua e limitata del tempo, $\mathbf{S}$ e $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$ invece funzioni sempre continue e limitate) con due integrazioni per parti:

$$(4) \quad \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} dt = p \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} dt = p^2 \int_0^\infty e^{-pt} \mathbf{S} dt = p^2 \mathbf{s},$$

dove, ovviamente:

$$(5) \quad \mathbf{s} = \int_0^\infty e^{-pt} \mathbf{S} dt,$$

cioè $\mathbf{s}$ è la trasformata di LAPLACE di $\mathbf{S}$.

Sarà inoltre, poichè le derivate prime di $\mathbf{S}$ rispetto alle coordinate sono in ogni punto di v e per ogni t di $(0, +\infty)$ limitate e continue come $\mathbf{S}$, legittimo lo scambio del segno di derivazione con quello d'integrazione nelle formule che ora scriveremo. Dunque:

$$(6) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} B dt &= -l \int_0^\infty e^{-pt} I_1 \left(\frac{d\mathbf{S}}{dP} \right) dt \\ &- 2m \int_0^\infty e^{-pt} D \frac{d\mathbf{S}}{dP} dt = -l I_1 \frac{d}{dP} \int_0^\infty e^{-pt} \mathbf{S} dt - 2m D \frac{d}{dP} \int_0^\infty e^{-pt} \mathbf{S} dt. \end{aligned}$$

Quindi indicando con β il primo membro di questa ultima equazione cioè la trasformata di LAPLACE di B sarà:

$$(7) \quad \beta = -l I_1 \left(\frac{d\mathbf{s}}{dP} \right) - 2m D \frac{d\mathbf{s}}{dP},$$

equazione in β e $\mathbf{s}$ formalmente identica a (2). Moltiplichiamo ora la (1) per e^{-pt} e integriamo da $(0, +\infty)$. Tenendo presente che le derivate seconde ⁽¹⁾ di $\mathbf{S}$

⁽¹⁾ Richiamiamo sommariamente la dimostrazione del teorema che ora applichiamo. Sia $f(x, y, z, t)$ una derivata di una generica delle componenti di $\mathbf{S}$. Vogliamo provare la relazione:

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-pt} f(x, y, z, t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, t) dt.$$

A questo scopo osserviamo che la $f(x, y, z, t)$ è, per ipotesi, continua e limitata per ogni va-

sono generalmente continue e limitate ne risulta lecito scambiare qualunque derivata rispetto alle coordinate con il segno d'integrazione, ossia il segno

lore di x, y, z in v e per t compreso fra 0 e $+\infty$ ossia per ogni punto dello spazio-tempo C . Invece $\frac{\partial f}{\partial x}$ non è sempre continua, ma per quanto si è ammesso, è possibile dividere lo spazio-tempo C_k costituito da valori di x, y, z compresa entro v e da t compreso fra $(0, k)$ ($k > 0$) in un numero finito di parti in cui tale derivata è continua. Allora possiamo scrivere per un punto di coordinate (x_0, y_0, z_0, t)

$$(3) \quad \int_0^k e^{-pt} f(x_0, y_0, z_0, t) dt = \int_0^{t_1} e^{-pt} f(x_0, y_0, z_0, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-pt} f(x_0, y_0, z_0, t) dt + \dots \\ \dots + \int_{t_n}^k e^{-pt} f(x_0, y_0, z_0, t) dt,$$

dove t_1, t_2, t_n sono i valori di t in cui una parallela all'asse t e passante per x_0, y_0, z_0 incontra i contorni dei campi in cui $\frac{\partial f}{\partial x}$ è continua. E si noti che per le nostre ipotesi n è finito. Ora $t_1, t_2, \dots, t_n$ sono funzioni di x, y, z e, come si potrebbe provare tenendo conto delle proprietà delle caratteristiche, in un intorno di x_0, y_0, z_0 funzioni continue e derivabili rispetto a x, y, z . Allora derivando la (3) rispetto a x , supponendo x_0 variabile, applicando i ben noti teoremi sulla derivazione degli integrali dipendenti da un parametro, resta provata la (α) quando in luogo di $+\infty$ si metta k .

Ciò posto osserviamo che:

$$(7) \quad \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt = \int_0^k e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt \\ + \int_k^\infty e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt.$$

Ora poichè le $\frac{\partial f}{\partial x}$ sono per ogni valore di x, y, z in v e per ogni t in $0, +\infty$ limitate e generalmente continue, sarà limitato ogni rapporto incrementale della $f(x, y, z, t)$ rispetto a x sicchè sarà (indicato con M un numero opportuno indipendente da h e da t e con p_1 la parte reale di p):

$$\left| \int_k^\infty e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt \right| \leq M \int_k^\infty e^{-p_1 t} dt \leq \frac{M}{p_1} e^{-p_1 k}.$$

Quindi scelto k maggiore di un numero k_0 sufficientemente grande l'integrale ora scritto è inferiore di un numero positivo arbitrario ε e ciò per ogni h . Ma si può scegliere k_0 in modo che per $k > k_0$ sia:

$$\left| \int_k^\infty e^{-pt} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, t) dt \right| < \varepsilon,$$

il che è lecito essendo $\frac{\partial f}{\partial x}$ limitata. Inoltre poichè il limite per $h \rightarrow 0$ del primo integrale a

grad con il segno d'integrazione. Allora ricordando la (6) e (7), (4) e (5) si ha:

$$(8) \quad p^2 \mathbf{s} = \rho \mathbf{f} - \text{grad } \beta,$$

dove:

$$(9) \quad \mathbf{f} = \int_0^\infty e^{-pt} \mathbf{F} dt.$$

Moltiplicando per e^{-pt} la (3) e integrando da zero a $+\infty$ si trova analoghe considerazioni:

$$(10) \quad \beta \mathbf{n} = \mathbf{r}$$

con:

$$(11) \quad \mathbf{r} = \int_0^\infty e^{-pt} \mathbf{R} dt,$$

sicchè $\mathbf{f}$ e $\mathbf{r}$ sono rispettivamente le trasformate di LAPLACE di $\mathbf{F}$ e $\mathbf{R}$.

2. Consideriamo ora due stati del corpo ambedue con $\mathbf{S}$ e $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$ nulle per $t=0$, tali che nel primo le forze impresse siano $\rho_1 \mathbf{F}_1$, $\mathbf{R}_1$, nel secondo $\rho_2 \mathbf{F}_2$ e $\mathbf{R}_2$. Avremo in corrispondenza due sistemi di spostamenti $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$ e di omografie di tensione B_1 e B_2 . Siano poi $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$, β_1 e β_2 , $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ le trasformate di LAPLACE di $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$, B_1 e B_2 , $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ definite rispettivamente dalle (5), (6), (9) e (11), in cui si deve porre l'indice 1 e 2. Avremo perciò dalle (8) e (10)

$$(12) \quad p^2 \mathbf{s}_1 = \rho \mathbf{f}_1 - \text{grad } \beta_1, \quad p^2 \mathbf{s}_2 = \rho \mathbf{f}_2 - \text{grad } \beta_2,$$

$$(13) \quad \beta_1 \mathbf{n} = \mathbf{r}_1, \quad \beta_2 \mathbf{n} = \mathbf{r}_2.$$

secondo membro di (7) vale $\int_0^h e^{-pt} \frac{\partial f}{\partial x} dx$ si può trovare in h_0 tale che per $|h| < h_0$ sia:

$$\left| \int_0^h e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt - \int_0^h e^{-pt} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, t) dt \right| < \varepsilon.$$

Allora per ogni $|h| < h_0$ si ha:

$$\left| \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt - \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial f}{\partial x} dt \right| < 3\varepsilon,$$

e ciò dimostra che il limite del primo membro di (7) per $h \rightarrow 0$ cioè $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-pt} f(x_0, y_0, z_0, t) dt$

vale $\int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial x} dt$ conformemente ad (a). È ovvio che tale relazione vale per ogni

punto di v e scambiando nella derivazione y o z a x . Si noti poi che $\mathbf{s}$ e le sue derivate prime e seconde sono continue rispetto alle coordinate x, y, z .

Moltiplichiamo scalarmente la prima delle (12) per $\mathbf{s}_2$, la seconda per $\mathbf{s}_1$, sottraggiamo membro a membro e integriamo il risultato su tutto il volume v del corpo. Con le stesse trasformazioni che si fanno a proposito del teorema di BETTI ⁽¹⁾, tenendo presente che i vincoli sono fissi e che fra β_1 e $\mathbf{s}_1$, β_2 e $\mathbf{s}_2$ vale la (7) (in cui si deve porre gli indici 1 o 2) si trova:

$$(14) \quad \int_v \rho \mathbf{f}_1 \times \mathbf{s}_2 dv + \int_\sigma \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_2 d\sigma = \int_v \rho \mathbf{f}_2 \times \mathbf{s}_1 dv + \int_\sigma \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_1 d\sigma,$$

relazione perfettamente analoga al teorema di BETTI però valida fra le trasformate di LAPLACE delle forze e degli spostamenti.

Supponiamo ora:

$$(15) \quad \begin{cases} \rho \mathbf{F}_1 = G(t) \mathbf{a}_1, & \mathbf{R}_1 = G(t) \mathbf{b}_1, \\ \rho \mathbf{F}_2 = G(t) \mathbf{a}_2, & \mathbf{R}_2 = G(t) \mathbf{b}_2, \end{cases}$$

dove $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ sono vettori indipendenti dal tempo, però eventualmente variabili da punto a punto di σ o v , mentre $G(t)$ è una funzione finita e continua del tempo che, per quanto si è osservato, si può sempre supporre nulla

per $t > k$. Sostituendo nella (14) $\int_0^\infty e^{-pt} G(t) dt$ viene a fattor comune ad ambo i membri e perciò lo si può sopprimere ⁽²⁾. Si ha allora con semplici passaggi:

$$(16) \quad \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_v \mathbf{a}_1 \times \mathbf{S}_2 dv + \int_\sigma \mathbf{b}_1 \times \mathbf{S}_2 d\sigma - \int_v \mathbf{a}_2 \times \mathbf{S}_1 dv - \int_\sigma \mathbf{b}_2 \times \mathbf{S}_1 d\sigma \right) dt = 0,$$

e poichè questa uguaglianza deve valere per ogni p con parte reale positiva per note proprietà della trasformata di LAPLACE si deduce l'annullarsi della funzione sotto il segno d'integrazione al primo membro di (16). Moltiplicando questa funzione per $G(t)$ si ha, istante per istante, ricordando le (15)

$$(17) \quad \int_v \rho \mathbf{F}_1 \times \mathbf{S}_2 dv + \int_\sigma \mathbf{R}_1 \times \mathbf{S}_2 d\sigma = \int_v \rho \mathbf{F}_2 \times \mathbf{S}_1 dv + \int_\sigma \mathbf{R}_2 \times \mathbf{S}_1 d\sigma,$$

formula che estende il teorema di BETTI al caso dinamico, s'intende con condizioni iniziali nulle e con forze del tipo (15).

(1) Cfr. BURGATTI, « T. M. E. », pagg. 151-152 e pag. 168 e segg..

(2) L'integrale ora scritto rappresenta una funzione analitica regolare nel semipiano positivo delle p (anzi una funzione intera perchè se $t > k$ $G(t) = 0$) che non è identicamente nulla, altrimenti lo sarebbe anche $G(t)$. Quindi l'integrale in discorso avrà almeno, nel semipiano positivo, solo zeri isolati e la (16) varrà perciò per ogni p con parte reale positiva.

Supponiamo ora che $\rho \mathbf{F}_1$ e $\mathbf{R}_1$ siano ovunque nulle tranne in un piccolo intorno del punto A mentre $\rho \mathbf{F}_2$ e $\mathbf{R}_2$ siano nulle tranne in un piccolo intorno del punto B . Cioè nel primo caso, come si suol dire, vi è una forza concentrata in A , nel secondo una forza concentrata in B .

Allora le integrazioni al primo membro di (7) si debbono estendere ad un piccolo intorno di A , quelle al secondo membro a un piccolo intorno di B . Ma nel primo membro si può supporre $\mathbf{S}_2$ costante e uguale a $\mathbf{S}_2(A)$ sicchè rimane $\mathbf{S}_2(A)$ moltiplicato scalarmente per la risultante del primo sistema di forze che indicheremo con $\mathbf{H}_1$. In modo analogo se $\mathbf{H}_2$ è il risultante del secondo sistema di forze, il secondo membro vale $\mathbf{S}_1(B) \times \mathbf{H}_2$. La (17) diventa allora:

$$(18) \quad \mathbf{S}_2(A) \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{S}_1(B) \times \mathbf{H}_2,$$

che estende il teorema di MAXWELL al caso dinamico. Si noti che le $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ che si considerano forze concentrate in A , B devono essere, per le (15), sempre unidirezionali e identiche in modulo.

3. Vediamo ora un'altra estensione delle nostre formule.

Supponiamo che le forze $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ si possano porre nella forma:

$$(19) \quad \begin{cases} \rho \mathbf{F}_1 = G(t - T_1) \mathbf{a}_1, & \mathbf{R}_1 = G(t - T_1) \mathbf{b}_1, \\ \rho \mathbf{F}_2 = G(t - T_2) \mathbf{a}_2, & \mathbf{R}_2 = G(t - T_2) \mathbf{b}_2, \end{cases}$$

dove $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2$ hanno il solito significato, le T_1 e T_2 sono numeri positivi o nulli indipendenti dal tempo, però anche variabili da punto a punto. Supporremo poi le $G(t)$ nulle per valori negativi dell'argomento, inoltre supporremo gli spostamenti $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$ nulli per $t \leq 0$, cioè, in sostanza, ammetteremo di aver applicato al nostro corpo le forze negli istanti superiori o al più uguali a zero. Del resto questa ipotesi è in molti casi necessaria per assicurare, nell'istante iniziale, l'energia cinetica nulla e il corpo allo stato naturale.

Osserviamo però che essendo $G(t - T_1) = 0$ per $t \leq T_1$ potremo scrivere:

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \int_0^\infty e^{-pt} G(t - T_1) dt \mathbf{a}_1 = \int_{T_1}^\infty e^{-pt} G(t - T_1) dt \mathbf{a}_1 = \\ &= e^{-pT_1} \int_{T_1}^\infty e^{-p(t-T_1)} G(t - T_1) dt \mathbf{a}_1 = e^{-pT_1} \int_0^\infty e^{-pz} G(z) dz \mathbf{a}_1, \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$z = t - T_1.$$

Siccome analoghe formole valgono per $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_1$ sostituendo nella (14) semplificando e ricordando l'espressione di $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ si ha:

$$(21) \quad \int_v \mathbf{a}_1 \times \int_0^\infty e^{-p(t+T_1)} \mathbf{S}_2(t) dt dv + \int_\sigma \mathbf{b}_1 \times \int_0^\infty e^{-p(t+T_1)} \mathbf{S}_2(t) dt d\sigma = \\ = \int_v \mathbf{a}_2 \times \int_0^\infty e^{-p(t+T_2)} \mathbf{S}_1(t) dt dv + \int_\sigma \mathbf{b}_2 \times \int_0^\infty e^{-p(t+T_2)} \mathbf{S}_1(t) dt d\sigma.$$

Ora si noti che, posto in un punto generico :

$$t + T_1 = u$$

dove u è una nuova variabile indipendente, si ha:

$$\int_0^\infty e^{-p(t+T_1)} \mathbf{S}_2(t) dt = \int_{T_1}^\infty e^{-pu} \mathbf{S}_2(u - T_1) du = \int_0^\infty e^{-pu} \mathbf{S}_2(u - T_1) du.$$

Abbiamo potuto mettere come limite inferiore in luogo di T_1 lo zero perchè la $\mathbf{S}_2$ di un argomento negativo è nulla. Sostituendo questo risultato nella (21) e ponendo anche in luogo di $t + T_2$ la variabile indipendente u si ha:

$$(22) \quad \int_0^\infty e^{-pu} du \left(\int_v \mathbf{a}_1 \times \mathbf{S}_2(u - T_1) dv + \int_\sigma \mathbf{b}_1 \times \mathbf{S}_2(u - T_1) d\sigma - \right. \\ \left. - \int_v \mathbf{a}_2 \times \mathbf{S}_1(u - T_2) dv - \int_\sigma \mathbf{b}_2 \times \mathbf{S}_1(u - T_2) d\sigma \right) = 0.$$

E siccome questa equazione vale per ogni p si ha, ponendo t in luogo di u , l'uguaglianza:

$$(23) \quad \int_v \mathbf{a}_1 \times \mathbf{S}_2(t - T_1) dv + \int_\sigma \mathbf{b}_1 \times \mathbf{S}_2(t - T_1) d\sigma = \int_v \mathbf{a}_2 \times \mathbf{S}_1(t - T_2) dv + \\ + \int_\sigma \mathbf{b}_2 \times \mathbf{S}_1(t - T_2) d\sigma.$$

relazione che può assumere forma semplice nel caso in cui le forze siano concentrate in qualche punto.

4. Supponiamo ora $\mathbf{S}$ non nullo per $t=0$. Ci limiteremo al caso delle oscillazioni libere o meglio delle oscillazioni di un sistema che per $t < 0$ era in equilibrio e dall'istante $t=0$ sono state tolte le forze che lo mantenevano in tale stato, senza però imprimere al corpo alcuna velocità iniziale.

È facile stabilire l'equazione di questo moto. Poichè per $t \leq 0$ il corpo era in equilibrio se indichiamo con $\mathbf{S}_0$ lo spostamento dei suoi punti con $\rho \mathbf{F}_0$ e $\mathbf{R}_0$ le forze attive ad esso applicate, s'intende per $t < 0$, si può scrivere per le (1), (2), (3):

$$(24) \quad \text{grad } B_0 = \rho \mathbf{F}_0, \quad B_0 = -U_1 \left(\frac{d\mathbf{S}_0}{dt} \right) - 2mD \frac{d\mathbf{S}_0}{dP}$$

$$(25) \quad B_0 \mathbf{n} = \mathbf{R}_0$$

relazione questa valida, nella parte non vincolata di σ , essendo B_0 l'omografia degli sforzi interni per $t \leq 0$. Ora se $\mathbf{S}$ è spostamento B l'omografia degli sforzi interni per $t > 0$, si può porre:

$$(26) \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}' + \mathbf{S}_0$$

dove $\mathbf{S}'$ è una nuova incognita, nulla assieme alla sua derivata prima rispetto al tempo per $t = 0$. Se poi poniamo:

$$(27) \quad B' = B - B_0$$

avremo subito per la (1)

$$(28) \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial t^2} = -\text{grad } B' - \text{grad } B_0 = -\text{grad } B' - \rho \mathbf{F}_0.$$

Mentre per la (2), la (24), la (26) e la (27) si ha:

$$(29) \quad B' = -U_1 \left(\frac{d\mathbf{S}'}{dP} \right) - 2mD \frac{d\mathbf{S}'}{dP}$$

e per la (3)

$$(30) \quad B' \mathbf{n} = -B_0 \mathbf{n} = -\mathbf{R}_0$$

Cioè abbiamo ottenuto, (cosa del resto ben nota) equazioni per $\mathbf{S}'$ analoghe alle equazioni per $\mathbf{S}$ in cui le forze impresse sono $-\rho \mathbf{F}_0$, $-\mathbf{R}_0$.

Consideriamo ora, per $t \leq 0$ due stati di equilibrio mantenuti rispettivamente dalle forze $\rho \mathbf{F}_{01}$, $\mathbf{R}_{01}$, $\rho \mathbf{F}_{02}$, $\mathbf{R}_{02}$. Avremo in corrispondenza due sistemi di spostamenti $\mathbf{S}_{01}$ e $\mathbf{S}_{02}$. Togliendo le forze all'istante $t = 0$ e indicando con $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$ gli spostamenti nel primo e nel secondo caso per $t > 0$ potremo porre, analogamente a (26):

$$(31) \quad \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}'_1 + \mathbf{S}_{01}, \quad \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}'_2 + \mathbf{S}_{02}.$$

Ora $\mathbf{S}'_1$, $\mathbf{S}'_2$ soddisfano le (28), (29), (30) purchè si aggiunga rispettivamente l'indice 1 e 2. Queste come si è già osservato sono dello stesso tipo della

(1), (2), (3). In altre parole le S'_1 e S'_2 corrispondono agli spostamenti di un corpo elastico con condizioni iniziali nulle, soggetti rispettivamente alle forze $-\rho F_{01}$, $-\mathbf{R}_{01}$, $-\rho F_{02}$, $-\mathbf{R}_{02}$ che essendo indipendenti dal tempo soddisfano alle condizioni (15) ⁽¹⁾. Quindi per la (17):

$$(32) \quad \int_v \rho \mathbf{F}_{01} \times (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_{02}) dv + \int_\sigma \mathbf{R}_{01} \times (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_{02}) d\sigma = \\ = \int_v \rho \mathbf{F}_{02} \times (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_{01}) dv + \int_\sigma \mathbf{R}_{02} \times (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_{01}) d\sigma$$

e da questa formula per il teorema di BETTI scompaiono i termini in $\mathbf{S}_0$, sicchè si ha:

$$(33) \quad \int_v \rho \mathbf{F}_{01} \times \mathbf{S}_2 dv + \int_\sigma \mathbf{R}_{01} \times \mathbf{S}_2 d\sigma = \int_v \rho \mathbf{F}_{02} \times \mathbf{S}_1 dv + \int_\sigma \mathbf{R}_{02} \times \mathbf{S}_1 d\sigma$$

che è la formola cercata di reciprocità. In particolare se il sistema delle prime forze si riduce ad una forza $\mathbf{H}_1$ concentrata nel punto A il secondo ad un'altra forza $\mathbf{H}_2$ concentrata in B con le stesse considerazioni fatte a proposito della (18) si ha in ogni istante:

$$(34) \quad \mathbf{H}_1 \times \mathbf{S}_2(B) = \mathbf{H}_2 \times \mathbf{S}_1(A)$$

dove $\mathbf{S}_1(A)$, $\mathbf{S}_2(B)$ sono gli spostamenti dovuti rispettivamente al primo e al secondo sistema di forze. Quest'ultimo teorema è dovuto a Lord RAYLEIGH.

Considerazioni analoghe potrebbero farsi supponendo per $t=0$ nulli gli spostamenti, ma diverse dallo zero le velocità iniziali e si ritroverebbe così, per via diversa, un altro teorema di Lord RAYLEIGH.

CAPITOLO II.

Teoremi sulla trasmissione del calore.

1. Si abbia un corpo solido di volume v limitato dalla superficie σ . Indichiamo con T la temperatura ⁽²⁾ di un punto generico del corpo e supponiamo che in alcuni pezzi σ_1 di σ la T sia nota. Invece ammettiamo la parte rima-

⁽¹⁾ Si può osservare che in questo caso non esiste un k tale che per $t > k$ le forze siano nulle. Ma, senza cambiare i valori degli spostamenti per $t < k_1$, si può sostituire, per quanto si è già notato, alle forze per $t > k_1$, altre, nulle per $t \geq k$.

⁽²⁾ T non è la temperatura assoluta, ma la temperatura riferita all'ambiente esterno al corpo, come si vedrà.

nente σ_2 di σ a contatto con un ambiente esterno la cui temperatura abbia il valore costante di zero gradi ⁽¹⁾. Supponiamo inoltre che attraverso σ_2 il corpo ceda (o riceva) calore secondo la legge di Newton; cioè su ogni punto di σ_2 valga l'equazione:

$$(35) \quad K \frac{\partial T}{\partial n} = hT$$

dove $\frac{\partial T}{\partial n}$ è la derivata della temperatura fatta in direzione normale a σ_2 (e diretta verso il suo interno) h , K rispettivamente, i coefficienti di conduttività esterna ed interna del corpo. È ovvio che se σ_2 è impermeabile al calore $h = 0$ e che σ_2 o σ_1 possono, in qualche caso, coincidere con l'intera σ .

Poichè nel presente capitolo indicheremo il tempo con τ , per evitare confusione di simboli, l'equazione di propagazione del calore avrà la forma:

$$(36) \quad c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div} (K \text{grad } T) + Q$$

dove $Qdv d\tau$ rappresenta la quantità di calore che una sorgente posta nell'elemento dv genera nel tempo $d\tau$, c è il calore specifico del corpo e ρ , al solito, la sua densità. Come nel caso dell'elasticità possiamo ammettere, senza alcuna restrizione per il nostro problema, Q e i valori di T su σ_1 nulli dall'istante k (k finito, ma grande comunque) in poi. Allora con ragionamenti analoghi a quelli del capitolo precedente possiamo ammettere che T , le sue derivate prime e le sue derivate seconde rispetto alle coordinate siano limitate e continue in tutto v per ogni istante fra $(0, \infty)$ ⁽²⁾. Supponiamo infine le condizioni iniziali nulle cioè $T = 0$ in tutto v per $\tau = 0$. Ciò posto moltiplicando la (36) per $e^{-p\tau}$, integrando da 0 a $+\infty$, con passaggi analoghi a quelli fatti nel capitolo precedente, si trova:

$$(37) \quad cp\rho t = \text{div} (K \text{grad } t) + q$$

dove:

$$(38) \quad t = \int_0^\infty e^{-p\tau} T d\tau, \quad q = \int_0^\infty e^{-p\tau} Q d\tau.$$

⁽¹⁾ Cioè, come si è detto, la temperatura sia riferita a quella dell'ambiente esterno.

⁽²⁾ È noto che nella trasmissione del calore non si presentano superfici di discontinuità. Naturalmente dovremo ammettere k , $c\rho$ variabili con continuità da punto a punto.

Eseguendo analoghe operazioni su (35) troviamo:

$$(39) \quad K \frac{\partial t}{\partial n} = ht.$$

2. Consideriamo ora due diverse distribuzioni T_1 e T_2 della temperatura in v corrispondenti, per trattare il caso più generale, a differenti valori della temperatura su σ_1 e a due sistemi di sorgenti Q_1 e Q_2 . Le trasformate di LAPLACE t_1, t_2, q_1, q_2 rispettivamente di T_1, T_2, Q_1, Q_2 definite dalle (38) (nelle quali si devono mettere gli indici 1 e 2) soddisfano come è facile mostrare ragionando in modo analogo al paragrafo precedente, alle (37) cioè:

$$(40) \quad \begin{cases} c\rho pt_1 = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} t_1) + q_1 \\ c\rho pt_2 = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} t_2) + q_2. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima delle (40) per t_2 , la seconda per t_1 , sottraendo membro a membro, integrando su tutto il volume v si trova dopo alcuni ovvi passaggi:

$$\int_{\sigma} K \left(t_2 \frac{\partial t_1}{\partial n} - t_1 \frac{\partial t_2}{\partial n} \right) d\sigma = \int_v (q_1 t_2 - q_2 t_1) dv.$$

Ora su σ_2 , t_1 e t_2 soddisfano la (39) ponendo, s'intende, in luogo di t , t_1 e t_2 . E allora si ha (su σ_2):

$$K t_2 \frac{\partial t_1}{\partial n} - K t_1 \frac{\partial t_2}{\partial n} = h t_2 t_1 - h t_1 t_2 = 0.$$

Rimane perciò:

$$(41) \quad \int_{\sigma_1} \left(K t_2 \frac{\partial t_1}{\partial n} - K t_1 \frac{\partial t_2}{\partial n} \right) d\sigma_1 = \int_v (q_1 t_2 - q_2 t_1) dv.$$

Studiamo ora alcuni casi particolari. Supponiamo $Q_1 = Q_2 = 0$ quindi $q_1 = q_2 = 0$ e che su σ_1 si possa porre:

$$(42) \quad T_1 = G(t)\varphi_1(P), \quad T_2 = G(t)\varphi_2(P)$$

dove P è un punto generico di σ_1 , φ_1 e φ_2 due funzioni indipendenti dal tempo, $G(t)$ una funzione continua variabile solo col tempo. Sostituendo in (41) si ha come nel caso dell'elasticità:

$$(43) \quad \int_{\sigma_1} K \varphi_1(P) \frac{\partial t_2}{\partial n} d\sigma_1 - \int_{\sigma_1} K \varphi_2(P) \frac{\partial t_1}{\partial n} d\sigma_1 = 0.$$

Allora ricordando le espressioni (38) per t_1 e t_2 (nelle quali si deve mettere

rispettivamente l'indice 1 e 2) sostituendole in (43) si ottiene, ragionando in modo analogo al precedente capitolo :

$$(44) \quad \int_{\sigma_1} K T_1 \frac{\partial T_2}{\partial n} d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} K T_2 \frac{\partial T_1}{\partial n} d\sigma_1$$

relazione valida in ogni istante. In particolare se σ_1 si può dividere in un certo numero di pezzi — per fissare le idee in due σ' e σ'' — dove T_1 e T_2 siano costanti ⁽¹⁾ e eguali rispettivamente a T_1' , T_1'' , T_2' , T_2'' la (44) diventa :

$$(45) \quad T_1' Q_2' + T_1'' Q_2'' = T_2' Q_1' + T_2'' Q_1''$$

dove Q_1' , Q_1'' , Q_2' , Q_2'' sono rispettivamente i flussi di calore nell'unità di tempo ⁽²⁾ attraverso σ' e σ'' nelle diverse distribuzioni di temperatura. La (45) generalizza una nota formula della trasmissione stazionaria, ma vale, ripetiamolo, quando le temperature soddisfano alla (42). In particolare se T_1'' e T_2' sono costantemente nulle ed è invece in ogni istante $T_1' = T_2''$ (il che si può ottenere dalle (42) particolarizzando φ_1 e φ_2) si ha :

$$(46) \quad Q_2' = Q_1''$$

cioè il flusso attraverso σ' supposta a temperatura zero, mentre σ'' è a temperatura T_1' vale il flusso nello stesso istante attraverso la σ'' qualora σ' sia a temperatura T_1' e σ'' a temperatura nulla.

Supponiamo ora la superficie σ_1 nulla cioè il corpo a contatto con l'ambiente esterno, sicchè il corpo riceve calore solo dalle sorgenti. Nella (41) sarà intanto nullo il primo membro. Facciamo ora l'ipotesi :

$$(47) \quad Q_1 = G(t)\psi_1(P), \quad Q_2 = G(t)\psi_2(P)$$

dove $\psi_1(P)$, $\psi_2(P)$, sono funzioni dei punti P di v , indipendenti dal tempo, mentre $G(t)$ è invece la solita funzione del tempo. Con i ragionamenti già fatti più volte si trova :

$$(48) \quad \int_v Q_2 T_1 dv = \int_v Q_1 T_2 dv$$

equazione valida istante per istante.

In particolare, il sistema di sorgenti Q_1 e Q_2 sia nullo in tutto v , all'eccezione di due piccole regioni intorno ai punti A e B , cioè, le Q_1 e Q_2

⁽¹⁾ S'intende in ogni punto, ma eventualmente variabili col tempo.

⁽²⁾ O più precisamente il rapporto fra il flusso di calore attraverso σ' o σ'' nel tempo $d\tau$ è il tempo $d\tau$ stesso.

si riducano a due sorgenti rispettivamente concentrate in A e B di valore N_1 , N_2 ⁽¹⁾.

Allora le stesse considerazioni che nel capitolo precedente ci hanno permesso di passare da (17) a (18) ci conducono alla formula :

$$N_1 T_2(A) = N_2 T_1(B)$$

dove $T_1(B)$, $T_2(A)$ sono rispettivamente le temperature in B e in A dovute rispettivamente alle sorgenti N_1 e N_2 . Quindi si ha subito il teorema: se la temperatura all'istante $\tau=0$ è nulla e se una sorgente posta in A genera una certa temperatura in B , la stessa sorgente posta in B genera la stessa temperatura in A . Ciò comunque varino nel tempo le sorgenti purchè si annullino, al più, in un numero discreto di istanti.

3. Consideriamo ora qualche caso di condizioni iniziali non nulle. Ci limiteremo come nel caso della elasticità allo studio di un corpo, la cui superficie è a contatto con un ambiente a temperatura 0° e per $\tau \leq 0$ è in equilibrio termico sotto l'azione di sorgenti Q_0 . Indichiamo con T_0 la temperatura, indipendente dal tempo, per $\tau \leq 0$. Avremo:

$$(49) \quad \operatorname{div} K \operatorname{grad} T_0 = -Q_0, \quad K \frac{\partial T_0}{\partial n} = h T_0.$$

All'istante $\tau=0$ supponiamo di togliere le sorgenti Q_0 . Allora poniamo T' uguale alla differenza $T - T_0$ sicchè $T = T' + T_0$. Sostituendo nell'equazione del calore troviamo:

$$(50) \quad \frac{\partial T'}{\partial \tau} = \operatorname{div} (K \operatorname{grad} T') - Q_0.$$

Ciò posto, consideriamo due diverse distribuzioni di sorgenti per $\tau \leq 0$ Q_{01} e Q_{02} e siano (sempre per $\tau \leq 0$) T_{01} e T_{02} le corrispondenti temperature del corpo. Avremo intanto per cose note:

$$(51) \quad \int_v T_{01} Q_{02} dv = \int_v T_{02} Q_{01} dv.$$

Se all'istante $\tau=0$ sopprimiamo le sorgenti avremo (per $\tau > 0$) due distribuzioni di temperatura T_1 e T_2 . Posto $T_1' = T_1 - T_{01}$, $T_2' = T_2 - T_{02}$ le T_1' e T_2' sono nulle per $\tau=0$ e soddisfano la (50) per $\tau > 0$ qualora si metta in questa equazione gli indici 1 e 2. Cioè le T_1' , T_2' si possono interpretare

⁽¹⁾ N_1 e N_2 non sono altro che l'integrale di Q_1 e Q_2 rispettivamente esteso all'intorno di A e B in cui queste ultime grandezze non sono nulle.

come distribuzioni di temperatura nel nostro corpo, dovute alle sorgenti $-Q_{01}$ e $-Q_{02}$, e nulle per $\tau=0$. Allora applicando la (48) (tali sorgenti soddisfano alla (47))

$$(52) \quad \int_v T_1' Q_{02} dv = \int_v T_2' Q_{01} dv$$

e ricordando la (51)

$$(53) \quad \int_v T_1 Q_{02} dv = \int_v T_2 Q_{01} dv.$$

Particolarizziamo ora la (53) ammettendo che Q_{01} e Q_{02} si riducano rispettivamente a due sorgenti uguali concentrate in A e B . Avremo in modo analogo a (48):

$$(54) \quad T_2(A) = T_1(B).$$

Cioè se il corpo era in equilibrio sotto l'azione di una sorgente posta in A , rimossa questa sorgente, la temperatura in B è uguale alla temperatura in A qualora sia scambiato l'ufficio dei punti A e B . Questo teorema, come si è detto, è stato enunciato da Lord RAYLEIGH.

CAPITOLO III.

Teoremi di reciprocità nell'elettromagnetismo.

1. Per stabilire i teoremi di reciprocità nell'elettromagnetismo ci riferiremo al caso concreto della radiotelegrafia, sebbene molte delle presenti considerazioni potrebbero riportarsi anche all'ottica fisica. Consideriamo il campo elettromagnetico $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$ ($\mathbf{F}$ campo elettrico, $\mathbf{H}$ campo magnetico) generato da una antenna radio percorsa da corrente (di conduzione) con densità $\mathbf{U}_0$. Supponendo il campo elettromagnetico nullo assieme a $\mathbf{U}_0$ per $t \leq 0$ abbiamo provato ⁽¹⁾ altra volta come $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$ debbano soddisfare (qualora si voglia tener presente che nell'alta atmosfera vi sono gas ionizzati) le equazioni:

$$(55) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \sigma \mathbf{F} + \int_0^t \gamma(t-\tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau + \mathbf{U}_0$$

$$(56) \quad \text{rot } \mathbf{F} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

⁽¹⁾ Cfr. D. GRAFFI, *Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia* (Nota V), « Rendiconti Istituto Lombardo », 1936. Noi ora escludiamo, per semplificare le cose, la presenza di isteresi dielettrica. È ovvio che $\mathbf{F}$ non si confonderà con la forza della elasticità.

dove ε , σ , μ sono rispettivamente la costante dielettrica, la conduttività, la permeabilità del mezzo, $v(t - \tau)$ è una funzione che caratterizza le proprietà del gas ionizzato ⁽¹⁾ sicchè in questi gas ε e σ devono ritenersi la costante dielettrica e la conduttività quando la ionizzazione è nulla. Siccome escluderemo la presenza di corpi ferromagnetici potremo supporre ε , σ , v , μ indipendenti dal campo magnetico e dal tempo, però in generale variabili da punto a punto ⁽²⁾. È poi ovvio che U_0 sarà diversa dallo zero solo nel volume v dell'antenna, e che in qualche regione dello spazio potrà essere σ o v nulla.

Ammetteremo $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$ continue per ogni (x, y, z, t) e le loro derivate generalmente continue, nel senso precisato a proposito della elasticità, cioè le derivate di $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$ sempre continue escluse alcune superfici d'onda. Siccome ragionando come nel primo capitolo, potremo senza alcuna restrizione supporre nulla la U_0 da un certo istante k in poi, sarà dunque lecito ammettere le $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$ e le loro derivate prime limitate per ogni x, y, z di tutto lo spazio e per ogni t in $(0, +\infty)$.

Perciò $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$ e le loro derivate ammetteranno trasformata di LAPLACE commutabile con la derivazione rispetto alle coordinate.

Poniamo allora, se p è un numero complesso con parte reale positiva:

$$(57) \quad \mathbf{f} = \int_0^\infty e^{-pt} \mathbf{F} dt \quad \mathbf{h} = \int_0^\infty e^{-pt} \mathbf{H} dt.$$

Ora supponendo $v(t - \tau)$ limitata per ogni $t - \tau > 0$ si per il teorema del « Faltung » ⁽³⁾

$$(58) \quad \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t v(t - \tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-ps} v(s) ds \int_0^\infty e^{-p\tau} \mathbf{F}(\tau) d\tau = \psi(p) \mathbf{f}$$

⁽¹⁾ A rigore, siccome sul gas ionizzato agisce il campo magnetico terrestre, la $v(t - \tau)$ andrebbe sostituita da una omografia. Sembra anzi che la parte dilatazione di questa omografia rimanga invariata invertendo il verso del campo magnetico, mentre cambia di segno la parte assiale. E da questa proprietà sarebbe possibile stabilire un teorema di reciprocità valido anche sul gas agisce un campo magnetico (cfr. per es. la mia Nota: *Sul teorema di reciprocità della radiotelegrafia*, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », 1929). Per semplicità trascureremo però l'influenza del campo magnetico terrestre, osservando che in base alle ricerche ora citate sarebbe facile tenerne conto. Trascureremo poi i fenomeni di tipo non lineare come l'effetto Lussemburgo.

⁽²⁾ Analogamente in capitoli precedenti supporremo ε , σ , μ , v variabili con continuità.

⁽³⁾ Cfr. G. DOETSCH, *Theorie und anwendung der Laplace-Transformation*, Springer, 1937, pag. 162.

dove:

$$\psi(p) = \int_0^{\infty} e^{-ps} v(s) ds.$$

Allora integrando le (55) e (56), moltiplicate per e^{-pt} , da 0 a $+\infty$ troviamo con i soliti passaggi qualora u_0 indichi la trasformata di LAPLACE di U_0 :

$$(59) \quad \text{rot } \mathbf{h} = \varepsilon p \mathbf{f} + \sigma \mathbf{f} + \psi(p) \mathbf{f} + u_0$$

$$(60) \quad \text{rot } \mathbf{f} = -\mu p \mathbf{h}.$$

Possiamo poi provare che $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$ tendono, quando il punto in cui sono calcolate si allontana indefinitamente dall'antenna, allo zero in modo esponenziale. Consideriamo perciò una sfera di centro 0 e raggio R , sia a la massima distanza di 0 dai punti dell'antenna. Sia invece r la distanza di un punto generico P della sfera, dal punto più vicino dell'antenna. Ora noi possiamo provare $\mathbf{F} = \mathbf{H} = 0$ in P fino almeno all'istante $\frac{r}{c}$, se c è il massimo in tutto lo spazio di $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ⁽¹⁾. Infatti sappiamo che il campo è nullo in tutto lo spazio per $t=0$. In questo istante si eccita l'antenna, ogni punto di essa genera delle onde, il cui fronte abbiamo visto si propaga colla velocità $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ⁽²⁾ velocità al massimo uguale a c . Perciò fino all'istante $\frac{r}{c}$ nessuna onda ha raggiunto il punto P e allora, fino a questo istante almeno, è nullo il campo in P . Siccome poi la $\mathbf{F}$ è limitata per ogni x, y, z, t esisterà un numero M tale sia sempre $|\mathbf{F}(t)|$ inferiore a M .

Allora avremo se p_1 è la parte reale di p :

$$|\mathbf{f}| = \left| \int_{\frac{r}{c}}^{\infty} e^{-pt} \mathbf{F}(t) dt \right| \leq M \int_{\frac{r}{c}}^{\infty} e^{-p_1 t} dt \leq \frac{M}{p_1} e^{-p_1 \frac{r}{c}} \leq \frac{M}{p_1} e^{p_1 \frac{a}{c}} e^{-p_1 \frac{R}{c}}.$$

Siccome analoghe considerazioni possono farsi per $\mathbf{h}$ resta provato che $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$ tendono per $R \rightarrow \infty$ allo zero esponenzialmente.

2. Consideriamo ora due antenne, percorse dalle correnti U_{01} e U_{02} che generino rispettivamente i campi $\mathbf{F}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{H}_2$.

⁽¹⁾ Noi ammettiamo conformemente all'esperienza ε e μ positivi in tutto lo spazio.

⁽²⁾ Cfr. la mia Nota, citata a pag. 192.

Siano $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{u}_{01}, \mathbf{u}_{02}$ le trasformate di LAPLACE di questi vettori espresse dalla (57) con, s'intende, gli opportuni indici. Questi vettori soddisferranno le (59) e (60), cioè si avrà:

$$(61) \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{h}_1 = (\varepsilon p + \sigma + \psi(p))\mathbf{f}_1 + \mathbf{u}_{01} \\ \text{rot } \mathbf{f}_1 = -\mu p \mathbf{h}_1 \end{cases} \quad (62) \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{h}_2 = (\varepsilon p + \sigma + \psi(p))\mathbf{f}_2 + \mathbf{u}_{02} \\ \text{rot } \mathbf{f}_2 = -\mu p \mathbf{h}_2 \end{cases}$$

Moltiplicando scalarmente la prima di (62) per $\mathbf{f}_1$, la seconda delle (62) per $\mathbf{h}_1$ e sottraendo membro a membro si ha:

$$(63) \quad \text{div}(\mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{f}_2) = (\varepsilon p + \sigma + \psi(p))\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_1 + \mathbf{u}_{01} \times \mathbf{f}_2 + \mu p \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2.$$

Invece moltiplicando scalarmente per $\mathbf{f}_1$ la prima delle (62), per $\mathbf{h}_2$ la seconda delle (61) e sottraendo membro a membro si ha:

$$(64) \quad \text{div}(\mathbf{h}_2 \wedge \mathbf{f}_1) = (\varepsilon p + \sigma + \psi(p))\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 + \mathbf{u}_{02} \times \mathbf{f}_1 + \mu p \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2.$$

Integrando le (63) e (64) su tutto lo spazio otterremo due equazioni col primo membro nullo. Ciò si prova in base al teorema della divergenza e all'annullarsi di $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$ all'infinito. Allora confrontando i secondi membri delle equazioni in discorso si trova subito:

$$(65) \quad \int_{v_1} \mathbf{u}_{01} \times \mathbf{f}_2 dv_1 = \int_{v_2} \mathbf{u}_{02} \times \mathbf{f}_1 dv_2$$

dove v_1 e v_2 sono rispettivamente i volumi della prima e seconda antenna in cui non sono nulle $\mathbf{u}_{01}$ e $\mathbf{u}_{02}$. Ora la (65) si può ridurre ad una forma più semplice. Le antenne sono, come è noto, filiformi. Divisa perciò la linea l_1 asse della prima antenna in elementi dl_1 e tirati per i punti di divisione le sezioni Σ_1 normali all'asse dell'antenna potremo ammettere, essendo la sezione molto piccola, $dv_1 = d\Sigma_1 dl_1$. Quindi:

$$\int_{v_1} \mathbf{u}_{01} \times \mathbf{f}_2 dv_1 = \int_{l_1} dl_1 \int_{\Sigma_1} \mathbf{u}_{01} \times \mathbf{f}_2 d\Sigma_1.$$

Essendo la sezione Σ_1 molto piccola, rispetto alla distanza della seconda antenna si potrà supporre $\mathbf{F}_2$ e quindi $\mathbf{f}_2$ costante sopra Σ_1 ⁽¹⁾ perciò:

$$(66) \quad \int_{v_1} \mathbf{u}_{01} \times \mathbf{f}_2 dv = \int_{l_1} dl_1 \mathbf{f}_2 \times \int_{\Sigma_1} \mathbf{u}_{01} d\Sigma_1 = \int_{l_1} \mathbf{f}_2 \times \mathbf{t}_1 i_{01} dl_1$$

⁽¹⁾ A rigore per ammettere $\mathbf{f}_2$ costante su Σ_1 non basta la piccolezza delle dimensioni di Σ_1 rispetto alla distanza dalla seconda antenna, ma occorre anche un'altra condizione che nello stato di regime sinusoidale si riduce ad ammettere le dimensioni di Σ_1 piccolo rispetto alla lunghezza d'onda λ . Comunque possiamo ritenere, in ogni caso la nostra ipotesi sufficientemente approssimata.

dove $\mathbf{t}_1$ è un vettore unitario normale a Σ_1 e diretto cioè tangenzialmente all'asse l_1 , i_{01} la trasformata di LAPLACE della corrente I_1 attraverso Σ_1 . L'ultimo passaggio nella (66) si giustifica così. Decomponiamo $\mathbf{u}_{01}$ secondo la direzione normale e tangenziale a Σ_1 . Sia $\mathbf{u}_n$ la prima di queste componenti, $\mathbf{u}_t$ la seconda. Ammettiamo che l'integrale di $\mathbf{u}_t$ su Σ_1 sia trascurabile il che, almeno nel caso della sezione circolare, si intuisce per simmetria. Ma $\mathbf{u}_n$ vale $(\mathbf{u}_{01} \times \mathbf{t}_1)$ quindi l'integrale di $\mathbf{u}_n$ su Σ_1 vale il flusso di $\mathbf{u}_{01}$ attraverso Σ_1 ossia i_{01} moltiplicato per $\mathbf{t}_1$ conformemente alla (66). Poichè la (66) vale anche scambiando gli indici la (65) diventa:

$$(67) \quad \int_{l_1} \mathbf{f}_2 \times \mathbf{t}_1 i_{01} dl_1 = \int_{l_2} \mathbf{f}_1 \times \mathbf{t}_2 i_{02} dl_2.$$

Ora se si può ammettere, come nelle antenne in onde stazionarie, che le correnti I_1 e I_2 abbiano la forma:

$$(68) \quad I_1 = G(t)m_1(l_1), \quad I_2 = G(t)m_2(l_2),$$

dove $G(t)$ la solita funzione del tempo, $m_1(l_1)$, $m_2(l_2)$ due funzioni di l_1 e l_2 , si trova con i soliti passaggi:

$$(69) \quad \int_{l_1} \mathbf{F}_2 \times \mathbf{t}_1 I_1 dl_1 = \int_{l_2} \mathbf{F}_1 \times \mathbf{t}_2 I_2 dl_2$$

che è la forma più generale del teorema di reciprocità, per le antenne in onde stazionarie.

Nel caso particolare in cui le due antenne siano rettilinee e abbastanza corte, in modo da poter ritenere $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1$ abbiano valori uniformi ⁽¹⁾ su tutto l_1 e l_2 la (69) diventa:

$$(70) \quad \mathbf{F}_2 \times \mathbf{t}_1 \int_{l_1} I_1(l_1) dl_1 = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{t}_2 \int_{l_2} I_2(l_2) dl_2.$$

Ora è noto che, in un intervallo di tempo in cui le antenne oscillano sinoidalmente cioè quando si può scrivere:

$$I_1 = \cos(\omega t + \varphi_1)m(l_1), \quad I_2 = \cos(\omega t + \varphi_2)m_2(l_2)$$

si chiamano altezze equivalenti, rispettivamente della prima e seconda antenna,

⁽¹⁾ Ciò avviene, in un intervallo di tempo in cui le $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ sono sinoidali se le dimensioni dell'antenna sono piccole rispetto a λ . Queste considerazioni valgono anche per campi non molto diverse dai sinoidali (campi modulati, smorzati con smorzamento non eccessivo, ecc.). Negli altri casi è difficile dare criteri generali per la nostra ipotesi. Notiamo però che essa è sempre esatta qualora la lunghezza delle antenne fosse infinitesima cioè se le antenne si riducessero a dipoli infinitesimi.

le espressioni:

$$h_{e_1} = \frac{\int_{l_1} m_1(l_1) dl_1}{I_{01}} \quad h_{e_2} = \frac{\int_{l_2} m_2(l_2) dl_2}{I_{02}}$$

dove I_{01} e I_{02} sono i valori massimi $m_1(l_1)$, $m_2(l_2)$. Generalizzando questa definizione, cioè applicandola in ogni caso, la (70) si può scrivere:

$$(71) \quad \mathbf{F}_2 \times \mathbf{t}_1 I_{01} h_{e_1} = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{t}_2 I_{02} h_{e_2}$$

che è la forma più comoda del teorema di reciprocità.

In particolare se le due antenne sono identiche e $m_1(l_1) = m_2(l_2)$ si ha da (71)

$$(72) \quad \mathbf{F}_2 \times \mathbf{t}_1 = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{t}_2.$$

Abbiamo così generalizzato le principali espressioni del teorema di reciprocità della radiotelegrafia. Perciò varie conseguenze del teorema in discorso provate finora per campi sinoidali, vengono estese senz'altro a campi che variano col tempo in modo qualunque ⁽¹⁾.

Nel caso delle antenne in onde progressive, cioè antenne per le quali si possa scrivere (c costante):

$$(73) \quad I_1 = g\left(t - \frac{l_1}{c}\right) \quad I_2 = g\left(t - \frac{l_2}{c}\right)$$

le stesse considerazioni fatte a proposito della teoria della elasticità ci permettono di dedurre da (67)

$$\int_{l_1} \mathbf{F}_2\left(t - \frac{l_1}{c}\right) \times \mathbf{t}_1 dl_1 = \int_{l_2} \mathbf{F}_1\left(t - \frac{l_2}{c}\right) \times \mathbf{t}_2 dl_2$$

che è la forma più generale del teorema di reciprocità per antenne in onde progressive. Essa si semplifica se l_1 , l_2 sono così piccole da potersi supporre $\mathbf{F}_2\left(t - \frac{l_1}{c}\right) = \mathbf{F}_2(t)$, $\mathbf{F}_1\left(t - \frac{l_2}{c}\right) = \mathbf{F}_1(t)$ e allora si ottiene, una formula analoga a (72). Si deve però notare, che nei casi pratici, quest'ultima supposizione si può fare di rado.

Termineremo questo capitolo con la seguente ovvia osservazione. Molto spesso le antenne sono percorse da correnti sinoidali. Però tale condizione si raggiunge dopo un periodo transiente, in generale, brevissimo. Siccome arrivati a regime anche il campo, si può supporre, almeno sulle due antenne, sinoidale

⁽¹⁾ Cfr. T. ECKERSLEY, « Proceedings Institute Electrical Engineer », 1927; D. GRAFFI, « Nuovo Cimento », 1932; G. LATMIRAL, « Alta Frequenza », 1938.

resta provato dalla nostra ricerca il teorema di reciprocità nel caso sinoidale, e ciò ha il maggior interesse pratico. Come è noto il teorema in discorso si dimostra, in generale, supponendo sinoidale il campo in ogni punto, ma si va incontro a qualche difficoltà nell'eliminare certi integrali di superficie, che devono essere nulli quando la superficie si allontana all'infinito ⁽¹⁾. Il nostro metodo evita, come si è visto, queste difficoltà e ci sembra stringa più da vicino i fatti.

APPENDICE

Riprendiamo il problema della trasmissione del calore in un corpo, la cui superficie esterna sia a contatto con un ambiente a temperatura zero, e all'interno si trasmetta calore, dovuto a sorgenti distribuite nel corpo stesso. Vedremo come il teorema di reciprocità stabilito, supponendo le temperatura inizialmente nulla si possa, dimostrare senza ammettere, per la temperatura, quel particolare comportamento all'infinito ⁽²⁾ che ci ha permesso di applicare la trasformazione di LAPLACE. Si abbiano due sistemi di sorgenti tali che:

$$(74) \quad Q = G(t)\psi_1(P) \quad Q_2 = G(t)\psi_2(P).$$

In corrispondenza di Q_1 e Q_2 avremo, nel nostro corpo di volume v limitato dalla superficie σ , le temperature T_1 e T_2 che soddisfano alle equazioni:

$$(75) \quad c\rho \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \text{div} (K \text{ grad } T_1) + Q_1$$

$$(76) \quad c\rho \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \text{div} (K \text{ grad } T_2) + Q_2$$

integrando queste equazioni da 0 a m ($m > 0$) dopo averle moltiplicate per $e^{-p\tau}$. Una integrazione per parti al primo membro ci da:

$$(77) \quad c\rho(e^{-pm}T_1(m) + pt_1(m)) = \text{div} (K \text{ grad } t_1(m)) + q_1(m)$$

$$(78) \quad c\rho(e^{-pm}T_2(m) + pt_2(m)) = \text{div} (K \text{ grad } t_2(m)) + q_2(m)$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} t_1(m) &= \int_0^m e^{-p\tau} T_1(\tau) d\tau, & t_2(m) &= \int_0^m e^{-p\tau} T_2(\tau) d\tau \\ q_1(m) &= \int_0^m e^{-p\tau} Q_1(\tau) d\tau, & q_2(m) &= \int_0^m e^{-p\tau} Q_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Cfr. BALLANTINE, « Proceedings Radio Engineers », 1928.

⁽²⁾ Cioè facciamo per la temperatura le solite ipotesi della fisica matematica la temperatura assieme alle sue derivate sia finita e continua entro tutto il corpo e in ogni intervallo finito di tempo.

moltiplicando la (77) per $t_2(m)$ la (78) per $t_1(m)$ e sottraendo membro a membro si ha:

$$c\rho e^{-pm}(T_1(m)t_2(m) - T_2(m)t_1(m)) = \operatorname{div}(Kt_2 \operatorname{grad} t_1 - Kt_1 \operatorname{grad} t_2) + \\ + q_1(m)t_2(m) - q_2(m)t_1(m).$$

Integrando questa equazione su tutto v e osservando che su σ

$$K \operatorname{grad} t_1(m) \times \mathbf{n} = ht_1(m), \quad K \operatorname{grad} t_2(m) \times \mathbf{n} = ht_2(m)$$

si ha ⁽⁴⁾:

$$(79) \quad c\rho e^{-pm} \int_v (T_1(m)t_2(m) - T_2(m)t_1(m)) dv = \int_v (q_1(m)t_2(m) - q_2(m)t_1(m)) dv.$$

Passiamo ora al limite per $m \rightarrow \infty$. Possiamo ora dimostrare che il limite del primo membro è nullo.

A questo moltiplichiamo la (75) per T_1 integrando su tutto v troviamo:

$$c\rho \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_v T_1^2 dv = \int_v \operatorname{div}(T_1 K \operatorname{grad} T_1) dv - \int_v K \operatorname{grad}^2 T_1 dv + \\ + \int_v Q_1 T_1 dv = \int_v -h T_1^2 dv - \int_v K \operatorname{grad}^2 T_1 dv + \int_v Q_1 T_1 dv..$$

Ora, per ipotesi da un certo istante, che ora indicheremo con k , in poi la Q_1 si può supporre nulla, cioè da quell'istante in poi la derivata rispetto al tempo di $\int_v T_1^2 dv$ è negativa o al più nulla. Perciò questo integrale è in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ inferiore o al più uguale al suo limite superiore M_1 in $(0, k)$.

E analoga considerazione può farsi per $\int_v T_2^2 dv$ che sarà inferiore in $(0, +\infty)$ al suo limite superiore M_2 in $(0, k)$.

Ora si ha, se p_1 è la parte reale di p , M il maggiore fra M_1 e M_2 ,

$$\left| \int_v T_1(m)t_2(m) dv \right| = \left| \int_v T_1(m) \int_0^m e^{-p\tau} T_2(\tau) d\tau dv \right| = \left| \int_0^m e^{-p\tau} d\tau \int_v T_1(m) T_2(\tau) dv \right| \\ \leq \int_0^m e^{-p_1\tau} d\tau \int_v \frac{T_1^2(m) + T_2^2(\tau)}{2} dv \leq \frac{M}{p_1} (1 - e^{-p_1 m}) \leq \frac{M}{p_1}.$$

Poichè le stesse considerazioni possono ripetersi scambiando gli indici

(4) Per semplicità, sebbene sia facile liberarsi da questa ipotesi, supporremo $c\rho$ costante su tutti i punti di v . Si ricordi poi che $c\rho$ come K sono sempre positivi conformemente all'esperienza.

l'integrale a primo membro di (79) è per ogni m limitato, sicchè passando al limite per $m \rightarrow \infty$ il primo membro di questa equazione è nullo, come si era annunciato.

Si ha allora, ricordando le (74)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m G(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_v^m \left(\psi_1 \int_0^m e^{-p\tau} T_2 d\tau - \psi_2 \int_0^m e^{-p\tau} T_1 d\tau \right) dv = 0$$
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m G(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_v^m e^{-p\tau} d\tau \int_v^m (\psi_1 T_2 - \psi_2 T_1) dv = 0.$$

Ora scelto $m > k$, $G(\tau) = 0$ per $\tau > m$, quindi, per questi valori di τ il primo integrale rimane costante e si può per ciò anteporlo al segno limite. Sicchè con ovvia semplificazione si ha:

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} d\tau \int_v^\infty (\psi_1 T_2 - \psi_2 T_1) dv = 0.$$

Da cui scende subito il teorema di reciprocità già stabilito. Forse con le stesse considerazioni si avrebbero potuti stabilire gli altri teoremi di questo lavoro, ma abbiamo creduto opportuno evitare questo metodo troppo complicato, rispetto all'altro da noi seguito, che richiede ipotesi così intuitive dal punto di vista fisico.