# Problèmes aux limites non-linéaires.

C. AVRAMESCU (CRAIOVA)

**Résumé.** - *Le but du travail est de donner des conditions assurant l'existence des solutions du système (S), satisfaisant à la condition (L), où D est un espace fonctionnel et G un opérateur non-linéaire.*

Soit $X$ un espace de Banach à dimension finie, avec la norme $\|\cdot\|$. $C(I, X)$ est l'espace de Banach des fonctions continues sur le compact $I$, à valeurs dans $X$. $D$ et $E$ sont des sous-espaces de $C(I, X)$. Posons $S_\rho = \{x\,;\, x \in C(I, X), |x| \leq \rho\}$, $|x| = \sup\limits_{t \in I} \|x(t)\|$ étant la norme dans $C(I, X)$. $B$ est un sous-espace de l'espace $L(I, X)$ des fonctions intégrables au sens de BOCHNER sur I (ou bien un espace de fonctions mesurables, dont la topologie est plus forte que celle de $L(I, X)$). $G$ est une application de $S_\rho$ dans $E$.
Considérons le système différentiel,

$$(S) \qquad x'(t) = A(t\,;\, x)x(t) + f(t\,;\, x),$$

où $x \in C(I, X)$, $A(t\,;\, x)$ est une application de $I \times S_\rho$ dans l'espace $\mathfrak{L}(X, X)$ des opérateurs continus et linéaires de $X$ à $X$, et $f(t\,;\, x)$ est une application de $I \times S_\rho$ dans $X$. Associons au système $(S)$ la condition aux limites,

$$(L) \qquad x \in D + Gx.$$

Dans le cas particulier $A(t\,;\, x) \equiv A(t)$, $Gx \equiv h(t)$ pour tout $x$, le problème $(S) + (L)$ a été considéré par C. CORDUNEANU [1]. Des autres cas particuliers ont été considérés par A. LASOTA et Z. OPIAL [2], et Z. OPIAL [3]. Des problèmes du même type que $(S) + (L)$ ont été considérés par R. CONTI [4], [5], [6], [7], SANTAGATI [9], G. PULVIRENTI [10], [11], G. PULVIRENTI et G. SANTAGATI [12], E. SCRUCCA [13], C. AVRAMESCU [14], [15]. (Pour les détails concernant les divers types de problèmes aux limites, nous renvoyons le lecteur au travail de R. CONTI [8]. Dans la classification donnée par cet auteur, le problème $(S) + (L)$ appartient aux problèmes du type VI). Remarquons encore le fait que ce travail est lié étroitement aux travaux de J. L. MASSERA et J. J. SCHÄFFER [16], [17], et aussi aux travaux [18], [19], [20], [21], [22]. Nous voudrions souligner encore que les systèmes de la forne $(S)$ admettent comme cas particuliers les systèmes différentiels ordinaires,

$$(S') \qquad x'(t) = A(t,\ x(t))x(t)) + f(t,\ x(t)),$$

et aussi les systemès intégro-différentiels,

$$(S'') \qquad x'(t) = \int_I K(t, s, x(s)ds \cdot x(t) + \int_I H(t, s, x(s))ds$$

**1.** - Nous noterons par $\mathcal{A}$ l'espace des applications de $I$ dans $\mathfrak{L}(X, X)$ intégrables au sens de Bochner ; si nous posons $|A| = \sup_{t\in I} \|\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds\|$ ($\|\cdot\|$ étant la norme dans $\mathfrak{L}(X, X)$, et $t_0 \in I$), alors $\mathcal{A}$ devient un espace normé. (Cette norme a été considerée par Z. OPIAL [3], [23].) Posons $\Sigma_\alpha = \{A\,;\, A \in \mathcal{A},\ \|A(t)\| \leq \alpha(t)$ p.p. dans $I\}$, $\Sigma_a = \{A\,;\ A \in \mathcal{A},\ \int_I \|A(t)\|\,dt \leq a\}$, où $\alpha(t)$ est une function positive et sommable sur $I$, et $a = \int_I \alpha(t)dt$. Évidemment, $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_a$ ; de plus, $\Sigma_\alpha$ est compact dans $\mathcal{A}$ (voir [3]). Posons encore $\Sigma_b = \{f\,;\ f \in B,\ \|f(t)\| \leq b(t)$ p.p. dans $I\}$, $b(t)$ étant une fonction positive et sommable sur $I$. Soient $x \longrightarrow A(\cdot, x)$ une application de $S_\rho$ dans $\mathcal{A}$, $x \longrightarrow f(\cdot, x)$ une application de $S_\rho$ dans $B$, et $x \longrightarrow Gx$ une application de $S_\rho$ dans $E$. Désignons par $\Sigma_A$ l'image de $S_\rho$ par l'application $x \longrightarrow A(\cdot, x)$, et par $\Sigma$ la fermeture de $\Sigma_A$ dans $\mathcal{A}$. Nous allons supposer que $\Sigma \subset \Sigma_\alpha$.

**2.** - Nous allons considérer maintenant les systémes :

$$(S_u) \qquad x'(t) = A(t\,;\, u)\ x\ (t) + f(t),$$

$$(S_{ou}) \qquad x'(t) = A(t\,;\, u)x(t),$$

où $u \in S_\rho$, $f \in L(I, X)$, et aussi les systèmes,

$$(S_1) \qquad x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

$$(S_0) \qquad x'(t) = A(t)x(t),$$

où $A \in \mathcal{A}$.

LEMME 1. - *Soient* $A_n \in \Sigma_\alpha$, $f_n \in L(I, X)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, *tels que* $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. *Soit* $x_n$ *une solution du système,*

$$x'(t) = A_n(t)x(t) + f_n(t).$$

*Alors si* $x_n$ *converge dans* $C(I, X)$ *vers* $x$, *il s'ensuit que* $x$ *est la solution du système* $(S_1)$ *satisfaisant à la condition initiale* $x\ (t_0) = \lim_{n\to\infty} x_n\ (t_0)$.

On doit le résultat contenu dans ce lemme à Z. OPIAL [23].

3. - Nous disons que la paire $(B, D)$ est *admissible* par rapport à $\Sigma_A$, si pour tout $u \in S_\rho$ l'équation $(S_u)$ admet au moins une solution satisfaisant à la condition

$$(L_u) \qquad x \in D + Gu,$$

quel que soit $f \in B$. Il s'agit donc d'une hypothèse modifiée d'admissibilité au sens de MASSERA-SCHÄFFER. Il est aisé de voir que si la paire $(B, D)$ est admissible par rapport à $\Sigma_A$, alors quels que soient $u \in S_\rho$ et $f \in B$, le système $(S_u)$ admet au moins une solution satisfaisant à la condition

$$(L_0) \qquad x \in D.$$

En effet, soit $f \in B$, et soient $h, g \in B$, tels que $f = g - h$. Si nous désignons par $x_g$ et $x_h$ les solutions du problème $(S_u) + (L_u)$, où nous avons posé $g$ et $h$ au lieu de $f$, alors la fonction $x = x_g - x_h$ est une solution du problème $(S_u) + (L_0)$.

Nous allons remarquer encore que si le problème $(S_{0u}) + (L_0)$ admet pour tout $u \in S_\rho$ des solutions non-nulles, alors le problème $(S_0) + (L_0)$ admet aussi des solutions non-nulles, pour tout $A \in \Sigma$. En effet, soit $A \in \Sigma$. Il existe alors une suite $A_n \in \Sigma_A$, telle que $A_n$ converge vers $A$, dans la topologie de $\mathcal{A}$. Désignons par $x_n$ une solution du système

$$x'(t) = A_n(t)x(t),$$

satisfaisant à la condition $(L_0)$. Si $|x_n| \neq 0$ pour tout $n$, posons $y_n = x_n/|x_n|$. On a $y_n'(t) = A_n(t)y_n(t)$, $y_n \in D$ et $|y_n| = 1$. Comme $|y_n| = 1$ et $\|y_n'(t)\| \leq \alpha(t)$, il résulte d'après le théorème d'ASCOLI-ARZELA que la suite $\{y_n\}$ est compacte dans $C(I, X)$, (et donc et dans $D$). Alors il existe une sous-suite $\{y_{n_k}\}$ qui converge dans $D$ vers $y \in D$. D'après le lemme 1, il en résulte que $y$ satisfait au système $y'(t) = A(t)y(t)$; donc $y$ est une solution du problème $(S_0) + (L_0)$. De plus cette solution n'est pas nulle, parce que $|y| = 1$.

Nous allons noter par $X_{0D}(A)$ l'esemble des valeurs des solutions de $(S_0)$ satisfaisant à $(L_0)$ pour $t = t_0 \in I$. Nous allons supposer que $X_{0D}(A) = X_{0D}$ pour tout $A \in \Sigma$, $X_{0D}$ étant un sous-espace de $X$. Désignons par $X_{1D}$ le complement de $X_{0D}$ dans $X$, par $P_0$ l'opérateur de projection sur $X_{1D}$ el par $P_1$ l'operateur de projection sur $X_{1D}$.

4. - On peut donner maintenant quelques resultats fondamentaux pour ce qui suit.

LEMME 2. - *Supposons que,*

a) *la paire $(B, D)$ est admissible par rapport à $\Sigma_A$*

b) $X_{0D}(A) = X_{0D}$ *pour tout* $A \in \Sigma$.

*Alors le problème* $(S_u)+(L_u)$ *admet une solution unique satisfaisant à la condition*

(1) $$P_0 x(t_0) = \xi \in X_{0D}\,.$$

DÉMONSTRATION. - Soit $x_1$ une solution du problème $(S_u)+(L_u)$, solution qui existe en vertu de l'hypothèse d'admissibilité. Soit $x_2$ la solution de $(S_u)$ qui satisfait à la condition initiale $x_2(t_0) = P_1 x_1(t_0) \in X_{1D}$. Il est évident que $x_1 - x_2$ est une solution de $(S_{0u})$; parce que $P_1(x_1(t_0) - x_2(t_0)) = 0$, il en résulte que $x_1 - x_2, \in D$, ce qui nous montre que $x_2 \in D + Gu$. Donc il existe au moins une solution du problème $(S_u)+(L_u)$ telle que $x(t_0)\in X_{1D}$. Nous allons montrer que cette solution est unique. En effet, si $x$ et $y$ sont deux solutions du problème $(S_u)+(L_u)$, telles que $x(t_0)$, $y(t_0)\in X_{1D}$, alors $x-y$ est une solution du problème $(S_{0u})+(L_0)$. Mais parce que $P_0(x(t_0) - y(t_0)) = 0$, il résulte que $x(t_0) - y(t_0) = 0$, ce qui nous montre que $x(t)\equiv y(t)$. Soit maintenant $y(t)$ la solution unique du problème $(S_u)+(L_u)$, telle que $y(t_0)\in X_{1D}$, et soit $z(t)$ la solution du problème $(S_{0u})+(L_0)$ satisfaisant à la condition initiale $z(t_0)=\xi$. Alors la fonction $x = z + y$ est une solution du problème $(S_u)+(L_u)+(1)$. Il est aisé de voir que cette solution est unique, parce que $z$ et $y$ sont déterminés d'une manière unique.

LEMME 3. - *Supposons que les hypothèses du lemme* 2 *sont satisfaites et que de plus,*

c) $GS_\rho$ *est un ensemble borné dans E.*

*Alors il existe un nombre positif M tel que pour tout* $f\in\Sigma_\rho$ *et* $u\in S_\rho$, *l'on ait*

(2) $$|x| \leq M,$$

*x étant la solution du problème* $(S_u)+(L_u)+(1)$.

DÉMONSTRATION. - Supposons que la conclusion du lemme n'est pas vraie. Alors quel que soit l'entier positif $n$, il existe $u_n\in S_\rho$ et $f_n\in\Sigma_b$ tels que pour la solution $x_n$ du problème

(3) $$x'(t) = A(t\,;\,u_n)x(t) + f_n(t)$$

(3') $$x_n \in D + Gu_n\,;\quad P_0 x(t_0) = \xi,$$

on ait,

(4) $$|x_n| > n.$$

Si nous posons $y_n(t) = x_n(t)/|x_n|$, nous aurons,

(5) $$y'_n(t) = A(t\,;\,u_n)y_n(t) + h_n(t)$$

(6) $$y_n \in D + Gu_n/|x_n|\,;\quad P_0 y_n(t_0) = \xi/|x_n|$$

(7) $$|y_n| = 1,$$

où $h_n(t) = f_n(t)/|x_n|$. Parce que $\|h_n(t)\|\leq b(t)/n$ p. p. dans $I$, il résulte que

$h_n \to 0$ dans $B$, donc dans $L(I, X)$. Du fait que $\|y'(t)\| \leq \alpha(t) + b(t)/n$ p. p. dans $I$, il résulte, compte tenant de (7) que l'ensemble $\{y_n\}$ est compact dans $C(I, X)$. Il existe donc $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ tel que $y_{n_k} \to y$ dans $C(I, X)$. Parce que $\Sigma$ est compact dans $\mathcal{A}$, on peut supposer que $A(t; u_n)$ converge vers $A \in \Sigma$. Du lemme 1 il résulte alors que $y$ saisfait à l'équation

$$(8) \qquad y'(t) = A(t)y(t).$$

Mais $Gu_n$ étant borné, il résulte que $Gu_n/|x_n|$ converge vers zéro dans $C(I, X)$, ce qui nous permet de conclure que $y \in D$. D'autre part de (6) il résulte encore $P_0 y(t_0) = 0$, et donc $y(t_0) = 0$, ce qui nous montre que $y(t) \equiv 0$ dans I; ce fait est en contradiction avec l'égalité (7).

LEMME 4. – *Supposons que les hypothèses du lemme* 3 *sont satisfaites et que de plus,*

d) *l'application* $x \to A(\cdot, x)$ *est continue*

e) *l'application* $x \to Gx$ *est continue.*

*Soient* $u_n$, $u \in S_\rho$, $f_n$, $f \in \Sigma_b$, *tels que* $u_n \to u$ *dans* $C(I, X)$ *et* $f_n \to f$ *dans* $L(I, X)$. *Notons par* $x_n$ *la solution du problème*

$$(9) \qquad x'(t) = A(t; u_n)x(t) + f_n(t), \quad x \in D + Gu_n, \quad P_0 x(t_0) = \xi,$$

*et par* $x$ *la solution du problème* $(S_u) + (L_u) + (1)$. *Dans ces conditions* $x_n$ *converge vers* $x$ *dans* $C(I, X)$.

DÉMONSTRATION. – Supposons que $x_n$ ne converges pas vers $x$. Alors il existe un nombre positif $q$ et une suite $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, avec $n_k \to \infty$, telle que,

$$(10) \qquad |x_{n_k} - x| > q.$$

D'après le lemme 3 il résulte que $|x_{n_k}| \leq M$; alors de (9) il résulte que $\|x'_{n_k}(t)\| \leq M.\ \alpha(t) + b(t)$ p.p. dans $I$, ce qui nous montre que $\{x_{n_k}\}$ est compact dans $C(I, X)$. Soit $\{x_{n_p}\} \subset \{x_{n_k}\}$ tel que $x_{n_p} \to z$ dans $C(I, X)$. La continuité de l'operatéur $A(\cdot, u)$ nous assure que $A(\cdot, u_n) \to A(\cdot, u)$. Alors, d'après le lemme 1 il résulte que $z$ est une solution du système $(S_u)$. En même temps $x_{n_p} \in D + Gu_{n_p}$ et $P_0 x_{n_p}(t_0) = \xi$, impliquent, compte tenant de la continuité de $G$ et $P_0$ que $z \in D + Gu$ et $P_0 z(t_0) = \xi$. Donc $z = x$, ce qui est en contradiction avec (10).

5. – Nous pouvons maintenat donner un théorème d'existence pour le problème $(S) + (L) + (1)$, en utilisant le principe de point fixe de SCHAUDER.

THÉORÈME 1. – *Admettons les hypothèses suivantes:*

1) $x \to A(\cdot, x)$ *est une application continue de* $S_\rho$ *sur* $\Sigma_A$

2) $x \to f(\cdot, x)$ *est une application continue de* $S_\rho$ *dans* $\Sigma_b$

3) *la paire* $(B, D)$ *est admissible par rapport à* $\Sigma_A$

4) $X_{0D}(A) = X_{0D}$ *pour tout* $A \in \Sigma$, $X_{0D}$ *étant un sous-espace de* $X$

5) $x \to Gx$ *est une application continue de* $S_\rho$ *dans* $E$, *telle que* $|GS_\rho| \leq k$, $k > 0$.

*Alors le problème* $(S) + (L) + (1)$ *admet au moins une solution, dès que, indiquant avec* $M$ *la constante du lemme* 3

$$M \leq \rho. \tag{11}$$

DÉMONSTRATION. - Nous allons considérer l'espace $C(I,X)$ comme espace fondamental. Définissons sur $S_\rho \subset C(I, X)$, l'opérateur $T$ de la manière suivante : pour tout $u \in S_\rho$, soit $x = Tu$ la solution du système

$$x'(t) = A(t;\ u)x(t) + f(t;\ u), \tag{12}$$

satisfaisant aux conditions $(L_u) + (1)$. Vu que $f(\cdot,\ u) \in B$, la fonction $x$ est déterminée d'une manière unique, selon le lemme 2. Du lemme 3 il résulte, compte tenant de (11), $TS_\rho \subset S_\rho$. Cette inclusion nous montre en même temps que les fonctions de l'ensemble $TS_\rho$ sont uniformément bornées sur $I$. De l'inégalité,

$$\|x(t) - x(s)\| \leq \left| \int_s^t \|x'(v)\| dv \right| \leq \left| \int_s^t (M\alpha(v) + b(v)) dv \right| \tag{13}$$

on déduit que les fonctions de $TS_\rho$ sont équicontinues sur $I$. Donc l'esemble $TS_\rho$ est compact. La continuité de cet opérateur résulte du lemme 4. $S_\rho$ étant un esemble convexe et borné, toutes les conditions exigées par le théorème de SCHAUDER sont satisfaites, donc l'opérateur $T$ admet au moins un point fixe. Mais il est évident qu'un tel point est une solution du probléme $(S) + (L) + (1)$, et le théorème se trouve ainsi démontré.

REMARQUE 1. - Dans les hypothéses du théorème 1 on peut démontrer aussi l'existence d'une solution pour le probléme $(S) + (L_0) + (1)$. En effet, comme nous avons dejà observé, le problème $(S_0) + (L_0)$ admet au moins une solution. On peut montrer aussi dans le lemme 2 que cette solution est unique, si elle satisfait de plus à la condition (1). En appliquant le théorème de SCHAUDER d'une manière analogue que dans le théorème 1, en modifiant seulement l'opérateur $T$, on obtient le résultat mentionné.

REMARQUE 2. - Dans le cas particulier $A(t, x) \equiv A(t)$, comme l'application $x \to A(\cdot,\ x)$ est une application constante, l'hypothèse d'admissibilité doit être reformulée dans la manière suivante : le système $(S_u)$ admet au moins une solution satisfaisant à la condition

$$x \in D + g \tag{$L_g^*$}$$

pour toute fonction $g(t) \in GS_\rho$. Dans le cas particulier $A(t, x) \equiv A(t)$ et $Gx \equiv g$, notre théorème nous conduit au résultat de C. CORDUNEANU [1].

REMARQUE 3. - Dans le cas particulier $A(t, x) \equiv A(t)$ et $Gx \equiv g$, le lemme 4 nous montre que la solution du système

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x), \tag{14}$$

satisfaisant aux conditions $(L_g) + (1)$, dépend d'une manière continue de $A$ et $g$. On obtient ainsi un résultat comparable à celui obtenu par G. SANTAGATI [9].

REMARQUE 4. - Parmi les cas particuliers dans lesquels l'hypothèse 4 du théorème 1 est satisfaite, il faut remarquer les cas « limites » $X_{0D}(A) = \{0\}$ et $X_{0D}(A) = X$ pour tout $A \in \Sigma$. On voit aisément que le probléme $(S_u) + (L_u)$ admet une solution unique si et seulement si $X_{0D}(A) = \{0\}$. Aussi, si nous supposons que toutes les solutions de $(S_U)$ satisfont à la condition $(L_U)$ alors il résulte $X_{0D}(A) = X$. Dans ce dérnier cas nous avons pour la constante $M$ la valeur suivante :

$$M = \int_I \alpha(t)dt. \left\{ \|\xi\| + \int_I exp\left(-\int_0^s a(t)dt\right)b(s) \; ds \right\}.$$

7. - Nous allons donner maintenant une application de notre théorème 1. On suppose dans ce qui suit que dim $X =$ dim $E$.

COROLLAIRE 1. *Admettons les hypothèses suivantes :*

1) $x \to A(\cdot, x)$ *est une application continue de* $S_\rho$ *sur* $\Sigma_A$

2) $x \to f(\cdot, x)$ *est une application continue de* $S_\rho$ *dans* $\Sigma_\rho$

3) $\varphi$ *est un operateur linéaire et continu de* $C(I, X)$ *dans* $E$

4) *la seule solution de l'équation* $\varphi x = 0$ *appartenant à l'espace des solutions de l'equation* $(S_0)$ *est la solution banale, pour tout* $A \in \Sigma$

5) $\psi$ *est un opérateur continu de* $S_\rho$ *à* $E$, *tel que* $|\psi S_\rho| \leq r$.

*Alors le système* $(S)$ *admet au moins une solution satisfaisant à la condition*

$$\varphi x = \psi x, \tag{15}$$

*dès que* $\rho$ *et* $1/r$ *sont suffisamment grands.*

Pour la démonstration du corollaire nous allons appliquer le théorème 1. Notons par $X(A)$ l'espace des solutions du système $(S_0)$ et par $X(u)$ l'espace des solutions du système $(S_{0u})$. Remarquons tout d'abord que la restriction

$\varphi_u$ de $\varphi$ relative *à* $X(u)$ est invertible pour tout $u \in S_\rho$, et $\varphi_u^{-1}$ est un opérateur continu. Alors la condition (15) peut s'écrire sous la forme

$$x \in N_\varphi + \varphi_x^{-1}\psi x \tag{16}$$

où $N_\varphi$ est l'espace nul de $\varphi$. Donc on peut appliquer le théorème 1 en prenant $D = N_\varphi$ et $Gx = \varphi_x^{-1}\psi x$. Il suffira de montrer que la paire $(B, N_\varphi)$ est admissible par rapport à $\Sigma_A$ et que $X_{0D}\,(A)$ est un espace constant pour tout $A \in \Sigma$. En effet, la fonction

$$x(t) = \varphi_u^{-1}\psi u - \varphi_u^{-1}\varphi\int_{t_0}^{t} U_u(t)U_u^{-1}(s)f(s)ds + \int_{t_0}^{t} U_u(t)U_u^{-1}(s)f(s)ds \tag{17}$$

où $U_u(t)$ est la solution problème

$$U'(t) = A(t,\ u)U(t), \quad U(t_0) = J, \tag{18}$$

($J$ étant l'identité dans $X$), est une solution du système $(S_u)$; on voit aisément que pour cette solution on a

$$x \in N_\varphi + \varphi_u^{-1}\psi u. \tag{19}$$

De plus, la solution du problème (18) + (19) est unique, fait qui résulte de l'égalité $X_{0D}(A) = \{0\}$, égalité qui est une conséquence de l'hypothèse 4 du corollaire, et qui est valable pour tout $A \in \Sigma$.

Donc toutes les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites, ce qui démontre le corollaire. Il est aisé de voir que dans le cas de ce corollaire on a pour la constante $M$ la valeur,

$$M = d.\ r + (1 + d\ \|\varphi\|).\ \exp\int_I \alpha(t)dt.\int_I b(t)dt,$$

où,

$$d = \sup_{A \in \Sigma}\|\varphi_A^{-1}\| \quad (\varphi_A \text{ étant la restriction de } \varphi\, \grave{a} X(A))$$

On a $d < +\infty$, parce que $\varphi_A^{-1}$ est une fonction continue par rapport a $A$ sur le compact $\Sigma$.

REMARQUE 5. - Si dans le corollaire 1 on considére le cas particulier $A(t,\ x) \equiv A(t)$, on obtient le résultat contenu dans [10] et [14]; si en plus on prend $\psi x \equiv e \in E$, on obtient le résultat de R. CONTI [4], [5].

REMARQUE 6. - Le résultat contenu dans le corollaire 1 est comparable au résultat de Z. OPIAL [3]. Si dans ce corollaire on prend $\varphi x = x(t_1) - x(t_2)$

et $\psi x \equiv 0$, où $I = [t_1, t_2]$, alors on obtient le résultat de LASOTA et OPIAL [2], concernant l'existence des solutions périodiques. Des résultats semblables on ont été obtenus par I. BARBALAT et A. HALANAY [24] et G. VILLARI [25].

8. - On peut démontrer un théorème d'existence pour la problème $(S) + (L)$, sans avoir assuré le fait que $X_{0D}(A)$ ne dépend pas de $A$.

THÉORÈME 2. - *Admettons les hypothèses suivantes:*

1) $x \longrightarrow A(\cdot, x)$ *est une application continue de* $S_\rho$ *sur* $\Sigma_A$

2) $x \longrightarrow f(\cdot, x)$ *est une application continue de* $S_\rho$ *dans* $\Sigma_b$

3) $G$ *est une application continue de* $S_\rho$ *dans* $E$ *telle que* $|GS_\rho| \leq r$

4) *pour tout* $u \in S_\rho$ *la solution du système* $(S_u)$ *avec la condition initiale* $x(t_0) = 0$, *satisfait à la condition* $(L_u)$

5) $\exp \int_I \alpha(t)dt \cdot \int_I b(t)dt \leq \rho$.

*Alors le problème* $(S) + (L)$ *admet au moins une solution, et cette solution satisfait à la condition initiale* $x(t_0) = 0$.

Pour la démonstration on appliquera de nouveau le théorème de SCHAUDER dans $C(I, X)$, en prenant comme opérateur $T$ l'opérateur qui fait correspondre à chaque $u \in S_\rho$ la solution du problème $(S_u) + (L_u)$ avec la condition initiale $x(t_0) = 0$. Remarquons que dans ce cas on a pour $M$ la valeur

$$M = \int_I b(t)dt \cdot \exp \int_I \alpha(t)dt.$$

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à la dèmonstration du théorème 1.

## OUVRAGES CITÉS


[1] C. CORDUNEANU, *Problèmes aux limites linéaires*, Annali Mat. Pura ed Appl., (IV), vol. LXXIV (1966).

[2] A. LASOTA et Z. OPIAL, *Sur les solutions périodiques des équations différentielles ordidinaires*, Ann. Pol. Math. XVI (1964)

[3] Z. OPIAL, *Linear problems for systems of nonlinear differentials equations*, Journ. of Diff. Equations, 3, (1967).

[4] R. CONTI, *Equazioni differenziali ordinarie con condizioni lineari generali*, Rend. Accad. Lincei, serie VIII, vol. XXVI, (1959)

[5] — —, *Problèmes linéaires pour les équations différentielles ordinaires*, Math. Nachr. 23, (1961)

[6] — —, *Problemi quasi lineari negli spazi di Banach*, Rend. Accad. Lincei, serie VIII vol. XXXII (1962).

[7] — —, *Problèmes aux limites non linéaires, les vibrations forcées dans les systèmes non-linéaires*, Colloques Intern. du C. N. R. S. n° 148, Marseille, (1964).

[8] — —, *Recent trends in theoiy ot boundary value problems for ordinary differential equations*, Boll. U. M. I. (3), vol. XXII (1967).

[9] G. SANTAGATI, *Equazioni differenziali ordinarie con condizioni quasi lineari*, Annali di Mat. Pura ed App., 62, (1963).

[10] G. PULVIRENTI, *Equazioni differenziali ordinarie quasi lineari con condizioni quasi lineari*, Le Matematiche 16, (1961).

[11] — —, *Problemi lineari per le equazioni differenziali ordinarie in uno spazio di Banach*. Le Matematiche, 15, (1960).

[12] G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI, *Esistenza, unicità e dipendenza continua per una classe di problemi ai limiti non lineari*, Annali di Mat. Pura ed Appl., serie IV, tom. LXXVI, (1967).

[13] E. SCRUCCA, *Un problema ai limiti quasi lineari in spazi di Banach*, Atti Accad Naz. Lincei, serie VIII, vol. XLII, fasc. 3 (1967)

[14] C. AVRAMESCU, *Systèmes différentials à conditions aux limites non homogènes*, Studii si Cerc., XIV, fasc 1, Iasi (1963) (en roumain).

[15] — —, *Systèmes différentiels à conditions aux limites générals*, Bul. Inst. Polit. Iasi, (XV), 11, (1965) (en roumain).

[16] J. L. MASSERA-J. J. SCHÄFFER, *Linear differential equations and functional analysis*, I, Ann. of Math., t. 67 (1958).

[17] — —, *Linear differential equations and functional analysis* IV, Math.A nn T. 139, 1960).

[18] C. CORDUNEANU, *Sur certains systèmes différentiels non-linéaires*, An. St. Univ A. I. Cuza, Iasi, t. VI, (1960).

[19] — —, *Sur certaines équations fonctionnelles de Volterra*, Funk. Ekv. vol 9, 1-3, (1966).

[20] PH. HARTMAN-ONUCHIC, *On the asymptotic integration of ordinary differential equations*, Pacif. J. Math., t. 13, (1963).

[21] H. ANTOSIEWCZ, *Un analogue du principe du point fixe de Banach*, Annali di Mat. Pura ed Appl., (IV), vol. LXXIV, (1966).

[22] H. A. ANTOSIEWICZ, *Boundary value problemes for non-linear ordinary differential equations*, Pacific J. Math., t. 17, (1966).

[23] Z. OPIAL, *Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations*, Journ. Diff. Eqs., 3, (1967).

[24] I. BARBALAT-A. HLANAY, *Solutions périodiques des systèmes d'équations differentielles nonlinéaires*, Rev. Math. Pures Appl 3, (1958).

[25] G. VILLARI, *Contributi allo studio dell'esistenza di soluzioni periodiche per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie*, Ann. Mat. Pura ed Appl. 69 (1965).