Sulla geometria differenziale degli spazi vettoriali.

Nota di E. BOMPIANI (a Roma)

Alla memoria di Guido Castelnuovo, nel primo centenario della nascita.

Sunto. - *Costruzioni geometriche di invarianti differenziali (di linee o di ipersuperficie) in uno spazio centro-affine.*

1. - In un eccellente volumetto uscito da poco, D. LAUGWITZ prende a considerare la geometria differenziale degli spazi vettoriali (anche nel caso, e anzi con particolare enfasi, di infinite dimensioni) come la geometria di uno spazio centro-affine ⁽¹⁾.

Come l'A. osserva, la geometria centro-affine attuale è cominciata con ricerche di E. R. LORCH ⁽²⁾ negli spazi di BANACH (e non negli spazi di dimensione finita).

Il LAUGWITZ comincia a definire in uno spazio centro-affine di dimensione finita una metrica riemanniana, che è quella del LORCH nel caso in esame, e per mezzo di essa un elemento d'arco, un vettore normale ed una curvatura di una curva (piana) in un punto.

Gli invarianti *non* son quelli introdotti da E. SALKOWSKI ⁽³⁾ e il LAUGWITZ mostra il vantaggio dei nuovi invarianti rispetto a quelli già noti.

In questa nota riprendo la trattazione per indicare ulteriori costruzioni e proprietà relative sia ad elementi di ipersuperficie che di curve in uno spazio centro-affine.

2. - Elemento lineare determinato da un E^2 .

In un piano centro-affine assumiamo il centro O come origine di coordinate affini x, y .

Data una curva C e un suo punto regolare (non di flesso) $A \neq O$ si può scegliere la retta OA come asse y e il punto A come $(0, 1)$ e l'asse x parallelo alla tangente in A alla curva C .

Una conica Γ è fissata dall' E^2 della curva in A (cioè dall'avere ivi contatto del 2° ordine con C) e dall'avere O per centro di simmetria.

Per le scelte già fatte questa conica ha un'equazione del tipo

$$y^2 - 1 = hx^2$$

⁽¹⁾ D. LAUGWITZ, *Differentialgeometrie in Vektorräumen unter besonderer Berücksichtigung der unendlichen Räume*; Vieweg & Sohn, Braunschweig.

⁽²⁾ E. R. LORCH, *A curvature study of convex bodies in Banach spaces*; Ann. di Matematica, s. IV, t. XXXIV, 1953, p. 105-112.

⁽³⁾ E. SALKOWSKI, *Affine Differentialgeometrie*; Berlin-Leipzig 1934.

e si fissa il punto unità sull'asse x (e con ciò si determina tutto il riferimento) prendendo $h = \pm 1$ (uguale a -1 se Γ è un'ellisse, a $+1$ se è un'iperbole).

Per un elemento E^1 di componenti dx, dy spiccato dal punto A si può introdurre un invariante infinitesimo legato ad una forma quadratica. Sulla retta parallela per O all'elemento dato si consideri l'elemento e una intersezione della retta con Γ : il rapporto semplice dei tre punti così definiti sulla retta è in valore assoluto

$$ds = |\sqrt{dy^2 - hdx^2}|.$$

Si può prendere questa come «lunghezza» del vettore infinitesimo di componenti dx, dy ; essa è determinata da un E^2 .

È pure determinata da questo una direzione, quella della retta congiungente i punti-unità sugli assi, che però *non* prende il nome di direzione normale ad E^2 .

3. - Curvatura d'un E^3 piano.

Passiamo ad esaminare un E^3 nel piano centro-affine. Supporremo che la conica Γ (per l' $E^2 \subset E^3$ e simmetrica rispetto ad O) sia un'ellisse (cose analoghe si trovano se è un'iperbole) e che l' E^3 sia rappresentato da

$$3.1 \quad y - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + cx^3 + [4].$$

Si trova senza difficoltà che la conica Γ_1 contenente l' E^3 e passante per O ha l'equazione

$$2(y-1)(y+2cx) + x^2 = 0.$$

Il punto $\neq O$ in cui questa conica Γ_1 taglia l'asse x , di coordinate $(4c, 0)$ caratterizza geometricamente c .

Poichè il punto unità sull'asse x era definito (come intersezione con Γ) a meno di una simmetria ora possiamo individuarlo in modo che risulti $c > 0$ se non è $c = 0$.

Anche la tangente in O a Γ_1 , $y + 2cx = 0$, caratterizza c ; e così la retta $4cx + y - 1 = 0$, che congiunge $(0, 1)$ all'ulteriore punto d'intersezione di Γ e Γ_1 .

Queste due rette s'incontrano nel punto $(1/2c, -1)$. Gli elementi trovati permettono facilmente di tracciare Γ_1 (per $c \neq 0$). L' E^3 (per l' E^2 dato) per cui $c = 0$ si caratterizza anche facilmente. L' E^3 : $y - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + [4]$ e il

suo simmetrico rispetto ad O : $y + 1 = \frac{1}{2}x^2 + [4]$ appartengono alla stessa conica ($x^2 + y^2 = 1$) individuata da E^2 e dal suo simmetrico rispetto ad O ; cioè è l' E^3 in A di questa conica. Questo è il significato geometrico di $c = 0$.

Se si vogliono mettere l'invariante infinitesimo ds e quello finito (c) ora trovato in relazione con l'elemento d'arco e la curvatura del LAUGWITZ, basta ricordare anzitutto che se $x(t)$, $y(t)$ sono coordinate affini su una curva del piano, qualunque sia il parametro t , deve aversi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0$$

e che si può scegliere un parametro $s(t)$ tale che

$$\frac{d^2x}{ds^2} + a(s)\frac{dx}{ds} + x = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} + a(s)\frac{dy}{ds} + y = 0$$

(queste equivalgono all'equazione vettoriale (17) a p. 10 del LAUGWITZ; ds è l'elemento d'arco affine).

Riferendoci all' E^3 (3.1) si ha per $x = 0$:

$$y = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -1, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \sigma c, \quad \frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dy}{ds} = 0$$

e dalle equazioni differenziali, sempre per $x = 0$ è

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -a(0), \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -1.$$

Per derivazione dall'equazione differenziale in $y(s)$

$$\frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{dy}{ds}\left\{1 + \frac{da(s)}{ds}\right\} + a(s)\left\{y(s) + a(s)\frac{dy}{ds}\right\}$$

e per $x=0$

$$\frac{d^3 y}{ds^3} = a(s).$$

D'altra parte

$$\frac{d^3 y}{ds^3} = \frac{d^3 y}{dx^3} \left(\frac{dx}{ds} \right)^3 + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^2 x}{ds^2} \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{dx} \frac{d^3 x}{ds^3}$$

e per $s=x=0$ in base alle determinazioni precedenti

$$a(0) \sigma = c + 3a(0)$$

cioè

$$a(0) = -3c.$$

Questa relazione e la costruzione precedente danno il significato geometrico della *curvatura affine* (e della normale affine).

L'osservazione già fatta che un E^3 per cui $c=0$ (quindi $a=0$) appartiene alla conica con centro in O determinata dal suo E^2 porta senz'altro al teorema di LAUGWITZ per cui le uniche curve a curvatura affine nulla sono le coniche con centro in O .

4. - Quadriche osculatrici.

In uno spazio centro-affine A_{n+1} consideriamo una calotta n -dimensionale del 3° ordine σ_n^3 . Se O è il centro di A_{n+1} e A il centro della σ_n^3 possiamo sempre scegliere coordinate affini $x^i (i=1, \dots, n)$ e z tutte nulle in O , tali che in A siano $x^i=0$, $z=1$, e finalmente che l'iperpiano tangente in A a σ_n^3 sia $z=1$. La rappresentazione di σ_n^3 è del tipo

$$4.1 \quad z-1 = \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + [4]$$

ove φ_s è una forma di grado s nelle x^i e $[4]$ indica termini arbitrari d'ordine ≥ 4 nelle x^i .

Una quadrica simmetrica rispetto ad O passante per A con iperpiano tangente $z=1$ ha un'equazione del tipo

$$z^2 - 1 = \Phi_2(x) + z\Phi_1(x)$$

con Φ_s forma di grado s nelle x^i .

Essa contiene σ_n^3 appartenente a σ_n^3 se e solo se $\Phi_2(x) = 2\varphi_2(x)$ cioè la *quadrica centrale* (di centro O) *osculatrice* è la

$$Q_0 : z^2 - 1 = 2\varphi_2(x)$$

La $Q_0 \supset \sigma_n^3$ se e solo se è $\varphi_3(x) \equiv 0$; se ciò avviene in ogni punto di una ipersuperficie questa è una quadrica con centro in O ; e questo equivale al teorema di LAUGWITZ espresso dall'equazione (12) a pag. 27.

Procuriamoci ora l'equazione di una quadrica per σ_n^3 (che diremo ancora *osculatrice*) con centro nel punto (a^i, z_0) , $z_0 \neq 1$.

Una quadrica Q con centro in questo punto ha equazione del tipo

$$Q : \alpha_{ik}(x^i - a^i)(x^k - a^k) + 2\alpha_i(x^i - a^i)(z - z_0) + \alpha(z - z_0)^2 - 1 = 0.$$

Se σ_n^2 è rappresentata da

$$z = 1 + \varphi_2(x) + [3] = 1 + \varphi_{ik}x^i x^k + [3]$$

affinchè la quadrica $Q \supset \sigma_n^2$ bisogna che sostituita questa espressione di z nella sua equazione risultino identicamente nulli i termini di grado 0, 1, 2 nelle x^i . Ciò dà luogo alle condizioni seguenti:

$$\alpha_{ik}a^i a^k - 2\alpha_h a^h(1 - z_0) + \alpha(1 - z_0)^2 = 1$$

$$\alpha_{ik}a^k = \alpha_i(1 - z_0)$$

$$\alpha_{ik} - 2\alpha_h a^h \varphi_{ik} + 2\alpha(1 - z_0)\varphi_{ik} = 0.$$

Dalle ultime due si può ricavare $\alpha_{ik}a^i a^k$ ed eliminando nei due modi possibili quest'espressione fra le tre equazioni che la contengono si ha

$$\alpha_h a^h(1 - z_0) - \alpha(1 - z_0)^2 = -1$$

$$\alpha_h a^h \{2\varphi_2(a) - 1 + z_0\} - 2\alpha\varphi_2(a) = 0$$

di cui

$$A = \alpha_h a^h = -\frac{2\varphi_2(a)}{(1 - z_0)^2}, \quad \alpha = -\frac{2\varphi_2(a) - (1 - z_0)}{(1 - z_0)^3}$$

e in conseguenza delle equazioni date

$$\alpha_{ik} = -\frac{2\varphi_{ik}}{1 - z_0}, \quad \alpha_i = -\frac{2\varphi_{ik}a^k}{(1 - z_0)^2}$$

Il fatto che le α_{ik} non dipendano dalle a^i , ma solo da z_0 prova il teorema di LAUGWITZ secondo il quale due quadriche osculatrici $\supset \sigma_n^2$ aventi i centri sopra un medesimo iperpiano parallelo a quello tangente a σ sono segate da tale iperpiano in due quadriche (a $n - 1$ dimensioni) che si ottengono l'una all'altra per traslazione (quella che porta un centro nell'altro).

Si può osservare che la quadrica osculatrice di centro (a^i, z_0) contiene il punto improprio della retta OA se $\alpha = 0$ cioè se

$$1 - z_0 = 2\varphi_2(a)$$

cioè se il centro appartiene alla quadrica

$$1 - z = 2\varphi_2(x)$$

Questa si caratterizza rispetto alla quadrica osculatrice centrale (con centro O) Q_0 col fatto che Q contiene le sezioni di Q_0 con $z = 1$ e $z = -2$ e il punto improprio di OA . Perciò:

Le ∞^n quadriche osculatrici passanti per il punto improprio di OA sono quelle aventi i centri sulla quadrica Q che ha in comune con Q_0 le sezioni prodotte dai piani $z = 1$ e $z = -2$ e contenente lo stesso punto improprio.

5. - Calotte del 3° ordine e quadriche osculatrici.

Passiamo ora a considerare una calotta del 3° ordine σ_n^3 (di equazione 4.1) e le quadriche ad essa osculatrici, cioè contenenti la σ_n^2 .

L'intersezione della quadrica Q (di centro a^i, z_0) con σ_n^3 ha in A (centro della calotta: $a^i = 0, z = 1$) un punto triplo e le tangenti in esso appartengono all'iperpiano $z = 1$ e in esso al cono

$$\alpha_i x^i \varphi_2(x) - A \varphi_3(x) + \alpha(1 - z_0) \varphi_3(x) = 0$$

e per le espressioni già trovate di α_i, A, α

$$\varphi_3(x) = 2\varphi_{ik} x^i \tilde{a}^k \varphi_2(x).$$

Questa equazione dipende dalle a^i ma non da z_0 ; ciò mostra che:

Tutte le quadriche osculatrici aventi i centri su una parallela alla retta OA (congiungente il centro dello spazio affine col centro di σ_n^3) danno luogo ad intersezioni con σ_n^3 aventi lo stesso cono cubico tangente.

Possiamo chiederci se è possibile che il cono delle tangenti asintotiche di σ_n^2 e il cono cubico ora trovato riescano *apolari*. Perchè ciò avvenga, posto

$$\varphi_3(x) \equiv \varphi_{ikl} x^i x^k x^l$$

e indicato con φ^{ik} l'elemento reciproco di φ_{ik} in $\text{Det}(\varphi_{ik}) \neq 0$ deve aversi

$$\varphi_{ikl}\varphi^{kl} = 2a^h\varphi_h(i\varphi_{kl})\varphi^{kl}$$

cioè

$$\varphi_{ikl}\varphi^{kl} = \frac{2}{3}(n+2)\varphi_{ih}a^h$$

o più esplicitamente

$$a^h = \frac{3}{2(n+2)}\varphi^{hi}\varphi_{ikl}\varphi^{kl}.$$

Poichè z_0 rimane arbitrario, si ha che :

Se $\varphi_2(x)$ è una forma non-degenere esistono ∞^1 quadriche osculatrici, i cui centri (a^h, z_0) stanno sopra una ben determinata retta parallela ad OA , tali che il loro cono quadrico nell'iperpiano tangente in A e il cono cubico prima trovato siano apolari.

6. - Elementi differenziali curvilinei.

Abbiamo iniziato con lo studio di un elemento curvilineo E^2 o E^3 in un piano centro-affine e siamo poi passati allo studio di calotte d'ipersuperficie in uno spazio centro-affine A_{n+1} .

Occupiamoci ora di elementi E^{n+2} in A_{n+1} .

Serviamoci di coordinate affini $x, y^2, y^3, \dots, y^n, z$ tali che nel centro O dello spazio affine siano $x = y^i = z = 0$ ($i = 2, \dots, n$); nel centro A di E^{n+1} siano $x = y^i = 0, z = 1$ e $y^s = y^{s+1} = \dots = y^n = 0, z = 1$ con $s \geq 2$ le equazioni dello spazio S_{s-1} osculatore in A ad E^{n+1} e $z = 1$ quella dell'iperpiano osculatore.

Presa x come variabile indipendente la y^i ha uno sviluppo in x che comincia col termine in x^i (i è qui esponente) e $z - 1$ con x^n .

Ora è chiaro che con sole combinazioni lineari (cioè sostituendo ad ogni coordinata una conveniente combinazione lineare di essa e delle seguenti) si possono prendere le coordinate in modo che su E^{n+1}

$$y^i = \alpha^i x^i + [n+2], \quad i = 2, \dots, n$$

(i è un indice ordinale in y e in α , e invece un esponente in x) e

$$z - 1 = \alpha x^{n+1} + [n+2]$$

Se $\alpha > 0$ si può fare $x = hx'$ in modo che $\alpha h^{n+1} = 1$ e se chiamiamo x la nuova x' l'ultima equazione si scrive

$$z - 1 = \alpha^{n+1} + [n+2]$$

e le precedenti conservano lo stesso aspetto (con diversi valori per i coefficienti α^i).

Se $\alpha < 0$ con la stessa sostituzione si può fare $\alpha h^{n+1} = -1$ e quindi analogamente a sopra fare

$$z - 1 = -x^{n+1} + [n + 2].$$

E poi sostituendo alle y^i le y^i/α^i e indicando di nuovo queste con y^i si ha la forma canonica

$$y^i = x^i + [n + 2], \quad z - 1 = \varepsilon x^{n+1} + [n + 2]$$

con $i = 2, \dots, n + 1$ e $2 = \pm 1$ (se $n + 1$ è dispari si può far sempre $\varepsilon = +1$; non così se $n + 1$ è pari rimanendo nel campo delle trasformazioni reali).

Cerchiamo le trasformazioni affini che lascino fissi O ed A e non alterino la forma canonica. Intanto apparisce subito che deve essere

$$z' = z, \quad y^n = y^n, \quad y^i = y^i + h_j^i y^j \quad \text{con } j > i$$

$$x = x' + x_i y^i, \quad i = 2, \dots, n.$$

Poichè le y^i devono avere la stessa forma canonica ($= x'^i + [n + 2]$) risulta

$$\begin{aligned} y^n &= x'^n + [n + 2] = (x' + \alpha_2 x'^2 + \dots + \alpha_n x'^n)^n + [n + 2] = \\ &= x'^n + n\alpha_2 x'^{n+1} + [n + 2] \end{aligned}$$

e da qui si ricava $\alpha_2 = 0$. Poi

$$\begin{aligned} y^{n-1} &= x'^{n-1} + [n + 2] = (x' + \alpha_3 x'^3 + \dots)^{n-1} + h_n^{n-1} x'^n + [n + 2] = \\ &= x'^{n+1} + (n-1)\alpha_3 x'^{n+1} + h_n^{n-1} x'^n + [n + 2] \end{aligned}$$

da cui

$$\alpha_3 = h_n^{n-1} = 0.$$

Analogamente procedendo su

$$y^{n-2} = x'^{n-2} + [n + 2] = (x' + \alpha_4 x'^4 + \dots)^{n-2} + h_{n-2}^{n-2} x'^{n-1} + h_n^{n-2} x'^n + [n + 2]$$

si trova

$$\alpha_h = h_{n-1}^{n-2} = h_n^{n-2} = 0.$$

E così continuando si trova che l'unica trasformazione che conserva la forma canonica trovata dell' E^{n+1} è l'identità, o in altri termini:

In uno spazio centro-affine un E^{n+1} di cui nessuno spazio osculatore (punto, tangente, piano osculatore, ...) sia incidente al centro dello spazio determina un riferimento affine.

Conseguenza immediata di ciò è che un E^{n+1+s} ammette ns invarianti, i quali tuttavia potranno non essere indipendenti (come di certo accade per una curva algebrica se s è abbastanza grande).

7 - Elementi differenziali in A_3 e in A_4 .

Limitiamoci a considerare un elemento curvilineo E^4 in uno spazio A_3 centro-affine.

Sia esso rappresentato da

$$y = x^2 + cx^4 + [5], \quad z = 1 + x^3 + dx^4 + [5]$$

Le quadriche con centro O contenenti $E^3 \subset E^4$ sono le ∞^2 rappresentate da

$$z^2 - 1 = a_{11}(x^2 - yz) + 2xy + a_{22}y^2$$

con a_{11} e a_{22} arbitrarii. Le quadriche contenenti E^4 formano un fascio determinato dalle due quadriche

$$x^2 - yz + cy^2 = 0, \quad z^2 - 1 = 2y(x + dy).$$

La prima è un cono di vertice O che dipende soltanto da c , quindi contiene tutti gli $\infty^1 E^4$ che si ottengono al variare di d : questi formano uno pseudo-elemento ⁽⁴⁾ rappresentato da

$$y = x^2 + cx_4 + [5], \quad z = 1 + x^3 + [4]$$

(cioè la totalità degli E^4 per E^3 appartenenti a questo cono).

La seconda è una quadrica (cui appartiene la tangente in A all'elemento) che dipende solo da d , cioè contiene tutti gli ∞^1 elementi E^4 che si

⁽⁴⁾ Ho introdotto la nozione di pseudoelemento differenziale nella Nota «Nuovi enti geometrici: pseudoelementi differenziali», Rendic. Semin. Mat. e Fisico di Milano, vol. XXIII (1963). In essa si trovano numerose citazioni anche in relazione ai *pennelli* di elementi differenziali e agli *elementi composti* di cui appresso.

ottengono al variare di c : questi formano uno *pseudoelemento* (che è un *pennello o elemento composto* secondo TERRACINI) rappresentato da

$$y = x^2 + [4], \quad z = 1 + x^3 + dx^4 + [5].$$

Passiamo a considerare un E^5 contenente l' E^4 precedente

$$y = x^2 + cx^4 + c'x^5 + [6], \quad z = 1 + x^3 + dx^4 + d'x^5 + [6].$$

Esso appartiene alla quadrica di centro O :

$$z(d' - c)\{x^2 - yz + cy^2\} + (c' + 1)\{z^2 - 1 - 2y(x + dy)\} = 0$$

che appartiene, naturalmente, al fascio di quadriche per E^4 .

Per $d' = c$ e $c' \neq -1$ si ha la quadrica del fascio che ha per generatrice in A la tangente all'elemento E^4 : questa dipende solo da d , cioè ad essa appartengono gli $\infty^2 E^5$:

$$y = x^2 + cx^4 + c'x^5 + [6], \quad z = 1 + x^3 + dx^4 + cx^5 + [6]$$

con c e c' arbitrari. Questi $\infty^2 E^5$ costituiscono uno *pseudoelemento* contenente gli ∞^1 *pennelli*

$$y = x^2 + cx^4 + [5], \quad z = 1 + x^3 + dx^4 + cx^5 + [6]$$

al variare di c .

Se invece è $c' = -1$ e $d' \neq c$ la quadrica del fascio contenente E^5 è un cono di vertice O determinato dalla sola c , di cui è generatrice la retta OA e il piano tangente lungo questa al cono è il piano $y=0$; sicchè appartengono a questo cono tutti gli $\infty^2 E^5$ (di centro A).

$$y = x^2 + cx^4 - x^5 + [6], \quad z = 1 + x^3 + dx^4 + d'x^5 + [6]$$

con d e d' arbitrari, costituenti cioè lo *pseudoelemento*

$$y = x^2 + cx^4 - x^5 + [6], \quad z = 1 + x^3 + [4].$$

Se infine $c' = -1$, $d = c$ si ha l' E^5 appartenente alla curva d'intersezione del fascio di quadriche più volte nominato.

Diamo ancora, per teminare, alcuni risultati relativi ad elementi curvilinei nello spazio A_4 centro-affine. Un E^5 rappresentato da

$$y_2 = x^2 + c_2 x^5 + [6], \quad y_3 = x^3 + c_3 x^5 + [6], \quad z = 1 + x^4 + c_4 x^5 + [6]$$

(ove le coordinate sono x, z e y_2, y_3 con gli indici in basso invece che in alto come precedentemente) appartiene alle quadriche (tridimensionali)

$$x^2 - y_2 z + c_2 y_2 y_3 = 0, \quad x y_2 - y_3 z + c_3 y_2 y_3 = 0$$

$$z^2 = 1 + 2y_2^2 + 2c_4 y_2 y_3, \quad x y_3 = y_2^2, \quad y_3^2 = 0$$

e al sistema lineare ∞^4 da esse determinato.

Ciascuna delle prime tre quadriche determina uno pseudoelemento, contenente $\infty^2 E^5$ (per lo E^4 che fissa il riferimento) ottenuti fissando il coefficiente che entra nell'equazione della quadrica e lasciando liberi gli altri due coefficienti c_i che figurano nella rappresentazione dell'elemento. P. es. quelli appartenenti alla prima quadrica ($\supset E^4$) determinano lo pseudoelemento

$$y_2 = x^2 + c_2 x^5 + [6], \quad y_3 = x^3 + [5], \quad z = 1 + x^4 + [5].$$

Se si parte da un E^6 rappresentato da

$$y_2 = x^2 + c_2 x^5 + d_2 x^6 + [7], \quad y_3 = x^3 + c_3 x^5 + d_3 x^6 + [7]$$

$$z = 1 + x^4 + c_4 x^5 + d_4 x^6 + [7]$$

si trova che le quadriche di centro O per esso sono:

$$x^2 - y_2 z + c y_2 y_3 + (d_2 + 1) y_3^2 = 0, \quad x y_2 - y_3 z + c_3 y_2 y_3 + (d_3 - c_2) y_3^2 = 0$$

$$z^2 - 1 - 2y_3^2 - 2c_4 y_2 y_3 - 2d_4 y_3^2 = 0, \quad x y_3 - y_2^2 - c_3 y_3^2 = 0.$$

Anche qui si possono fare considerazioni analoghe a quelle fatte in casi precedenti. P. es. la prima di queste quadriche contiene $\infty^4 E^6$ per l' E^4 che determina il riferimento; essi sono quelli che si hanno dalla rappresentazione precedenti lasciando arbitrari c_3, d_3, c_4, d_4 e costituiscono uno pseudoelemento che potrà indicarsi con

$$y_2 = x^2 + c_2 x^5 + d_2 x^6 + [7], \quad y_3 = x^3 + [5], \quad z = 1 + x^4 + [5].$$

L'elemento E^6 che appartiene alle prime tre quadriche contenenti E^5 (assegnato, cioè fissate c_2, c_3, c_4) è caratterizzato da $d_2 = -1, d_3 = c_2, d_4 = 0$.