Sull'influenza del campo magnetico terrestre nei fenomeni d'interazione fra onde elettromagnetiche.

MARZIANO MARZIANI (Ferrara) (*)

Sunto. - *Proseguendo una sua precedente ricerca, l'Autore stabilisce il legame non lineare di tipo ereditario fra i vettori densità di corrente e campo elettrico in un mezzo ionizzato soggetto all'azione di un campo magnetico costante. Servendosi di tale legame, studia poi gli effetti del campo magnetico terrestre sulla interazione ionosferica fra radio-onde (fenomeno della girointerazione, dipendenza della cross-modulation dalle condizioni di propagazione delle onde interagenti, ecc.).*

1. - In una nota recente [1] (1) è stato stabilito il legame non lineare di tipo ereditario esistente nella ionosfera fra il vettore densità di corrente $\boldsymbol{J}$ e il vettore campo elettrico $\boldsymbol{E}$ (quest'ultimo variabile col tempo t con legge qualsiasi). Tale legame, quando si trascuri l'azione del campo magnetico terrestre e si supponga sufficientemente debole il campo elettrico, è rappresentato dalla formula:

$$\boldsymbol{J}(t) = \int_0^t \alpha(t-\tau)\boldsymbol{E}(\tau)d\tau + \tag{1}$$

$$+ \int_0^t\int_0^t\int_0^t \gamma(t-\tau_1,\ t-\tau_2,\ t-\tau_3)\boldsymbol{E}(\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

α e γ essendo due certe omografie vettoriali rispettivamente del primo e del terzo ordine. Questa formula consente di scrivere per il campo elettromagnetico nella ionosfera equazioni generali capaci d'interpretare taluni aspetti dell'interazione fra radio-onde e in particolare di fornire le leggi dei fenomeni di cross- e self-modulation già ottenute, nelle stesse ipotesi, dalla teoria «elementare». Nell'ambito di tale teoria V. A. BAILEY [2] ha d'altronde posto in evidenza certi effetti che il campo magnetico terrestre può avere nei fenomeni in questione. Tali effetti, che consistono principalmente in una sorta di risonanza della profondità di cross-modulation quando la frequenza dell'onda perturbatrice è prossima alla girofrequenza locale (*fenomeno della gi-*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Entrata in Redazione il 10 settembre 1968.

(1) I numeri in [ ] si riferiscono alla bibliografia finale.

rointerazione o effetto Lussemburgo con risonanza) sono stati confermati dalle ricerche sperimentali di vari Autori (M. CUTOLO [3], L. G. H. HUXLEY [4], V. A. BAILEY [5] e rispettivi collaboratori) (2). Conseguentemente è naturale chiedersi come si modifichi il legame funzionale (1) quando si tenga conto dell'influenza esercitata dal campo magnetico terrestre. Per rispondere conviene riprendere l'impostazione della nota precedente, fondata sulla teoria «cinetica» dei plasma, e, con una semplice trasformazione (che peraltro non mi sembra sia stata ancora usata a tale scopo) ricondurre le equazioni del problema attuale alle equazioni del problema trattato in [1]. In questo modo, ottenuta la distribuzione approssimata delle velocità degli elettroni, è possibile provare che nella propagazione ionosferica di onde elettromagnetiche in presenza di un campo magnetico costante $\boldsymbol{H}_0$ (quale il campo magnetico terrestre), il legame fra il vettore densità di corrente $\boldsymbol{J}$ e il vettore campo elettrico $\boldsymbol{E}$ è ancora espresso dalla (1) ove si attribuiscano ad α e a γ le espressioni dipendenti da $\boldsymbol{H}_0$:

$$\alpha(s) = \frac{e^2 N}{m} e^{-\nu_0 s} \mathrm{K}\beta(s) \tag{2}$$

$$\gamma(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{3!} \Sigma\, \mathrm{K}_\pi \mu^* [\pi(s_1, s_2, s_3)] \tag{3}$$

$$s = t - \tau, \qquad s_i = t - \tau_i \qquad\qquad i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

con

$N =$ concentrazione degli elettroni

$e, m =$ carica, massa dell'elettrone

$\nu_0 =$ frequenza effettiva di collisione fra elettrone e molecole neutre in assenza di campo elettrico

e dove β è l'omografia vettoriale del primo ordine (3) definita da:

$$\beta(t) = \cos \omega_H t + (1 - \cos \omega_H t)\mathcal{H}(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{k}_0) + \operatorname{sen} \omega_H t\, \boldsymbol{k}_0 \times \tag{5}$$

con

$\omega_H = \dfrac{e}{mc} H_0 =$ girofrequenza angolare

(2) Riguardo più recenti sviluppi della teoria di tali effetti si vedano ad esempio: V. L. GINZBURG e A. V. GUREVICH [6], V. A. BAILEY [7]; D. BASU, R. JANCEL e T. KAHAN [8].

(3) Si usano in questa nota la terminologia e le notazioni di C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO [9]. In particolare si denota con $\mathrm{K}\beta$ l'omografia coniugata dell'omografia vettoriale β ($\mathrm{K}\beta \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \beta \boldsymbol{b}$) e con $\mathcal{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ la diade caratterizzata dai due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ ($\mathcal{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$).

$c =$ velocità della luce nel vuoto

$\boldsymbol{k}_0 = \text{vers}\, \boldsymbol{H}_0$

e K_π è l'operatore che soddisfa alla condizione (4):

$$K_\pi \mu^* \boldsymbol{E}(\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_3) = \mu^* \pi[\boldsymbol{E}(\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_3)] \tag{6}$$

con

$\pi =$ sostituzione generica fra gli indici 1, 2, 3

$\pi[\boldsymbol{E}(\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_3)]$, $\pi(\tau_1, \tau_2, \tau_3) =$ stessi vettori $\boldsymbol{E}(\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_3$ e stesse variabili τ_1, τ_2, τ_3 nell'ordine che risulta applicando agli indici la sostituzione π

e μ^* è l'omografia vettoriale del terzo ordine definita da:

$$\mu^*(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 3\Gamma_{123} K\beta(t - \tau_3)\mu(\tau_2 - \tau_1) \tag{7}$$

con

$$\Gamma_{ijk} = \nu_0 g(s_i, s_j) \frac{\partial e^{-\nu_0 s_k}}{\partial \nu_0} \qquad i \neq j \neq k \tag{8}$$

come in [1] (5) e μ omografia del terzo ordine definita da:

$$K\beta(t)\boldsymbol{u} \cdot = \mu(t)\boldsymbol{u} \tag{9}$$

con

$\boldsymbol{u} =$ vettore generico.

Il legame ereditario (1) estende quello lineare proposto dalla ordinaria teoria dei plasma magnetoattivi omogenei (6). La sua applicazione allo studio

(4) Sugli operatori di questo tipo cfr. C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO [10] p. 44.

(5) Ricordiamo che in [1] si è posto

$$g(s_i, s_j) = g(s_j, s_i) =$$
$$= \frac{e^4 N}{18 m^2 k T} \{ e^{-\nu_0[(\delta-1)s_i + s_j]} \mathbb{1}(s_j - s_i) + e^{-\nu_0[(\delta-1)s_j + s_i]} \mathbb{1}(s_i - s_j) \}$$

con

$k =$ costante di BOLTZMANN

$T =$ temperatura assoluta delle molecole neutre

$\delta =$ frazione media di energia trasferita da un elettrone nella collisione con una molecola

$\mathbb{1}(s) =$ funzione di HEAVISIDE.

(6) Per quest'ultimo legame, nel caso che $\boldsymbol{E}$ dipenda dal tempo con legge qualsiasi, cfr. ad es. A. M. CONFETTA [11].

della propagazione ionosferica delle radio-onde spiega taluni effetti del campo magnetico terrestre nei fenomeni d'interazione. In particolare mostra come questi effetti siano trascurabili quando le frequenze delle onde interagenti sono elevate nei confronti della girofrequenza. In questo caso il fenomeno della cross-modulation segue le leggi menzionate in [1]. Per frequenze più basse, invece, tali leggi in generale si modificano. In questo caso infatti la profondità di cross-modulation dipende in modo essenziale sia dal carattere di polarizzazione dell'onda ricercata sia dalla doppia rifrazione connessa con l'anisotropia del mezzo. È appunto nel caso di propagazione longitudinale (cioè col campo magnetico terrestre parallelo alla normale) che l'onda straordinaria provoca, in prossimità della girofrequenza, la risonanza della cross-modulation (fenomeno della girointerazione) cui abbiamo accennato all'inizio.

2. - Identificato il mezzo ionosferico con un plasma imperfettamente lorentziano ed omogeneo, reso anisotropo dalla presenza del campo magnetico costante $\boldsymbol{H}_0$ (plasma magnetoattivo), si consideri la funzione di distribuzione $f = f(\boldsymbol{v}, t)$ delle velocità $\boldsymbol{v}$ dei suoi elettroni nel caso che sul plasma agisca, oltre ad $\boldsymbol{H}_0$, un campo elettrico $\boldsymbol{E}(t)$ uniforme ed abbastanza debole, nullo per $t \leq 0$ e variabile con legge qualsiasi per $t > 0$ (7).

Mediante la solita posizione:

$$f(\boldsymbol{v}, t) = f_0(v, t) + \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_1(v, t)}{v} \tag{10}$$

(v = modulo di $\boldsymbol{v}$) l'equazione di BOLTZMANN

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{m}\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}_0\right) \cdot \nabla_v f + S = 0 \tag{11}$$

(ove $\nabla_v f$ = gradiente di f nello spazio delle velocità, S = integrale delle collisioni e ove gli altri simboli hanno il significato loro attribuito in precedenza), fornisce il seguente sistema approssimato (8):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_0}{\partial t} + \dfrac{e}{3mv^2}\dfrac{\partial}{\partial v}(v^2 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{f}_1) + S_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial t} + \dfrac{e}{m}\dfrac{\partial f_0}{\partial v}\boldsymbol{E} + \dfrac{e}{mc}\boldsymbol{H}_0 \times \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{S}_1 = 0 \end{array}\right. \tag{12}$$

(7) Al solito il campo magnetico variabile della radiazione può venir trascurato.

(8) Cfr. V. L. GINZBURG [12] p. 753.

in cui S_0 e $\boldsymbol{S}_1$ sono espressi con sufficiente approssimazione da

$$(13) \qquad \begin{aligned} S_0 &= -\frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\delta\nu\left[\frac{kT}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + vf_0\right]\right\} \\ \boldsymbol{S}_1 &= \nu \boldsymbol{f}_1 \end{aligned}$$

$\nu = \nu(v)$ essendo il numero di collisioni per secondo fra elettrone e molecole, e $\delta = 2m/m^*$ (m^* = massa della molecola) la frazione media di energia trasferita da un elettrone nella collisione (elastica) con una molecola, T la temperatura assoluta delle molecole (9).

Ciò premesso, si consideri l'omografia vettoriale β (isomeria) definita dalla (5). Poichè tale omografia soddisfa all'equazione (10):

$$(13') \qquad \frac{\partial\beta}{\partial t} = \beta\omega_H(\boldsymbol{k}_0 \times),$$

la sua applicazione alla (12_2) fornisce:

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\beta\boldsymbol{f}_1) + \frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}(\beta\boldsymbol{E}) + \nu(\beta\boldsymbol{f}_1) = 0.$$

D'altra parte, essendo β una isomeria (e conseguentemente $\beta\boldsymbol{E}\cdot\beta\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{f}_1$), la (12_1) può scriversi nella forma

$$(15) \qquad \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{e}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v}[v^2(\beta\boldsymbol{E})\cdot(\beta\boldsymbol{f}_1)] + S_0 = 0.$$

Come si vede, le equazioni (14) e (15) sono formalmente identiche alle equazioni (10) della nota [1] relative al caso $\boldsymbol{H}_0 = 0$, bastando infatti sostituire in queste ultime $\beta\boldsymbol{E}$ ad $\boldsymbol{E}$ e $\beta\boldsymbol{f}_1$ a $\boldsymbol{f}_1$ lasciando inalterata f_0 per ottenere le prime. Ciò consente di sfruttare nel caso in esame (vale a dire in presenza del campo magnetico costante $\boldsymbol{H}_0$) alcuni dei risultati stabiliti in [1]. In particolare, mediante le approssimazioni introdotte in tale nota e le sostituzioni ora indicate, dalla (18_1) di [1] si ha, per la prima approssimazione $\boldsymbol{f}_{11}$ della parte anisotropa della funzione di distribuzione, l'equazione:

$$(16) \qquad \beta\boldsymbol{f}_{11} = -\frac{e}{m}\frac{\partial f_{00}}{\partial v}\int_0^t e^{-\nu_0(t-\tau)}\beta(\tau)\boldsymbol{E}(\tau)d\tau$$

(9) La condizione di normalizzazione $\int f(\boldsymbol{v}, t)d\boldsymbol{v} = N$ (N = concentrazione degli elettroni ionosferici), che va associata alla (11), è soddisfatta in conseguenza di (12_1) e di (13_1) e del fatto che essa sussiste per $t = 0$.

(10) La verifica di tale affermazione non presenta difficoltà. Al riguardo cfr. anche [9] p. 131 Es. 4. Ivi è pure dimostrato che l'omografia vettoriale (5) è un'isomeria.

(ν_0 = frequenza effettiva delle collisioni fra elettrone e molecole quando la temperatura assoluta degli elettroni uguaglia la temperatura T delle molecole; f_{00} = funzione di distribuzione maxwelliana

$$f_{00} = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}).$$

Essendo β un'isomeria, è $\beta^{-1} = \mathrm{K}\beta$ e inoltre si ha ([11]):

$$\mathrm{K}\beta(t)\beta(\tau) = \mathrm{K}\beta(t-\tau)$$

così che la (16) fornisce:

$$f_{11} = -\frac{e}{m}\frac{\partial f_{00}}{\partial v}\int_0^t e^{-\nu_0(t-\tau)}\mathrm{K}\beta(t-\tau)\boldsymbol{E}(\tau)d\tau. \tag{17}$$

Analogamente, dalla (20) di [1] si trae per la frequenza effettiva di collisione fra elettrone e molecole corrispondente alla temperatura T_e degli elettroni il valore

$$\nu_e - \nu_0 = \frac{3m\nu_0}{e^2N}\int_0^t\int_0^t g(t-\tau_1,\ t-\tau_2)\beta(\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_1)\cdot\beta(\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = \tag{18}$$

$$= \frac{3m\nu_0}{e^2N}\int_0^t\int_0^t g(t-\tau_1,\ t-\tau_2)\mathrm{K}\beta(\tau_2-\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_1)\cdot\boldsymbol{E}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

con

$$g(s_1,\ s_2) =$$

$$= \frac{e^4N}{18m^2kT}\{e^{-\nu_0[(\delta-1)s_1+s_2]}\mathbb{1}(s_2-s_1) + e^{-\nu_0[(\delta-1)s_2+s_1]}\mathbb{1}(s_1-s_2)\}$$

($\mathbb{1}(s)$ = funzione di HEAVISIDE: $\mathbb{1}(s) = 0$ per $s \leq 0$, $\mathbb{1}(s) = 1$ per $s > 0$).

([11]) Le derivate parziali prime rispetto a t e rispetto a τ di $\mathrm{K}\beta(t)\beta(\tau)$, in conseguenza di (13'), valgono rispettivamente:

$$-\mathrm{K}\beta(t)\omega_H(\boldsymbol{k}_0\times)\beta(\tau), \qquad \mathrm{K}\beta(t)\beta(\tau)\omega_H(\boldsymbol{k}_0\times).$$

Poichè tali derivate sono una l'opposta dell'altra, $\mathrm{K}\beta(t)\beta(\tau)$ è funzione solo della differenza $t-\tau$; si ha cioè $\mathrm{K}\beta(t)\beta(\tau) = \lambda(t-\tau)$. In particolare, per $\tau = 0$ risulta $\mathrm{K}\beta(t) = \lambda(t)$ e, pertanto, qualunque siano t e τ, è $\mathrm{K}\beta(t)\beta(\tau) = \mathrm{K}\beta(t-\tau)$.

Considerando poi la successiva approssimazione della parte anisotropa della distribuzione, dalla (21) di [1], per quanto fu detto in tale nota, si ha:

$$\beta \boldsymbol{f}_1 = -\frac{e}{m}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{00}}{\partial v}\int_0^t e^{-\nu_0(t-\tau)}\beta(\tau)\boldsymbol{E}(\tau)d\tau - (\nu_0 - \nu_e)\frac{\partial(\beta \boldsymbol{f}_{11})}{\partial \nu_0} + \dots$$

dove i puntini denotano termini privi d'interesse ai fini che ci proponiamo. A meno di tali termini si ottiene così come in [1]

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_{11} - (\nu_0 - \nu_e)\frac{\partial \boldsymbol{f}_{11}}{\partial \nu_0} \tag{19}$$

con $\boldsymbol{f}_{11}$ e $(\nu_0 - \nu_e)$ espressi rispettivamente da (17) e (18).

La densità di corrente risulta allora:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}(t) &= \frac{4\pi}{3}e\int_0^{+\infty} v^3 \boldsymbol{f}_1 dv = \\ &= \frac{e^2N}{m}\int_0^t e^{-\nu_0(t-\tau)}\mathrm{K}\beta(t-\tau)\boldsymbol{E}(\tau)d\tau + \\ &+ 3\nu_0\int_0^t\int_0^t\int_0^t g(t-\tau_1, t-\tau_2)\frac{\partial e^{-\nu_0(t-\tau_3)}}{\partial \nu_0}[\mathrm{K}\beta(\tau_2-\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_1)\cdot\boldsymbol{E}(\tau_2)]\mathrm{K}\beta(t-\tau_3)\boldsymbol{E}(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 .\end{aligned}$$

A questo punto si può osservare che l'omografia del secondo ordine $\mathrm{K}\beta(\tau_2-\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_1)$. è funzione lineare del generico vettore $\boldsymbol{E}(\tau_1)$ e pertanto ([12]) esiste una e una sola omografia del terzo ordine $\mu(\tau_2-\tau_1)$ tale che

$$\mathrm{K}\beta(\tau_2-\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_1)\,\cdot = \mu(\tau_2-\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_1)$$

qualunque sia il vettore $\boldsymbol{E}$. In conseguenza di ciò la $\boldsymbol{J}(t)$ diventa:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}(t) &= \frac{e^2N}{m}\int_0^t e^{-\nu_0(t-\tau)}\mathrm{K}\beta(t-\tau)\boldsymbol{E}(\tau)d\tau + \\ &+ 3\nu_0\int_0^t\int_0^t\int_0^t g(t-\tau_1,\ t-\tau_2)\frac{\partial e^{-\nu_0(t-\tau_3)}}{\partial \nu_0}\mathrm{K}\beta' t-\tau_3)\mu(\tau_2-\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 .\end{aligned}$$

([12]) Cfr. C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO [9] p. 28.

e quindi con le posizioni (7) e (8):

$$J(t) = \frac{e^2N}{m}\int_0^t e^{-\nu_0(t-\tau)}K\beta(t-\tau)E(\tau)d\tau + \tag{20}$$

$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t \mu^*[\pi(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)]\pi[E(\tau_1)E(\tau_2)E(\tau_3)]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

π essendo una sostituzione qualunque fra gli indici 1, 2, 3 e $\pi[E(\tau_1)E(\tau_2)E(\tau_3)]$, $\pi(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)$ gli stessi vettori $E(\tau_1)E(\tau_2)E(\tau_3)$ e le stesse variabili τ_1, τ_2, τ_3 disposte nell'ordine che risulta dalla sostituzione π applicata agli indici. Introdotto allora con la (6) l'operatore K_π, permutando gli indici in tutti i modi possibili, si avrà in definitiva dalla (20):

$$J(t) = \int_0^t \alpha(t-\tau)E(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t \gamma(t-\tau_1,\ t-\tau_2,\ t-\tau_3)E(\tau_1)E(\tau_2)E(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d_3$$

con α e γ espresse da (2) e (3) ([13]).

In questa espressione di $J(t)$, (che è ancora del tipo (1)), il primo termine coincide con quello comunemente impiegato a rappresentare in condizioni di linearità il legame funzionale fra densità di corrente e campo elettrico in presenza di un campo magnetico costante ([6]), il secondo termine traduce invece il contributo non lineare ([14]).

3. - Al fine di applicare il risultato ottenuto allo studio della interazione ionosferica delle radio-onde, conviene, come in [1], estendere da $-\infty$ a t

---

([13]) Nella (3) la sommatoria è estesa a tutte le possibili π.

([14]) Naturalmente per $\tilde{H}_0 = 0$, riducendosi β all'identità, la (2) diventa:

$$\alpha(s) = \frac{e^2N}{m}e^{-\nu_0 s}.$$

Inoltre, detti a_1, a_2, a_3 tre vettori generici, la (3) fornisce:

$$\gamma(s_1,\ s_2,\ s_3)a_1a_2a_3 = \Gamma_{123}(a_1\cdot a_2)a_3 + \Gamma_{132}(a_1\cdot a_3)a_2 + \Gamma_{231}(a_2\cdot a_3)a_1$$

conforme a quanto stabilito in [1].

gli integrali di (1) prendendo t sufficientemente grande e scrivere

$$J(t) = \int_0^{+\infty} \alpha(s) E(t-s) ds + \tag{21}$$

$$+ \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \gamma(s_1, s_2, s_3) E(t-s_1) E(t-s_2) E(t-s_3) ds_1 ds_2 ds_3 .$$

Considerate poi due onde elettromagnetiche piane di vettori elettrici varianti con legge

$$E_1 = E_{10}(1 + M \operatorname{sen} \Omega t) \operatorname{sen} \omega_1 t \boldsymbol{a} \tag{22}$$

ed

$$E_2 = E_{20} \operatorname{sen} \omega_2 t \boldsymbol{b} \text{ [15]} \tag{23}$$

$\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ essendo due versori costanti, assumiamo quale valore approssimato del campo E in (21) la somma $E_1 + E_2$. Trascurando i termini che provengono dal secondo integrale di (21) e contengono due o più fattori uguali ad E_2 (che supponiamo d'intensità molto minore di quella di E_1 e di frequenza abbastanza lontana dalla girofrequenza), otterremo per il contributo non lineare l'espressione

$$J' = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \gamma(s_1, s_2, s_3) E_1(t-s_1) E_1(t-s_2) E_1(t-s_3) ds_1 ds_2 ds_3 +$$

$$+ 3\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \gamma(s_1, s_2, s_3) E_1(t-s_1) E_1(t-s_2) E_2(t-s_3) ds_1 ds_2 ds_3 .$$

---

[15] La prima di tali onde è dunque modulata in ampiezza con profondità di modulazione M e bassa frequenza $\Omega/2\pi$ (con $\omega_1 \gg \Omega$), la seconda non modulata. A rigore, per l'anisotropia del plasma prodotta dal campo H_0 (diretto come l'asse Oz) un'onda elettromagnetica è in generale polarizzata ellitticamente. Il campo elettrico dell'onda modulata si esprime allora nella forma

$$E_{1x} = E_{1\,0\,x}(1 + M \operatorname{sen} \Omega t) \operatorname{sen} (\omega_1 t - \alpha_1)$$
$$E_{1y} = E_{1\,0\,y}(1 + M \operatorname{sen} \Omega t) \operatorname{sen} (\omega_1 t - \beta_1)$$
$$E_{1z} = E_{1\,0\,z}(1 + M \operatorname{sen} \Omega t) \operatorname{sen} \omega_1 t$$

e in modo analogo il campo dell'onda non modulata. Si potrebbe tuttavia provare, con considerazioni simili a quelle qui esposte, la validità anche in questo caso del risultato compendiato dalla (25').

Ponendo poi $\boldsymbol{E}_1 = E_1\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{E}_2 = E_2\boldsymbol{b}$ e sostituendo a γ la sua espressione, avremo:

$$(24) \quad \boldsymbol{J}' = 3\nu_0 \int_0^{+\infty} \frac{\partial e^{-\nu_0 s_3}}{\partial \nu_0} E_1(t-s_3)\mathrm{K}\beta(s_3)\boldsymbol{a}\,ds_3 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(s_1,\ s_2)E_1(t-s_1)E_1(t-s_2) [\beta(s_1)\boldsymbol{a}\cdot\beta(s_2)\boldsymbol{a}]ds_1ds_2 +$$
$$+ 3\nu_0 \int_0^{+\infty} \frac{\partial e^{-\nu_0 s_3}}{\partial \nu_0} E_2(t-s_3)\mathrm{K}\beta(s_3)\boldsymbol{b}\,ds_3 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(s_1,\ s_2)E_1(t-s_1)E_1(t-s_2) [\beta(s_1)\boldsymbol{a}\cdot\beta(s_2)\boldsymbol{a}]ds_1ds_2 +$$
$$+ 6\nu_0 \int_0^{+\infty} \frac{\partial e^{-\nu_0 s_2}}{\partial \nu_0} E_1(t-s_2)\mathrm{K}\beta(s_2)\boldsymbol{a}\,ds_2 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(s_1,\ s_3)E_1(t-s_1)E_2(t-s_3) [\beta(s_3)\boldsymbol{a}\cdot\beta(s_1)\boldsymbol{b}]ds_1ds_3 .$$

Per valutare l'integrale

$$(25) \qquad \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(s_1,\ s_2)E_1(t-s_1)E_1(t-s_2)[\beta(s_1)\boldsymbol{a}\cdot\beta(s_2)\boldsymbol{a}]ds_1ds_2$$

che figura nella (24) e che a meno di un fattore costante rappresenta, per la (18), la variazione della frequenza collisionale degli elettroni prodotta da $\boldsymbol{E}_1$, può essere conveniente rilevare che per la (5):

$$(26) \qquad \beta(s_1)\boldsymbol{a}\cdot\beta(s_2)\boldsymbol{a} = \cos^2\theta + \cos\omega_H(s_2-s_1)\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

(θ = angolo che $\boldsymbol{a}$ forma con $\boldsymbol{k}_0$) e che inoltre:

$$(27) \qquad \mathrm{sen}\,\omega_1(t-s_1)\,\mathrm{sen}\,\omega_1(t-s_2)\cos[\omega_H(t-s_1)-\omega_H(t-s_2)] =$$
$$= \frac{1}{4}\{\cos[(\omega_1-\omega_H)(t-s_1)-(\omega_1-\omega_H)(t-s_2)] +$$
$$+ \cos[(\omega_1+\omega_H)(t-s_1)-(\omega_1+\omega_H)(t-s_2)] -$$
$$- \cos[(\omega_1-\omega_H)(t-s_1)+(\omega_1+\omega_H)(t-s_2)] -$$
$$- \cos[(\omega_1+\omega_H)(t-s_1)+(\omega_1-\omega_H)(t-s_2)]\}.$$

Eseguendo allora i calcoli si vede [16] che il valore dell'integrale (25) può

[16] Il contributo del primo addendo della (26) nell'integrale (25) è uguale al valore che ha l'integrale nel caso $\boldsymbol{H}_0 = 0$ moltiplicato per $\cos^2\theta$. Il contributo del secondo addendo della (26) invece, stante la (27) e la legge (22) di modulazione del campo $\boldsymbol{E}_1$, risulta uguale

ottenersi da quello trovato in [1] nel caso $\boldsymbol{H}_0 = 0$ sostituendo in esso $\dfrac{E_{10}^2}{\omega_1^2 + \nu_0^2}$ con

$$(25') \qquad \frac{E_{10}^2}{\omega_1^2 + \nu_0^2}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\left\{\frac{E_{10}^2}{(\omega_1 + \omega_H)^2 + \nu_0^2} + \frac{E_{10}^2}{(\omega_1 - \omega_H)^2 + \nu_0^2}\right\}\operatorname{sen}^2\theta.$$

Per $\omega_1 \gg \omega_H$ l'integrale (25) assume sensibilmente lo stesso valore che ha in assenza del campo magnetico $\boldsymbol{H}_0$ e ciò indipendentemente dalla direzione di $\boldsymbol{E}_1$ (cioè qualunque sia θ). Negli altri casi, invece, le componenti di $\boldsymbol{E}_1$ danno un diverso contributo all'integrale; in particolare per $\omega_1 \ll \omega_H$ il contributo maggiore è dato dalla componente di $\boldsymbol{E}_1$ parallela ad $\boldsymbol{H}_0$ (17).

Si può poi osservare che se $\theta \neq 0$ e ν_0 non è troppo elevato (ad es. $\nu_0 \backsim 10^5$) l'integrale (25) cresce notevolmente per $\omega_1 \cong \omega_H$ presentando così una sorta di risonanza.

Quanto all'integrale

$$(28) \qquad 2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(s_1,\ s_3)E_1(t - s_1)E_2(t - s_3)[\beta(s_3)\boldsymbol{a}\cdot\beta(s_1)\boldsymbol{b}]ds_1ds_3$$

---

alla somma di tre termini moltiplicata per $\operatorname{sen}^2\theta$. A meno del fattore $\dfrac{e^4N}{18m^2kT}$, il primo di questi termini (indipendente da M) può ritenersi espresso da

$$\frac{1}{2\delta}\left\{\frac{E_{10}^2}{(\omega_1 + \omega_H)^2 + \nu_0^2} + \frac{E_{10}^2}{(\omega_1 - \omega_H)^2 + \nu_0^2}\right\}$$

in quanto la sua componente variabile (di frequenza $2\omega_1$ e ampiezza molto piccola in pratica) può venir trascurata. Sempre a meno dello stesso fattore, il secondo termine (proporzionale a M) vale poi:

$$M\nu_0\left\{\frac{E_{10}^2}{(\omega_1 + \omega_H)^2 + \nu_0^2} + \frac{E_{10}^2}{(\omega_1 - \omega_H)^2 + \nu_0^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2\nu_0^2}}\operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_\Omega)$$

con

$$\varphi_\Omega = \operatorname{arctg}\frac{\Omega}{\delta\nu_0},$$

mentre il terzo termine (proporzionale a M^2) risulta:

$$\frac{M^2}{4\delta}\left\{\frac{E_{10}^2}{(\omega_1 + \omega_H)^2 + \nu_0^2} + \frac{E_{10}^2}{(\omega_1 - \omega_H)^2 + \nu_0^2}\right\}\left\{1 - \frac{\delta\nu_0}{\sqrt{4\Omega^2 + \delta^2\nu_0^2}}\cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega})\right\}$$

con

$$\varphi_{2\Omega} = \operatorname{arctg}\frac{2\Omega}{\delta\nu_0}.$$

Dal confronto di questi risultati con quelli di [1] (cfr. [1] nota (25)) discendono le conclusioni contenute nel testo.

(17) Pertanto in condizioni di propagazione quasi trasversale il contributo principale viene dall'onda ordinaria.

che figura nel terzo addendo della (24), esso rappresenta, a meno di un fattore costante, l'incremento che il campo $\boldsymbol{E}_2$ dell'onda «più debole» determina sulla frequenza collisionale degli elettroni del plasma già soggetti al campo $\boldsymbol{E}_1$ dell'onda «potente».

A tale variazione della frequenza collisionale si ricollega il fenomeno delle cosidette onde «laterali» (onde di frequenza uguale ad una combinazione delle frequenze delle onde interagenti), studiato da I. M. VILENSKIY [13] e da altri Autori. Eseguendo i calcoli dell'integrale (28) si può vedere che per ω_1 sufficientemente lontano da ω_2 (con ω_1 e $\omega_2 \gg \nu_0$) tale integrale risulta trascurabile anche quando il valore di ω_1 è prossimo alla girofrequenza angolare ω_H.

4. - Per quanto si è detto nel n. precedente, le cose vanno dunque come se il campo elettrico $\boldsymbol{E}_1$ dell'onda «potente», interagendo col campo $\boldsymbol{E}$ di ogni onda (e in particolare con se stesso), aggiungesse alla densità di corrente elettrica

$$\boldsymbol{J} = \int_0^{+\infty} \alpha(s)\boldsymbol{E}(t-s)ds, \tag{29}$$

che corrisponderebbe ad $\boldsymbol{E}$ nell'approssimazione lineare, una densità di corrente

$$\Delta \boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \nu_0}(\nu_e - \nu_0)$$

in cui $(\nu_e - \nu_0)$ è espresso, a meno del fattore $\dfrac{3m\nu_0}{e^2N}$, dall'integrale (25). Ciò equivale a dire che per effetto della interazione ionosferica l'omografia della conduttività σ e l'omografia dielettrica ε proprie del caso lineare ([18]) subiscono

([18]) Nell'approssimazione lineare σ ed ε si ottengono dalla relazione

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\boldsymbol{E}\right)$$

quando si assuma per $\boldsymbol{J}$ l'espressione (29) con α data dalla (2) ed $\boldsymbol{E}$ sinusoidale di pulsazione ω. Assumendo il riferimento O, x, y, z con l'asse Oz diretto come il campo magnetico $\boldsymbol{H}_0$, si avranno allora per le componenti dei tensori delle due omografie σ ed ε le seguenti espressioni (cfr. ad es. [14] pp. 45-46):

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\omega_0^2}{8\pi}\left[\frac{\nu_0}{(\omega+\omega_H)^2+\nu_0^2} + \frac{\nu_0}{(\omega-\omega_H)^2+\nu_0^2}\right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\omega_0^2}{4\pi}\,\frac{\nu_0}{\omega^2+\nu_0^2}$$

gli incrementi

$$\Delta\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial\nu_0}(\nu_e - \nu_0) \qquad \Delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\nu_0}(\nu_e - \nu_0).$$

A causa della conseguente variazione dell'omografia dielettrica complessa $\varepsilon' = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ (i = unità immaginaria), anche l'indice complesso di rifrazione $\mathfrak{n}$, relativo ad un'onda piana che si propaga in una certa direzione ζ, cambia di $\frac{\partial\mathfrak{n}}{\partial\nu_0}(\nu_e - \nu_0)$ ([19]).

Supponendo questi risultati ancora validi, in via approssimata, nel caso di un plasma non omogeneo in cui le proprietà variano debolmente con ζ, si potranno allora studiare gli effetti del campo $\boldsymbol{H}_0$ sulle onde del tipo

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left\{ i\frac{\omega}{c}\left(ct - \int_0^\zeta \mathfrak{n}\,d\zeta\right)\right\}$$

e in particolare sul fenomeno della cross-modulation, legato (come si è visto in [1]), alle variazioni dell'indice di assorbimento $\varkappa$ (= parte immaginaria negativa di $\mathfrak{n}$) del plasma.

In questo studio presentano un certo interesse i seguenti casi limite:

a) Caso $\omega_1 \gg \omega_H$, $\omega \gg \omega_H$. L'indice di assorbimento $\varkappa$ dell'approssimazione lineare e l'incremento $(\nu_e - \nu_0)$ conservano in tal caso le espressioni che hanno quando $\boldsymbol{H}_0 = 0$ ([20]).

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{\omega_0^2}{8\pi}\left[\frac{\omega + \omega_H}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu_0^2} - \frac{\omega - \omega_H}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu_0^2}\right]$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega}\left[\frac{\omega + \omega_H}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu_0^2} + \frac{\omega - \omega_H}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu_0^2}\right]$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu_0^2}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\omega_0^2}{2\omega}\left[\frac{\nu_0}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu_0^2} - \frac{\nu_0}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu_0^2}\right]$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0$$

con

$$\omega_0^2 = 4\pi\frac{e^2}{m}N.$$

([19]) L'indice complesso di rifrazione $\mathfrak{n}$ è legato ad ε' dall'equazione di dispersione. Questa, nell'approssimazione lineare, conduce alla nota formula di APPLETON-HARTREE (cfr. ad es. [14] pp. 46-47).

([20]) Si osservi che per $\omega \gg \omega_H$ le omografie σ ed ε riportate in nota ([18]) si riducono alle omotetie del caso $\boldsymbol{H}_0 = 0$. Inoltre (cfr. n. 3) per $\omega_1 \gg \omega_H$ $(\nu_e - \nu_0)$ assume l'espressione che aveva in assenza di $\boldsymbol{H}_0$.

Il fenomeno della cross-modulation segue dunque le stesse leggi come in [1].

b) *Caso* $\omega_1 \ll \omega_H$, $\omega \ll \omega_H$. Nella propagazione trasversale, l'indice di assorbimento $\varkappa$ dell'approssimazione lineare rimane, nel caso dell'onda ordinaria, quale sarebbe in assenza di $\boldsymbol{H}_0$, mentre si modifica, nel caso dell'onda straordinaria, per la sostituzione di ω_H ad ω ([21]). Inoltre l'incremento $(\nu_e - \nu_0)$ conserva l'espressione che aveva per $\boldsymbol{H}_0 = 0$ salvo la sostituzione di $E_{10}^2 \cos^2\theta$ ad E_{10}^2 ([22]). Pertanto, a parte quest'ultima modifica, l'influenza di $\boldsymbol{H}_0$ riguarda solo la cross-modulation dell'onda straordinaria in cui sostituisce ad ω la girofrequenza ω_H. Nella propagazione longitudinale, invece, tale influenza di $\boldsymbol{H}_0$ riguarda anche l'onda ordinaria.

Dallo studio degli effetti di $\boldsymbol{H}_0$ emerge anche la possibilità di una risonanza della cross-modulation per $\omega^1 = \omega_H$. L'onda «potente» provoca infatti una variazione dell'indice di assorbimento $\varkappa$ proporzionale a $(\nu_e - \nu_0)$ che, a sua volta, si ottiene dall'incremento stabilito in assenza di $\boldsymbol{H}_0$ sostituendo a $E_{10}^2/(\omega_1^2 + \nu_0^2)$ l'espressione (25'). Ora, se la propagazione dell'onda «potente» è longitudinale, l'espressione (25') si riduce a $\dfrac{E_{10x}^2}{(\omega_1 - \omega_H)^2 + \nu_0^2}$ (E_{10x} = ampiezza della componente straordinaria di $\boldsymbol{E}_{10}$) ([23]).

Da ciò la possibilità di risonanza della cross-modulation per $\omega_1 = \omega_H$ (fenomeno della girointerazione) conforme a quanto detto all'inizio.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. MARZIANI, *Sulla interazione ionosferica delle onde elettromagnetiche*, Ann. Mat. Pura Appl., s. IV, tomo LXXIII (1966), pp. 111-126.

[2] V. A. BAILEY, *On some Effects caused in the Ionosphere by Electric Waves*, Part I, Phil. Mag. vol. 23 (1937), pp. 929-960; Part II, ibid. vol. 26 (1938), pp. 425-453.

[3] M. CUTOLO, M. CARLEVARO e M. GHERGHI, *Esperienze sull'interazione con risonanza fra radionde nella ionosfera*, Alta Frequenza, vol. XV (1946), pp. 111-117.

[4] L. G. H. HUXLEY, H. G. FOSTER and C. C. NEWTON, *Gyro Interaction of Radio Waves*, Nature, vol. 159 (1947), pp. 300-301.

[5] V. A. BAILEY, R. A. SMITH, K. LANDECKER, A. J. HIGGS and F. H. HIBBERD, *Resonance in Gyro-Interaction of Radio Waves*, Nature, vol. 169 (1952), pp. 911-913.

[6] V. L. GINZBURG and A. V. GUREVICH, *Nonlinear Phenomena in a Plasma located in an Alternating Electromagnetic Field*, Uspekhi Fiz. Nauk, vol. 70 (1960), pp. 201-246 e pp. 393-428.

([21]) Cfr. ad es. V. L. GINZBURG [12] pp. 197-198 tenendo conto dell'ipotesi $\omega \ll \omega_H$.

([22]) Cfr. la (25') tenendo conto dell'ipotesi $\omega_1 \ll \omega_H$.

([23]) La componente ordinaria dell'onda non dà luogo a risonanza cfr. V. A. BAILEY [2] Part I p. 935 e Part II p. 431.

[7] V. A. BAILEY, *Some Nonlinear Phenomena in the Ionosphere,* Radio Sci. J. Res. NBS/USNC-URSI, vol. 69 D (1965), pp. 9-24.

[8] D. BASU, R. JANCEL et T. KAHAN, *Effects non linéaires dans un plasma lorentzien anisotrope: calcul de la conductivité électronique en présence de deux champs électriques superposés*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260 (1965), pp. 3877-3880.

[9] C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale e applicazioni*, vol. I, Bologna, Zanichelli, 1929.

[10] C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO, *Espaces courbes. Critique de la Relativité.* Torino, Sten, 1924.

[11] A. M. CONFETTA, *Sulle equazioni per la propagazione delle onde elettromagnetiche in un gas ionizzato*, Ist. Lombardo Sci. Lett Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. vol. LXXXV (1952), pp. 495-502.

[12] V. L. GINZBURG, *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma*, Amsterdam, North-Holland, 1961.

[13] I. M. VILENSKIY, *Influenza del campo magnetico terrestre sulla interazione delle radioonde sulla ionosfera* (in russo) Zurn. Eksp. Teoret. Fiz., t. 26 (1954).

[14] P. CALDIROLA and O. DE BARBIERI, *On some Nonlinear Phenomena in the Ionospheric Plasma,* Radio Sci. J. Res. NBS/USNC-URSI vol. 69 D (1965), pp. 33-58.