Intorno ad una classe notevole di cicli formati da quattro trasformazioni di Laplace nello spazio ordinario.

Memoria di H. JONAS (a Berlino).

Alla memoria di LUIGI BIANCHI
nel decimo anniversario della sua morte.

Preliminari.

Preliminari. — Un *ciclo di LAPLACE*, nell' accennato senso ristretto che varrà pel seguito, comprende quattro superficie su cui si corrispondono i doppii sistemi (α, β) di curve fra loro coniugate, le rispettive tangenti, non omologhe s' intende, coincidendo a due a due secondo l'ordine del ciclo e formando così un quadrilatero sghembo variabile. Saranno dette, per brevità, *reti opposte* quelle descritte dai vertici opposti, le rette che li congiungono chiamandosi *diagonali* del ciclo. Nel presente lavoro riprendo a trattare la classe particolarmente interessante, già segnalata come un primo esempio nel 1922 ⁽¹⁾, dei cicli di LAPLACE connessi alla deformazione del paraboloide iperbolico equilatero, e che viene caratterizzata dal distendersi le reti opposte dell' una coppia sopra una medesima sfera, donde intanto, con una proiettività, si può passare ad una quadrica generale a punti ellittici ⁽²⁾. Tale ciclo di LAPLACE si genera in modo intuitivo nel rotolamento del paraboloide $z = xy$ su una sua deformata, tirandosi dal punto fisso O i raggi paralleli tanto all'asse trascinato nel movimento come al suo simmetrico rapporto al piano tangente. Questi sulla sfera rappresentativa di centro O , segnano due sistemi ortogonali (α, β) , corrispondenti alle asintotiche della deformata ed aventi a comune i loro trasformati di LAPLACE, talchè viene a nascerne il ciclo desiderato. Giova notar qui che il sistema differenziale da me preso a base analitica dell' indagine è dovuto al DARBOUX ⁽³⁾, il quale lo diede risolvendo un altro problema, bensì congenere, senza constatarne l' intimo legame colla

⁽¹⁾ JONAS, *Untersuchungen über die als Gewebe bezeichneten Kurvennetze und über eine Reihe von Problemen, die mit der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids zusammenhängen*, « Math. Annalen », 87 (1922), p. 157.

⁽²⁾ Pel caso della quadrica rigata veggasi una prima comunicazione: JONAS, *Ueber den Zusammenhang zweier Klassen viergliedriger Laplacescher Zyklen*, « Journal f. d. reine u. ang. Math. », 179 (1938), p. 22.

⁽³⁾ DARBOUX, *Leçons sur la théorie gén. des surf.*, 3, p. 471.

deformazione paraboloidale. Io vi sono poi ritornato più volte, fra l'altro per dedurne sotto un nuovo aspetto la teoria delle trasformazioni B_k di BIANCHI per le superficie applicabili sul detto paraboloide⁽⁴⁾. L'argomento d'un ulteriore studio recente, riguardante il comportarsi dell'associato ciclo di LAPLACE nell'applicazione della B_k , mi fu porto dalla scoperta di un teorema generale che il sig. BACKES è stato il primo ad enunciare⁽⁵⁾, la di lui pubblicazione avendo preceduto di poco la mia propria indipendente⁽⁶⁾. Un ciclo di LAPLACE cioè gode della proprietà che le sue diagonali costituiscono due congruenze W , nelle quali le asintotiche delle falde focali (reali od immaginarie coniugate) corrispondono alle reti (α, β) del ciclo. Partendo da questo fatto fondamentale, ho mostrato che un ciclo della classe speciale in considerazione, se è assoggettato all'operazione B_k , si trasforma in maniera tale che le congruenze W formate dalle diagonali subiscono trasformazioni asintotiche simultanee delle falde focali. Sorse di qui spontanea la domanda se tali trasformazioni potevano estendersi ai cicli di LAPLACE in generale; il che giunsi a stabilire in una seguente Memoria⁽⁷⁾, adattando a questo scopo le trasformazioni armoniche delle reti e la nozione di rete derivata.

In quanto all'attuale ricerca, avvertasi prima che nel ciclo di LAPLACE legato alla deformata del paraboloide $z = xy$ vi è *corrispondenza fra le sviluppabili delle due congruenze di diagonali*, queste ultime essendo polari reciproche rispetto alla sfera cui può sostituirsi, come già si disse, una quadrica. Faremo vedere che la pensata proprietà riesce caratteristica pei cicli di LAPLACE aventi due reti opposte su una stessa quadrica. Dopo di ciò, tornando al caso della sfera per studiare nuovamente l'effetto del processo B_k , discorreremo della *stratificabilità* in un senso ossia *unilaterale*, avente luogo tra le congruenze Γ e C delle diagonali, il raggio generico di Γ , intersezione dei due piani tangenti alla sfera, ammettendo una semplice infinità di punti, per le superficie luogo dei quali i piani tangenti formano fascio col raggio di C , corda di contatto, com'asse. Rammentiamo che secondo FUBINI⁽⁸⁾,

(4) JONAS, *Ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sul paraboloide iperbolico equilatero*, « Annali di Mat. », (4) 2 (1924-25), p. 161.

(5) BACKES, *Sur les réseaux conjugués qui se reproduisent après quatre transformations de Laplace*, « Bull. Ac. Roy. de Belg. », (5) 21 (1935), p. 883.

(6) JONAS, *Ein allgemeiner Satz über W -Kongruenzen mit Anwendungen auf Laplacesche Zyklen, Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids und schiefe Weingartensche Systeme*, « Math. Annalen », 114 (1937), p. 237.

(7) JONAS, *Allgemeine Transformationstheorie der konjugierten Systeme mit viergliedrigen Laplaceschen Zyklen*, « Math. Annalen », 114 (1937), p. 749.

(8) FUBINI, *Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie R* , « Annali di Mat. », (4) 1 (1923-24), p. 241.

mantenuta l'ipotesi che si corrispondano le sviluppabili, una siffatta relazione geometrica vige quando inoltre i piani focali della prima congruenza contengono i fuochi non omologhi della seconda. Orbene nel caso nostro presentasi il fatto assai singolare che tra le ∞^1 superficie della stratificazione ne esistono due segnalate, aventi le (α, β) per linee asintotiche, e che si trasformano appunto come le falde focali della congruenza Γ per trasformazioni asintotiche. È da osservarsi che la proprietà in questione sta fuor di quanto consegue dalla stratificabilità *bilaterale* da cui si trovano vincolate la Γ e la sua trasformata Γ_1 , essendo congruenze R nelle condizioni indicate dal FUBINI⁽⁹⁾, cioè contigue per trasformazioni asintotiche delle falde focali. Dopo trattentici su questa stratificazione per esaminarne più da vicino l'assetto analitico, procediamo a determinare le più generali superficie che abbiano i loro punti situati sui raggi della congruenza Γ e prendano parte nel modo di sopra alla trasformazione. Sebbene, propriamente, tale problema pure rientri nella teoria generale delle congruenze R , le particolari circostanze che ne accompagnano la risoluzione appaiono degne d'attenzione, tanto più che c'imbattiamo così in un sistema differenziale, generalizzazione di quello di DARBOUX, al quale può ridursi, per conveniente scelta dei valori iniziali, la deformazione del paraboloide rigato generale. Anzi, con ciò, saremo in grado di dire da qual ente geometrico venga surrogato allora il ciclo di LAPLACE. Rimandando pei dettagli alle righe che seguono, basti qui avvertire che i nuovi sistemi di quadrilateri sghembi risultano identici a quelli ottenuti risolvendo il problema con cui termineremo la nostra ricerca, di trovare cioè le coppie di doppii sistemi di linee (α, β) , appartenenti ad una medesima sfera, e per cui si confondano i piani osculatori alle curve non omologhe nei punti corrispondenti.

1. Generalità sui cicli di Laplace. — Comincio coll' esporre in succinto il metodo metrico di cui mi sono servito per la ricerca dei cicli di LAPLACE in due Memorie anteriori⁽¹⁰⁾. Indichino x (cioè x, y, z) e x' i punti descriventi due opposte delle quattro reti (α, β) del ciclo domandato, essendo

$$(1) \quad x_{\alpha\beta} = ax_{\alpha} + bx_{\beta}, \quad x'_{\alpha\beta} = a'x'_{\alpha} + b'x'_{\beta}$$

le relative equazioni di LAPLACE. Sarà necessario in primo luogo che, posto;

$$(2) \quad a - \frac{b_{\beta}}{b} = A, \quad b - \frac{a_{\alpha}}{a} = B, \quad a' - \frac{b'_{\beta}}{b'} = A', \quad b' - \frac{a'_{\alpha}}{a'} = B',$$

⁽⁹⁾ Ibid.

⁽¹⁰⁾ Cf. il § 3 della Mem. citata in nota ⁽⁶⁾.

le quattro funzioni a, b, a', b' soddisfino alle condizioni seguenti:

$$(3) \quad A_\alpha + bA = B'_\beta + a'B' = AB', \quad B_\beta + aB = A'_\alpha + b'A' = BA'.$$

In virtù di queste risultano illimitatamente integrabili le seguenti equazioni a derivate parziali (delle quali la seconda della (1) è conseguenza):

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_\alpha = \frac{b'}{a} x_\beta + b'(x' - x), \quad x'_\beta = \frac{a'}{b} x_\alpha + a'(x' - x), \\ x_{\alpha\alpha} = \left(b + \frac{b_\alpha}{b} + B' \right) x_\alpha + bB'(x' - x), \\ x_{\alpha\beta} = ax_\alpha + bx_\beta, \\ x_{\beta\beta} = \left(a + \frac{a_\beta}{a} + A' \right) x_\beta + aA'(x' - x), \end{array} \right.$$

le quali, riguardate come sistema lineare ed omogeneo per la terna di funzioni incognite $x_\alpha, x_\beta, x' - x$, posseggono tre soluzioni linearmente indipendenti, in guisa da definire un ciclo di LAPLACE in modo univoco a meno di trasformazioni affini. Per le reti intermedie $(\widehat{x})$ e $(\widetilde{x})$, trasformate comuni di LAPLACE delle superficie (x) e (x') , avremo:

$$(5) \quad \widehat{x} = x - \frac{x_\alpha}{b} = x' - \frac{x'_\beta}{a'}, \quad \widetilde{x} = x - \frac{x_\beta}{a} = x' - \frac{x'_\alpha}{b'},$$

$$(6) \quad \widehat{x}_{\alpha\beta} = A\widehat{x}_\alpha + B\widehat{x}_\beta, \quad \widetilde{x}_{\alpha\beta} = A'\widetilde{x}_\alpha + B'\widetilde{x}_\beta.$$

Dalle (2), (3) deduconsi le formule ausiliarie, utili più tardi:

$$(7) \quad (a + a' + A + A')_\alpha = (b + b' + B + B')_\beta,$$

$$(8) \quad (aa'AA')_\alpha = 0, \quad (bb'BB')_\beta = 0.$$

A proposito della relazione (7) notisi che, introducendo il determinante:

$$(9) \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_\alpha & x_\beta & x' - x \\ y_\alpha & y_\beta & y' - y \\ z_\alpha & z_\beta & z' - z \end{vmatrix},$$

viene:

$$(10) \quad \left(\log \frac{\Delta}{ab} \right)_\alpha = b + b' + B + B', \quad \left(\log \frac{\Delta}{ab} \right)_\beta = a + a' + A + A'.$$

D'altra parte, in virtù delle (8), come facilmente confermasi col tener conto della forma del sistema differenziale (4), sarà sempre possibile disporre delle variabili α e β in modo da aversi con $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ unità positive o negative:

$$(11) \quad aa'AA' = \varepsilon_1, \quad bb'BB' = \varepsilon_2.$$

Ricordiamo ancora l'importante proprietà dei cicli di LAPLACE che le diagonali xx' e $\widetilde{x}\widetilde{x'}$ formano due congruenze W con α, β parametri asintotici delle falde focali, le sviluppabili determinandosi rispettivamente dalle equazioni differenziali:

$$(12) \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \pm \sqrt{\frac{bb'}{aa'}}, \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \pm \sqrt{\frac{BB'}{AA'}}.$$

Per una ben nota proposizione di DARBOUX in ogni congruenza W le sei coordinate di retta soddisfano ad un'equazione di LAPLACE. Questa per la congruenza delle rette xx' , con $\theta = x' - x, \dots, yz' - zy', \dots$, assume la forma:

$$(13) \quad \theta_{\alpha\beta} = (a + a')\theta_x + (b + b')\theta_\beta - (ab' + a'b)\theta,$$

valendo l'analogia per quella delle rette $\widetilde{x}\widetilde{x'}$:

$$(14) \quad \theta_{\alpha\beta} = (A + A')\theta_x + (B + B')\theta_\beta - (AB + A'B')\theta.$$

2. Una proprietà caratteristica dei cicli di Laplace con due reti opposte sopra una medesima quadrica. — Ci proponiamo ora di dimostrare il teorema seguente: *Se in un ciclo di LAPLACE ha luogo corrispondenza fra le sviluppabili delle due congruenze W formate dalle diagonali, le reti opposte dell'una coppia appartengono ad una medesima quadrica.*

Poichè, nell'attuale ipotesi, dalla (12) si ha:

$$\frac{bb'}{aa'} = \frac{BB'}{AA'},$$

ammesse le (11) e cioè per causa di realtà con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, si ottiene:

$$\frac{bb'}{aa'} = \frac{BB'}{AA'} = \pm 1.$$

Sarà lecito, per semplificare la scrittura e senza pregiudicare l'esattezza dell'argomentazione, supporre *reali* nelle due congruenze W le *sviluppabili*, date allora da:

$$(15) \quad \alpha \pm \beta = \text{cost.}$$

Avendosi dunque

$$(16) \quad aa' = bb', \quad AA' = BB', \quad aa'AA' = bb'BB' = \varepsilon = \pm 1,$$

poniamo per un momento:

$$aa' = bb' = \rho.$$

Derivando coll'aver riguardo alla (2) troviamo:

$$\frac{\rho_x}{\rho} = b + b' - (B + B'), \quad \frac{\rho_\beta}{\rho} = a + a' - (A + A').$$

indi dal confronto colla (7):

$$(17) \quad (a + a')_x = (b + b')_\beta, \quad (A + A')_x = (B + B')_\beta.$$

È manifesto che nelle due congruenze W le curve $\alpha \pm \beta = \text{cost}$, intercettate dalle sviluppabili su ciascuna delle falde focali (anch'esse reali com'è ovvio), costituiscono un sistema *isotermo-coniugato*; ne segue che *le diagonali* xx' e $\widetilde{x} \widetilde{x}$ *percorrono congruenze* R . A conferma di ciò si osservi altresì che per le (17) le equazioni di LAPLACE (13), (14) risultano ad invarianti uguali. Segnaliamo di passaggio una proposizione generale che si deduce dalla sola (7): *Se in un ciclo di LAPLACE una delle due congruenze di diagonali è R , la proprietà sussiste per l'altra*. Tuttavia tale ipotesi sarebbe diversa dalla nostra, non discendendone generalmente la corrispondenza delle sviluppabili.

Eseguite le derivazioni nelle (17) coll'uso di (2), (3), otteniamo la seguente equazione in termini finiti da aggiungersi alla (16):

$$aB - bA + a'B' - b'A' = 0,$$

la quale, eliminando p. es. a' e A' , viene a scriversi:

$$(18) \quad (aB - bA)(aA - bB) = 0.$$

Resta con ciò spiegato il differente comportamento delle due coppie di reti opposte nel ciclo ricercato. Abbiamo in conseguenza le relazioni:

$$(19) \quad \frac{a}{b} = \frac{b'}{a'} = \frac{A}{B} = \frac{B'}{A'}$$

ovvero:

$$(19^{\text{bis}}) \quad \frac{a}{b'} = \frac{b}{a'} = \frac{A'}{B} = \frac{B'}{A},$$

completata dalla terza delle (16). Basta ora, come si vede senz'altro, che prendiamo a fondamento degli ulteriori sviluppi l'uno di questi gruppi di formule, p. es. le (19), l'altro corrispondendo allora soltanto ad uno scambio delle due coppie di reti opposte.

Combinando le (19) colle (2) avremo:

$$(20) \quad a_x = b_\beta, \quad a'_x = b'_\beta,$$

onde appare che le reti (α, β) descritte dai punti x e x' saranno ad invarianti uguali. Introduciamo, osservando le (20), due funzioni $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ col porre:

$$(21) \quad a = -\frac{\mathfrak{P}_\beta}{\mathfrak{P}}, \quad b = -\frac{\mathfrak{P}_x}{\mathfrak{P}}, \quad a' = -\frac{\mathfrak{P}'_\beta}{\mathfrak{P}'}, \quad b' = -\frac{\mathfrak{P}'_x}{\mathfrak{P}}.$$

Deve aversi $aa' = bb'$, cioè $\vartheta_\alpha \vartheta'_\alpha = \vartheta_\beta \vartheta'_\beta$, onde potremo fare:

$$(22) \quad \vartheta'_\alpha = \frac{1}{h} \vartheta_\beta, \quad \vartheta'_\beta = \frac{1}{h} \vartheta_\alpha.$$

Dalle (21) si ricavano per mezzo delle (2) le espressioni:

$$(23) \quad A = -\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta_\alpha}, \quad B = -\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta_\beta}, \quad A' = -\frac{\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'_\alpha}, \quad B' = -\frac{\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'_\beta},$$

compatibili peraltro colle rimanenti (19). Ci resta adesso da esprimere che i valori di a, b, a', b' dedotti dalle (23) mediante le (3) devono identificarsi colle formule (21). Per questo, presa la relazione.

$$\frac{A_\alpha}{A} + b - B' = 0$$

e sostituitevi per b e B' le espressioni (21) e (23), scriviamo:

$$\frac{A_\alpha}{A} - \frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta} + \frac{\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'_\beta} = 0,$$

indi integrando ed unendovi le formule analoghe:

$$A \frac{\vartheta'_\beta}{\vartheta} = f_1(\beta), \quad B \frac{\vartheta'_\alpha}{\vartheta} = f_2(\alpha), \quad A' \frac{\vartheta_\beta}{\vartheta'} = f_3(\beta), \quad B' \frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta'} = f_4(\alpha).$$

Tenendo presenti le (23), si avrà:

$$\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{h\vartheta} = -f_1(\beta) = -f_2(\alpha) = \text{cost}, \quad \frac{h\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'} = -f_3(\beta) = -f_4(\alpha) = \text{cost}.$$

Delle due costanti così introdotte l'una e cioè p. es. la prima potrà ridursi all'unità positiva, munendo a tal fine le funzioni ϑ e h dello stesso moltiplicatore costante opportunamente scelto, in guisa da lasciar inalterate le (22), mentre allora la seconda costante per effetto della terza formula (16), con ciò verificata, riesce identica alla $\varepsilon = \pm 1$ che vi figura. Essendo:

$$(24) \quad \vartheta_{\alpha\beta} = h\vartheta, \quad \vartheta'_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{h} \vartheta',$$

$$(25) \quad A = -\frac{h\vartheta}{\vartheta_\alpha}, \quad B = -\frac{h\vartheta}{\vartheta_\beta}, \quad A' = -\varepsilon \frac{\vartheta'}{h\vartheta'_\alpha}, \quad B' = -\varepsilon \frac{\vartheta'}{h\vartheta'_\beta},$$

bisogna infine paragonare colla seconda (24) i due valori di $\vartheta'_{\alpha\beta}$ dedotti dalle (22). Siamo così pervenuti al sistema differenziale:

$$(26) \quad \begin{cases} \vartheta'_\alpha = \frac{1}{h} \vartheta_\beta, & \vartheta'_\beta = \frac{1}{h} \vartheta_\alpha, \\ \vartheta_{\alpha\alpha} = \frac{h_\alpha}{h} \vartheta_\alpha + \varepsilon \vartheta', & \vartheta_{\alpha\beta} = h\vartheta, & \vartheta_{\beta\beta} = \frac{h_\beta}{h} \vartheta_\beta + \varepsilon \vartheta', \quad (\varepsilon = \pm 1) \end{cases}$$

ove alle equazioni della seconda riga si potrebbero sostituire le equivalenti:

$$(27) \quad \vartheta'_{\alpha\alpha} = -\frac{h_\alpha}{h} \vartheta'_\alpha + \vartheta, \quad \vartheta'_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{h} \vartheta', \quad \vartheta'_{\beta\beta} = -\frac{h_\beta}{h} \vartheta'_\beta + \vartheta.$$

Alle (26) riconosciamo associarsi in ogni caso la condizione:

$$(28) \quad (\log h)_{\alpha\beta} = h - \frac{\varepsilon}{h},$$

soddisfatta la quale il sistema differenziale risulta illimitatamente integrabile. In quanto alla (28), trascurando qui le particolarità di geometria immaginaria, ci contentiamo di ricordare che essa in sostanza non è altro che l'equazione differenziale delle superficie a curvatura costante.

Assumendo ora le terne ξ, η, ζ e ξ', η', ζ' col porre:

$$(29) \quad x = \frac{\xi}{\vartheta}, \quad y = \frac{\eta}{\vartheta}, \quad z = \frac{\zeta}{\vartheta}, \quad x' = \frac{\xi'}{\vartheta'}, \quad y' = \frac{\eta'}{\vartheta'}, \quad z' = \frac{\zeta'}{\vartheta'},$$

avremo invece delle formule (5):

$$(30) \quad \tilde{x} = \frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha} = \frac{\xi'_\beta}{\vartheta'_\beta}, \quad \tilde{x} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta} = \frac{\xi'_\alpha}{\vartheta'_\alpha},$$

mentre il sistema differenziale (4) verrà a mutarsi appunto nel sistema (26) soddisfatto da ϑ, ϑ' , valendo così adunque per le quattro coppie di funzioni $\xi, \xi'; \eta, \eta'; \zeta, \zeta'; \vartheta, \vartheta'$. Considerandolo come lineare e completo nelle funzioni incognite $\vartheta, \vartheta', \vartheta_\alpha, \vartheta_\beta$, riesce facile a vedersi che esso ammette quattro soluzioni linearmente indipendenti, onde il determinante

$$(31) \quad \delta = \begin{vmatrix} \xi & \xi' & \xi_\alpha & \xi_\beta \\ \eta & \eta' & \eta_\alpha & \eta_\beta \\ \zeta & \zeta' & \zeta_\alpha & \zeta_\beta \\ \vartheta & \vartheta' & \vartheta_\alpha & \vartheta_\beta \end{vmatrix}$$

sarà diverso da zero. Si verifica per derivazione il sussistere di un gruppo di dieci relazioni integrali quadratiche, presentanti i due tipi:

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{2}{h} \xi_\alpha \xi_\beta - \xi^2 - \varepsilon \xi'^2 = c_{11}, \\ \frac{1}{h} (\xi_\alpha \eta_\beta + \xi_\beta \eta_\alpha) - \xi \eta - \varepsilon \xi' \eta' = c_{12}. \end{cases}$$

Denotiamo con $c_{ik}(i, k = 1, 2, 3, 4; c_{ik} = c_{ki})$ le dieci costanti, intendendosi presi gli indici 1, 2, 3, 4 nell'ordine delle lettere $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$, e formiamone il determinante del 4° ordine:

$$(33) \quad \|c_{ik}\| = c.$$

Quadrando δ , ciò che si fa coll'applicare la consueta regola al determinante indicato dalla prima riga:

$$\left(\frac{\xi_\alpha + \xi_\beta}{\sqrt{2h}}, \quad \frac{i(\xi_\alpha - \xi_\beta)}{\sqrt{2h}}, \quad i\bar{\xi}, \quad i\sqrt{\varepsilon}\bar{\xi}' \right)$$

e tenendo conto delle (32), otterremo la relazione:

$$(34) \quad c = -\varepsilon \frac{\delta^2}{h^2}.$$

Importa avvertire che, calcolate le c_{ik} mediante le (32) dai valori iniziali delle sedici funzioni $\xi, \xi', \xi_\alpha, \xi_\beta, \dots$, arbitrarii pur che ne risulti $\delta \neq 0$, si ha per la (34): $\varepsilon = -\operatorname{sgn} c$.

Indicansi con C_{ik} i complementi algebrici degli elementi c_{ik} nel determinante (31), onde verrà:

$$(35) \quad C = \|C_{ik}\| = c^3.$$

Orbene, per provare che nel quadrilatero sghembo variabile $xx\bar{x}'\bar{x}$, generante il ciclo di LAPLACE, i due vertici opposti $\bar{x}$ e $\bar{x}'$ appartengono ad una medesima quadrica, consideriamo la forma quadrica quaternaria:

$$(36) \quad \begin{aligned} \Phi = & C_{11}\xi^2 + 2C_{12}\xi\eta + 2C_{13}\xi\zeta + 2C_{14}\xi\vartheta \\ & + C_{22}\eta^2 + 2C_{23}\eta\zeta + 2C_{24}\eta\vartheta \\ & + C_{33}\zeta^2 + 2C_{34}\zeta\vartheta \\ & + C_{44}\vartheta^2, \end{aligned}$$

la quale scritta nelle $\xi', \dots$ denoteremo con Φ' , essendo inoltre

$$(37) \quad \Pi = C_{11}\xi\xi' + C_{12}(\xi\eta' + \eta\xi') + \dots + C_{44}\vartheta\vartheta'$$

la rispettiva forma polare. Se deriviamo la (36) rapporto ad α e β , giungeremo per effetto delle (32) a stabilire quattro relazioni della forma:

$$(38) \quad \frac{1}{2h}\Phi_\beta\xi_\alpha + \frac{1}{2h}\Phi_\alpha\xi_\beta = (\Phi + c)\xi + \varepsilon\Pi\xi'.$$

da cui, avendosi $\delta \neq 0$, si ricavano le seguenti:

$$(39) \quad \Phi + c = 0, \quad \Phi_\alpha = 0, \quad \Phi_\beta = 0, \quad \Pi = 0.$$

In modo simile si ottiene:

$$(40) \quad \Phi' + \varepsilon c = 0, \quad \Phi'_\alpha = 0, \quad \Phi'_\beta = 0.$$

Dopo di ciò, derivando le $\Phi_\alpha = 0, \Phi_\beta = 0$ un'altra volta e sostituendo per $\xi_{\alpha\alpha}, \dots, \xi_{\beta\beta}, \dots$ le espressioni date dalle (26), avremo coll'osservare la $\Pi = 0$:

$$(41) \quad \begin{cases} C_{11}(\xi_\alpha)^2 + 2C_{12}\xi_\alpha\eta_\alpha + \dots + C_{44}(\vartheta_\alpha)^2 = 0, \\ C_{11}(\xi_\beta)^2 + 2C_{12}\xi_\beta\eta_\beta + \dots + C_{44}(\vartheta_\beta)^2 = 0. \end{cases}$$

Notiamo d'altronde che si ricadrà nella prima formula (40), quando si calcoli $\Phi_{\alpha\beta}$ col far uso delle (26) e (33). Ora, il teorema enunciato al principio del presente numero risulta pienamente confermato dalle (41), siccome queste in in virtù delle (30) si convertono nell'equazione della quadrica:

$$(42) \quad \begin{aligned} C_{11}\widehat{x^2} + 2C_{12}\widehat{xy} + 2C_{13}\widehat{xz} + 2C_{14}\widehat{x} + C_{22}\widehat{y^2} + 2C_{23}\widehat{yz} \\ + 2C_{24}\widehat{y} + C_{33}\widehat{z^2} + 2C_{34}\widehat{z} + C_{44} = 0, \end{aligned}$$

soddisfatta altresì da $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, $\widetilde{z}$.

Come ben si sà, il segno della curvatura totale della quadrica è quello di $-C$, cioè tenuto conto della relazione (35), di $-c$; onde, osservando la (34), possiamo dire: *Secondochè nelle equazioni differenziali (26), (28) è $\varepsilon = +1$ o $\varepsilon = -1$, restando pur nell'ipotesi di sviluppabili reali, la quadrica ricoperta dalle due reti opposte $(\widehat{x})$ e $(\widetilde{x})$ del ciclo sarà rispettivamente a punti ellittici o rigata.* Quanto all'ipotesi fin qui esclusa che nelle congruenze W delle diagonali le sviluppabili sieno immaginarie coniugate, ci limiteremo ad accennare che allora nell'equazione differenziale (28) della funzione h il segno ε si collega a quello della curvatura totale in modo opposto, vale a dire che è $\varepsilon = +1$ nel caso della quadrica rigata.

3. Caso della sfera; deformato del paraboloide iperbolico equilatero; stratificabilità unilaterale delle due congruenze di diagonali. — Passiamo ora a completare i risultati conseguiti nelle mie Memorie precedenti rispetto ai cicli di LAPLACE per cui due opposte delle quattro superficie coincidono nella stessa sfera unitaria col centro nell'origine. A tale uopo, per maggior chiarezza, scriviamo di nuovo, con $\varepsilon = +1$, le equazioni differenziali:

$$(43) \quad (\log h)_{\alpha\beta} = h - \frac{1}{h},$$

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi'_{\alpha} &= \frac{1}{h} \xi_{\beta}, & \xi'_{\beta} &= \frac{1}{h} \xi_{\alpha}, \\ \xi_{\alpha\alpha} &= \frac{h_{\alpha}}{h} \xi_{\alpha} + \xi', & \xi_{\alpha\beta} &= h\xi, & \xi_{\beta\beta} &= \frac{h_{\beta}}{h} \xi_{\beta} + \xi', \\ \left[\xi'_{\alpha\alpha} &= -\frac{h_{\alpha}}{h} \xi'_{\alpha} + \xi, & \xi'_{\alpha\beta} &= \frac{1}{h} \xi', & \xi'_{\beta\beta} &= -\frac{h_{\beta}}{h} \xi'_{\beta} + \xi \right]. \end{aligned} \right.$$

Data che sia la h , supponiamo di conoscere inoltre una coppia di soluzioni ϑ , ϑ' del sistema (44), per la quale la prima relazione (32) prende la forma:

$$(45) \quad \frac{2}{h} \vartheta_{\alpha} \vartheta_{\beta} = \vartheta^2 + \vartheta'^2 + 1.$$

Occorre ricordar qui rapidamente il metodo con cui se ne deduce il sistema completo delle soluzioni. Notiamo che dalla forma differenziale quadratica

$$(46) \quad \Sigma d\widehat{X}^2 = \frac{d\alpha^2}{(\vartheta_\alpha)^2} + \frac{d\beta^2}{(\vartheta'_\beta)^2}$$

viene definito l'elemento lineare di una sfera ($\widehat{X}$) di raggio unità riferita alla rete ortogonale (α, β) ; onde se ne deducono per $\xi, \xi', \dots$ le formule:

$$(47) \quad \xi = \vartheta \widehat{X} + \vartheta'_\beta \widehat{X}_\beta, \quad \xi' = \vartheta' \widehat{X} + \vartheta_\alpha \widehat{X}_\alpha.$$

Sono da aggiungersi, col sommatorio esteso alle lettere ξ, η, ζ , le relazioni:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \xi^2 = \vartheta^2 + 1, \quad \Sigma \xi'^2 = \vartheta'^2 + 1, \quad \Sigma \xi \xi' = \vartheta \vartheta', \\ \Sigma \xi' d\xi = \vartheta' d\vartheta, \quad \Sigma (\xi_\alpha)^2 = (\vartheta_\alpha)^2, \quad \Sigma (\xi_\beta)^2 = (\vartheta_\beta)^2, \\ [\Sigma \xi d\xi' = \vartheta d\vartheta', \quad \Sigma (\xi'_\alpha)^2 = (\vartheta'_\alpha)^2, \quad \Sigma (\xi'_\beta)^2 = (\vartheta'_\beta)^2]. \end{array} \right.$$

Vale quindi la seguente rappresentazione del ciclo di LAPLACE:

$$(49) \quad x = \frac{\xi}{\vartheta}, \quad \widehat{X} = \frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha} = \frac{\xi'_\beta}{\vartheta'_\beta}, \quad x' = \frac{\xi'}{\vartheta'}, \quad \bar{X} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta} = \frac{\xi'_\alpha}{\vartheta'_\alpha},$$

giacendo i punti $\widehat{X}$ e $\bar{X}$ sulla sfera $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$.

Al tempo stesso si determina con tre quadrature una superficie

$$(50) \quad x^* = \int (\xi' d\vartheta + \xi d\vartheta'),$$

applicabile sul paraboloide iperbolico equilatero $z = xy$, avendosi dalle (48):

$$(51) \quad \Sigma (dx^*)^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + [d(\vartheta\vartheta')]^2.$$

Sopra di essa le curve (α, β) sono le asintotiche. Badisi però che la deformazione, nelle condizioni di realtà da noi osservate, riesce *di prima specie*, cioè a sistema coniugato permanente reale, corrispondendo questo alle sviluppabili $\alpha \pm \beta = \text{cost}$ delle congruenze di diagonali del ciclo.

Seguendo la convenzione fatta nei preliminari, diremo Γ la congruenza W formata dalle rette xx' e C quella delle rette $\widehat{X}\bar{X}$. Dobbiamo ricordar qui che i fuochi, corrispondenti fra di loro al modo stabilito dalle sviluppabili, vengono dati dalle formule:

$$(52) \quad x_{\Gamma}^{(1,2)} = \frac{\xi \pm h\xi'}{\vartheta \pm h\vartheta'}, \quad x_C^{(1,2)} = \frac{\xi_\alpha \pm \xi_\beta}{\vartheta_\alpha \pm \vartheta_\beta}.$$

Notisi ancora che sulle quattro falde focali le curve (α, β) formano le asintotiche, ed anzi che i piani tangenti alle superficie $(x_{\Gamma}^{(1)})$ e $(x_{\Gamma}^{(2)})$ contengono

rispettivamente i punti $x_C^{(1)}$ e $x_C^{(2)}$. Ciò premesso, consideriamo sul raggio xx' di Γ il punto definito da:

$$(53) \quad x^{[x]} = \frac{\xi + \kappa \xi'}{\vartheta + \kappa \vartheta'}$$

con κ costante arbitraria. Dico che, per ciascuna superficie $(x^{[x]})$ di questa schiera, il piano tangente passa per l'altra diagonale $\widehat{X}\widetilde{X}$ del ciclo; il che si prova facilmente coll'uso di coordinate omogenee, essendo:

$$([\xi + \kappa \xi']_x, \xi + \kappa \xi', \xi_x, \xi_\beta) = 0, \quad ([\xi + \kappa \xi']_\beta, \xi + \kappa \xi', \xi_x, \xi_\beta) = 0.$$

Donde: *La congruenza Γ delle intersezioni xx' dei piani tangenti alla sfera è stratificabile in un senso colla C delle rette $\widehat{X}\widetilde{X}$, corde di contatto.*

4. Applicazione della trasformazione B_k di Bianchi. — Denotando con a, b costanti vincolate dalla relazione ⁽¹¹⁾:

$$(54) \quad a^2 + b^2 = 1,$$

calcoleremo le nuove quaderne $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \vartheta_i$ e $\xi'_i, \dots$ mediante formule:

$$(55) \quad \xi_i = t\xi_x - a\xi - b\xi', \quad \xi'_i = \frac{2ab}{t} \xi'_x - b\xi - a\xi',$$

ove t denoti un integrale del sistema di RICCATI:

$$(56) \quad t_x = -\frac{1}{2b} t^2 - \frac{h_x}{h} t + a, \quad t_\beta = -\frac{h}{2a} t^2 + \frac{b}{h}.$$

Coll'assumere inoltre la funzione

$$(57) \quad h_i = \frac{ht^2}{2ab},$$

soddisfacente anch'essa l'equazione differenziale (43), risulteranno verificate per l'indice 1 tutte le relazioni del numero precedente. Dal processo analitico $B(a, b)$ così definito, equivalente all'operazione B_k di BIANCHI con $k = -2ab$, avremo il ciclo trasformato:

$$(58) \quad x_i = \frac{\xi_i}{\vartheta_i}, \quad \widehat{X}_i = \frac{(\xi_i)_x}{(\vartheta_i)_x} = \frac{(\xi'_i)_\beta}{(\vartheta'_i)_\beta}, \quad x'_i = \frac{\xi'_i}{\vartheta'_i}, \quad \widetilde{X}_i = \frac{(\xi_i)_\beta}{(\vartheta_i)_\beta} = \frac{(\xi'_i)_x}{(\vartheta'_i)_x},$$

le superficie $(\widehat{X}_i)$ e $(\widetilde{X}_i)$ confondendosi ancora nella sfera $\Sigma X^2 = 1$. Lasciando da parte l'effetto ben noto della B_k sulla deformata (50) del paraboloide

⁽¹¹⁾ Non comparendo più a, b nel significato attribuito loro al n° 1, la nuova convenzione non può produrre equivoco.

$z = xy$, osserviamo che col porre $B(a, b) \equiv B_k$ si ha $B(b, a) \equiv B'_k$, essendo le B_k, B'_k trasformazioni di BIANCHI a costanti uguali e di classe opposta ⁽¹²⁾. La principale proprietà geometrica della B_k operata sul ciclo di LAPLACE sta in ciò che: *Le due congruenze Γ e C delle diagonali si trasformano con trasformazioni asintotiche delle loro falde focali*. Per la dimostrazione, già data nella mia Memoria citata in ⁽⁶⁾, sarà necessario accertarsi che

$$(\xi_i \pm h_i \xi'_i, \xi_i \pm h \xi', [\xi \pm h \xi']_\alpha, [\xi \pm h \xi']_\beta) = 0,$$

onde la proprietà, con ciò verificata per le congruenze Γ e Γ_1 , estendesi alle C, C_1 in forza della reciprocità rispetto alla sfera.

Rivolgiamoci alla schiera delle superficie $(x^{[2]})$ che si collega alla stratificazione della congruenza Γ colla C ed associamo l'analogia al ciclo trasformato, scrivendo per ciò conformemente alla formula (53):

$$(59) \quad x_i^{[2]} = \frac{\xi_i + \kappa_i \xi'_i}{\partial_i + \kappa_i \partial'_i}$$

con κ_i costante arbitraria. Incominciamo dal mostrare che: *Il piano tangente ad una superficie $(x^{[2]})$ contiene sempre il punto corrispondente di una determinata superficie $(x_i^{[2]})$, non valendo in generale la reciproca per la stessa coppia di superficie*. Basta esprimere la condizione perchè il punto $x_i^{[2]}$ appartenga al piano $x^{[2]} \widehat{X} \widetilde{X}$. Usando coordinate omogenee ed indicando come dianzi la sola prima linea del determinante, abbiamo la equazione:

$$(\xi_i + \kappa_i \xi'_i, \xi + \kappa \xi', \xi_\alpha, \xi_\beta) = 0$$

da cui col sussidio delle (55), traiamo la relazione bilineare in κ e κ_i :

$$(60) \quad \kappa \kappa_i + \frac{a}{b} (\kappa - \kappa_i) - 1 = 0, \quad \text{quindi: } \kappa_i = \frac{a\kappa - b}{-b\kappa + a}.$$

Ora, implicando le formule (55) le altre:

$$(61) \quad \xi = -\frac{2ab}{t} (\xi_i)_\alpha - a\xi_i - b\xi'_i, \quad \xi' = -t(\xi'_i)_\alpha - b\xi_i - a\xi'_i,$$

è palese che la trasformazione inversa è ancora una $B(a, b)$ cogli stessi valori di a, b . Riflettendo che la (61) non è simmetrica in κ e κ_i , troviamo che la proprietà della congiungente i punti $x^{[2]}$ e $x_i^{[2]}$ di essere tangente alla superficie $(x^{[2]})$ non ha l'analogia rispetto alla $(x_i^{[2]})$. Fanno eccezione i casi in cui si abbia $\kappa = \kappa_i = +1$ ovvero $\kappa = \kappa_i = -1$, sicchè nel sistema collegato alla

⁽¹²⁾ Cangiando a, b ambedue di segno, la trasformazione rimane inalterata.

stratificazione converrà introdurre come particolarmente notevole la coppia delle superficie:

$$(62) \quad \dot{x} = \frac{\xi + \xi'}{\vartheta + \vartheta'}, \quad \bar{x} = \frac{\xi - \xi'}{\vartheta - \vartheta'},$$

a ciascuna delle quali si associa ordinatamente nel ciclo trasformato l'altra:

$$(63) \quad \dot{x}_1 = \frac{\xi_1 + \xi'_1}{\vartheta_1 + \vartheta'_1}, \quad \bar{x}_1 = \frac{\xi_1 - \xi'_1}{\vartheta_1 - \vartheta'_1}.$$

Si ha dunque l'importante risultato: *Le due rette che si appoggiano alle quattro diagonali del dato ciclo di LAPLACE e del suo trasformato per mezzo della B_k toccano rispettivamente le coppie di superficie $(\dot{x}), (\dot{x}_1)$ e $(\bar{x}), (\bar{x}_1)$, luoghi dei loro punti d'incontro colle rette xx_1 e $x_1x'_1$ di Γ e di Γ_1 .*

Completiamo la proposizione ottenuta provando che: *Le due superficie $(\dot{x})$ e $(\bar{x})$ i cui punti dividono armonicamente la diagonale xx' del ciclo di LAPLACE sono polari reciproche rapporto alla sfera unitaria di centro O ; sopra esse le curve (α, β) corrispondenti alle reti del ciclo, sono appunto come sulle falde focali le asintotiche, con che il passaggio alle superficie $(\dot{x}_1)$ e $(\bar{x}_1)$ connesse al ciclo trasformato si presenta sotto forma di trasformazioni asintotiche simultanee.* Dalle (48) infatti si avrà:

$$\Sigma \dot{x}\bar{x} = 1, \quad \Sigma \bar{x}d\dot{x} = 0, \quad \Sigma \dot{x}d\bar{x} = 0,$$

onde resta assodata la reciprocità polare. Che le linee (α, β) traccino sulla $(\dot{x})$ il sistema delle asintotiche, si riconosce osservando che il vettore $\xi - \xi', \dots$ è quello della direzione normale alla superficie $(\dot{x})$ e verificando con un semplice calcolo che

$$\Sigma \dot{x}_\alpha(\xi_\alpha - \xi'_\alpha) = 0, \quad \Sigma \dot{x}_\beta(\xi_\beta - \xi'_\beta) = 0.$$

Non è fuor di luogo accennare alle B_k singolari con

$$k = \pm 1 \quad (a = 1/\sqrt{2}, \quad b = \mp 1/\sqrt{2}),$$

per cui — sappiamo — si confondono le due classi del BIANCHI. Se prendiamo p. es. $a = -b$, troveremo per mezzo delle (55), (61) le formule:

$$\dot{x} = \frac{\xi + \xi'}{\vartheta + \vartheta'} = \frac{h(\xi_1)_\alpha + (\xi_1)_\beta}{h(\vartheta_1)_\alpha + (\vartheta_1)_\beta}, \quad \dot{x}_1 = \frac{\xi_1 + \xi'_1}{\vartheta_1 + \vartheta'_1} = \frac{h_1\xi_\alpha + \xi_\beta}{h_1\vartheta_\alpha + \vartheta_\beta}, \quad (h_1 = -ht^2);$$

e formule simili valgono nel caso $a = b$ per $\bar{x}, \bar{x}_1$. Di qui: *Per le trasformazioni B_k singolari $k = \pm 1$ le diagonali non omologhe dei due cicli di LAPLACE sono complanari; i relativi due punti d'incontro, cioè i punti comuni alle rette di Γ e di C_1 ed a quelle di C e di Γ_1 , percorrono le falde focali di una con-*

gruenza W , la polare reciproca della quale viene descritta dall' intersezione dei rispettivi piani, avente i suoi fuochi sui raggi di Γ e di Γ_1 . Questo risultato, all' infuori della teoria della trasformazione, sembra notevole, perchè esso stabilisce un nuovo vincolo geometrico tra le congruenze Γ e C del ciclo originale. Se ne deducono infatti, note le soluzioni generali dell' equazione di RICCATI (56) per $a = \pm b$, due sistemi di superficie trasformate asintotiche, l' uno della $(\dot{x})$ e l' altro della $(\bar{x})$, giacendo i loro punti corrispondenti sul raggio $\widehat{X}\bar{X}$ della congruenza C ; vi si aggiungono le superficie polari i cui piani tangenti passano per la retta xx' di Γ e che riescono anch' esse trasformate asintotiche delle superficie $(\dot{x})$ e $(\bar{x})$, scambiate fra loro per la reciprocità. Avvertiamo intanto che, col presentarsi d' un siffatto sistema di trasformate asintotiche, *a punti allineati* e che pur non si riduca ad un fascio lineare di trasformazioni asintotiche, ci troviamo di fronte ad una configurazione suscettibile di realizzarsi in modo generale per le superficie R .

5. Congruenze di diagonali omologhe dei cicli dato e trasformato nella stratificabilità bilaterale. — Riprendiamo lo studio della B_k generale con $a \neq b$ e cerchiamo di esprimere la stratificazione mutua che ammettono, quali congruenze R , la Γ e la Γ_1 , contigue per trasformazioni asintotiche delle falde focali, dispensandoci di stabilire le relazioni analoghe, cioè duali, che varranno per le congruenze C e C_1 . Assunto sul raggio xx' di Γ il punto

$$(64) \quad \Xi = \frac{\xi + \rho\xi'}{\vartheta + \rho\vartheta'},$$

ed esigendo che il piano tangente alla superficie (Ξ) da esso descritta contenga la retta corrispondente $x_1x'_1$ di Γ_1 , bisognerà che si abbia:

$$(d[\xi + \rho\xi'], \xi_1, \xi'_1, \xi + \rho\xi') = 0.$$

Ne risulta per la funzione incognita ρ un' equazione a differenziali totali del tipo di RICCATI, illimitatamente integrabile a causa delle (56):

$$(65) \quad \rho_x = \frac{t}{2a} \rho^2 + \left(\frac{a}{t} - \frac{t}{2b}\right) \rho - \frac{b}{t}, \quad \rho_x = \frac{a}{ht} \rho^2 + \left(\frac{ht}{2a} - \frac{b}{ht}\right) \rho - \frac{ht}{2b}.$$

Per quanto riguarda la stratificazione in senso contrario, cioè della congruenza Γ_1 colla Γ , basterà riportarci alle formule (61) della $B(a, b)$ inversa, onde si ricava: $t_1 = -2ab/t$, cosicchè, posto al par della (64):

$$(66) \quad \Xi_1 = \frac{\xi_1 + \rho_1 \xi'_1}{\vartheta_1 + \rho_1 \vartheta'_1},$$

sarà manifesto che nell'attuale processo la ρ_1 viene fornita dall'equazione di RICCATI analoga alla (65):

$$(67) \quad (\rho_1)_x = -\frac{b}{t} \rho_1^2 + \left(\frac{a}{t} - \frac{t}{2b}\right) \rho + \frac{t}{2a}, \quad (\rho_1)_\beta = -\frac{a}{ht} \rho_1^2 + \left(-\frac{ht}{2a} + \frac{b}{ht}\right) \rho_1 + \frac{ht}{2b}.$$

Pare notevole che l'una si trasforma nell'altra colla sostituzione lineare:

$$(68) \quad \rho_1 = \frac{a\rho - b}{b\rho - a}.$$

Se ne rileva adunque un certo modo di corrispondenza fra le superficie (Ξ) e (Ξ_1) dei due sistemi, pur sussistendo la evidente proprietà che ogni superficie dell'una schiera con una qualunque dell'altra sta in trasformazione asintotica. Questa corrispondenza, col tener presente il significato della (60), potremo interpretare geometricamente colla costruzione seguente: *Nota la superficie (Ξ) della prima schiera di stratificazione, cerchi il punto d'intersezione del piano contenente il punto Ξ e la retta $\widehat{X}\bar{X}$ di C con la diagonale $x_1x'_1$ del ciclo trasformato, allora il suo coniugato armonico sulla $x_1x'_1$ descriverà una superficie (Ξ_1) della seconda schiera.* Facendo poi:

$$(69) \quad \rho_1 = \frac{t}{T}, \quad \text{quindi:} \quad \rho = \frac{at - bT}{bt - aT},$$

ed avendo riguardo alle (56) cui soddisfa la funzione t arriveremo a cangiare le equazioni differenziali (65) nelle seguenti:

$$(70) \quad T_x = -\frac{1}{2a} T^2 - \frac{h_x}{h} T + b, \quad T_\beta = -\frac{h}{2b} T^2 + \frac{a}{h},$$

le quali, come si vede, non sono che le (56) colle costanti a, b invertite e costituiscono per ciò la equazione di RICCATI da cui dipende la $B(b, a) \equiv B'_k$. Onde possiamo dire: *La stratificazione bilaterale, avente luogo tra le congruenze di diagonali omologhe dei due cicli di LAPLACE che stanno in trasformazione B_k , viene effettuata adoperando la più generale B'_k , cioè colla stessa costante k e di classe opposta.* Tralascieremo di addentrarci nelle conseguenze geometriche, ricordando solo l'importante fatto che dal comporsi la B_k colla B'_k risulta la trasformazione G_k data dal GUICHARD.

6. Determinazione delle più generali coppie di superficie, aventi i loro punti sulle diagonali omologhe dei cicli legati dalla B_k e contigue per trasformazione asintotica. — Dobbiamo anche qui premettere la osservazione che l'argomento cui miriamo, suggerito dai risultati finora conseguiti, e compreso come caso particolare nella teoria delle reti e congruenze R . Ritenendo le

notazioni, introdotte colla (65) in senso più ristretto, designeremo con

$$(71) \quad \Xi = \frac{\xi + \rho \xi'}{\vartheta + \rho \vartheta'}$$

ancora un punto del raggio xx' di Γ . Proponiamoci adesso di determinare il fattore ρ in guisa che sulla superficie (Ξ) il doppio sistema delle curve (α, β) sia formato dalle asintotiche, corrispondenti così a quelle delle falde focali della Γ ed alle reti del ciclo. Notiamo per incidenza, e senza l'intento di farne un uso diretto, che dalle linee $\alpha \pm \beta = \text{cost}$ verrà tracciata sulla (Ξ) una rete coniugata, alla quale, secondo la terminologia di GUICHARD, sarà *coniugata* la congruenza Γ , onde desumesi che la intera catena di LAPLACE uscente da questa rete per l'uno e l'altro verso riesce inscritta nella catena aderente alla Γ . Ora, siccome deve aversi:

$$\begin{aligned} ([\xi + \rho \xi']_{\alpha\alpha}, [\xi + \rho \xi']_{\alpha}, [\xi + \rho \xi']_{\beta}, \xi + \rho \xi') &= 0, \\ ([\xi + \rho \xi']_{\beta\beta}, [\xi + \rho \xi']_{\alpha}, [\xi + \rho \xi']_{\beta}, \xi + \rho \xi') &= 0, \end{aligned}$$

la funzione richiesta ρ viene assoggettata alle equazioni differenziali:

$$(72) \quad \begin{cases} \rho_{\alpha\alpha} = \left[\frac{h_{\alpha}}{h} + \frac{2 \frac{\rho}{h} \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\alpha}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1} \right] \rho_{\alpha} - \frac{2 \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\alpha}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1} \rho_{\beta} + \rho^2 - 1, \\ \rho_{\beta\beta} = - \frac{2 \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\beta}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1} \rho_{\beta} + \left[\frac{h_{\beta}}{h} + \frac{2 \frac{\rho}{h} \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\beta}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1} \right] \rho_{\beta} + \rho^2 - 1, \end{cases}$$

un po' complicate, ma che ciò nonostante si prestano al nostro scopo. Ammesso che sieno soddisfatte, avremo in pari tempo:

$$\begin{aligned} (\xi + \rho \xi')_{\alpha\alpha} &= \lambda_1 (\xi + \rho \xi')_{\alpha} + \mu_1 (\xi + \rho \xi')_{\beta} + \rho (\xi + \rho \xi'), \\ (\xi + \rho \xi')_{\beta\beta} &= \lambda_2 (\xi + \rho \xi')_{\alpha} + \mu_2 (\xi + \rho \xi')_{\beta} + \rho (\xi + \rho \xi') \end{aligned}$$

con

$$\lambda_1 = \frac{h_{\alpha}}{h} + \frac{2 \frac{\rho}{h} \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\alpha}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1}, \quad \mu_1 = - \frac{2 \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\alpha}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1}, \quad \lambda_2 = - \frac{2 \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\beta}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1}, \quad \mu_2 = \frac{h_{\beta}}{h} + \frac{2 \frac{\rho}{h} \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\beta}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1},$$

Indi, dall'essere $(\mu_1)_{\beta} = (\lambda_2)_{\alpha}$, si conclude: *Ogni superficie descritta da un punto di una diagonale del ciclo considerato e che abbia le linee (α, β) per asintotiche è una superficie R, la relativa rete R essendo data da $\alpha \pm \beta = \text{cost}$, cioè corrispondendo alle sviluppabili della congruenza R formata dalle diagonali.*

Dopo ciò, prescindendo dai casi $\rho = \pm 1$, studiati al numero 4, eseguiamo la sostituzione:

$$(73) \quad \rho_\alpha = \sigma\rho + \tau h, \quad \rho_\beta = \tau\rho + \sigma h,$$

per mezzo della quale le relazioni (72) si convertono nelle più semplici:

$$(74) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha \rho + \tau_\alpha h = \sigma^2 \rho - \frac{h_\alpha}{h} \sigma \rho + h \sigma \tau + \rho^2 - 1, \\ \tau_\beta \rho + \sigma_\beta h = \tau^2 \rho - \frac{h_\beta}{h} \tau \rho + h \sigma \tau + \rho^2 - 1. \end{cases}$$

Da queste, sottraendo, si trova:

$$(75) \quad \rho \left(\sigma_\alpha - \tau_\beta - \sigma^2 + \tau^2 + \frac{h_\alpha}{h} \sigma - \frac{h_\beta}{h} \tau \right) - h(\sigma_\beta - \tau_\alpha) = 0,$$

alla quale si può unire la condizione d'integrabilità delle (73):

$$(76) \quad h \left(\sigma_\alpha - \tau_\beta - \sigma^2 + \tau^2 + \frac{h_\alpha}{h} \sigma - \frac{h_\beta}{h} \tau \right) - \rho(\sigma_\beta - \tau_\alpha) = 0.$$

Quindi, poichè $\rho^2 - h^2 \neq 0$, supposta la (Ξ) distinta dall'una e l'altra delle due falde focali, otterremo le equazioni:

$$(77) \quad \sigma_\beta = \tau_\alpha, \quad \sigma_\alpha - \tau_\beta - \sigma^2 + \tau^2 + \frac{h_\alpha}{h} \sigma - \frac{h_\beta}{h} \tau = 0.$$

La prima di queste ci induce ad assumere una nuova funzione incognita φ' col porre:

$$(78) \quad \sigma = -\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'}, \quad \tau = -\frac{\varphi'_\beta}{\varphi'},$$

con che la seconda viene a prendere la forma:

$$(79) \quad \varphi'_{\alpha\alpha} + \frac{h_\alpha}{h} \varphi'_\alpha = \varphi'_{\beta\beta} + \frac{h_\beta}{h} \varphi'_\beta.$$

Indicando con φ un'altra funzione richiesta, scriviamo:

$$(80) \quad \rho = -\frac{\varphi}{\varphi'}$$

onde, derivando col tener conto delle (73) e (78), verrà:

$$(81) \quad \varphi_\alpha = h\varphi'_\beta, \quad \varphi_\beta = h\varphi'_\alpha.$$

Ci conviene in fine introdurre una quantità c da riguardarsi previamente

come funzione di α, β , facendo in base alle (79):

$$(82) \quad \varphi'_{\alpha\alpha} + \frac{h_\alpha}{h} \varphi'_\alpha = \varphi'_{\beta\beta} + \frac{h_\beta}{h} \varphi'_\beta = \varphi + c\varphi',$$

dopo di che l'una o l'altra delle (74) ci fornirà:

$$(83) \quad \varphi'_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} (\varphi' + c\varphi).$$

Esprimendo ora le condizioni di integrabilità pel sistema differenziale costituito dalle (80)-(83), troviamo $c_\alpha = 0$, $c_\beta = 0$, quindi: $c = \text{cost}$. Con leggere modificazioni, e cioè attribuendo nel processo analitico così definito la parte principale alla funzione φ , perverremo a dare al sistema differenziale l'assetto seguente, con c costante arbitraria:

$$(84) \quad \begin{cases} \varphi'_\alpha = \frac{1}{h} \varphi_\beta, & \varphi'_\beta = \frac{1}{h} \varphi_\alpha, \\ \varphi_{\alpha\alpha} = \frac{h_\alpha}{h} \varphi_\alpha + c\varphi + \varphi', & \varphi_{\alpha\beta} = h(\varphi + c\varphi'), \quad \varphi_{\beta\beta} = \frac{h_\beta}{h} \varphi_\beta + c\varphi + \varphi', \end{cases}$$

le (82)-(83) potendo aggiungersi come conseguenze. Qui ancora vale una relazione integrale quadratica:

$$(85) \quad \frac{2}{h} \varphi_\alpha \varphi_\beta - \varphi^2 - \varphi'^2 - 2c\varphi\varphi' = \text{cost.}$$

Notando che, scelta la c , la integrazione del sistema (84) introduce tre costanti disponibili essenziali, cioè i rapporti dei valori iniziali di $\varphi, \varphi', \varphi_\alpha, \varphi_\beta$, possiamo enunciare il risultato colla proposizione: *Il problema di determinare sulla diagonale xx' del nostro ciclo di LAPLACE un punto (Ξ) tale che esso descriva una superficie (Ξ) colle asintotiche (α, β) , corrispondenti alle reti del ciclo, e che per ciò stesso sarà una superficie R , possiede ∞^4 soluzioni, la (Ξ) calcolandosi da φ, φ' nel modo seguente:*

$$(86) \quad \Xi = \frac{\xi\varphi' - \xi'\varphi}{\vartheta\varphi' - \vartheta'\varphi}.$$

Ormai riesce facile trarre la conseguenza importante: *L'applicazione della B_k , nella quale le funzioni ausiliarie φ, φ' si trasformano appunto come $\xi, \xi', \dots$ mediante le formule (55), fa passare dalle superficie (Ξ) alla sua omologa (Ξ_1) collegata al ciclo trasformato:*

$$(87) \quad \Xi_1 = \frac{\xi_1\varphi'_1 - \xi'_1\varphi_1}{\vartheta_1\varphi'_1 - \vartheta'_1\varphi_1},$$

la (Ξ) e la (Ξ_1) essendo contigue per trasformazione asintotica. All'uopo consta-

tiamo, in primo luogo, che le funzioni φ_1, φ'_1 , calcolate dalle (55):

$$(88) \quad \varphi_1 = t\varphi_\alpha - a\varphi - b\varphi', \quad \varphi'_1 = \frac{2ab}{t} \varphi'_\alpha - b\varphi - a\varphi',$$

soddisfano al sistema differenziale (84) scritto per l'indice 1, il che ci dimostra che la superficie (Ξ_1) ammette ancora le curve (α, β) per asintotiche. Oltre a questo, collo stabilire la relazione:

$$([\xi\varphi' - \xi'\varphi]_\alpha, [\xi\varphi' - \xi'\varphi]_\beta, \xi\varphi' - \xi'\varphi, \xi_1\varphi'_1 - \xi'_1\varphi_1) = 0$$

ci si persuade che la retta $\Xi\Xi_1$ tocca la superficie (Ξ) , la medesima proprietà relativa alla superficie (Ξ_1) ricavandosi in modo analogo. Ora, considerando che il punto Ξ_1 è quello in cui il piano tangente alla (Ξ) viene intersecato dalla retta $x_1x'_1$ di Γ_1 , si avrà al tempo stesso l' conferma che: *Col metodo accennato, cioè integrando il sistema differenziale (84), si ottengono le più generali congruenze W con α, β parametri asintotici delle falde focali ed aventi i rispettivi fuochi sulle rette corrispondenti di Γ e di Γ_1 .*

Per le cose testè esposte dovevansi escludere le particolari superficie (Ξ) trattate al numero 5. A proposito di queste, possiamo aggiungere un'osservazione che pare importante: *La schiera delle superficie (Ξ) con cui viene individuata la stratificazione della congruenza Γ con una qualunque Γ_1 , appartenente quale sua omologa ad un nuovo ciclo di LAPLACE dedotto dall' originale per mezzo di una B_k , si determina integrando il sistema differenziale (84) nella condizione speciale che sia nulla la costante che forma il secondo membro della relazione quadratica (85). Affinchè la B_k , applicata al ciclo, risulti reale, occorre che si abbia $|c| > 1$. Procedendo alla verifica, facciamo come sopra $\rho = -\varphi/\varphi'$. Deriviamo col tener conto delle due prime (84) ed osserviamo che la supposta relazione omogenea*

$$\frac{2}{h} \varphi_\alpha \varphi_\beta = \varphi^2 + \varphi'^2 + 2c\varphi\varphi'$$

con $2ab = 1/c$, $a^2 + b^2 = 1$, può scriversi nel modo seguente:

$$\frac{2\varphi_\alpha \varphi_\beta}{h\varphi^2} = \frac{1}{ab\rho^2} (a\rho - b)(b\rho - a),$$

onde, assunto un fattore t , avremo le formule:

$$\frac{\varphi_\alpha}{\varphi} = \frac{-\frac{\rho_\alpha}{\rho} + \frac{\rho_\beta}{h}}{\left(\frac{\rho}{h}\right)^2 - 1} = \frac{1}{t\rho} (a\rho - b), \quad \frac{\varphi_\beta}{\varphi} = \frac{\frac{\rho_\alpha}{h} - \frac{\rho_\beta}{\rho}}{\left(\frac{\rho}{h}\right)^2 - 1} = \frac{th}{2ab\rho} (b\rho - a).$$

Orbene da queste segue immediatamente la equazione di RICCATI (65) per

la funzione ρ , mentre le tre rimanenti relazioni (84) portano all'equazione di RICCATI (56) da soddisfarsi colla t e da cui venne definita l'operazione $B(a, b) \equiv B_k$. D'altronde, come era prevedibile, riconosciamo essere la (87) attualmente in difetto, avendosi $\varphi_1 = 0$, $\varphi' = 0$.

7. Sistemi di quadrilateri sghembi connessi alle deformate del paraboloide rigato generale. — Le equazioni differenziali (84) alle quali ci ha condotti il problema del numero precedente possono riguardarsi da un altro punto di vista. Dimosteremo che: *Dal sistema differenziale (84), nell'ipotesi $|c| < 1$ e per un'opportuna scelta dei valori iniziali, viene a dipendere la costruzione della superficie applicabili sul paraboloide iperbolico generale, le linee (α, β) essendo ancora le asintotiche.*

Scriviamo, per maggior chiarezza, nuovamente il sistema:

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'_\alpha = \frac{1}{h} \xi_\beta, \quad \xi'_\beta = \frac{1}{h} \xi_\alpha, \\ \xi_{\alpha\alpha} = \frac{h_\alpha}{h} \xi_\alpha + \xi' + c\xi, \quad \xi_{\alpha\beta} = h(\xi + c\xi'), \quad \xi_{\beta\beta} = \frac{h_\beta}{h} \xi_\beta + \xi' + c\xi \\ \left[\xi'_{\alpha\alpha} = -\frac{h_\alpha}{h} \xi'_\alpha + \xi + c\xi', \quad \xi'_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} (\xi' + c\xi), \quad \xi'_{\beta\beta} = -\frac{h_\beta}{h} \xi'_\beta + \xi + c\xi' \right] \end{array} \right.$$

e partiamo da una coppia di soluzioni ϑ, ϑ' soddisfacente alla relazione:

$$(90) \quad \frac{2}{h} \vartheta_\alpha \vartheta_\beta = \vartheta^2 + \vartheta'^2 + 2c\vartheta\vartheta' + 1 - c^2.$$

Bisognerà assodare che la forma differenziale quadratica

$$(91) \quad \Sigma d\widehat{X}^2 = \frac{1 - c^2}{(\vartheta_\alpha)^2} (d\alpha^2 + 2ch d\alpha d\beta + h^2 d\beta^2),$$

generalizzazione della (46), definisce anche qui in modo intrinseco una sfera ($\widehat{X}$) di raggio 1. A tal fine, notando che con $|c| < 1$ diverrà $e > 0$, $f > 0$, $eg - f^2 > 0$, indicati con e, f, g i coefficienti della forma (91), esprimiamo la curvatura:

$$K = - \frac{1}{2 \sqrt{eg - f^2}} (P_\alpha + Q_\beta)$$

con

$$P = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \left(\frac{1}{2} f \frac{\partial \log \frac{g}{e}}{\partial \beta} + g_\alpha - f_\beta \right), \quad Q = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \left(\frac{1}{2} f \frac{\partial \log \frac{e}{g}}{\partial \alpha} + e_\beta - f_\alpha \right).$$

Troveremo:

$$P = -2 \sqrt{1 - c^2} \frac{\vartheta'}{\vartheta_\beta}, \quad Q = -2 \sqrt{1 - c^2} \frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha},$$

e da qui $K=1$. Conosciuta la sfera ($\widehat{X}$) sulla quale, per l'essere $r/\sqrt{eg}=c$, le linee (α, β) tracciamo un sistema *isogonale*, ne deduciamo $\xi, \xi', \eta, \eta', \zeta, \zeta'$ mediante le formule seguenti che ora tengono luogo delle (47):

$$(92) \quad \begin{cases} \xi + c\xi' = (\vartheta + c\vartheta')\widehat{X} + \vartheta'_\beta\widehat{X}_\beta, \\ c\xi + \xi' = (c\vartheta' + \vartheta)\widehat{X} + \vartheta_\alpha\widehat{X}_\alpha, \end{cases}$$

in guisa da completare il gruppo delle soluzioni linearmente indipendenti del sistema (84). Dalle (92), la somma estendendosi alle tre lettere, discendono le:

$$(93) \quad \Sigma \xi^2 = \vartheta^2 + 1, \quad \Sigma \xi'^2 = \vartheta'^2 + 1, \quad \Sigma \xi\xi' = \vartheta\vartheta' - c,$$

mentre la seconda e la terza riga delle (48) restano inalterate:

$$(94) \quad \begin{cases} \Sigma \xi'd\xi = \vartheta'd\vartheta, & \Sigma (\xi_\alpha)^2 = (\vartheta_\alpha)^2, & \Sigma (\xi_\beta)^2 = (\vartheta_\beta)^2 \\ [\Sigma \xi d\xi' = \vartheta d\vartheta', & \Sigma (\xi'_\alpha)^2 = (\vartheta'_\alpha)^2, & \Sigma (\xi'_\beta)^2 = (\vartheta'_\beta)^2]. \end{cases}$$

Osserviamo che qui ancora risulta:

$$(95) \quad \widehat{X} = \frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha} = \frac{\xi'_\beta}{\vartheta'_\beta}, \quad \bar{X} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta} = \frac{\xi'_\alpha}{\vartheta'_\alpha},$$

il punto $\bar{X}$ giacendo sulla stessa sfera unitaria $\Sigma X^2 = 1$, ed assegniamo come superiormente sull'intersezione dei piani tangenti i due punti:

$$(96) \quad x = \frac{\xi}{\vartheta}, \quad x' = \frac{\xi'}{\vartheta'}.$$

Conserveremo le notazioni Γ e C per le congruenze delle rette xx' e $\widehat{X}\bar{X}$.

Prima di discutere la figura formata di Γ e C , giova constatare che contemporaneamente viene fornita da tre quadrature

$$(97) \quad x^* = \int (\xi'd\vartheta + \xi d\vartheta')$$

una superficie (x^*) d'elemento lineare

$$(98) \quad \Sigma (dx^*)^2 = (\vartheta'^2 + 1)d\vartheta^2 + 2(\vartheta\vartheta' - c)d\vartheta d\vartheta' + (\vartheta^2 + 1)d\vartheta'^2,$$

la quale è dunque l'annunciata *deformata del paraboloide rigato generale*:

$$(99) \quad \begin{cases} x_0 = \sqrt{\frac{1-c}{2}}(\vartheta + \vartheta'), & y_0 = \sqrt{\frac{1+c}{2}}(\vartheta - \vartheta'), & z_0 = \vartheta\vartheta', \\ \frac{x_0^2}{1-c} - \frac{y_0^2}{1+c} = 2z_0. \end{cases}$$

Sembra superfluo riportar qui la verifica, priva di difficoltà, che riguarda le asintotiche. Avvertiamo però che, restando la deformazione *di prima specie*, il sistema coniugato permanente sarà pure dato da $\alpha \pm \beta = \text{cost}$; esso corri-

sponde alle sviluppabili delle congruenze Γ e C . Sussiste peraltro la proprietà che i raggi $\widehat{X}$ e $\widetilde{X}$ della sfera di centro O sono paralleli all'asse del paraboloide nel rotolamento sull'una e l'altra faccia della deformata.

Ci resta da esaminare il modo secondo cui si scompone nell'attuale generalizzazione il nostro ciclo di LAPLACE, legato esclusivamente al caso del paraboloide iperbolico equilatero. Vediamo anzitutto che si conserva la stratificabilità unilaterale della congruenza Γ con la C , come anche la formula (53) che definisce la schiera delle superficie $(x^{[c]})$. Ora, fissando due qualunque valori di x , è bene evidente che il quadrilatero sghembo $x^{[c]}\widehat{X}x^{[c]}\widetilde{X}$ verrà sempre a descrivere un sistema dotato della proprietà che i lati sono tangenti comuni alle superficie luogo dei vertici. Fra questi sistemi ne esistono due, in generale distinti e confondentisi per $c=0$ nel ciclo di LAPLACE, quelli cioè generati dai quadrilateri $x\widehat{X}x'\widetilde{X}$ e $x^{[c]}\widehat{X}x^{[1/c]}\widetilde{X}$, avendosi:

$$(100) \quad x^{[c]} = \frac{\xi + c\xi'}{\vartheta + c\vartheta'}, \quad x^{[1/c]} = \frac{c\xi + \xi'}{c\vartheta + \vartheta'}.$$

Si consideri difatti sopra le superficie (x) e (x') i doppi sistemi di curve (α, β) , oramai non coniugati. Le loro tangenti non omologhe, come facilmente desumesi dalle (95), (96), concorrono nei punti $\widehat{X}$ e $\widetilde{X}$ della sfera. In connessione del tutto analoga stanno i sistemi isogonali (α, β) segnati dai punti $\widehat{X}$ e $\widetilde{X}$ sulla sfera, essendo $x^{[1/c]}$ e $x^{[c]}$ i punti d'incontro delle tangenti, il che si dimostra subito per mezzo delle (92). È da notarsi intanto che ambedue i sistemi appartengono ad una classe importante ed abbastanza generale, presentandosi quando per una coppia di superficie coincidano i piani osculatori non omologhi alle curve (α, β) di riferimento. Tale classe, secondo un teorema stabilito nella mia Memoria citata nella nota (6), gode della notevole proprietà che le rette congiungenti i punti e formanti in tempo stesso le intersezioni dei piani osculatori percorrono una congruenza W con α, β parametri asintotici delle falde focali; ciò che vale adunque per le congruenze Γ e C in discorso. In quanto alla giacitura relativa dei due quadrilateri, aggiungiamo la osservazione che le quattro tangenti alla sfera uscenti rispettivamente da ciascuno dei punti $\widehat{X}$ e $\widetilde{X}$ si ordinano in due coppie mutualmente perpendicolari. Per convincersene, senza calcoli, basta riflettere che p. es. la $\widehat{X}x$ e la $\widehat{X}x^{[1/c]}$, di direzione x_x e $\widehat{X}_x$, sono tangenti alle curve sferiche corrispondenti alle sviluppabili della congruenza di raggio $\widehat{X}x$, per ciò coniugate, vale a dire ortogonali. Avvertiamo da ultimo che qui ancora le congruenze Γ e C sono R e che le sei quantità

$$\vartheta\xi' - \vartheta'\xi, \dots, \eta\xi' - \xi\eta', \dots$$

(circolando le lettere ξ, η, ζ) figurano come coordinate omogenee di retta per la congruenza Γ , le due terne scambiandosi fra di loro, con opportuna scelta di segno, nel passaggio alla C . La equazione di LAPLACE soddisfatta dalle coordinate di rette, conformemente al menzionato teorema di DARBOUX, risulta del tipo di MOUTARD:

$$\Theta_{\alpha\beta} = \left(h + \frac{1}{h}\right)\Theta,$$

coincidendo così con quella associata alle asintotiche della deformata (x^*) , per la quale la direzione della normale è data dal vettore $\eta\xi' - \xi\eta'$. Riguardo all'altra terna $\vartheta\xi' - \vartheta'\xi, \dots$ si constata che essa rappresenta la direzione normale alla superficie ausiliaria:

$$\tilde{x} = x^* - \vartheta\xi' - \vartheta'\xi,$$

riferita del pari alle esintotiche (α, β) e che viene generata dal punto d'intersezione del piano tangente alla deformata (x^*) coll'asse del paraboloide rotolante. Il legame geometrico esistente rispettivamente fra le superficie (x^*) , $(\tilde{x})$ e le congruenze C e Γ è quella ben nota *reciprocità di superficie R e congruenza R* , caratterizzata dal parallelismo della normale all'una colla retta dell'altra, proprietà che sussiste, e cioè invertendosi, per le tangenti alla rete R , formanti congruenze R , e le falde focali della congruenza R , formanti superficie R , in modo da mantenersi indefinitamente nell'applicazione successiva della trasformazione di LAPLACE.

8. Determinazione delle coppie di sistemi sferici corrispondentisi con coincidenza dei piani osculatori non omologhi. La ultima parte della nostra ricerca sarà dedicata ad un problema che è spontaneamente suggerito dai risultati or ora conseguiti: *Trovare i più generali doppi sistemi di curve, tracciati sopra una medesima sfera e per cui si confondano i piani osculatori non omologhi ed in conseguenza i rispettivi cerchi osculatori.* Riusciremo a stabilire che il caso segnalato al numero 7 ne abbraccia la soluzione completa, la proposizione da dimostrare enunciandosi così: *I sistemi sferici richiesti sono tutti e soli quelli dedotti dalle deformate del paraboloide rigato, costruibili col rappresentare le asintotiche (α, β) sulla sfera per mezzo di raggi paralleli all'asse del paraboloide rotolante sull'una e l'altra faccia.*

Per la verifica, alquanto lunga, riesce utile studiare in primo luogo la rappresentazione della sfera sopra se stessa per la quale sull'intersezione dei piani tangenti vi abbia almeno un punto descrivente una superficie il cui piano tangente passi per la corda di contatto. Indichiamo coi vettori X e X' , funzioni di una medesima coppia di variabili, i due punti della sfera $\Sigma X^2 = 1$,

effettuando così un cambiamento di notazione in vista della maggiore generalità dell'attuale questione. il punto generico x sull'intersezione dei due piani tangenti può esprimersi mediante un parametro σ nel modo seguente:

$$(101) \quad x = \frac{1}{2 \cos^2 \theta} [X + X' - \sigma(YZ' - ZY')], \quad \cos 2\theta = \Sigma XX'.$$

Affinchè il piano xXX' , colla direzione normale data dal vettore:

$$\sigma(X + X') + YZ' - ZY',$$

diventi piano tangente ad una superficie (x) , occorre che si abbia:

$$\frac{d\sigma}{\sigma^2 + 1} = \frac{1}{\sin^2 2\theta} \Sigma (YZ' - ZY')(dX + dX').$$

Di qui, ammessa la integrabilità ed essendo σ^0 una soluzione particolare:

$$(102) \quad \sigma = \frac{\sigma^0 + C}{1 - C\sigma^0} \quad (C = \text{cost}).$$

Dunque: *Perchè nella rappresentazione della sfera sopra se stessa esista una superficie (x) colle rette xX e xX' tangenti comuni alla sfera ed alla (x) , è necessario e sufficiente che l'espressine*

$$(103) \quad \frac{1}{1 - (\Sigma XX')^2} \begin{vmatrix} dX + dX' & X & X' \\ dY + dY' & Y & Y' \\ dZ + dZ' & Z & Z' \end{vmatrix}$$

risulti un differenziale esatto. Ma allora vi è una semplice infinità di tali superficie, sicchè la congruenza generata dall'intersezione dei piani tangenti sarà stratificabile unilateralmente con quella delle corde di contatto XX' ⁽¹³⁾. Due qualunque delle rispettive tangenti alla sfera uscenti dal punto X o dal punto X' fanno angolo costante, ciò che si verifica in base alla (102), essendo:

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \frac{\Sigma (x - X)(x^0 - X)}{\sqrt{\Sigma (x - X)^2} \sqrt{\Sigma (x^0 - X)^2}} = \frac{\sigma\sigma^0 + 1}{\sqrt{\sigma^2 + 1} \sqrt{(\sigma^0)^2 + 1}} = \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{C^2 + 1}}, \quad \pm 1 = \text{sgn}(1 - C\sigma^0). \end{aligned}$$

⁽¹³⁾ La condizione equivale a quella avvertita nella Memoria citata nella nota ⁽²⁾ pel caso della quadrica riferita ai parametri delle generatrici rettilinee, corrispondendo u , v e u' , v' ai due punti, la quale consiste in ciò che

$$\frac{du}{u' - u} - \frac{dv}{v' - v}$$

deve essere differenziale esatto.

Ora, considerando che il piano xXX' è osculatore alla curva sferica toccata dalla retta Xx e che un primo sistema di tali curve sferiche potrà scegliersi ad arbitrio, riconosceremo che: *La rappresentazione richiesta dalla sfera sopra se stessa può operarsi mediante le rette intersezioni dei piani osculatori di un qualsiasi doppio sistema isogonale di curve sferiche.*

Dopo ciò, per risolvere il problema propostoci al principio del presente numero, designeremo con $\widehat{X}$, $\widetilde{X}$ i punti della sfera descriventi due sistemi (α, β) , esigendo dunque che per questi si confondano i piani osculatori non omologhi. Segue da quanto fu previamente osservato che tali sistemi sono isogonali e che vale la stratificabilità della congruenza Γ colla C . Inoltre, col riportarci all'argomentazione utilizzata al numero 7, concludiamo che anche le superficie (x) e (X') , luoghi dei punti d'incontro delle tangenti alla sfera, uscenti dai punti $\widehat{X}$ e $\widetilde{X}$ ortogonalmente a quella dei sistemi (α, β) , appartengono alla schiera della stratificazione e che, di più, le curve di (x) e di (x') , toccate da queste tangenti, costituiscono ancora due sistemi (α, β) a piani osculatori comuni. Con ciò il nostro problema si riduce all'altro: *Costruire le coppie di superficie (x) e (x') , riferite alle curve (α, β) , per cui concorrono le tangenti non omologhe verso i due punti $\widehat{X}$ e $\widetilde{X}$ della sfera unitaria di centro O , pur essa toccata da queste tangenti.*

Facciamo come manifestamente è lecito:

$$(104) \quad x = \frac{\xi}{\vartheta}, \quad x' = \frac{\xi'}{\vartheta'}.$$

$$(105) \quad \Sigma \xi^2 = \vartheta^2 + 1, \quad \Sigma \xi'^2 = \vartheta'^2 + 1,$$

notando che, in virtù delle (105), i valori assoluti di $1/\vartheta$ e di $1/\vartheta'$ significano i segmenti tangenziali rispettivamente fra i punti x e x' e la sfera $\Sigma X^2 = 1$. Affinchè la retta $x\widehat{X}$ sia tangente alla sfera ed in tempo stesso tangente di direzione x_α alla (x) , deve aversi:

$$\Sigma \widehat{X}\xi = \vartheta, \quad \widehat{X} = \frac{\xi}{\vartheta} + \rho \left(\frac{\xi}{\vartheta} \right)_\alpha,$$

indi per effetto della (105): $\rho = \vartheta/\vartheta_\alpha$. Proseguendo questo ragionamento, giungeremo a stabilire le formule:

$$(106) \quad \widehat{X} = \frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha} = \frac{\xi'_\beta}{\vartheta'_\beta}, \quad \widetilde{X} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta} = \frac{\xi'_\alpha}{\vartheta'_\alpha},$$

completate dalle relazioni:

$$(107) \quad \Sigma (\xi_\alpha)^2 = (\vartheta_\alpha)^2, \quad \Sigma (\xi_\beta)^2 = (\vartheta_\beta)^2.$$

In forza della (106) si avrà in ξ , η , ζ , ϑ :

$$(108) \quad \xi_\alpha = h\xi'_\beta, \quad \xi_\beta = \bar{h}\xi'_\alpha.$$

Derivate le (105) e tenuto conto delle (108), verrà:

$$(109) \quad \Sigma \xi' d\xi = \vartheta' d\vartheta, \quad \Sigma \xi d\xi' = \vartheta d\vartheta',$$

di qui integrando:

$$(110) \quad \Sigma \xi \xi' = \vartheta \vartheta' - c$$

con c costante. Avvertasi intanto che $|c| < 1$, poichè, indicando ω l'angolo formato dalle rette $\widehat{Xx}$ $\widehat{Xx}'$, risulta con semplice calcolo: $\cos \omega = \pm c$, $\pm 1 = -\operatorname{sgn}(\vartheta \vartheta')$; evidentemente è da escludersi l'ipotesi $|c| = 1$.

Dobbiamo ora esprimere le derivate seconde di ξ , η , ζ , ϑ per mezzo delle quaderne ξ , ξ' , ξ_x , ξ_β ecc., il determinante $\delta = (\xi, \xi', \xi_x, \xi_\beta)$ non potendo essere nullo. Per tale scopo torna agevole l'uso del sommatorio S esteso alle quattro lettere, l'ultimo termine prendendosi col segno mutato, onde invece delle (105) (110), (109), (107) scriveremo più brevemente.

$$(111) \quad S\xi^2 = 1, \quad S\xi'^2 = 1, \quad S\xi\xi' = -c, \quad S\xi'd\xi = 0, \quad S(\xi_x)^2 = 0, \quad S(\xi_\beta)^2 = 0.$$

Aggiungiamo le relazioni dedotte per derivazione:

$$(112) \quad S\xi_{xx}\xi = S\xi_{xx}\xi_x = S\xi_{x\beta}\xi' = S\xi_{\beta\beta}\xi = S\xi_{\beta\beta}\xi_\beta = 0.$$

Notando che con $\delta \neq 0$ si ha necessariamente $S\xi_\alpha\xi_\beta \neq 0$, le formule volute, deducibili dalle (112), presentano l'aspetto seguente:

$$(113) \quad \xi_{xx} = \lambda'\xi_x + \lambda(\xi' + c\xi), \quad \xi_{x\beta} = \mu(\xi + c\xi'), \quad \xi_{\beta\beta} = \nu'\xi_\beta + \nu(\xi' + c\xi)$$

e concordano così col fatto che i piani $x\widehat{Xx}'$ e $x\widehat{Xx}$ riescono piani osculatori comuni alle curve (α, β) descritte dai punti x e x' . Occorre paragonare alle (113) la relazione tratta dall'uguagliare i due valori di $\xi_{x\beta}$ calcolati dalle (108), il che ci darà:

$$(114) \quad \lambda' = \frac{h_x}{h}, \quad \nu' = \frac{\bar{h}_\beta}{h}, \quad \frac{\lambda}{\nu} = \frac{h}{\bar{h}}.$$

Dopo di ciò, per condurre a termine l'attuale ricerca, basterebbe formare le condizioni di integrabilità pel sistema (113); dovremmo però, come ci si persuade col calcolo effettivo, supporre $c \neq 0$. Per evitare tale restrizione, giova prima invocare le relazioni:

$$S\xi_\alpha\xi_\beta = -S\xi_{\alpha\beta}\xi = -\mu(1 - c^2), \quad S\xi_\alpha\xi' = 0, \quad S\xi_\beta\xi' = 0,$$

da cui, derivando la seconda e la terza rispettivamente rapporto a α ed a β , avremo:

$$S\xi_{xx}\xi' - \frac{1}{h} S\xi_x\xi_\beta = 0, \quad S\xi_{\beta\beta}\xi' - \frac{1}{h} S\xi_\alpha\xi_\beta = 0,$$

indi:

$$(115) \quad \lambda = \frac{\mu}{h}, \quad \nu = \frac{\mu}{h}.$$

Delle equazioni fornite dalle condizioni di integrabilità conviene notare in primo luogo le due: $\lambda_\beta = 0$, $\nu_\alpha = 0$. Esse, coll'aver riguardo alle (113) rendono manifesto che si può disporre delle variabili α , β in modo da ridurre λ e ν all'unità positiva o negativa. Anzi di più, cangiando all'occorrenza i segni di ξ' e di c , sarà ammissibile di fare p. es. $\nu = 1$ e porre $\lambda = \epsilon' = \pm 1$ ⁽¹⁴⁾. Segue allora dalla terza (114): $\bar{h} = \epsilon' h$. Resta finalmente come sola condizione da soddisfare la equazione a derivate parziali imposta alla funzione h :

$$(116) \quad (\log h)_{\alpha\beta} = h - \frac{\epsilon'}{h}.$$

Vale adunque il sistema differenziale sotto la sua forma definitiva:

$$(117) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'_\alpha = \frac{\epsilon'}{h} \xi_\beta, \quad \xi'_\beta = \frac{1}{h} \xi_\alpha, \\ \xi_{\alpha\alpha} = \frac{h_\alpha}{h} \xi_\alpha + \epsilon'(\xi' + c\xi), \quad \xi_{\alpha\beta} = h(\xi + c\xi'), \quad \xi_{\beta\beta} = \frac{h_\beta}{h} \xi_\beta + \xi' + c\xi, \\ \left[\xi'_{\alpha\alpha} = -\frac{h_\alpha}{h} \xi'_\alpha + \epsilon'(\xi + c\xi'), \quad \xi'_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon'}{h} (\xi' + c\xi), \quad \xi'_{\beta\beta} = -\frac{h_\beta}{h} \xi'_\beta + \xi + c\xi' \right] \end{array} \right.$$

coll'aggiunta delle relazioni (111), compatibili, poichè, ammesso $\epsilon' = +1$, abbiamo ritrovato appunto il sistema (91), (93), (94) del numero 7. Osserviamo d'altronde che la estensione al caso $\epsilon' = +1$ risponde soltanto all'altra ipotesi, ivi trascurata, che le sviluppabili delle congruenze Γ e C risultino immaginarie coniugate, date allora da $\alpha \pm i\beta = \text{cost}$, vale a dire che l'associata deformazione del paraboloide rigato (99) sia *di seconda specie*. Così trovasi compiuta la prova della nostra asserzione.

⁽¹⁴⁾ Distinguendo per tale denotazione la $\epsilon' = \pm 1$ dalla $\epsilon = \pm 1$ che figura con altro significato nel sistema (26) del n° 2.