De pressiouibus negativis in sinu et in pariete regionis fluido viscoso moventi impletæ schedula.

C. TRUESDELL (Baltimora) (*)

A Bruno Finzi nel 70^{mo} compleanno.

Sunto. - *Si dimostrano condizioni necessarie e sufficienti affinché la pressione su un elemento generico in un fluido viscoso sia nonnegativa. Il criterio si esprime mediante il «numero di tensione».*

1. - De sensu et momento pressionis negativæ.

Late creditur fluidum in statu aequilibræ pressionem negativam tollendi non esse capax. Utrum ita sit in fluido etiam moventi, an pressio negativa in aliquibus punctis tempora saltem satis brevia accidere queat, adhuc incertum manere videtur. In tractatibus classicis de theoria fluidorum perfectorum nullius compressionis capacium, ille valor constantis pressionis p_0 quæ in determinationem problematis particularis finibus et velocitatibus incohantibus datis determinati init, qui sit minimus ut dentur locus tempusque quo pressio p evanescat, ad indicium principii separationis fluidi ab pariete aut cavitationis in sinu fluidi ipsius accipitur ⁽¹⁾. Contra autem res se habet in theoria gasorum perfectorum ubi ab initio postulari solet tali modo $p = p(\rho, \theta)$ pressionem staticam subici, ρ densitate et θ temperatura, ut ex eo sequatur semper et ubique limes $p \geq 0$. Secundum igitur notiones, quæ intrinsecus in theoriis fluidorum perfectorum insunt, cavitatio et capacitas dilatandi se mutuo excludunt. Tamen in theoria fluidorum viscosorum, quæ regulas generaliores illis quæ ex ambobus theoriis fluidorum perfectorum eliciendæ sunt præbere deberet, adhuc (qua invenio) tota hæc materia indagatione caret, quod argumentum harum mearum observationum simplicium statuit.

De cavitatione in fluidis naturalibus hic sermo non est. An theoremata mathematica quæ sequentur utilia in re physica probabuntur, decet physicis relinquere.

Ad analysin intelligendam recordari juvabit, quod pressio normalis, quam

(*) Entrata in Redazione il 26 gennaio 1970.

(1) V. ex. gr. § 86 commentationis EULERI, *Sectio secunda de principiis motus fluidorum*, Novi comm. acad. sci. Petrop. 14 (1769): I, 270-386 (1770) = *Opera omnia* (II) 13, 73-153, cuius sententia ab innumerabilibus auctoribus posteris resonata est.

in fluido viscoso moventi superficies aut introrsum aut in pariete patitur, multo a pressione statica $p(\varrho, \theta)$ quae densitati temperaturaeque in eodem fluido si sit quietum conveniat, discrepare potest.

2. - Numerus tractilis in gaso viscoso compressionis capaci.

Detur gasum viscosum, cuius tensor conatum ⁽²⁾ $\mathbf{T}$ ex pressione statica p atque tensore tractuum ⁽³⁾ $\mathbf{D}$ necnon viscositatibus λ et μ regula constitutionis NAVIER-STOKESIANA determinatur:

$$(1) \quad \mathbf{T} = (-p + \lambda \delta) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{D},$$

ubi $\delta \equiv \text{tr} \mathbf{D} = \text{div } \dot{\mathbf{x}}$ atque p, λ et μ functiones datae densitatis ϱ et temperaturae θ quae inaequalitatibus sequentibus subiciuntur:

$$(2) \quad p \geq 0, \quad \lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

Postea seponens in hac re locos singulares et fluida perfecta specialiave in quibus $p = 0$ aut $\mu = 0$, assumo esse semper et ubique

$$(3) \quad p > 0 \quad \text{et} \quad \mu > 0.$$

Appelletur *numerus amplitudiniviscosus* ratio nondimensionalis $\mathfrak{B}$ viscositatis voluminis $3\lambda + 2\mu$ ad viscositatem lapsus μ , id est

$$(4) \quad \mathfrak{B} \equiv 1 + \frac{3\lambda}{2\mu}.$$

Ex Aeq. (2)₁ et Inaeq. (3)₂ sequitur, ut sit

$$(5) \quad \infty > \mathfrak{B} \geq 0.$$

Si $\mathfrak{B} = 0$, dicitur fluidum «modo STOKESIANO» obtemperare.

Tractio $\mathbf{t}$, quae in elementum orientatum superficiei cuius versor $\mathbf{n}$ est exseritur, formula

$$(6) \quad \mathbf{t} = (-p + \lambda \delta) \mathbf{n} + 2\mu \mathbf{D} \mathbf{n}$$

⁽²⁾ Italice «tensore degli sforzi».

⁽³⁾ Italice «tensore di velocità di deformazione», id est

$$2\mathbf{D} = \text{grad } \dot{\mathbf{x}} + (\text{grad } \dot{\mathbf{x}})^T,$$

ubi $\dot{\mathbf{x}}$ campus velocitatum.

datur, ex qua invenitur pressio normalis $p_{(n)}$ quam patitur elementum:

$$\begin{aligned}
 p_{(n)} &= -t \cdot n, \\
 (7) \quad &= p - \lambda \delta - 2\mu \mathbf{n} \cdot \mathbf{Dn}, \\
 &= p - \lambda(D_1 + D_2 + D_3) - 2\mu D_{(n)},
 \end{aligned}$$

ubi D_1, D_2, D_3 tractus principales et $D_{(n)}$ tractus secundum directionem cuius versor $\mathbf{n}$.

Ut inter omnia elementa superficiei in dato puncto illud inveniamus, quod pressionem normalem minimam sustineat, eligimus talem $\mathbf{n}$, qualis tractum $D_{(n)}$ maximum reddat, et hic $\mathbf{n}$ versor directionis principalis tensoris tractuum $\mathbf{D}$ est, qui autovalori maximo convenit. Si tractus principales D_i ordinamus ut sit $D_1 \geq D_2 \geq D_3$, est igitur $\max D_{(n)} = D_1$, ut reperiat

$$(8) \quad \min p_{(n)} = p - \lambda(D_1 + D_2 + D_3) - 2\mu D_1.$$

Si $\min p_{(n)} \geq 0$, sequitur ut sit $p_{(n)} \geq 0$ versore $\mathbf{n}$ quocunque.

Ut analyseos summam faciamus adjuvat *numerum tractilem* $\mathcal{T}e$ nondimensionallem definire:

$$(9) \quad \mathcal{T}e \equiv \frac{2\mu}{3p} [(D_1 - D_2) + (D_1 - D_3) + \mathfrak{B}(D_1 + D_2 + D_3)].$$

Ex superioribus sequitur

THEOREMA. - *Datis in puncto $\mathbf{x}$ valoribus ρ et θ , ut nullum elementum superficiei ibi pressionem normalem negativam patiatur, non solum sufficit sed etiam necesse est, ut sit*

$$(10) \quad \mathcal{T}e < 1.$$

Si autem $\mathcal{T}e = 1$, evanescit pressio normalis quae in elementum exseritur, cuius versor axi principali qui tractui maximo convenit, parallelus est.

Definitione numeri $\mathcal{T}e$ perpensa, colliguntur causae, quae pressiones normales negativas in fluidis viscosis efficere valeant:

1°. - Magna distractio, id est, aut $D_1 >> D_2$ aut $D_2 >> D_3$ aut ambo inaequalitates obtineunt.

2°. - Numero amplitudiniviscoso $\mathfrak{B}$ non nullo, magna dilatatio positiva, id est, $D_1 + D_2 + D_3 >> 0$. Si autem $\mathfrak{B} = 0$, sola causa prior efficere potest.

3. - Applicationes in sinu fluidi.

In dilatatione pura $D_1 = D_2 = D_3 = D = \frac{1}{3}\delta$ et hinc

$$(11) \quad \mathcal{T}e = \frac{2\mu \mathfrak{B} D}{p}.$$

In compressione $D < 0$; sequitur ut sit $\mathcal{T}e \leq 0$ et a fortiori $\mathcal{T}e < 1$; in omni igitur compressione pura pressionibus negativae aut nullae absunt. In expansione autem casus duo discernendi sunt. 1º, si valeat modus STOKESIANUS, sequitur ut sit $\mathcal{T}e = 0$, et pressio normalis pressioni staticae aequalis est (quod etiam in compressione valet). Hoc in casu sequitur denuo a fortiori pressionibus negativae aut nullae abesse. 2º, si $\mathcal{B} > 0$ et si

$$(12) \quad D > \frac{p}{2\mu\mathcal{B}}$$

pressio normalis negativa erit, et videtur fluidum embolum retrorsum trahere, quod expansionem producere conaretur. Utrum talis effectus in praxi contingat, an fluidum embolum non sequi possit, ut spatium vacuum inter se et embolum reliquat, oportet ex scrutatoribus in re aerodynamica petere.

(In theoria cinetica gasorum tales definitiones finguntur, ut omnes pressionibus normales affirmativas reddant. Non solum igitur possibilitas cavitationis aut separationis modo allata in ista theoria non datur, sed etiam ipsa theoria cum NAVIER-STOKESIANA in casibus quadrare nequit ubi ex hac pressio negativa elicitur. Hanc discrepantiam alibi iam exposui et indagavi ⁽⁴⁾).

In motu isochorico $\delta = 0$ et hinc

$$(13) \quad \mathcal{T}e = \frac{2\mu D_1}{p},$$

Numerus $\mathcal{T}e$ igitur a solo tractu maximo pendet, et $\mathcal{T}e \geq 0$.

Generalius, sit $\mathcal{T}e_0$ numerus tractilis qui fluido et motui conveniat, si modus STOKESIANUS valeat:

$$(14) \quad \mathcal{T}e_0 = \frac{2\mu}{3p} [(D_1 - D_2) + (D_1 - D_3)].$$

Semper $\mathcal{T}e_0 \geq 0$, et

$$(15) \quad \mathcal{T}e = \mathcal{T}e_0 + \frac{2\mu\mathcal{B}\delta}{3p}.$$

Si fluidum se dilatat, $\mathcal{T}e \geq \mathcal{T}e_0$, sed si se contrahit, $\mathcal{T}e \leq \mathcal{T}e_0$. In motu astringendi igitur sufficit inaequalitas $\mathcal{T}e_0 < 1$ ut nulla pressio normalis negativa eliciatur.

In indagationibus theorarum fluidorum nonlinearium reperitur *numerus truncationis* ⁽⁵⁾, qui formula

$$(16) \quad \mathcal{T}r = \frac{\sqrt{2} \mu \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}}{p}$$

⁽⁴⁾ V. schedulam *A precise upper limit for the correctness of the Navier-Stokes theory with respect to the kinetic theory*, J. Statistical Physics 1, 313-318 (1969).

⁽⁵⁾ Italice: *numero di troncatura*. V. ex. gr. schedulam meam, *On the differential equations of slip flow*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34, 342-347 (1948).

definiri potest. Hic numerus nondimensionalis indicium praebet an in theoriis simplicioribus de fluidis nonlinearibus potentiae tensoris $\mathbf{D}$ prima superiores in regula constitutionis tuto negligi possunt. Si $\mathcal{T}r < 1$, licet dicere tractus « minimos » esse. Ex Aeqq. (16) et (13) deducitur in motu eidem plano parallelo et isochorico, cum sint $D_2 = 0$ et $D_3 = -D_1$, esse

$$(17) \quad \mathcal{T}e = \mathcal{T}r.$$

Generalius valet inaequalitas non difficilis demonstratu:

$$(18) \quad \mathcal{T}e \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \mathcal{B}^2 \mathcal{T}r},$$

ubi limes superior optimus est, quandoquidem valoribus sequentibus substitutis,

$$(19) \quad D_2 = D_3 = \frac{\mathcal{B} - 1}{\mathcal{B} + 2} D_1,$$

assumpto numero $D_1 \geq 0$, inveniatur aequalitatem contingere.

Ex Inaeqq. (18) et (10) intelligitur, in motu fluidi ubi tractus satis parvi sunt pressionem normalem negativam numquam dari. Hanc in finem sufficit ut sit

$$(20) \quad \mathcal{T}r < \frac{\sqrt{3}}{2 \sqrt{1 + \frac{1}{2} \mathcal{B}^2}}.$$

at huic condicioni necessitas multo deest, uti videmus ex exemplo dilatationis purae fluidi, quod modo STOKESIANO obtemperat, quoniam $\mathcal{T}e = 0$ sed $\mathcal{T}r = \sqrt{6} \mu D/p$, ex quibus patet pressionem negativam non exsistere, quamvis magnus sit numerus $\mathcal{T}r$.

4. - Digressio de cinematica parietis in quiete.

Posito fluidum in pariete quieto adhaerere, ut in eo sit $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, gradiens velocitatum ibi formam simplicissimam assumit. Ut vulgo scitur, axis circumactuum parietem tangit. Sit $\mathbf{W}$ tensor circumactuum ⁽⁶⁾, sit $\mathbf{e}$ versor eius axis, sit $\mathbf{n}$ versor superficiei, et eligatur $\mathbf{f}$ ut sit $(\mathbf{n}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ basis orthonormalis vectorum

⁽⁶⁾ Italice «tensore del vortice», id est

$$2\mathbf{W} = \text{grad } \dot{\mathbf{x}} - (\text{grad } \dot{\mathbf{x}})^T,$$

in puncto superficiei. His positis,

$$(21) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} w \mathbf{n} \wedge \mathbf{f}, \quad \mathbf{Wn} = -\frac{1}{2} w \mathbf{f}, \quad \mathbf{Wf} = +\frac{1}{2} w \mathbf{n},$$

ubi w , qui est numerus nonnegativus, vorticitas appellatur. Ex theoremate Ef. HORATII AGNI ⁽⁷⁾ pro calculatione derivatae elementi superficiei invenitur versorem $\mathbf{n}$ superficiei materialis ⁽⁸⁾ (utrum haec superficies paries in quiete maneat an secus) dirigi, ut sit

$$(22) \quad \mathbf{Dn} = \delta \mathbf{n} + \mathbf{Wn}.$$

In pariete quieto igitur

$$(23) \quad \mathbf{Dn} = \delta \mathbf{n} - \frac{1}{2} w \mathbf{f}.$$

At cum sit

$$(24) \quad \mathbf{Dn} = D_{11} \mathbf{n} + D_{12} \mathbf{e} + D_{13} \mathbf{f},$$

sequitur esse $D_{11} = \delta$, $D_{12} = D_{21} = 0$, $D_{13} = D_{31} = -\frac{1}{2} w$. Quoniam autem tractus secundum omnia in plano versori $\mathbf{n}$ normali directa nulli, $D_{22} = D_{23} = D_{33} = 0$, ut eveniat

$$(25) \quad \begin{aligned} \mathbf{D} &= \delta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{2} w (\mathbf{n} \otimes \mathbf{f} + \mathbf{f} \otimes \mathbf{n}), \\ &= \delta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes (\mathbf{Wn}) + (\mathbf{Wn}) \otimes \mathbf{n}, \end{aligned}$$

quod theorema elegans primus dedit D. BRUTUS CASWELLIUS ⁽⁹⁾, cuius demonstratio in transformatione KELVINII fundata est.

ut eveniat

$$\text{grad } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

et

$$\mathbf{We} = 0, \quad |\mathbf{e}| = 1.$$

⁽⁷⁾ V. ex. gr. Aeq. (76.6) tractatus nostri de theoriis classicis camporum. Aeq. (22) primum a D^o. RATIB BERKER inventa est, qui eam auxilio transformationis KELVINII deduxit. V. schedulam eius «*Sur certaines propriétés de l'effort qui s'exerce sur une parois en contact avec un fluide visqueux*», C.R. Acad. Sci. Paris **232**, 148-149 (1951).

⁽⁸⁾ Superficies in motu fluidi «materialis» denominatur, si particula fluidi in ea superficie reperitur aut semper aut numquam.

⁽⁹⁾ V. eius commentarium, «*Kinematics and stress on a surface of rest*», Arch. Rational Mech. Anal. **26**, 385-399 (1967).

Ex Aeq. (25) perspicitur versorem $\mathbf{n}$ superficiei parallelum directioni principali tensoris $\mathbf{D}$ numquam dirigi posse, nisi sit $w = 0$. Calculo facili inveniuntur tractus principales D_i :

$$(26) \quad \begin{aligned} 2D_1 &= \delta + \sqrt{\delta^2 + w^2} \geq 0, \\ D_2 &= D_{(e)} = 0, \\ 2D_3 &= \delta - \sqrt{\delta^2 + w^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Insuper est $\mathbf{D}\mathbf{e} = 0$; axis igitur circumactuum simul axis principalis tractuum, et insuper illa quidem axis secundum quam evanescit tractus. Angulus φ inter versorem $\mathbf{n}$ superficiei et directionem in quam tractus maximus fit, ex aequatione

$$(27) \quad \tan 2\varphi = \frac{w}{\delta}$$

petendus est. Quare

$$(28) \quad \begin{aligned} \varphi &= 0 \quad \text{si } w = 0, \quad \delta > 0; \\ 0 < \varphi < \frac{1}{4}\pi &\quad \text{si } w \neq 0, \quad \delta > 0; \\ \varphi &= \frac{1}{4}\pi \quad \text{si } w \neq 0, \quad \delta = 0; \\ \frac{1}{4}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi &\quad \text{si } w \neq 0, \quad \delta < 0; \\ \varphi &= \frac{1}{2}\pi \quad \text{si } w = 0, \quad \delta < 0. \end{aligned}$$

Numerum vorticalem $\mathfrak{W}$, qui definitione

$$(29) \quad \begin{aligned} \mathfrak{W} &\equiv \frac{|\mathbf{W}|}{|\mathbf{D}|} = \sqrt{\frac{\text{tr } \mathbf{W}\mathbf{W}^T}{\text{tr } \mathbf{D}\mathbf{D}^T}} = \sqrt{\frac{-\text{tr } \mathbf{W}^2}{\text{tr } \mathbf{D}^2}}, \\ &= \frac{w}{\sqrt{2\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}}} \end{aligned}$$

introducitur, calculus facilis prodit:

$$(30) \quad \mathfrak{W} = \frac{w}{\sqrt{w^2 + 2\delta^2}}.$$

Quam ob rem in puncto parietis quieti

$$(31) \quad \mathfrak{W} < 1$$

nisi motus ibi isochoricus sit, at in motu isochorico semper et ubique in pariete quieto

$$(32) \quad \mathfrak{W} = 1$$

nisi sit $w = 0$.

5. - Applicatio numeri tractilis in puncto parietis quieti.

Ut in paragrapho superiori vidimus, versor $\mathbf{n}$ superficiei in quiete in directionem principalem tractus non cadat nisi ibi sit $w = 0$. Cum in motu fluidi viscosi directiones principales conatus eadem ac illae tractus sint, et cum directio tractus maximi eadem ac directio pressionis minimae sit, sequitur

THEOREMA. - *In puncto parietis quieti in motu fluidi viscosi pressio normalis in superficie semper maior est pressionibus, quas patiuntur aliqua elementa superficiei obliqua, nisi casu $w = 0$.*

Si $\mathfrak{C} < 1$, pressio in superficie sane affirmativa, sed ex theoremate sequitur hanc pressionem etiam si sit $\mathfrak{C} \geq 1$ affirmativam evenire posse. Si pressio negativa ut indicium separationis tenenda est, videtur fluidum in puncto parietis ubi modo $\mathfrak{C} = 1$ plus a se quam a pariete abscedere conari.

Angulus θ quem prodit Aeq. (27) fit in motu fluidi viscosi angulus inter versorem $\mathbf{n}$ parietis et versorem elementi quod pressionem normalem minimam patitur. Ex Inaeq. (28) colligitur inter alia illum angulum in motu dilatandi angulum semirectum superare non quire. Si modo dilatatio praemagna, erit $\varphi = 0$ quam proxime, id est, in expansione vehementi erit $p_{(n)} \approx p_{\min}$, quae conjunctio ex Aeq. (36) quoque percipitur.

Ut haec omnia clarius perspiciantur, opus est formulas quasdam consignare, quae se statim ex rebus supra traditis offeruntur. Ex Aeqq. (6) et (22) sequitur theorema elegans amici illustris RATIB BERKER ⁽¹⁰⁾ de tractione $\mathbf{t}$ quae ad parietem quietum adnititur:

$$(33) \quad \mathbf{t} = [-p + (\lambda + 2\mu)\delta]\mathbf{n} - \mu w \mathbf{f},$$

quam ob rem pressio normalis $p_{(n)}$ sequenti formula datur:

$$(34) \quad p_{(n)} = p - (\lambda + 2\mu)\delta.$$

Pressio autem normalis minima ex superioribus Aeqq. (8) et (26) invenitur

$$(35) \quad p_{\min} = p - \lambda\delta - \mu(\delta + \sqrt{\delta^2 + w^2}).$$

⁽¹⁰⁾ *Op. cit.* in Adnotatione 7.

Hinc

$$(36) \quad p_{(n)} - p_{\min} = \mu[\sqrt{\delta^2 + w^2} - \delta],$$

quae differentia semper affirmativa est, nisi $w = 0$. Condicio igitur $\mathcal{T}e > 0$ abunde sufficit, ut in superficie quieta pressio negativa non detur.

Vulgo scitur ex Inaeqq. (2)_{2,3} sequi inaequalitatem $\lambda + 2\mu > 0$. Quam ob rem ex Aeq. (34) colligitur esse

$$(37) \quad p_{(n)} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} p \quad \text{si} \quad \delta \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0.$$

Ergo, $p_{\min} < p$ si $\delta > 0$, id est, in motu dilatandi. Quaeretur autem si pressio normalis minima semper infra pressionem staticam jacere debeat etiam in motu astringendi. Ex Aeqq. (35) et (4) reperitur esse

$$(38) \quad \frac{3(p - p_{\min})}{\mu} = (2\mathcal{B} + 1)\delta + 3\sqrt{\delta^2 + w^2}.$$

Analysis facilis, quam tuto lectori relinqui licet, prodit

THEOREMA. - *In puncto parietis quieti, posita vorticitate $w \neq 0$, erit semper*

$$(39) \quad p_{\min} < p \quad \text{si aut} \quad \delta \geq 0 \quad \text{aut} \quad \mathcal{B} \leq 1.$$

Si autem $\mathcal{B} > 1$ et $\delta < 0$, erit

$$(40) \quad p_{\min} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} p \quad \text{si} \quad -\delta \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \frac{3w}{2\sqrt{(\mathcal{B} - 1)(\mathcal{B} + 2)}}.$$

Pressio statica p igitur ad indicium pressionum normalium verarum longe non sufficit. In motu dilatandi fluidi cuiuscunque et in omni motu fluidi in quo $\mathcal{B} \leq 1$, elementa dantur in puncto parietis quae pressiones normales pressione statica minores patiuntur; ex contrario si $\mathcal{B} > 1$, in motu astringendi satis vehementi, omne elementum in pariete pressionem normalem patitur, quae pressionem staticam superat.

In puncto parietis auxilio Aeqq. (26) formae simpliciores numerorum $\mathcal{T}e$ et $\mathcal{T}r$ Aeqq. (9) et (13) definitorum reperiuntur:

$$(41) \quad \mathcal{T}e = \frac{\mu}{p} \left[\frac{1}{3} (1 + 2\mathcal{B})\delta + \sqrt{\delta^2 + w^2} \right],$$

$$\mathcal{T}r = \frac{\mu}{p} \sqrt{2\delta^2 + w^2}.$$

Plane

$$(42) \quad \mathfrak{T}e \leq \left(1 + \frac{1 + 2\mathfrak{B}}{3\sqrt{2}}\right) \mathfrak{T}r.$$

6. - Numerus tractilis in motu fluidi nullius compressionis capacis.

Si fluidum nullius compressionis capax, non solum $\delta = 0$ set etiam pressio statica p statu cinematico fluidi non determinatur, at potius variabilis soluta manet. In aequationibus differentialibus pressio constans quaevis (aut functio solius temporis) p_0 omni solutioni adjungi potest, ad quam determinandam opus est (ex. gr.) pressionem staticam in aliquo puncto assignare. Ex Aeq. (7) patefit pressio normalis quam patitur elementum superficiei cuius versor $\mathbf{n}$:

$$(43) \quad p_{(n)} = p - 2\mu D_{(n)}.$$

Quia in motu isochorico et non rigido $D_1 > 0$,

$$(44) \quad \min p_{(n)} < p.$$

Ergo, ut omnis pressio normalis nonnegativa sit, *necesse est pressionem staticam affirmativam esse*,

$$p > 0,$$

motu rigido seposito.

His intellectis, possumus ut ante progredi et, Aeq. (13) revisa, numerum tractilem formula definire, quae in motu isochorico gasi valet, id est

$$(46) \quad \mathfrak{T}e \equiv \frac{2\mu D_1}{p}.$$

Ex analysi supra tradita colligitur

THEOREMA. - *Ut in motu nonrigido fluidi viscosi nullius compressionis capacis nullum elementum superficiei pressionem normalem negativam sustineat, necesse est et sufficit esse*

$$(47) \quad p > 0, \quad \mathfrak{T}e < 1.$$

Calculo facili invenitur limes

$$(48) \quad \mathfrak{T}e \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \mathfrak{T}r,$$

ubi aequalitas valet si $D_2 = D_3 = -\frac{1}{2}D_1$, ubi iam ex Aeqq. (18) et (19) in casu gasi modo STOKESIANO obtemperantis videtur.

In puncto parietis quieto ex Aeqq. (26) elicitur ut sint

$$(49) \quad D_1 = \frac{1}{2}w, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = -\frac{1}{2}w;$$

ex Aeq. (32)

$$(50) \quad \mathfrak{W} = 1;$$

ex Aeqq. (36) et (38)

$$(51) \quad p_{(n)} - p_{\min} = p - p_{\min} = \mu w;$$

ex Aeqq. (41)

$$(52) \quad \mathfrak{T}e = \mathfrak{T}r = \frac{\mu w}{p} = \frac{p_{(n)} - p_{\min}}{p};$$

ex Aeq. (27)

$$(53) \quad \varphi = \frac{1}{4}\pi.$$

7. - De pressionibus negativis in regione.

Adhuc de puncto uno solo tractatum est. In regione quam fluidum movens implet, numerus tractilis $\mathfrak{T}e$ campus scalaris fit. In regione clausa assumit hic campus in aliquo puncto valorem maximum $\mathfrak{T}e_{\max}$. Ut pressiones negativae in tota regione desint, necesse est et sufficit limes

$$(54) \quad \mathfrak{T}e_{\max} < 1.$$

Difficilia inventu et demonstratu erunt theoremata generalia quae punctum locent ubi valor maximus praesit. Theoremata talia vere de pressione statica p cognoscuntur, quae in casibus generalioribus praestant ut locus pressionis minimae alicubi in finibus semper reperiendus sit ⁽¹¹⁾. Habitus autem autovalorum D_i in regione non adhuc indagatus esse videtur.

⁽¹¹⁾ Theoremata huiusmodi generalissima demonstravi in commentatione « *Two measures of vorticity* », J. Rational Mech. Anal. **2**, 173-217 (1953). V. Corollarium Theorematis 8. Ex. gr., si in regione aperta a fluido viscoso nullius compressionis capaci impleta sit $\mathfrak{W} \leq 1$, pressio statica p minima non datur.

Pro fluidis nullius compressionis capacibus tamen observatio simplicior notanda est. Secundum theoriam differentia $p - p_0$, ubi p_0 functionem solius temporis t denotat, ex campo velocitatum determinatur, qui finibus datis et velocitatibus incohantibus datis convenit, sed postea quantitas p_0 libera electu manet. Sit igitur una cum determinatione pressionis p staticae valor maximus numeri tractilis in data regione clausa $\mathfrak{T}e_{\max}^{(1)}$. Si pressioni p constans p_0 adjuncta erit, ut vere de supra dictis licet, invenietur ex Aeq. (52) de numero tractili $\mathfrak{T}e$, qui novae solutioni convenit,

$$(55) \quad \mathfrak{T}e = \frac{2\mu D_1}{p} \cdot \frac{p}{p + p_0},$$

$$\leq \mathfrak{T}e_{\max} \cdot \frac{1}{1 + p_0/p_{\max}},$$

ubi $p_{\max}$ valorem maximum pressionis staticae in solutione anteriori denotet. Ut in nova solutione, ex anteriori adjunctione constantis pressionis p_0 orta, pressionibus normales negativae desint, sufficit eligere talem p_0 ut sit

$$(56) \quad \frac{p_0}{p_{\max}} > \mathfrak{T}e_{\max} - 1.$$

Haec ratio prodit

THEOREMA. – *Data solutione equationum Navier-Stokesianarum in regione clausa, semper licet adjungere campo p pressionis staticae constantem p_0 talem ut eveniat solutio altera in qua pressionibus negativae desint.*

Indagationem, quem hic exposui, munere adjuvit U.S. National Science Foundation. Amico Prof. JAK. POULTNEY gratias ob consilia ago.

d. 1. ante Kal. Jan. 1970.