Su un caso particolare di stabilità in media della magnetoidrodinamica.

RENATO NARDINI (Modena) (*) (**)

A Bruno Finzi nel suo 70$^{\text{mo}}$ *compleanno.*

Sunto. - *Si considera un particolare fenomeno magnetoidrodinamico, che è una generalizzazione del problema di Couette per un liquido elettricamente conduttore in presenza di un opportuno campo magnetico e si dimostra che qualunque soluzione del problema dotata di una certa regolarità è stabile in media, ossia la somma delle energie cinetica e magnetica di una generica perturbazione è una funzione decrescente del tempo.*

1. - Introduzione.

Nella teoria della stabilità idrodinamica e, recentemente, della stabilità magnetoidrodinamica, è stata anzitutto studiata ampiamente la stabilità di vari casi di equilibrio e di particolari moti stazionari. Le ricerche più importanti a questo riguardo costituiscono già oggetto di monografie, [1] e [2], o di un capitolo di un trattato [3].

In una recente nota J. SERRIN [4], servendosi del noto metodo dell'energia, si è occupato di un generico moto non stazionario di un fluido viscoso incompressibile, con assegnata distribuzione di velocità sulla frontiera, dando condizioni sufficienti affinchè l'energia cinetica totale relativa a una generica perturbazione tenda a zero quando il tempo tende all'infinito, ossia affinchè detto moto risulti *asintoticamente stabile in media.*

Il lavoro di SERRIN, i cui principali risultati sono riportati anche nell'articolo dello stesso Autore nell'Encyclopedia of Physics [5], è stato ripreso sotto vari aspetti da altri Autori [6], [7], [8]; in seguito è stato esteso alla magnetoidrodinamica da S. RIONERO [9], il quale ha considerato un fluido omogeneo, viscoso, incompressibile, elettricamente conduttore, in moto in una regione $S(t)$ variabile col tempo t; partendo dalle equazioni della magnetoidrodinamica isoterma (in cui si trascura la corrente di spostamento) e assegnati sulla frontiera di S per $t \geq 0$ i campi cinetico $\boldsymbol{v}$ e magnetico $\boldsymbol{H}$, il RIONERO ha ricavato vari tipi di condizioni sufficienti affinchè l'energia ci-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Raggruppamenti di ricerca matematica del C.N.R

(**) Entrata in Redazione il 9 dicembre 1969.

netica e l'energia magnetica di una generica perturbazione tendano a zero per $t \to \infty$, ossia il fenomeno di partenza sia asintoticamente stabile in media. Detti risultati sono stati poi estesi al caso non isotermo [10]. In un successivo lavoro sull'argomento [11], il RIONERO ha trattato anche di problemi di *stabilità magnetoidrodinamica in media,* per cui nel caso isotermo basta dimostrare soltanto che la somma delle energie cinetica e magnetica di una generica perturbazione è una funzione decrescente del tempo.

Nella presente nota si considera un particolare fenomeno magnetoidrodinamico, che è una generalizzazione del problema di COUETTE in presenza di un campo magnetico [1], e si dimostra che qualunque soluzione del problema, dotata di una certa regolarità, è stabile in media.

2. - Formulazione del problema.

Il problema di COUETTE, com'è noto, consiste nello studio del moto laminare di un fluido omogeneo, viscoso, incompressibile che occupa la regione limitata da due piani paralleli, uno, che può essere assunto come piano cartesiano xy, mobile sulla sua giacitura con velocità assegnata $\boldsymbol{V}$, l'altro, fisso di equazione $z = L$.

Qui supporremo che il fluido sia elettricamente conduttore e soggetto a un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{H}_0$ parallelo all'asse z; per maggiore generalità supporremo che sia $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(t)$, con $\boldsymbol{V}(t)$ funzione continua del tempo.

Le equazioni che reggono il fenomeno sono

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\,\text{grad}\; p + \dfrac{\mu}{\rho}\,\text{rot}\;\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} + \nu\Delta_2 \boldsymbol{v} + \boldsymbol{F} \\[2ex] \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \text{rot}\;(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) + \eta\Delta_2 \boldsymbol{H} \\[2ex] \text{div}\;\boldsymbol{H} = 0, \qquad \text{div}\;\boldsymbol{v} = 0, \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità, $\boldsymbol{H}$ il campo magnetico, p la pressione, $\boldsymbol{F}$ la forza di massa di natura non elettromagnetica; le costanti ρ, μ, ν ed η rappresentano nell'ordine la massa specifica, la permeabilità magnetica, il coefficiente di viscosità cinematica e il coefficiente di diffusività magnetica.

In accordo con lo schema fisico del problema, ci limiteremo alle soluzioni dipendenti solo dal tempo e dalla coordinata z.

La (1_4) diventa allora $\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ e, poichè sui piani $z = 0$ e $z = L$ si deve

---

[1] Per l'estensione del problema di COUETTE alla magnetoidrodinamica si veda, ad es., [12].

avere $v_z = 0$, se ne deduce

$$v_z \equiv 0. \tag{2}$$

Essendo poi $\Delta_2 \boldsymbol{H} = - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$, da (1_2) si ha $\dfrac{\partial H_z}{\partial t} = 0$, mentre la (1_3) dà $\dfrac{\partial \boldsymbol{H}_z}{\partial z} = 0$ per cui è

$$H_z = H_0. \tag{3}$$

D'altra parte per la (2) è $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$.

Proiettando le (1_1) e (1_2) sugli assi x e y si ottiene allora

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v_i}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\mu H_0}{\rho} \frac{\partial H_i}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} + F_i \qquad (i = x,\ y), \tag{5}$$

mentre proiettando la (1_2) sull'asse z si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial z} (H_x^2 + H_y^2) + F_z, \tag{6}$$

che servirà a determinare la pressione quando sia stato ricavato il campo magnetico indotto.

Per completare la formulazione del problema occorrerà anzitutto specificare le condizioni al contorno, che consistono nell'imporre

$$v_i(t,\ 0) = V_i(t), \qquad v_i(t,\ L) = 0, \tag{7}$$

per la completa adesione del fluido sulla frontiera e

$$H_i(t,\ 0) = h_{1i}(t), \qquad H_i(t,\ L) = h_{2i}(t) \tag{8}$$

con h_{1i} e h_{2i} funzioni assegnate. Occorrerà infine assegnare i valori iniziali delle componenti v_i e H_i per ogni $0 \leq z \leq L$.

Dette condizioni iniziali e al contorno sono state formulate in base al teorema di unicità relativo alle soluzioni delle equazioni (1), (si veda [13]).

3. - Stabilità in media delle soluzioni.

Consideriamo ora una generica soluzione $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{v}$ del problema introdotto precedentemente, che sia continua assieme alle sue derivate parziali prime e con derivate seconde rispetto alla coordinata z che siano generalmente continue; diremo brevemente che detta soluzione è di classe $\tilde{C}_1$. Indichiamo poi con $\boldsymbol{H}_1$ e $\boldsymbol{v}_1$ un'altra soluzione del problema anch'essa di classe $\tilde{C}_1$ per la quale, mantenendo le stesse condizioni al contorno, si considerino invece condizioni iniziali diverse.

Posto

$$\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1, \qquad \boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1,$$

la differenza $\boldsymbol{H}^*$ e $\boldsymbol{v}^*$ fra le due soluzioni, parimenti di classe $\tilde{C}_1$, soddisfa alle equazioni (4) e (5), in cui si tolgano le componenti F_i, e alle condizioni al contorno

$$\begin{aligned} &(9) \qquad v_i^*(t,\ 0) = 0 \qquad v_i^*(t,\ L) = 0 \\ &(10) \qquad H_i^*(t,\ 0) = 0 \qquad H_i^*(t,\ L) = 0. \end{aligned} \qquad (i = x,\ y)$$

Moltiplicando ora ciascuna delle (4), pensate nelle H_i^* e v_i^*, per μH_i^* e ciascuna delle (5), nelle H_i^* e v_i^* e senza le F_i, per ρv_i^* e sommando si ottiene [2]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^{*2} + \frac{1}{2}\mu H^{*2}\right) = \mu H_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(v_i^* H_i^*\right) + \eta\mu \frac{\partial^2 H_i^*}{\partial z^2} H_i^* + \rho\nu \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial z^2} v_i^*.$$

Integrando fra 0 e L rispetto a z, ponendo

$$W = \frac{1}{2}\int_0^L (\rho v^{*2} + \mu H^{*2}) dz$$

e tenendo conto delle (9) e (10) si ottiene

$$\frac{dW}{dt} = \eta\mu \int_0^L \frac{\partial^2 H_i^*}{\partial z^2} H_i^* dz + \rho\nu \int_0^L \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial z^2} v_i^* dz;$$

integrando a secondo membro per parti e tenendo sempre presenti le (9) e (10) si ricava

$$\frac{dW}{dt} = -\eta\mu \int_0^L \Sigma_i \left(\frac{\partial H_i^*}{\partial z}\right)^2 dz - \rho\nu \int_0^L \Sigma_i \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial z}\right)^2 dz.$$

---

(2) Adottiamo la convenzione che la ripetizione dell'indice i sta a indicare la somma rispetto ai valori x e y assunti dall'indice stesso.

Osserviamo che H_i^* e v_i^* non possono essere tutte identicamenze nulle in quanto per ipotesi hanno valori iniziali non tutti nulli e quindi, per l'omogeneità delle condizioni al contorno, non possono essere tutte costanti per cui è

$$\frac{dW}{dt} < 0; \tag{11}$$

si conclude che la generica soluzione $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{v}$ di classe $\tilde{C}_1$ del problema ha energia totale (cinetica e magnetica) decrescente nel tempo ed è quindi stabile in media.

Per la validità del risultato è indispensabile che uno almeno dei due coefficienti dissipativi η e ν sia diverso da zero.

4. - Osservazioni.

1. - Giova rilevare che il risultato ottenuto precedentemente può sussistere anche se il liquido occupa tutto il semispazio $z \geq 0$: in questo caso si tratta dell'estensione alla magnetoidrodinamica del problema di RAYLEIGH [14], anche questo generalizzato, perchè la traslazione del piano $z = 0$, che costituisce l'unico contorno, anzichè essere rettilinea uniforme, avviene con velocità variabile nel tempo.

Le condizioni al contorno (7_2) e (8_2) potranno essere formulate così

$$\lim_{z \to +\infty} v_i(t, z) = 0, \qquad \lim_{z \to +\infty} H_i(t, z) = \Phi_i(t). \tag{12}$$ [3]

Naturalmente, oltre alle ipotesi introdotte precedentemente sulla regolarità delle soluzioni considerate, occorre aggiungere opportune condizioni di convergenza per $z \to +\infty$.

2. - Il teorema generale di unicità a cui si è fatto riferimento alla fine del § 2 può essere confermato immediatamente nel caso particolare in questione.

Se infatti v_i^* e H_i^* stanno ora a indicare la differenza fra due soluzioni del problema stesso che soddisfino anche alle medesime condizioni iniziali,

---

(3) Non è necessario che all'infinito le componenti H_i del campo magnetico siano infinitesime, ma basta che esse assumano all'infinito i valori $\Phi_i(t)$ con opportuno ordine numerico n, ossia esista un valore z_0 tale che per ogni $z > z_0$ sia

$$|H_i(t, z) - \Phi_i(t)| < \frac{M}{(z - z_0)^n} \qquad (M \text{ costante positiva});$$

il valore di n va precisato nell'ambito delle condizioni di convergenza all'infinito a cui si fa riferimento più avanti.

la (11) va sostituita da

$$\frac{dW}{dt} \leq 0$$

e, poichè all'istante iniziale è ora $W = 0$, se ne deduce che la quantità non negativa W deve essere identicamente nulla, cioè si ha

$$v_i^* \equiv 0 \quad \text{e} \quad H_i^* \equiv 0.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] C. C. LIN, *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, 1955.

[2] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford at the Clarendon Press, 1961.

[3] C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, Monogr. Matem. del C.N.R. n. 14, Roma, 1966, Cap. V.

[4] J. SERRIN, *On the Stability of Viscous Fluid Motion*, Arch. Rat. Mech. Anal. **3** (1959), pp. 1-13.

[5] — —, *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, in «Handbuch der Physik», Vol. VIII/1, pp. 253-258, Springer, Berlin, 1959.

[6] W. VELTE, *Über ein Stabilitätskriterium der Hydrodynamik*, Arch. Rat. Mech. Anal. **9** (1962), pp. 9-20.

[7] L. E. PAYNE, H. F. WEINBERGER, *An exact stability bound for Navier-Stokes flow in a sphere*, in *Nonlinear Problems*, Univ. of Wisconsin, 1963.

[8] D. D. JOSEPH, *On the Stability of the Boussinesq Equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **20** (1965), pp. 59-71; *Nonlinear Stability of the Boussinesq Equations by the Method of Energy*, id. **22** (1966), pp. 163-184.

[9] S. RIONERO, *Sulla stabilità asintotica in media in magnetoidrodinamica*, Ann. Mat. pura appl. (4) **76** (1967), pp. 75-92.

[10] — —, *Sulla stabilità asintotica in media in magnetoidrodinamica non isoterma*, Ricerche di Mat. **16** (1967), pp. 250-263. Ricordiamo anche, dello stesso Autore, *Metodi variazionali per la stabilità asintotica in media in magnetoidrodinamica*, Ann. Mat. pura appl. (4) **78** (1968), pp. 339-364, col corrispondente caso non isotermo in Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **35** (1968).

[11] — —, *Sulla stabilità magnetoidrodinamica in media con vari tipi di condizioni al contorno*, Ricerche di Mat. **16** (1968), pp. 64-78.

[12] A. JEFFREY, *Magnetohydrodinamics*, Oliver and Boyd, Edimburgh, 1966, § 20.

[13] R. NARDINI, *Due teoremi di unicità nella teoria delle onde magnetoidrodinamiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **21** (1952), pp. 303-315.

[14] Si veda, ad es., loc. cit. in [3], pp. 64-67.