Pseudo-elementi differenziali.

ENRICO BOMPIANI (Roma) (*)

A Bruno Finzi nel suo 70^{mo} compleanno.

Summary. - *The object of this paper is the pre-entation of the notion of pseudo-differential element (of any dimension and order) as set of differential elements linked by an equivalence relation.*

Several examples of such sets of surface-elements (or caps) are given in the ordinary projective space.

1. - Introduzione.

Scopo di questo lavoro è di introdurre la nozione di *pseudo-elemento differenziale* di qualsiasi dimensione come classe d'equivalenza di elementi differenziali di dimensione assegnata ⁽¹⁾ e di fornire numerosi esempi che si presentano spontaneamente.

(*) Entrata in Redazione il 25 febbraio 1970.

⁽¹⁾ La nozione di « elemento differenziale di assegnata dimensione ad ordine » verrà qui richiamata al n. 2.

La nozione di calotta compare nei miei lavori seguenti:

1. - *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei*, Rend. Acc. Lincei, s. VI, vol. XXV, 1937, p. 149-154.

2. - *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, Rend. Semin. Mat. Università di Roma, s. IV, vol. II, 1938, p. 99-120.

3. - *Sulle varietà anolonne — I — Alcuni teoremi generali*, Rend. Acc. Lincei, s. VI, vol. XXVII, 1938, p. 37-45.

4. - *Sulle varietà anolonne — II — Le V_3^2 di S_3 proiettivo*, ibidem, p. 45-52.

5. - *Costruzione delle calotte superficiali di secondo ordine in un iperspazio*, Rend. Acc. Lincei, s. VI, vol. XXIX, 1939, p. 3-11.

6. - *Ueber drei Kalotten einer Hyperquadrik*, Jahresbericht d. Deutsch. Mathem. Verein., Bd. 40, 1939, p. 143-145.

7. - *Calotte a centri allineati di superficie algebriche*, Rend. Acc. d'Italia, vol. I, 1939, p. 93-101.

8. - *Invarianti proiettivi di calotte*, Rend. Acc. d'Italia, vol. II, 1941, p. 888-895.

9. - *Invarianti superficiali e topologici di calotte di superficie e ipersuperficie tangenti in un punto*, Rend. di Mat. e delle sue applicaz., s. III, vol. II, 1941, p. 261-291.

10. - *Topologia differenziale — I — Enti topologici determinati da elementi differen-*

Precedenti di questa ricerca sono:

- 1) la nozione di *pennello* di elementi curvilinei ⁽²⁾
- 2) la nozione di *elementi curvilinei composti* dovuta ad A. TERRACINI ⁽³⁾
- 3) la nozione di *pseudo-elemento differenziale curvilineo* ⁽⁴⁾.

Ciascuna di queste nozioni comprende la precedente (nell'ordine scritto): esse sono legate al fatto che nell'insieme dei coefficienti degli sviluppi che definiscono un elemento curvilineo alcuni coefficienti si lasciano arbitrari o, in altre parole, che nei vari sviluppi le *indeterminazioni* ⁽⁵⁾ hanno ordini differenti.

ziali di curve, Rend. Acc. Lincei, s. VIII, vol. VIII, 1949, p. 3-8.

11. - *Topologia differenziale* -- II -- *Invarianti topologici di elementi curvilinei*, ibidem, p. 8-15.

12. - *Topologia differenziale* -- III -- *Calotte superficiali del 2° ordine tangenti in un punto*, ibidem, 1950, p. 81-86.

13. - *Topologia differenziale* -- IV -- *Teoremi topologici sulle calotte superficiali*, ibidem, 1950, p. 169-175.

14. - *Topologia differenziale* -- V -- *Geometria delle superficie in uno spazio proiettivo curvo a tre dimensioni*, ibidem, 1950, p. 271-275.

⁽²⁾ La nozione di *pennello* di elementi differenziali curvilinei si trova nel mio lavoro 10 citato in ⁽⁴⁾ (n. 4, pag. 6).

⁽³⁾ I lavori di A. TERRACINI dedicati agli elementi curvilinei composti sono i seguenti.

1. - *Sulle coppie di rami con la stessa origine e con gli stessi piani osculatori*, Rend. Semin. di Torino, vol. 12, 1953-54, p. 265-281.

2. - *Sugli elementi curvilinei composti*, Atti Acc. Scienze di Torino, vol. 88, 1953-54, p. 7-15.

3. - *Su alcuni sistemi di elementi curvilinei*, Boll. U. M. I., s. 3, vol. 13, 1958, p. 395-405.

4. - *Su certi sistemi ∞^4 di linee spaziali*, ibidem, p. 564-576.

L'interesse di questa nozione introdotta dal TERRACINI nel campo proiettivo sta nel fatto che un elemento composto è un insieme autoduale di elementi differenziali.

⁽⁴⁾ E. BOMPIANI, *Elementi differenziali e trasformazioni birazionali*, Confer. n. 50 del Sem. Matem. dell'Università di Bari, p. 1-19.

In questo lavoro la nozione di pseudo-elemento differenziale curvilineo si presenta spontaneamente nella ricerca dell'ente trasformato di un elemento curvilineo avente il centro in un punto fondamentale di una trasformazione birazionale.

⁽⁵⁾ Nello sviluppo di una funzione di una o più variabili indipendenti in cui rimangono indeterminati (cioè con coefficienti arbitrari) i termini di ordine $\geq s$, s'indicherà l'insieme di questi termini col simbolo $[s]$ e si dirà *indeterminazione d'ordine s*. Se occorre per chiarezza, si potranno aggiungere al simbolo $[s]$ in basso a destra le variabili dello sviluppo a cui si riferisce.

Soltanto in una nota recente ⁽⁶⁾ ho avuto occasione di osservare classi d'equivalenza di elementi di superficie, o *pseudo-calotte superficiali* (in uno spazio proiettivo tridimensionale).

Le nozioni qui richiamate si basano essenzialmente su quella di calotta e su quella di relazione di equivalenza: e queste convengono alla definizione di pseudo-calotta; di qualsiasi dimensione e di qualsiasi ordine, in una varietà differenziabile.

Dal punto di vista analitico c'è una differenza essenziale fra pseudo-elementi differenziali curvilinei e quelli di varietà di dimensione > 1 .

Nel 1° caso si ha una differenza fra le *indeterminazioni* dei vari sviluppi che occorrono per rappresentare lo pseudo-elemento; nel 2° caso si può avere anche un solo sviluppo, ma in esso alcuni coefficienti (di termini dello stesso grado di altri che vi figurano con coefficienti determinati) rimangono arbitrari.

Ciò sarà chiarito dagli esempi che seguono.

2. - Definizioni di elementi e pseudo-elementi differenziali.

Comincio col richiamare la definizione di calotta di dimensione k e d'ordine s in una varietà differenziabile X_n di dimensione $n > k$ e di classe di differenziabilità C^s .

Si consideri un punto O di X_n (che si dirà poi *centro* della calotta), una varietà $\overset{\circ}{V}_m \subset X_n$ per esso pure di classe C^s e per cui il punto O fissato sia regolare (cioè l'insieme dei vettori tangenti in quel punto sia uno spazio lineare).

L'insieme di tutte le $V_m \subset X_n$ di classe C^s aventi nel punto fissato (pure per esse regolare) contatto d'ordine s con $\overset{\circ}{V}_m$ è una classe d'equivalenza: la relazione d'equivalenza è quella di contatto (evidentemente riflessiva, simmetrica, transitiva).

Questo insieme si dirà *calotta* o *elemento differenziale di dimensione m e di ordine s* ; e s'indicherà con σ_m^s ; o se $m = 1$ con E^s (elemento curvilineo d'ordine s).

Gli E^1 sono gli *elementi lineari* di Sophus Lie.

Una qualsiasi relazione di equivalenza fra le calotte del medesimo ordine e dimensione con lo stesso centro definisce un insieme che si dirà *pseudo-elemento differenziale* o *pseudo-calotta* con quel centro.

Un carattere geometrico di una pseudo-calotta è la dimensione dell'insieme (classe di equivalenza) delle calotte che la compongono.

Ma non è questo il solo carattere (in aggiunta ad m, s) della pseudo-calotta: e perciò non introdurremo per questa un simbolo.

⁽⁶⁾ E. BOMPIANI, *Sugli elementi differenziali di una superficie o ipersuperficie di uno spazio proiettivo*, Atti Acc. di Torino, vol. 103, 1968-1969, p. 1011-1023; si veda l'ultimo enunciato del n. 4 a pag. 1021.

3. - Calotte superficiali nello spazio proiettivo P^3 che determinano lo stesso riferimento.

Ho avuto occasione di dimostrare ⁽⁶⁾ che ogni calotta superficiale (non parabolica) del 4° ordine σ_2^4 in P^3 determina in modo unico un riferimento proiettivo intrinseco rispetto al quale la calotta è rappresentata (in coordinate non omogenee x, y, z) da

$$(3.1) \quad z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + (px + qy)(x^3 + y^3) + [5]$$

in cui $x=y=z=0$ è il *centro*, $z=0$ il piano tangente, $x=z=0$ e $y=z=0$ sono le tangenti asintotiche, $x^3 + y^3 = z=0$ le tangenti di DARBOUX p, q due *invarianti* (per trasformazioni proiettive) di σ_2^4 .

Si lasci ora variare ad arbitrio p (fisso q): si hanno $\infty^1 \sigma_2^4$ e queste formano una *classe d'equivalenza* perchè due qualsiasi di esse (o due superficie arbitrarie che le contengono) si tagliano in curve che fanno nel centro per tangenti quelle asintotiche e le tangenti di DARBOUX (questa è la relazione d'equivalenza

Quest'insieme è una pseudo-calotta (di dimensione 1 come insieme).

Analogamente se si varia q (fisso p).

Se si lasciano variare p e q si ha un insieme ∞^2 che è pure una pseudo-calotta: tutte le calotte σ_2^4 dell'insieme definiscono lo stesso riferimento proiettivo che conduce alla forma (3.1) (e questa è la relazione d'equivalenza).

Se invece della forma (3.1) si prendono le forme di DARBOUX

$$(3.2) \quad z = xy + x^3 + y^3 + ax^4 + by^4 + [5]$$

o

$$(3.3) \quad z = xy + x^3 + y^3 + 2xy(ax^2 + by^2) + [5]$$

ciascuna delle quali individua un riferimento intrinseco si possono considerare altre relazioni e quindi classi d'equivalenza che definiscono altrettante pseudo-calotte: p. es. lasciando variare a (fisso b) in (3.2) si ha un insieme ∞^1 di σ_2^4 tali che due superficie qualsiasi per due di esse si tagliano in curve che hanno nel centro delle σ_2^4 una tangente asintotica ($x=z=0$) come tangente

⁽⁷⁾ Si veda il lavoro 2 citato in ⁽⁴⁾. La retta del riferimento passante per il centro della calotta e non situata nel piano tangente è stata indicata da G. BOL (*Projektive Differential Geometrie*, 2 Teil, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen 1954, § 62) come *normale di Bompiani*; indicherò tutto il riferimento intrinseco determinato in quel lavoro come *B-riferimento*. Nello stesso lavoro è data la forma canonica 3.1 che segue.

quadrupla; e in (3.3) una tangente asintotica tripla ($x=y=0$) ed una semplice ($y=z=0$).

Queste sono le relazioni d'equivalenza nei due casi.

Così si può considerare in ciascuno dei due casi l'insieme ∞^1 di σ_2^4 , cioè la pseudo-calotta, per cui $a/b = \lambda$ fissato.

P. es. nel caso (3.3) questo insieme è tale che le superficie per due calotte dell'insieme si tagliano in curve con punto quadruplo nel centro e aventi per tangenti quelle asintotiche e una determinata coppia di tangenti coniugate.

4. - Calotte superficiali e quadriche nello spazio P^3 .

Insieme alla calotta σ_2^4 definita dalla (3.1) consideriamo una quadrica Q che contenga la σ_2^2 di σ_2^4 , di equazione

$$(4.1) \quad z = xy + mxz + nyz + rz^2.$$

Un elemento E^1 nel B -riferimento adottato (il cui $E^2 \in \sigma_2^2$) sia rappresentato da

$$(4.2) \quad \begin{aligned} y &= \lambda x + \varepsilon x^2 + \eta x^3 + \zeta x^4 + [5] \\ z &= \lambda x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4 + [5]. \end{aligned}$$

Affinchè l' E^4 appartenga a Q dev'essere

$$(4.3) \quad \alpha = \varepsilon + (m + n\lambda)\lambda, \quad \beta = \eta + (m + n\lambda)\alpha + n\lambda\varepsilon + r\lambda^2$$

e perchè appartenga a σ_2^4

$$(4.4) \quad \alpha = \varepsilon + \frac{1}{3}(1 + \lambda^3), \quad \beta = \eta + \lambda^2\varepsilon + (p + q\lambda)(1 + \lambda^3)$$

da cui

$$(4.5) \quad 1 + \lambda^3 = 3(m + n\lambda)\lambda$$

$$(5.6) \quad (m + 2n\lambda - \lambda^2)\varepsilon + \lambda(m + n\lambda)^2 + r\lambda^2 - (p + p\lambda)(1 + \lambda^3) = 0.$$

Le prime (4.3) e (4.4) e la (4.5) riguardano i soli E^3 .

Poichè in esse non figurano p, q esse valgono non solo per la σ_2^4 data ma per tutte le σ_2^4 che danno luogo allo stesso B -riferimento; e poichè non vi figura r non valgono per una sola quadrica Q , ma per un fascio di quadriche (determinato da Q e dal piano tangente contato due volte).

L'insieme ∞^2 di σ_2^4 è una pseudo-calotta; così l'insieme degli ∞^2 E^3 che

hanno un E^1 definito da (5.4) (e ve ne sono tre) ed hanno ε , η arbitrari (con α definito dalla prima (4.3) e (4.4) è pure un pseudoelemento).

I tre pseudoelementi (di $\infty^2 E^3$) ora definiti sono comuni alla pseudo-calotta (di $\infty^2 \sigma_2^4$) e ad un fascio di quadriche (contenenti la σ_2^2 di σ_2^4 e il piano tangente contato due volte).

Passiamo ora agli E^4 comuni ad una quadrica $Q \supset \sigma_2^2$ di σ_2^4 .

Bisogna tener conto anche della (4.6) e della seconda (4.4).

Bisogna distinguere due casi.

I CASO:

$$m - 2n\lambda - \lambda^2 \neq 0.$$

per i valori di λ soddisfacenti alla (4.5).

La (4.6) definisce ε per ognuno dei tre valori di λ dati da (4.5), e per ogni λ ed ε si ha un valore di α ; rimangono arbitrari η (che per la seconda (4.4) definisce β) e ζ .

In questo caso vi sono tre pseudoelementi curvilinei, ciascuno costituito da $\infty^2 E^4$, comuni ad una σ_2^4 e ad una quadrica $Q \supset \sigma_2^2$ di σ_2^4 .

Fra questi E^4 ve ne sono tre piani (uno in ciascun pseudoelemento).

II. CASO:

se ε non è determinato in relazione ad un valore di λ radice della (4.5), devono valere le relazioni

$$(4.7) \quad m + 2n\lambda - \lambda^2 = 0$$

$$(4.8) \quad \lambda(m + n\lambda)^2 - (p + q\lambda)(1 + \lambda^3) + r\lambda^2 = 0.$$

Il risultante delle equazioni (4.5) e (4.7) in λ si scrive

$$(4.9) \quad (mn - 1)^2 = 4(m + n^2)(n + m^2).$$

Questa condizione è tale che: *se insieme ad essa vale una delle tre uguaglianze*

$$(4.10) \quad mn - 1 = 0, \quad m + n^2 = 0, \quad n + m^2 = 0$$

valgono anche le altre due, come si verifica agevolmente.

Se questo accade, detta u_i una delle radici di $u^3 = -1$, si trova che $n = u_i$, $m = -u_i^2$: e le condizioni (4.5) e (4.7) si riducono a

$$(\lambda - u_i)^3 = 0, \quad (\lambda - u_i)^2 = 0$$

cioè i valori di λ sono quelli relativi alle tangenti di DARBOUX.

In questo caso la (4.8) si riduce ad $r = 0$.

Per caratterizzare geometricamente le quadriche che soddisfano alla (4.9) consideriamo la retta impropria del piano tangente nel B -riferimento e la sua polare rispetto alla quadrica (4.1).

Questa ha per equazioni:

$$x + nz = 0, \quad y + mz = 0$$

e il luogo di queste rette, al variare di m, n legate dalla (4.9) è il cono di 4° grado Γ^4 di equazione

$$(xy - z^2)^2 = 4(x^2 - yz)(y^2 - xz).$$

Le eventualità relative al II caso in cui la quadrica Q è tale che la retta impropria del piano tangente nel B -riferimento abbia per polare una retta del cono Γ^4 sono espresse nel seguente teorema:

Non esistono in generale E^4 (regolari) comuni ad una σ_2^4 e ad una $Q \supset \sigma_2^2$ e del tipo ora specificato; però nel fascio individuato da una tale Q e dal piano tangente contato due volte esiste una sola quadrica che ha in comune con $\sigma_2^4 \infty^3 E^4$ (per l'arbitrarietà di ε, η, ζ) con ben determinato E^1 .

Se questo E^1 (cioè la sua tangente) è di Darboux la quadrica che contiene gli $\infty^3 E^4$ di σ_2^4 con quella tangente (e che è la quadrica di Mountard relativa a quella tangente) passa per il vertice del B -riferimento opposto al piano tangente⁽⁸⁾.

Se come quadrica Q si prende quella determinata dal B -riferimento, $z = xy$ (che non soddisfa alla 4.9) si trova che gli E^4 comuni ad essa e a σ_2^4 hanno le tangenti di DARBOUX ($y = u_i x, z = 0$) e sono dati da

$$y = u_i x + \eta x^3 + \zeta x^4 + [5]$$

$$z = u_i x^2 + \eta x^4 + [5]$$

con $u_i^3 + 1 = 0$, η e ζ arbitrarie: questo insieme di $\infty^2 E^4$ è pure uno *pseudo-elemento* curvilineo: esso è comune a tutte le σ_2^4 che danno luogo allo stesso B -riferimento, cioè alla *pseudocalotta* che contiene le $\infty^2 \sigma_2^4$ con p, q arbitrarie.

5. - Calotte superficiali e superficie cubica da esse definita.

Le $\infty^2 \sigma_2^4$ (3.1) che definiscono lo stesso B -riferimento definiscono anche

⁽⁸⁾ Questa estensione del teorema di MOUTARD (valida anche per le ipersuperficie) è già stata incontrata nel lavoro citato in ⁽⁶⁾ (fine del n. 4).

la superficie cubica

$$(5.1) \quad z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3).$$

Una σ_2^4 con invarianti $p, q \neq 0$ (altrimenti tutta la σ_2^4 apparterrebbe alla superficie cubica), o meglio una qualsiasi superficie che la contenga sega la superficie cubica in una curva che ha, nel centro di σ_2^4 , per tangenti quelle di DARBOUX, $y = u_i x$ con $u_i^3 = -1$ e $y = \mu x$ con $\mu = -p/q$ (e $z = 0$).

Con il procedimento già adottato (per $\sigma_2^4 \cap Q$) si trova che relativamente ad ogni tangente di DARBOUX si ha uno pseudoelemento di $\infty^3 E^4$

$$\begin{aligned} y &= u_i x + \varepsilon x^2 + \eta x^3 + \zeta x^4 + [5] \\ z &= u_i x^2 + \varepsilon x^3 + (\eta + u_i \varepsilon) x^4 + [5] \end{aligned}$$

con ε, η, ζ arbitrarie; questi *tre pseudoelementi* sono comuni a tutte le $\infty^2 \sigma_2^4$ considerate che costituiscono una *pseudocalotta*.

Per l'altra tangente si ha pure uno *pseudoelemento* di $\infty^4 E^4$

$$\begin{aligned} y &= \mu x + \varepsilon x^2 + \eta x^3 + \zeta x^4 + [5] \\ z &= \mu x^2 + \left[\varepsilon + \frac{1}{3}(1 + \lambda^3) \right] x^3 + [\eta + \mu^2 \varepsilon] x^4 + [5] \end{aligned}$$

e questo appartiene alla *pseudocalotta* costituita dalle $\infty^1 \sigma_2^4$ per cui $p/q = -\mu$ (fissato).

6. - Estensioni a calotte del 5° ordine.

Consideriamo una σ_2^5

$$(6.1) \quad z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + (px + qx)(x^3 + y^3) + \varphi_5(x, y) + [6]$$

ove $\varphi_5(x, y)$ è una *forma* di 5° grado in x, y e i suoi elementi E^5 appartenenti pure alla quadrica $Q = z = xy$, o alla superficie cubica F^3 :

$$(6.2) \quad z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3).$$

Affinchè un E^5

$$\begin{aligned} (6.3) \quad y &= \lambda x + \varepsilon x^2 + \eta x^3 + \zeta x^4 + \chi x^5 + [6] \\ z &= \lambda x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4 + \gamma x^5 + [6] \end{aligned}$$

appartenga σ_2^5 e a Q dev'essere

$$\lambda = u' \quad \text{con} \quad u_i^3 + 1 = 0, \quad \varepsilon = \alpha = 0, \quad \beta = \eta = -\frac{\varphi_5(1, u_i)}{u_i^2}, \quad \gamma = \zeta.$$

Questo è uno *pseudoelemento* composto di $\infty^2 E^5$ (ζ e χ arbitrari) e ne esistono tre (uno per ogni tangente di DARBOUX).

Questi $\infty^2 E^5$ sono *tutti* gli E^5 di σ_2^5 definiti dall' E^3

$$(6.4) \quad y = u_i x - \frac{\varphi_5(1, u_i)}{u_i^2} x^3 + [4], \quad z = u_i x^2 + [4].$$

Ciascuno di questi tre pseudoelementi, poichè i suoi E^5 non dipendono da p, q e dipendono solo da $\varphi_5(1, u_i)$, appartiene alle ∞^7 calotte σ_2^5 che si ottengono variando p, q e i coefficienti di φ_5 in modo da non alterare il valore di $\varphi_5(1, u_i)$.

Si ha così per ogni tangente di DARBOUX una *pseudocalotta* di $\infty^7 \sigma_2^5$ contenente lo pseudoelemento di $\infty^2 E^5$.

Vi è una *pseudocalotta* di $\infty^5 \sigma_2^5$ contenente i tre pseudoelementi (ciascuno di $\infty^2 E^5$) relativi alle tre tangenti di DARBOUX.

Se $\varphi_5(x, y)$ è divisibile per uno dei fattori $y - u_i x$ di DARBOUX, cioè se $\varphi_5(1, u_i) = 0$ l' E^3 (6.3) *base* o comune agli $\infty^2 E^5$, è piano (appartiene a $y = u_i x$); questo è il significato geometrico di $\varphi_5(1, u_i) = 0$.

Passiamo a considerare gli E^5 comuni alla stessa σ_2^5 e alla F^3 (6.2) pure determinata da σ_2^5 e che ha con essa in comune la calotta del 3° ordine σ_2^3 .

Per l'appartenenza di un E^5 (6.3) a σ_2^5 si ha

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \alpha &= \varepsilon + \frac{1}{3}(1 + \lambda^3), & \beta &= \eta + \lambda^2 \varepsilon + (p + q\lambda)(1 + \lambda^3) \\ \gamma &= \zeta + \lambda(\varepsilon^2 + \lambda\eta) + \varepsilon(3\lambda^2 p + 4\lambda^3 q + q') + \varphi_5(1, \lambda). \end{aligned}$$

Affinchè questo E^5 appartenga anche alla F^3 (6.2) per cui

$$p = q = 0, \quad \varphi_5(x, y) = 0$$

devono essere soddisfatte le condizioni

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad (p + q\lambda)(1 + \lambda^3) = 0 \\ \text{II.} & \quad \varepsilon \{ 3\lambda^2 p + (4\lambda^3 + 1)q \} + \varphi_5(1, \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Escludiamo che la σ_2^5 contenga la calotta con lo stesso centro della F^3 che essa determina: se la contenesse tutti gli $\infty^5 E^5$ di σ_2^5 apparterebbe ad F^3 .

Se poi la σ_2^5 avesse in comune con F^3 la σ_2^4 , cioè $p = q = 0$, gli $E^5 \in \sigma_2^5 \cap F^3$ sarebbero tutti quelli con le tangenti definite da $\varphi_5(1, \lambda) = 0$; cioè vi sarebbero 5 pseudoelementi di $\infty^4 E^5$ ciascuno.

Esclusi i casi precedenti quelli da esaminare in relazione alla condizione I sono :

$$I_1. \quad 1 + \lambda^3 = 0, \quad I_2. \quad p + \lambda q = 0 \quad (\text{ma non } p = q = 0)$$

e le due condizioni I_1 e I_2 insieme (diciamo I_3).

Posto come prima $u_i^3 = -1$ si hanno per la I_1 tre valori di $\lambda_i = u_i$ ($i = 1, 2, 3$); la corrispondente II dà

$$II_1. \quad 3\varepsilon(u_i^2 p - q) + \varphi_5(1, u_i) = 0.$$

Se, come supponiamo non vale anche la I_2 se cioè $p + u_i q \neq 0$ il coefficiente di ε è diverso di zero quindi ε è determinato (mentre non vi sono condizioni per η, ζ, χ).

Se invece per una determinata u_i si avesse $p + u_i q = 0$ (cioè valesse il caso I_3), quindi $p^3 = q^3$, poichè ε deve essere finito dev'essere anche $\varphi_5(1, u_i) = 0$. Se invece vale la I_2 (senza che siano insieme $p = q = 0$) la II si riscrive

$$II_2. \quad 3\varepsilon q(1 + \lambda^3) + \varphi_5(1, \lambda) = 0.$$

Si può sempre supporre $q \neq 0$ (scambiando eventualmente le denominazioni degli assi x, y). Quindi il coefficiente di ε è $\neq 0$ (ed ε finito) se $1 + \lambda^3 \neq 0$.

Nel caso opposto si ritorna sulla discussione già fatta (relativa alle condizioni I_3).

Una calotta σ_2^5 e la F^3 intrinsecamente determinata dalla σ_2^4 di σ_2^5 (nell'ipotesi che questa σ_2^4 non sia quella di F^3 con lo stesso centro di σ_2^5 cioè p e $q \neq 0$) possono avere in comune :

$I_1)$ *Tre pseudoelementi curvilinei ciascuno di $\infty^3 E^5$, con le tangenti di Darboux, se ciascuna di queste è semplice fra le tangenti alla intersezione $\sigma_2^5 \cap F^3$ (cioè se $\lambda = p/q$ non individua una tangente di Darboux ossia $-p/q \neq u_i$);*

$I_2)$ *Uno pseudoelemento, pure di $\infty^3 E^5$, con la tangente definita da $\lambda = p/q$ ($\neq u_i$ con $u_i^3 = -1$).*

$I_3)$ *Se invece questa tangente è pure di Darboux, non esistono in generale neppure $E^2 \in \sigma_2^5 \cap F^3$ con questa tangente, a meno che sia $\varphi_5(q, -p) = 0$: in quest'ultimo caso la tangente di Darboux per cui ciò avviene ha contatto 6-punto con la linea d'intersezione di F^3 con qualunque superficie $\supset \sigma_2^5$ nel centro di questa; tutti gli $\infty^1 E^5$ di σ_2^5 con quella tangente costituiscono uno pseudoelemento che appartiene a $\sigma_2^5 \cap F^3$.*

7. - Intersezione di superficie algebriche con una stessa σ_2^3 .

Un caso ancora più particolare si avrebbe se fosse (nel B-riferimento di σ_2^5) $\varphi_5(x, y) \equiv 0$.

Facciamo un esempio riferendoci a due superficie, di cui una sia la

$$F^4 = z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + (px + qy)(x^3 + y^3)$$

e l'altra sia la F^3 già adoperata.

Dal punto di vista algebrico la $F^3 \cap F^4$ è la curva del 12° ordine composta di 4 coniche appartenenti ai tre piani di DARBOUX (cioè contenenti le tangenti di DARBOUX e la B -normale) e al piano $px + qy = 0$ (contenente la tangente coniugata a quella conica e la B -normale) e inoltre le quattro rette improprie (nel B -riferimento) di questi piani: se l'ultimo piano è pure di DARBOUX la conica e la retta impropria in esso sono da contarsi due volte.

Ma se si cercano gli E^5 comuni ad F^3 e F^4 (di centro 0) si trova, con la stessa tecnica, che nel caso che le quattro tangenti sopra nominate sono tutte distinte vi sono 4 pseudoelementi di $\infty^3 E^5$, uno per ciascuna tangente, ($\varepsilon=0$, η , ζ , χ arbitrarie) comuni; mentre se l'ultima tangente ($px + qy = z = 0$) è di DARBOUX questa determina uno pseudoelemento di $\infty^4 E^5$ (ε , η , ζ , χ arbitrarie) con quella tangente mentre per le altre due si ripete la stessa situazione di prima.

Lo stesso dicasi per due qualsiasi superficie, in particolare algebriche, contenenti le σ_2^5 di F^3 , F^4 in O .