Sull'informazione associata alle esperienze incomplete (*).

B. FORTE e N. PINTACUDA (Pavia).

Sunto. - *Nell'ambito della teoria dell'informazione senza probabilità, si propone una definizione assiomatica dell'informazione associata ad esperienze incomplete.*

Si discutono in particolare le proprietà del guadagno di informazione e dell'informazione condizionale, giungendo a caratterizzare con un sistema di equazioni funzionali la classe delle misure di informazione che soddisfano agli assiomi adottati; come caso particolare si ottiene la classica misura di Shannon-Rényi.

Introduzione.

Il problema della misura della quantità di informazione è stato classicamente affrontato da due punti di vista distinti.

Dato un insieme Ω di eventi elementari ω e una famiglia $\mathcal{F}$ di parti (eventi) di Ω , si considera, secondo il primo punto di vista, l'informazione che si ha dal manifestarsi in un evento $A \in \mathcal{F}$. In base al secondo punto di vista, data una famiglia $\mathcal{G}$ di esperienze, cioè data una famiglia di partizioni Π di Ω in un numero finito qualsivoglia di eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($A_i \in \mathcal{F}$), si considera l'informazione $H(\Pi)$ che si ha da tali esperienze, ovvero dal manifestarsi di un evento qualsiasi, peraltro non precisato, degli eventi A_i che la formano.

Particolare significato acquistano questi due punti di vista nella teoria dei questionari [1], per la quale il singolo evento A è l'insieme delle risposte favorevoli ad una data domanda, mentre la partizione Π corrisponde ad un insieme di domande mutuamente esclusive.

In alcune recenti note [2], J. KAMPÉ DE FÉRIET e B. FORTE hanno suggerito di generalizzare la definizione classica di Wiener-Shannon per la misura $J(A)$ della quantità di informazione associata ad un evento; nello stesso ambito di generalità, con il presente lavoro - i cui principali risultati sono stati annunciati tramite una nota ai Comptes Rendus - intendiamo suggerire una definizione della misura della quantità di informazione $H(\Pi)$ associata ad una esperienza; adotteremo tra l'altro il punto di vista più generale assunto da A. RÉNYI [3], e considereremo esperienze incomplete, vale a dire definiremo $H(\Pi)$ quando Π è una partizione di un evento $A \subset \Omega$ ($A \in \mathcal{F}$).

(*) Lavoro eseguito per la realizzazione del programma del gruppo di ricerca n. 7 del C. N. R..

Questa definizione contiene ovviamente il caso in cui A coincide con Ω , nel qual caso la partizione Π sarà chiamata esperienza completa.

L'accennato spirito di generalità consiste nella circostanza che la definizione proposta è del tutto indipendente dalla esistenza di una misura di probabilità per gli eventi $A \in \mathcal{F}$.

Naturalmente, verrà dimostrato che la classica misura dell'informazione di Shannon-Rényi in funzione delle probabilità dei singoli eventi rientra come caso particolare.

Verrà altresì data una condizione sufficiente perchè la quantità di informazione associata ad un'esperienza incompleta sia quella di Shannon-Rényi.

1. - Le esperienze.

Supponiamo data una famiglia $\mathcal{F}$ di parti A di un insieme fondamentale Ω , comprendente Ω e $\emptyset$. Sia $\mathcal{G}$ una famiglia non vuota di insiemi finiti di elementi disgiunti di $\mathcal{F}$.

Gli elementi di $\mathcal{G}$ saranno chiamati esperienze; un'esperienza $\Pi \in \mathcal{G}$ per la quale sia $\bigcup_{A \in \Pi} A = \Omega$ sarà detta completa.

Introduciamo per gli elementi di $\mathcal{G}$ le due seguenti relazioni d'ordine:

$$\alpha) \quad \Pi_1 < \Pi_2, \quad \text{se} \quad \bigcup_{A' \in \Pi_1} A' = \bigcup_{A'' \in \Pi_2} A'' \quad \text{e inoltre} \quad \forall A' \in \Pi_2 \exists A': A'' \subset A' \in \Pi_1$$

e leggiamo $\Pi_1 < \Pi_2$ dicendo che l'esperienza Π_1 è meno fine dell'esperienza Π_2 .

Questa relazione d'ordine, come si può facilmente verificare, è riflessiva.

$$\beta) \quad \Pi_1 \subset \Pi_2 \quad \text{se} \quad \forall A' \in \Pi_1 \Rightarrow A' \in \Pi_2$$

che d'altra parte è la relazione di inclusione nel senso della teoria degli insiemi.

Introduciamo inoltre per gli elementi di $\mathcal{G}$ le operazioni seguenti:

$$1) \quad \Pi_1 \cdot \Pi_2 = \{A: A = A' \cap A'', \quad A' \in \Pi_1, \quad A'' \in \Pi_2\}$$

$$2) \quad \text{se} \quad \left(\bigcup_{A' \in \Pi_1} A' \right) \cap \left(\bigcap_{A'' \in \Pi_2} A'' \right) = \emptyset, \quad \text{porremo} \quad \Pi_1 \cup \Pi_2 = \{A: A \in \Pi_1 \text{ oppure } A \in \Pi_2\}$$

operazione che d'altra parte è l'unione di Π_1 e Π_2 nel senso della teoria degli insiemi.

Si verifica immediatamente che il prodotto $\Pi_1 \cdot \Pi_2$ è associativo, commutativo, distributivo rispetto a $\cup$, e monotono rispetto all'ordine $<$, vale a dire

$$\Pi_1 < \Pi'_1, \quad \Pi_2 < \Pi'_2 \quad \Rightarrow \quad \Pi_1 \cdot \Pi_2 < \Pi'_1 \cdot \Pi'_2.$$

Assegniamo pure a priori un sottoinsieme $\mathcal{K}$ di $\mathcal{G}$, che sarà detto l'insieme delle esperienze indipendenti, con la proprietà che le algebre di Boole generate da due qualsiasi elementi di $\mathcal{K}$ siano indipendenti in senso algebrico [4].

Sia inoltre $N(\Pi)$ il numero delle parti disgiunte che formano l'esperienza Π ; $N(\Pi)$ è per ipotesi sempre finito.

Detto $\mathcal{G}_n$ il sottoinsieme di $\mathcal{G}$ formato dalle esperienze Π per le quali $N(\Pi) = n$, si ha

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{G}_n$$

D'ora in poi supporremo che, per ogni n , $\mathcal{G}_n$ sia non vuoto; supporremo infine verificata da $\mathcal{G}$ e da $\mathcal{K}$ le proprietà seguenti:

$$\gamma) \quad \Pi_1 \in \mathcal{G}, \quad \Pi_2 < \Pi_1 \Rightarrow \Pi_2 \in \mathcal{G}$$

$$\delta) \quad \Pi_1 \in \mathcal{K}, \quad \Pi_2 \in \mathcal{K}, \quad \Pi'_1 < \Pi_1, \quad \Pi'_2 < \Pi_2 \Rightarrow \Pi'_1 \in \mathcal{K}, \quad \Pi'_2 \in \mathcal{K}$$

2. - Misura dell'informazione.

La misura della quantità di informazione fornita da un'esperienza $\Pi \in \mathcal{G}$ è un'applicazione $\mathcal{G} \xrightarrow{H} \overline{R}^+$ con le seguenti proprietà:

i) (monotonia):

$$\Pi_1 \in \mathcal{G}, \quad \Pi_2 \in \mathcal{G}, \quad \Pi_1 < \Pi_2 \Rightarrow H(\Pi_1) \leq H(\Pi_2)$$

ii) (additività sulle esperienze indipendenti):

$$\Pi_1 \in \mathcal{K}, \quad \Pi_2 \in \mathcal{K}, \quad \Pi_1 \cdot \Pi_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow H(\Pi_1 \cdot \Pi_2) = H(\Pi_1) + H(\Pi_2)$$

iii) (carattere locale dell'informazione):

$$\Pi'_1 \cup \Pi'_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow H(\Pi'_1 \cup \Pi'_2) - H(\Pi'_1 \cup \Pi_2) = H(\Pi_1 \cup \Pi'_2) - H(\Pi_1 \cup \Pi_2)$$

3. - Prime proprietà della misura dell'informazione.

Gli assiomi i) - iii) implicano le proprietà seguenti:

$$1) \quad \text{se } \Pi \in \mathcal{G} \quad \text{e} \quad \Pi^* = \Pi \cup \{\emptyset\} \in \mathcal{G}, \quad \text{allora} \quad H(\Pi^*) = H(\Pi)$$

per riconoscerlo, basta osservare che si ha simultaneamente $\Pi < \Pi^*$, $\Pi^* < \Pi$, donde per l'assioma i) è $H(\Pi) \leq H(\Pi^*)$, $H(\Pi^*) \leq H(\Pi)$; da ciò l'asserto.

2) la restrizione a $\mathcal{E}_n$ dell'applicazione $\mathcal{E} \xrightarrow{H} \bar{R}^+$ definisce una funzione reale $H_n(A_1, A_2, \dots, A_n)$, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \in \mathcal{E}$, simmetrica rispetto alle n variabili $A_1, A_2, \dots, A_n$.

In effetti, un'esperienza è individuata dalle parti che la formano e non dall'ordine nel quale queste parti vengono prese in considerazione.

$$3) \quad H_{n+1}(A_1, A_2, \dots, A_n, \emptyset) = H_n(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

È un'immediata conseguenza della proprietà 1).

Per l'assioma iii) è in particolare

$$4) \quad H_n(A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n) - H_{n-1}(A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \cup A_n) = \\ = H_3(A_1 \cup \dots \cup A_{n-2}, A_{n-1}, A_n) - H_2(A_1 \cup \dots \cup A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n)$$

Da quest'ultima proprietà si riconosce che la differenza

$$H_n(A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n) - H_{n-1}(A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \cup A_n)$$

è una funzione Φ degli eventi $\bigcup_{i=1}^{n-2} A_i, A_{n-1}, A_n$.

Chiameremo questa differenza guadagno di informazione relativo al passaggio dalla partizione $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n\}$ alla partizione, più fine, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

4. - Decomposizione dell'informazione.

La proprietà 5) del precedente paragrafo conduce al seguente

TEOREMA 1. - *Se H è una misura delle quantità di informazione fornite dalle esperienze di una data famiglia $\mathcal{E}$, per la sua restrizione H_n a $\mathcal{E}_n$, vale la espressione seguente:*

$$(4.1) \quad H_n(A_1, \dots, A_n) = H_1\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \sum_{i=0}^{n-2} \Phi\left(\bigcup_{k=0}^i A_k, A_{i+1}, \bigcup_{h=i+2}^n A_h\right)$$

dove si è posto $A_0 = \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE. - Basta applicare iterativamente la proprietà 5).

In virtù della 4.1, l'informazione $H(\Pi)$ associata ad una esperienza (incompleta) $\Pi \equiv \{A_1, \dots, A_n\}$ risulta decomposta nella somma di una funzione di evento

$$h\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = H_1\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

e di una particolare funzione

$$Z(\Pi) = \sum_{i=0}^{n-2} \Phi\left(\bigcup_{k=0}^i A_k, A_{i+1}, \bigcup_{h=i+2}^i A_h\right)$$

L'applicazione $\mathcal{G} \xrightarrow{H} \bar{R}^+$ risulta così univocamente determinata dalla sua restrizione ad $\mathcal{G}_1$, e dal guadagno di informazione Φ . Ne segue che si possono tradurre le proprietà i) - iii) che definiscono detta applicazione H in condizioni sulla funzione di evento $h(A)$ e sul guadagno di informazione Φ .

È anche utile osservare che, posto $Z(\{A\} \cup \{\emptyset\}) = Z(\{A\})$, e quindi $Z(\{A\}) = 0$, la applicazione $\mathcal{G} \xrightarrow{Z} \bar{R}^+$ soddisfa, come si può facilmente verificare, gli assiomi i) - iii) ed è quindi anch'essa una misura della quantità di informazione associata alle esperienze di $\mathcal{G}$.

5. - Proprietà della funzione h e informazione condizionale.

Tenuto conto della definizione della funzione di evento $h(A)$ per la quale $h(A) = H_1(A)$, si ha immediatamente:

a) $h(A) \in \bar{R}^+$

b) $h(A \cap B) = H_1(A \cap B) = H_1(A) + H_1(B) = h(A) + h(B)$

se $\{A\} \in \mathcal{K}$, $\{B\} \in \mathcal{K}$ (additività sugli eventi indipendenti).

Se si suppone inoltre - proprietà tuttavia non implicata dagli assiomi i) - iii) - che $h(A)$ sia una funzione di evento non decrescente, cioè se si suppone ulteriormente che

c) $A \subset B \Rightarrow h(A) \geq h(B)$

le proprietà a) b) c) di h coincidono con quelle che definiscono l'informazione di un evento secondo J. Kampé de Fériet e B. Forte.

In questo caso particolare, la differenza

$$H_n(A_1, \dots, A_n) - H_1\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = Z(\Pi)$$

che è il guadagno di informazione per il passaggio dall'informazione fornita dall'esperienza $\{\bigcup_{k=1}^n A_k\}$ a quella fornita dalla esperienza più fine $\{A_1, \dots, A_n\}$ si può altresì interpretare come l'informazione associata all'esperienza Π , quando si sappia che si è manifestato l'evento $\bigcup_{k=1}^n A_k$.

Pertanto l'applicazione $\mathcal{G} \xrightarrow{Z} \bar{R}^+$ è l'informazione condizionale dell'esperienza $\mathcal{G}$ dato l'evento $\{\bigcup_{k=1}^n A_k\}$.

Per questo motivo, sulla scorta dell'osservazione finale del paragrafo precedente, anche nel caso in cui $h(A)$ non soddisfi la proprietà c), chiameremo ancora la quantità $H_n(A_1, \dots, A_n) - h(\bigcup_{k=1}^n A_k)$ informazione condizionale di $\Pi \equiv \{A_1, \dots, A_n\}$ dato l'evento $\bigcup_{k=1}^n A_k$.

6. - Proprietà del guadagno di informazione Φ .

Il guadagno di informazione Φ è come si è visto una applicazione in $\bar{R}^+$ delle terne di eventi disgiunti A, B, C tali che $\{A, B, C\} \in \mathcal{G}$.

L'assioma i) del paragrafo 2 e la proprietà 4) del paragrafo 3 implicano:

$$\text{I.} \quad \Phi(A; B, C) \geq 0.$$

Per la proprietà 3) del paragrafo 3 si ha poi

$$\text{II.} \quad \Phi(A; \emptyset, C) = 0.$$

Se si applica ora la proprietà 4) del paragrafo 3 alla esperienza $\Pi \equiv \{A, B, C, D\}$ e si ricorda la proprietà di simmetria della funzione H_n (proprietà 2 del paragrafo 3), si ha

$$(6.1) \quad H_4(A, B, C, D) - H_3(A \cup B, C, D) = \Phi(C \cup D; A, B)$$

$$(6.2) \quad H_3(A \cup B, C, D) - H_2(A \cup B \cup C, D) = \Phi(D; A \cup B, C)$$

e sommando membro a membro

$$(6.3) \quad H_4(A, B, C, D) - H_2(A \cup B \cup C, D) = \Phi(C \cup D; A, B) + \Phi(D; A \cup B, C).$$

D'altra parte si ha pure

$$(6.4) \quad H_4(A, C, B, D) - H_3(A \cup C, B, D) = \Phi(B \cup D, A, C)$$

$$(6.5) \quad H_3(A \cup C, B, D) - H_2(A \cup C \cup B, D) = \Phi(D; A \cup C, B)$$

da cui

$$(6.6) \quad H_4(A, C, B, D) - H_2(A \cup C \cup B, D) = \Phi(B \cup D; A, C) + \Phi(D; A \cup C, B)$$

Confrontando (6.3) con (6.6), si ha infine:

$$\text{III. } \Phi(C \cup D; A, B) + \Phi(D; A \cup B, C) = \Phi(B \cup D, A, C) + \Phi(D; A \cup C, B)$$

Si noti che dalle proprietà II. e III. si deduce in particolare, ponendo $A = \emptyset$,

$$(6.7) \quad \Phi(D; B, C) = \Phi(D; C, B)$$

vale a dire che Φ è una funzione simmetrica dei suoi ultimi due argomenti.

L'additività dell'informazione sul prodotto di esperienze indipendenti porta ad una ulteriore condizione sulla funzione Φ .

Siano $\Pi_1 \equiv \{A_1, A_2, A_3\}$ e $\Pi_2 \equiv \{B_1, B_2, B_3\}$ due esperienze indipendenti.

Se si impone alla funzione

$$Z(\Pi) = \sum_{i=0}^{n-2} \Phi\left(\bigcup_{k=0}^i A_k, A_{i+1}, \bigcup_{h=i+2}^n A_h\right)$$

di soddisfare all'assioma ii) si ha in effetti

$$(6.8) \quad Z(\Pi_1 \Pi_2) = Z(\Pi_1) + Z(\Pi_2)$$

D'altra parte per la proprietà 4) del paragrafo 3 (conseguenza dell'assioma iii)) si ha

$$(6.9) \quad Z(\Pi_1 \Pi_2) = Z(\{A_1, A_2 \cup A_3\} \{B_1, B_2, B_3\}) + \sum_{k=1}^3 \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_k, A_2 \cap B_k; A_3 \cap B_k)$$

D'altronde, tenuto conto delle ipotesi γ) e δ) del paragrafo 1, si ha:

$$(6.10) \quad Z(\{A_1, A_2 \cup A_3\} \{B_1 B_2 B_3\}) = Z(\{A_1, A_2 \cup A_3\}) + Z(\Pi_2)$$

confrontando le (6.8), (6.9) e (6.10), si ottiene

$$Z(\Pi_1) + Z(\Pi_2) = Z(\{A_1, A_2 \cup A_3\}) + Z(\Pi_2) + \sum_{k=1}^3 \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_k, A_2 \cap B_k, A_3 \cap B_k)$$

e infine

$$Z(\Pi_1) - Z(\{A_1, A_2 \cup A_3\}) = \sum_{k=1}^3 \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_k; A_2 \cap B_k, A_3 \cap B_k)$$

cioè

$$\text{IV} \quad \Phi(A_1; A_2, A_3) = \sum_{k=1}^3 \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_k; A_2 \cap B_k, A_3 \cap B_k)$$

Si è così riconosciuto che condizione necessaria perchè il guadagno di informazione Φ definisca una misura della quantità di informazione, è che siano da esso verificate le relazioni I.-IV.

7. - Caratterizzazione dell'informazione.

Si può ora stabilire il seguente teorema di caratterizzazione della quantità di informazione H mediante la funzione di evento $h(A)$ e il guadagno di informazione $\Phi(A; B, C)$:

TEOREMA 2. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'applicazione $\mathcal{G} \xrightarrow{H} \bar{R}^+$ definita dalla 4.1 sia una misura della quantità di informazione, è che:*

le funzioni $h(A) = H_1(A)$ e $\Phi(A; B, C)$ verifichino le relazioni seguenti:

$$a) \quad h(A) \in \bar{R}^+, \quad \{A\} \in \mathcal{G}$$

$$b) \quad h(A \cap B) = h(A) + h(B) \quad \{A\} \in \mathcal{H}, \{B\} \in \mathcal{H}$$

$$\text{I.} \quad \Phi(A; B, C) \geq 0 \quad \{A, B, C\} \in \mathcal{G}$$

$$\text{II.} \quad \Phi(A; \emptyset, C) = 0 \quad \{A, C\} \in \mathcal{G}$$

$$\text{III.} \quad \Phi(C \cup D; A, B) + \Phi(D; A \cup B, C) = \Phi(B \cup D; A, C) + \Phi(D; A \cup C, B) \\ \{A, B, C, D\} \in \mathcal{G}$$

$$\text{IV.} \quad \Phi(A_1, A_2, A_3) = \sum_{k=1}^3 \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_k; A_2 \cap B_k, A_3 \cap B_k) \\ \{A_1, A_2, A_3\} \in \mathcal{H}, \quad \{B_1, B_2, B_3\} \in \mathcal{H}, \quad A = \bigcup_{k=1}^3 A_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^3 B_k$$

DIMOSTRAZIONE. - Per come sono state dedotte le relazioni a)-b), I.-IV., è immediato riconoscere che esse sono necessarie perchè, ai sensi della (4.1), le funzioni $h(A)$ e $\Phi(A; B, C)$ definiscano una misura di informazione.

È poi immediato verificare che se $Z(\Pi)$ è una misura della quantità di informazione, cioè se soddisfa agli assiomi i)-iii), e se $h(A)$ soddisfa le relazioni a)-b), l'applicazione $\mathcal{G} \xrightarrow{H} \bar{R}^+$ con $H(\Pi) = h(\bigcup_{A \in \Pi} A) + Z(\Pi)$ è una misura della quantità di informazione.

Basterà dunque verificare che se la funzione $\Phi(A; B, C)$ soddisfa le proprietà I.-IV., la funzione Z da essa definita soddisfa gli assiomi i)-iii).

È immediato riconoscere anzitutto, sulla base della proprietà I., che la funzione

$$(7.1) \quad Z(A_1, A_2, \dots, A_n) = \sum_{i=0}^{n-2} \Phi\left(\bigcup_{k=0}^i A_k, A_{i+1}, \bigcup_{h=i+2}^n A_h\right)$$

è un'applicazione delle n -ple ordinate $A_1, \dots, A_n$, tali che $\{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{E}$, in $\bar{R}^+$.

D'altra parte, per la (7.1), è anche (per $1 < j < n-1$):

$$\begin{aligned} Z(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_n) - Z(A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, A_j, \dots, A_n) = \\ = \Phi\left(A_j \cup \left[\bigcup_{k=0}^{j-1} A_k\right], A_{j+1}, \left[\bigcup_{h=j+2}^n A_h\right]\right) + \Phi\left(\bigcup_{k=0}^{j-1} A_k, A_j, A_{j+1} \cup \left[\bigcup_{h=j+2}^n A_h\right]\right) - \\ - \Phi\left(A_{j+1} \cup \left[\bigcup_{k=0}^{j-1} A_k\right], A_j, \bigcup_{h=j+2}^n A_h\right) - \Phi\left(\bigcup_{k=0}^{j-1} A_k, A_{j+1}, A_j \cup \left[\bigcup_{h=j+2}^n A_h\right]\right) \end{aligned}$$

Posto in essa $A = \bigcup_{k=j+2}^n A_k$, $B = A_{j+1}$, $C = A_j$, $D = \bigcup_{h=0}^{j-1} A_h$ dalla III. e dalla conseguente (6.7) si ha:

$$\begin{aligned} \Phi\left(A_j \cup \left[\bigcup_{k=0}^{j-1} A_k\right], A_{j+1}, \left[\bigcup_{h=j+2}^n A_h\right]\right) + \Phi\left(\bigcup_{k=0}^{j-1} A_k, A_j, A_{j+1} \cup \left[\bigcup_{h=j+2}^n A_h\right]\right) - \\ - \Phi\left(A_{j+1} \cup \left[\bigcup_{k=0}^{j-1} A_k\right], A_j, \bigcup_{h=j+2}^n A_h\right) - \Phi\left(\bigcup_{k=0}^{j-1} A_k, A_{j+1}, A_j \cup \left[\bigcup_{h=j+2}^n A_h\right]\right) = 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$Z(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_n) = Z(A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, A_j, \dots, A_n)$$

Col medesimo procedimento si dimostra altresì che è

$$Z(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n) = Z(A_2, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n)$$

mentre dalla (7.1) e della (6.7) segue direttamente

$$Z(A_1, \dots, A_{n-1}, A_n) = Z(A_1, \dots, A_n, A_{n-1})$$

Con ciò si riconosce che la funzione Z , completata mediante l'identificazione $Z(\{A, \emptyset\}) = Z(\{A\})$, è un'applicazione di $\mathcal{E}$ in $\bar{R}^+$, essendo totalmente simmetrica rispetto agli argomenti.

Siano ora

$$\Pi_1 \equiv \{A_1, \dots, A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n\}, \quad \Pi_2 \equiv \{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{E}.$$

Sempre dalla espressione di Z in termini della funzione Φ si ha

$$(7.2) \quad Z(\Pi_2) - Z(\Pi_1) = \Phi\left(\bigcup_{k=0}^{n-2} A_k, A_{n-1}, A_n\right)$$

e da questa per la proprietà I.:

$$(7.3) \quad Z(\Pi_1) \leq Z(\Pi_2)$$

La (7.3) consente, per induzione, di stabilire che in generale si ha

$$\Pi_1 < \Pi_2 \Rightarrow Z(\Pi_1) \leq Z(\Pi_2),$$

pertanto l'assioma i) è verificato.

La (7.1) assicura altresì che l'applicazione Z verifica la proprietà 4), e quindi anche - come è facile riconoscere - l'assioma iii).

Per completare la verifica dell'asserto, si deve ora dimostrare che (assioma iii)) se

$$\Pi_1 \equiv \{A_1, \dots, A_m\} \in \mathcal{K}, \quad \Pi_2 \equiv \{B_1, \dots, B_n\} \in \mathcal{K}, \text{ è}$$

$$(7.4) \quad H(\Pi_1 \Pi_2) = H(\Pi_1) + H(\Pi_2)$$

Nel caso $m = n = 1$, essendo $H(\{A\}) = h(A)$, per la α) è

$$H(\{A\} \{B\}) = H(\{A\}) + H(\{B\})$$

e la (7.4) è dunque verificata. Se è $m = 1$, $n \geq 2$, risulta

$$(7.5) \quad \begin{aligned} H(\{A\} \Pi_2) &= H(\{A\} \{B\}) + Z(\{A\} \Pi_2) = \\ &= H(\{A\}) + H(\{B\}) + Z(\{A\} \Pi_2), \quad \text{essendo} \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_i \end{aligned}$$

D'altra parte è

$$(7.6) \quad Z(\{A\} \Pi_2) = \sum_{i=0}^{n-2} \Phi\left(A \cap \bigcup_{k=0}^i B_k, A \cap B_{i+1}, A \cap \bigcup_{h=i+2}^n B_h\right)$$

Dalla IV., posto $B_2 = B_3 = \emptyset$, $B_1 = B$, si ha

$$\Phi(A_1; A_2, A_3) = \Phi(B \cap A_1, B \cap A_2, B \cap A_3)$$

e ancora, posto

$$A_1 = \bigcup_{k=0}^i B_k, \quad A_2 = B_{i+2}, \quad A_3 = \bigcup_{h=i+2}^n B_h, \quad B = A,$$

$$(7.7) \quad \Phi\left(\bigcup_{k=0}^i B_k, B_{i+1}, \bigcup_{h=i+2}^n B_h\right) = \Phi(A \cap \bigcup_{k=0}^i B_k, A \cap B_{i+1}, A \cap \bigcup_{h=i+2}^n B_h)$$

Da quest'ultima relazione segue:

$$(7.8) \quad Z(\{A\}\Pi_2) = Z(\Pi_2)$$

che giustifica ulteriormente la denominazione di informazione condizionale attribuita alla applicazione $\mathcal{G} \xrightarrow{Z} \bar{R}^+$ e prova infine che

$$H(\{A\}\Pi_2) = H(\{A\}) + H(\{B\}) + Z(\Pi_2) = H(\{A\}) + H(\Pi_2)$$

Sia ora $m = 2$, $n \geq 2$. Si ha successivamente

$$(7.9) \quad \begin{aligned} H(\Pi_1\Pi_2) &= H(\{A\}\Pi_2) + \sum_{k=1}^n \Phi(A \cap B - A \cap B_k, A_1 \cap B_k, A_2 \cap B_k) = \\ &= H(\{A\}) + \sum_{k=1}^n \Phi(A \cap B - A \cap B_k, A_1 \cap B_k, A_2 \cap B_k) + H(\Pi_2) \end{aligned}$$

Per la II. e la IV., posto $B_3 = \emptyset$, si ha

$$(7.10) \quad \Phi(A_1, A_2, A_3) = \sum_{k=1}^2 \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_k, A_2 \cap B_k, A_3 \cap B_k)$$

Si può ora riconoscere che se è

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \Phi(A_1, A_2, A_3) &= \sum_{k=1}^{n-2} \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_k, A_2 \cap B_k, A_3 \cap B_k) + \\ &+ \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap (B_{n-1} \cup B_n), A_2 \cap (B_{n-1} \cup B_n), A_3 \cap (B_{n-1} \cup B_n)) \end{aligned}$$

è anche

$$(7.12) \quad \Phi(A_1, A_2, A_3) = \sum_{k=1}^n \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_k, A_2 \cap B_k, A_3 \cap B_k)$$

Infatti dalla IV., sostituendo a B_1, B_2, B_3 rispettivamente $\bigcup_{k=1}^{n-2} B_k, B_{n-1}, B_n$, si ha

$$(7.13) \quad \begin{aligned} \Phi(A_1, A_2, A_3) &= \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap \bigcup_{k=1}^{n-2} B_k, A_2 \cap \bigcup_{k=1}^{n-2} B_k, A_3 \cap \bigcup_{k=1}^{n-2} B_k) + \\ &+ \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_{n-1}, A_2 \cap B_{n-1}, A_3 \cap B_{n-1}) + \\ &+ \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_n, A_2 \cap B_n, A_3 \cap B_n) \end{aligned}$$

Analogamente sostituendo in IV. a B_1, B_2, B_3 rispettivamente $\bigcup_{k=1}^{n-2} B_k, B_{n-1} \cup B_n, \mathcal{Q}$, si ha

$$(7.14) \quad \Phi(A_1, A_2, A_3) = \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap \bigcup_{k=1}^{n-2} B_k, A_2 \cap \bigcup_{k=1}^{n-2} B_k, A_3 \cap \bigcup_{k=1}^{n-2} B_k) + \\ + \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap (B_{n-1} \cup B_n), A_2 \cap (B_{n-1} \cup B_n), A_3 \cap (B_{n-1} \cup B_n))$$

Dal confronto della (7.13) con la (7.14) si ha infine:

$$\Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap (B_{n-1} \cup B_n), A_2 \cap (B_{n-1} \cup B_n), A_3 \cap (B_{n-1} \cup B_n)) = \\ = \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_{n-1}, A_2 \cap B_{n-1}, A_3 \cap B_{n-1}) + \\ + \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cap B_n, A_2 \cap B_n, A_3 \cap B_n)$$

Con ciò la (7.12) è verificata per ogni valore dell'intero $n \geq 2$. Sostituendo ora in esse A_1, A_2, A_3 rispettivamente con $\mathcal{Q}, A_1, A_2$ si ha

$$\Phi(\mathcal{Q}, A_1, A_2) = Z(\{A_1, A_2\}) = \sum_{k=1}^n (A \cap B - A \cap B_k, A_1 \cap B_k, A_2 \cap B_k)$$

La (7.9) conduce così a

$$(7.15) \quad H(\Pi_1 \Pi_2) = H(\{A\}) + Z(\{A_1, A_2\}) + H(\Pi_2) = \\ = H(\Pi_1) + H(\Pi_2)$$

Quest'ultima relazione prova altresì che per $m = 2, n \geq 2$, è

$$(7.16) \quad Z(\Pi_1 \Pi_2) = Z(\Pi_1) + Z(\Pi_2)$$

Sia ora $m > 2, n > 2$; è

$$H(\Pi_1 \Pi_2) = H(\{A\}) + H(\{B\}) + Z(\Pi_1 \Pi_2)$$

Per provare la completa validità della (7.4) basterà dunque dimostrare che è

$$(7.17) \quad Z(\Pi_1 \Pi_2) = Z(\Pi_1) + Z(\Pi_2)$$

Consideriamo dapprima il caso $m = 3, n > 2$. Si ha:

$$Z(\Pi_1 \Pi_2) = Z(\{A\}_{\perp \perp}) + \sum_{k=1}^n \Phi(A \cap B - (A_2 \cup A_3) \cup B_k, A_2 \cap B_k, A_3 \cap B_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \Phi(A \cap B - A \cap B_k, A_1 \cap B_k, (A_2 \cup A_3) \cap B_k)$$

e quindi per la (7.12)

$$Z(\Pi_1 \Pi_2) = Z(\{A\} \Pi_2) + \Phi(A_1, A_2, A_3) + \Phi(\emptyset, A_1, A_2 \cup A_3)$$

Dalla (7.8) e dalla espressione di $Z(\Pi_1)$ si ha poi

$$Z(\Pi_1 \Pi_2) = Z(\Pi_1) + Z(\Pi_2),$$

cioè l'asserto.

Sia infine $m > 3$, $n > 3$. Posto

$$\Pi'_1 \equiv \{A_1, A_2, \dots, A_{m-2}, A_{m-1} \cup A_m\}$$

dalla iii) si ha:

$$Z(\Pi_1 \Pi_2) = Z(\Pi'_1 \Pi_2) + \sum_{k=1}^n \Phi(A \cap B - (A_{m-1} \cup A_m) \cap B_k, A_{m-1} \cap B_k, A_m \cap B_k)$$

e per la (7.12)

$$Z(\Pi_1 \Pi_2) = Z(\Pi'_1 \Pi_2) + \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{m-2} A_i, A_{m-1}, A_m\right)$$

pertanto, se la (7.17) è vera per i valori $m-1$ ed n :

$$Z(\Pi_1 \Pi_2) = Z(\Pi'_1) + \Phi\left(\bigcup_{i=1}^n A_i, A_{m-1}, A_m\right) + Z(\Pi_2)$$

ma per la iii) è

$$Z(\Pi_1) = Z(\Pi'_1) + \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{m-2} A_i, A_{m-1}, A_m\right)$$

È dunque:

$$Z(\Pi_1 \Pi_2) = Z(\Pi_1) + Z(\Pi_2)$$

Ciò conclude la dimostrazione dell'asserto.

8. - L'informazione di Shannon-Rényi.

Si possono ora stabilire alcune condizioni necessarie e sufficienti perchè la misura dell'informazione H di un'esperienza incompleta sia data dalla formula di Shannon-Rényi.

A questo proposito si hanno i seguenti teoremi

TEOREMA 3. - Se la funzione h è un'informazione di evento $J(A)$, munita di una legge di composizione $J(A \cup B) = J(A) \uparrow J(B)$ ($A \cap B = \emptyset$) [1] e se $\Phi(A; B, C)$ è una funzione continua dei valori di J sugli insiemi $A \cup B \cup C$, B, C : $\Phi(A; B, C) = \varphi(J(A \cup B \cup C), J(B), J(C))$, allora $H_n(A_1, \dots, A_n)$ è una funzione continua dei valori di J sugli insiemi $A_1, \dots, A_n$.

DIMOSTRAZIONE. - Basta osservare che per la (4.1) è

$$\begin{aligned} H_n(A_1, \dots, A_n) &= J\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + \sum_{i=0}^{n-2} \Phi\left(\bigcup_{k=0}^i A_k, A_i, \bigcup_{k=i+2}^n A_k\right) = \\ &= \biguparrow_{i=1}^n J(A_i) + \sum_{i=0}^{n-2} \varphi\left(\biguparrow_{k=0}^i J(A_k), J(A_i), \biguparrow_{k=i+2}^n J(A_k)\right) \end{aligned}$$

e ricordare la proprietà di continuità della legge di composizione $\uparrow$.

Se poi J è un'informazione shannoniana (delle condizioni sufficienti perchè ciò accada sono state date da J. Kampé de Fériet e B. Forte: *Information et probabilité*, ...), cioè se

$$J(A \cup B) = J(A) \uparrow J(B) = -\log [e^{-J(A)} + e^{-J(B)}],$$

si ha in più il

TEOREMA 4. - Condizione necessaria e sufficiente perchè l'informazione $H_n(A_1, \dots, A_n)$ sia un'informazione di Shannon-Rényi:

$$H_n(A_1, \dots, A_n) = \frac{\sum_{k=1}^n J(A_k) e^{-J(A_k)}}{\sum_{k=1}^n e^{-J(A_k)}}$$

è che:

- 1) J sia di tipo shannoniano
- 2) siano verificate le ipotesi del teorema 3.

DIMOSTRAZIONE. - Dimostriamo anzitutto che la condizione è sufficiente. Introduciamo la funzione ψ definita da

$$\psi(e^{-x}; e^{-y}, e^{-z}) = \varphi(x; y, z)$$

La proprietà I. per il guadagno di informazione implica

$$\begin{aligned} (8.1) \quad \psi(u; v, w) &= \psi(u; w, v) \geq 0 \\ (v + w \leq u; 0 \leq v \leq 1; 0 \leq w \leq 1; 0 \leq u \leq 1) \end{aligned}$$

La proprietà II. tenendo conto che è $J(\mathbf{0}) = +\infty$, dà

$$(8.2) \quad \phi(u; 0, v) = 0 \quad (0 \leq v \leq u \leq 1)$$

La proprietà III. implica

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \phi(v; u_1, u_2) + \phi(v; u_1 + u_2, u_3) &= \phi(v; u_1, u_3) + \phi(v; u_1 + u_3, u_2) \\ (u_1 + u_2 + u_3 \leq v \leq 1; u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0). \end{aligned}$$

La proprietà IV. implica infine

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \phi(u_1 + u_2 + u_3, u_2, u_3) &= \sum_{i=1}^3 \phi(\sum k_i \sum v_k, u_2 v_k, u_3 v_k) \\ (u_i \geq 0, v_i \geq 0 \text{ per } i = 1, 2, 3; u_1 + u_2 + u_3 \leq 1; v_1 + v_2 + v_3 \leq 1) \end{aligned}$$

Da quest'equazione segue che la funzione $\phi(u, v, w)$ è omogenea di grado zero; infatti, posto $v_1 = t, v_2 = v_3 = 0$, si ha

$$\phi(u_1 + u_2 + u_3, u_2, u_3) = \phi(u_1 t + u_2 t + u_3 t, u_2 t, u_3 t)$$

Posto allora

$$F(u, v, w) = u\phi(u; v, w)$$

la funzione F risulta omogenea di primo grado nelle sue variabili, e può quindi essere prolungata per omogeneità in modo da risultare definita per $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, v + w \leq u$.

In più, dalla relazione (che segue da (8.4))

$$\phi(u_1 + u_2 + u_3, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^m \phi(\sum u \sum v, u_2 v_k, u_3 v_k)$$

posto $v_k = 1/m, k = 1, \dots, m$, si ha

$$F(u, v, w) = F(mu, v, w)$$

D'altra parte, se u' e u'' sono numeri reali nell'intervallo $(0, 1)$ tali che $u' = \frac{r}{s} u''$ (r, s interi), si ha

$$\begin{aligned} F(u', v, w) - F(u'', v, w) &= F\left(\frac{r}{s} u'', v, w\right) - F(u'', v, w) = \\ &= \frac{1}{s} F(r u'', sv, sw) - F(u'', v, w) = \frac{1}{s} F(u'', sv, sw) - \\ &- F(u'', v, w) = F\left(\frac{u''}{s}, v, w\right) - F(u'', v, w) = 0 \end{aligned}$$

Per la continuità della funzione Φ , che implica quella della funzione F , si ha che per ogni coppia di numeri reali u', u'' in $(0, 1)$ è $F(u', v, w) = F(u'', v, w)$, cioè la funzione $F(u, v, w)$ non dipende dalla variabile u .

Si può pertanto porre

$$F(u, v, w) = f(v, w)$$

Le proprietà (8.1) - (8.3) in termini della funzione $f(v, w)$ divengono allora

$$(8.1)' \quad f(x, y) = f(y, x) \geq 0 \quad \text{per} \quad x, y \in (0, 1)$$

$$(8.2)' \quad f(0, y) = 0, \quad y \in (0, 1)$$

$$(8.3)' \quad f(x, y) + f(x + y, z) = f(x, z) + f(x + z, y)$$

In più, la funzione $f(x, y)$ è una funzione omogenea di grado uno nelle sue variabili. Utilizzando questa proprietà, insieme alla simmetria della f , la (8.3) può scriversi nella forma

$$f(y, x) - f(z, x) = f(x + z, y) - f(x + y, z)$$

e posto

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y}, 1\right),$$

si ha

$$xg\left(\frac{y}{x}\right) - xg\left(\frac{z}{x}\right) = yg\left(\frac{x+z}{y}\right) - zg\left(\frac{x+y}{z}\right)$$

Posto infine $y/x = u$, $z/x = v$, si ha

$$(8.5) \quad g(u) - g(v) = ug\left(\frac{1+v}{u}\right) - vg\left(\frac{1+u}{v}\right)$$

A quest'equazione funzionale nell'incognita funzione $g(u)$ va aggiunta l'equazione che si ottiene dalla simmetria e dalla omogeneità della funzione f :

$$xf\left(\frac{y}{x}, 1\right) = yf\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

cioè

$$(8.6) \quad g(u) = ug\left(\frac{1}{u}\right)$$

dovendo poi essere

$$(8.7) \quad g(0) = 0, \quad g(u) \geq 0.$$

Si può ora dimostrare che il sistema di equazioni funzionali

$$\begin{cases} g(u) - g(v) = ug\left(\frac{1+v}{u}\right) - vg\left(\frac{1+u}{v}\right) \\ g(u) = ug\left(\frac{1}{u}\right) \end{cases}$$

con le condizioni (8.7) ammette quale unica soluzione continua la funzione

$$g(u) = p\{(u+1) \log(u+1) - u \log u\}$$

Dalla (8.5) si ha, integrando nella variabile v :

$$vg(u) = \int_0^v g(\xi) d\xi + u \int_0^v g\left(\frac{\xi+1}{u}\right) d\xi - \int_0^v \xi g\left(\frac{u+1}{\xi}\right) d\xi$$

e usufruendo della (8.6)

$$vg(u) = \int_0^v g(\xi) d\xi + u^2 \int_{1/u}^{\frac{v+1}{u}} g(\xi) d\xi - (u+1)^2 \int_0^{\frac{v}{u+1}} g(\xi) d\xi$$

il che dimostra che $g(u) \in C^1(0, +\infty)$.

Derivando quindi primo e secondo membro di questa equazione rispetto alla variabile u , si ha

$$\begin{aligned} vg'(u) &= 2u \int_{\frac{1}{u}}^{\frac{v+1}{u}} g(\xi) d\xi - (v+1)g\left(\frac{v+1}{u}\right) + g\left(\frac{1}{u}\right) - \\ &\quad - 2(u+1) \int_0^{\frac{v}{u+1}} g(\xi) d\xi + vg\left(\frac{v}{u+1}\right) \end{aligned}$$

e questa relazione dimostra che $g'(u) \in C^1(0, \infty)$.

Derivando allora primo e secondo membro della (8.5) rispetto alla u , si ha

$$g'(u) = g\left(\frac{v+1}{u}\right) - \frac{v+1}{u} g'\left(\frac{v+1}{u}\right) - g'\left(\frac{u+1}{v}\right)$$

e scambiando u con v :

$$g'(v) = g\left(\frac{u+1}{v}\right) - \frac{u+1}{v} g'\left(\frac{u+1}{v}\right) - g'\left(\frac{v+1}{u}\right)$$

e derivando ulteriormente rispetto a u :

$$0 = -\frac{u+1}{v^2} g''\left(\frac{u+1}{v}\right) + \frac{v+1}{u^2} g''\left(\frac{v+1}{u}\right)$$

Ponendo quindi $v = u + 1$

$$\frac{1}{u+1} g''(1) = \frac{u+2}{u^2} g''\left(\frac{u+2}{u}\right)$$

Posto infine $\frac{u+2}{u} = x$, $g''(1) = k$, si ha

$$g''(x) = -2k \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right]$$

che implica

$$g(x) = -2k[(x+1) \log(x+1) - x \log x] + c_1 x + c_2$$

Ma essendo $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, dovrà essere $c_2 = 0$.

D'altra parte, la equazione (8.5) implica

$$c_1 u - c_2 v = c_1 v - c_2 u$$

da cui $c_1 = 0$. Posto infine $-2k = p$, si perviene a

$$(8.8) \quad g(x) = p[(x+1) \log(x+1) - x \log x]$$

È immediato riconoscere a questo punto che alla funzione (8.8) corrisponde la funzione

$$\psi(u, v, w) = \frac{p}{u} [(v+w) \log(v+w) - v \log v - w \log w]$$

cui corrisponde l'informazione

$$H_n(A_1, \dots, A_n) = \frac{\sum_{k=1}^n J(A_k) e^{-J(A_k)}}{\sum_{k=1}^n e^{-J(A_k)}}$$

vale a dire la formula di Shannon-Rényi.

È immediato riconoscere viceversa che la formula di Shannon-Rényi soddisfa tutte le condizioni del teorema 4.

9. - Informazione di un'esperienza completa.

Sia $\mathcal{E}^*$ il sottoinsieme di $\mathcal{E}$ formato dalle esperienze complete. La restrizione H^* dell'applicazione H ad $\mathcal{E}^*$ definisce un guadagno di informazione

Φ^* che è la restrizione di Φ alle terne di eventi A, B, C tali che $A \cup B \cup C = \Omega$.

Il guadagno di informazione Φ^* è dunque in questo caso una applicazione $\Psi(A, B) = \Phi^*(\Omega - (A \cup B), A, B)$ delle coppie di eventi disgiunti A, B in $\overline{R}^+$

Nel caso in cui Ψ dipenda da A e da B tramite i valori che la funzione h assume in corrispondenza ad A e a B , si ha

$$\Psi(A, B) = \psi(h(A), h(B))$$

Si supponga ora che la funzione h sia un'informazione di evento $J(A)$ munita di una legge di composizione

$$J(A \cup B) = J(A) \uparrow J(B) \quad (A \cap B = \emptyset).$$

Detto

$$\Gamma = \{(x, y): x = J(A), y = J(B), A \cap B = \emptyset\}$$

$$\Gamma_i = \{(x, y): x = J(A), y = J(B), \{A\} \in \mathcal{K}, \{B\} \in \mathcal{K}\}$$

e posto $G(x, y) = \psi(x, y)$, e ricordando che $J(\emptyset) = +\infty$, le condizioni 1)-4) si traducono in

$$1') \quad G(x, y) \geq 0 \quad (x, y) \in \Gamma$$

$$2') \quad G(+\infty, y) = 0$$

$$3') \quad G(x, y) + G(x \uparrow y, z) = G(x, z) + G(x \uparrow z, y) \\ (x, y) \in \Gamma, \quad (x, z) \in \Gamma, \quad (x \uparrow y, z) \in \Gamma, \quad (x \uparrow z, y) \in \Gamma$$

$$4') \quad G(x_2, x_3) = G(x_2 + y_1, x_3 + y_1) + G(x_2 + y_2, x_3 + y_2) + \\ + G(x_2 + y_3, x_3 + y_3) \quad (y_1 \uparrow y_2 \uparrow y_3 = 0)$$

Si può facilmente dimostrare che queste proprietà sono equivalenti alle seguenti:

$$1) \quad G(x, y) \geq 0 \quad (x, y) \in \Gamma$$

$$2) \quad G(x, y) = G(y, x) \quad (x, y) \in \Gamma$$

$$3) \quad G(x, y) + G(x \uparrow y, z) = G(x, z) + G(x \uparrow z, y) \\ (x, y) \in \Gamma, \quad (x, z) \in \Gamma, \quad (x \uparrow y, z) \in \Gamma, \quad (x \uparrow z, y) \in \Gamma$$

$$4) \quad G(x^* + x \uparrow y, y^* + x \uparrow y) = G(x^* + x, y^* + x) + G(x^* + y, y^* + y) \\ (x, x^*) \in \Gamma_i, \quad (x, y^*) \in \Gamma_i, \quad (y, x^*) \in \Gamma_i, \quad (y, y^*) \in \Gamma_i$$

Queste proprietà coincidono con le condizioni necessarie e sufficienti perchè la funzione G definisca l'informazione di una esperienza completa senza probabilità, come trovasi dimostrato in B. FORTE: *On the amount of information given by an experiment* (in corso di stampa) [5].

10. - Conclusioni.

Gli assiomi che definiscono l'informazione di una esperienza incompleta ai sensi di quanto visto nel paragr. 7 danno luogo ad una deduzione di tipo nuovo dell'informazione di Shannon-Rényi, e sono del tutto compatibili con gli assiomi che definiscono l'informazione di un'esperienza completa. Tuttavia si riconosce che essi non implicano per ciò che riguarda le esperienze costituite da un solo evento le proprietà dell'informazione secondo Kampé de Fériet-Forte.

Pertanto l'informazione risulta definita per ciò che riguarda le esperienze incomplete dagli assiomi proposti nel paragrafo 2, per ciò che riguarda i singoli eventi dagli assiomi proposti da J. Kampé de Fériet e B. Forte. Ciò d'altra parte rispecchia i due punti di vista classicamente distinti illustrati nell'introduzione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. PICARD, *Théorie des questionnaires*, Paris, Gauthier-Villars, 1964.
 - [2] J. KAMPÉ DE FÉRIET, B. FORTE, *Information et probabilité*, Comptes Rendus, 265, série A, 1967, p. 110, 142 e 350.
 - [3] A. RÉNYI, *On measures of entropy and information*, Proc. 4th Berkeley Symposium on Math. Stat. Prob. 1960, vol. I, Univers. of California Press, Berkeley-Los Angeles 1961, p. 547-561.
 - [4] D. A. KAPPOS, *Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder u.-räume*, Berlin, Springer Verlag, 1960, p. 71.
 - [5] B. FORTE, *On the amount of information given by an experiment*, in corso di stampa.
-