Sur le problème de la correspondance par parallélisme entre les variétés réglées dans S_n.

STEFANIA RUSCIOR (Jassy, Roumanie)

Hommage à Monsieur le Professeur ENRICO BOMPIANI

Sunto. - *In una serie di lavori anteriori propri l'A. ha studiato le ipersuperficie rigate dello S_4 e S_5 ed ha stabilito tra l'altro delle corrispondenze per parallelismo tra vari tipi di varietà rigate di tali spazi* [9] — [14].

Il presente lavoro si riferisce alle varietà rigate dello S_n ed è suddiviso in due parti. Nella prima, si da una classificazione affine delle ipersuperficie rigate nello S_n, necessaria per lo studio del problema della corrispondenza per parallelismo, mentre nella seconda si determinano alcune corrispondenze per parallelismo tra le varietà rigate di questo spazio.

Ce travail représente une généralisation de la correspondance par plans tangents parallèles, établie entre les surfaces réglées de S_3 par *I.* CREANGA [1], [2].

Le problème de la correspondance par plans tangents parallèles a été initié par le mathématicien russe K. M. PETERSON, et beaucoup de travaux relatifs à ce problème ont été élaborés par l'école de géométrie de MOSCOU [3] - [5] et de JASSY [6] - [8]. À JASSY l'étude de ce problème a été initiée par Al. MYLLER et continuée par O. MAYER.

Dans plusieurs travaux antérieurs nous avons étudié les hypersurfaces réglées de S_4 et de S_5 et nous avons établi des correspondances par parallélisme entre les divers types de variétés règlées de ces espaces [9] - [14].

Le présent ouvrage se rapporte aux variétés réglées de S_n et contient deux parties. Dans la première, nous donnons une classification affine des hypersurfaces réglées dans S_n, nécessaire pour le traitement du problème de la correspondance par parallélisme, et dans la deuxième, nous déterminons quelques correspondances par parallélisme entre les variétés réglées de cet espace.

1. - La classification affine des hypersurfaces réglées dans S_n.

Une hypersuface réglée dans S_n peut être regardée comme un lieu de points ou bien comme un lieu de droites. Considérée comme un lieu de points, elle a l'équation

$$\bar{r} = \bar{\rho}(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}) + w\bar{\alpha}(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}), \tag{1}$$

où $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u_i)$ représente la variété directrice ayant $n - 2$ dimensions, et $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(u_i)$ est le verseur de la génératrice déterminé en chaque point de la variété directrice. $u_1 = \text{const.}$, $u_2 = \text{const.}, \dots, u_{n-2} = \text{const.}$ caractérisent une génératrice de l'hypersurface. En supposant, dans ce qui suit, que les conditions de régularité nécessaires sont satisfaites et en particulier que la matrice fonctionelle

$$(\bar{r}_{u_1}, \bar{r}_{u_2}, \dots, \bar{r}_{u_{n-2}}, \bar{r}_w)$$

est de rang $n - 1$ pour les valeurs génériques des paramètres $u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, w$, on peut déterminer en chaque point non singulier de la génératrice un hyperplan tangent donné par l'équation

$$[\bar{R} - \bar{r}, \bar{r}_{u_1}, \bar{r}_{u_2}, \dots, \bar{r}_{u_{n-2}}, \bar{r}_w] = 0. \tag{2}$$

C'est une variété linéaire de dimension $n - 1$. En tenant compte de l'expression de r de l'équution (1), l'équation de l'hyperplan tangent est

$$[\bar{R} - \bar{\rho}, \bar{\rho}_{u_1} + w\bar{\alpha}_{u_1}, \bar{\rho}_{u_2} + w\bar{\alpha}_{u_2}, \dots ; \bar{\rho}_{u_{n-2}} + w\bar{\alpha}_{u_{n-2}}, \bar{\alpha}] = 0.$$

Ordonnée d'aprés w, cette équation s'écrit comme un polynôme de degré $n - 2$ en w:

$$F(w) = a_0 w^{n-2} + a_1 w^{n-3} + \dots + a_{n-2} = 0, \tag{3}$$

où les coefficients a_i sont des fonctions de $\bar{\rho}_{u_i}$ et $\bar{\alpha}_{u_i}$ donnés par

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = [\bar{R} - \bar{\rho}, \bar{\alpha}_{u_1}, \bar{\alpha}_{u_2}, \dots, \bar{\alpha}_{u_{n-2}}, \bar{\alpha}], \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\ a_{n-2} = [\bar{R} - \bar{\rho}, \bar{\rho}_{u_1}, \bar{\rho}_{u_2}, \dots, \bar{\rho}_{u_{n-2}}, \bar{\alpha}]. \end{array}\right. \tag{4}$$

Un point propre de la génératrice est ***singulier*** lorsque les vecteurs qui définissent l'hyperplan tangent $\bar{\rho}_{u_i} + w\bar{\alpha}_{u_i}$, $i = 1, 2, \dots, n - 2$ et $\bar{\alpha}$ sont linéairement dépendants. Un point impropre de la génératrice est singulier lorsque les vecteurs α_{u_i} et $\bar{\alpha}$ sont linéairement dépendants. Le point singulier est nommé de *1^e^ espèce* si les $n - 1$ vecteurs se réduisent à $n - 2$ vecteurs indépendants. Le point singulier est de *2^e^ espèce* si les vecteurs considérés se réduisent à $n - 3$ vecteures indépendants. En général, il est *d'espéce r* si les vecteurs considérés se réduisent à $n - r - 1$ vecteurs indépendants. Au lieu des vecteurs considérés, nous pouvons prende la matrice

$$M = (\bar{\rho}_{u_1} + w\bar{\alpha}_{u_1}, \bar{\rho}_{u_2} + w\bar{\alpha}_{u_2}, \dots, \bar{\rho}_{u_{n-2}} + w\bar{\alpha}_{u_{n-2}}, \bar{\alpha}),$$

respectivement

$$M' = (\bar{\alpha}_{u_1}, \bar{\alpha}_{u_2}, \dots, \bar{\alpha}_{u_{n-2}}, \bar{\alpha}).$$

Lorsque le rang de la matrice est r, alors le point singulier est d'espèce $n - r - 1$. À un point singulier propre $\bar{\rho} + w_1\bar{\alpha}$ correspond un facteur linéaire $w - w_1$, indépendant de R du polynôme $F(w)$. En introduisant les paramètres homogènes w_1 et w_2 au lieu de w, nous pouvons dire qu'à chaque point singulier correspond un facteur $f(w)$ indépendant de $\bar{R}$ du polynôme F rendu homogène. Inversement, en considérant que le polynôme rendu homogéne admet un facteur $f(w)$ qui dépend seulement de w, sans dépendre des autres éléments de l'hypersurface, ils peuvent se présenter plusieurs cas, selon le degré du facteur $f(w)$, à savoir: Si $f(w)$ a le degré 1, nous avons sur la génératrice un point singulier (un foyer de 1e espèce); si ce facteur est de 2e degré, sur une génératrice générique nous avons deux points singuliers (deux foyers, distincts ou confondus, à la distance finie ou à l'infini); enfin, si le facteur $f(w)$ a le degré p, sur une génératrice nous avons p points singuliers (p foyers): p points singuliers d'espèce $n - 1 - p$. Un point singulier mobile sur l'hypersurface s'appelle *foyer*. Dans le cas où le point impropre sur chaque génératrice est singulier de 1e espèce, la matrice M' est de rang $n - 2$ et la section impropre de l'hypersurface est une variété de dimension $n - 3$. Si le point impropre est singulier d'espèce r, alors dans ce point le rang de la matrice M' est $n - r - 1$, et la section imprope a la dimension $n - r - 2$. Par conséquent, le rang de la matrice M carartérise les points singuliers sur une génératrice, et le rang de la matrice M' caractérise la dimension de la section impropre de l'hypersurface réglée. Nous pouvons donner la classification projective suivante des hypersurfaces réglées où l'on ne tienne compte que de la nature des points focaux situés sur une génératrice générique: La classe des hypersurfaces réglées qui n'admettent pas de points singuliers sur une génératrice générique (pour lesquelles la matrice M est de rang $n - 1$ en tout point), la classe des hypersurfaces réglées dont la génératrice *contient un foyer* de 1e espèce (le rang de la matrice étant $n - 2$ en ce point) et la classe des hypersurfaces réglées qui admettent r points singuliers ou bien un point singulier d'espèce r sur une génératrice générique. On démontre qu'un point singulier de 1e espèce de multiplicité r est un point singulier d'espèce r (le rang de la matrice M étant dans ce point $n - r - 1$).

Si nous considérons aussi la section impropre de l'hypersurface réglée, nous trouvons une classification affine des hypersurfaces réglées dans S_n. Une hypersurface réglée peut intersecter l'hyperplan impropre d'après une variété à $n - 2$, $n - 3, \dots$, ou, en général, à $n - r - 1$ dimensions d'après le rang de la matrice M'.

Nous pouvons synthétiser les résultats obtenus, en tenant compte de deux indices, à savoir: l'indice a qui nous donne le nombre des points singuliers sur une génératrice générique, et l'indice d qui nous donne la dimension de la section impropre. Nous avons ainsi un tableau à double entrée, dans lequel sont contenues toutes les hypersurfaces réglées de S_n:

$a \backslash d$	$n-2$	$n-3$	....	1	0
0	V_0^{n-2}	—		—	—
1	V_1^{n-2}	V_1^{n-3}		—	—
2	V_2^{n-2}	V_2^{n-3}		—	—
.	.	.	....	—	—
$n-3$	V_{n-3}^{n-2}	V_{n-3}^{n-3}		V_{n-3}^{1}	—
$n-2$	V_{n-2}^{n-2}	V_{n-2}^{n-3}		V_{n-2}^{1}	V_{n-2}^{0}

Les divers types d'hypersurfaces réglées introduits dans le tableau sont caractérisés par les deux indices a et d et nous les notons par V_a^d. Les deux indices dépendent des rangs des matrices M et M' et sont liés entre eux par la relation

$$a + d \geq n - 2. \tag{5}$$

En effet, la dimension d de la section impropre d'une hypersurface de S_n est égale à la difference entre le nombre $n-2$ et le nombre ν des points singulier impropres situés sur une génératrice générique: $d = n - 2 - \nu$, d'où la relation (5) résulte en vertu de l'inégaliié $\nu \leq a$, où a est le nombre de points singuliers situés sur une génératrice générique.

Les hypersurfaces réglées qui peuvent exister sont celles qui satisfont à cette relation, par conséquent sont celles qui sont situées sur la diagonale principale de ce tableau ou bien sous celle-ci. Il y en a $N = n(n-1)/2$, comme il résulte à la suite d'un calcul élémentaire. Donc, nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Le nombre des types d'hypersurfaces réglées V_a^d, distinctes du point de vue affine, est égal à $N = n(n-1)/2$.

Pour S_4 et S_5 on vérifie les résultats obtenus. Dans S_4 nous avons 6 types d'hypersursufaces réglées de cette sorte et dans S_5 nous en avons 10.

Nous allons établir quelques propriétés générales des hypersurfaces réglées dans S_n.

Lorsqu' une hypersurface est conique son sommet est un point singulier d'espèce $n-2$.

En effet, une hypersurface conique avec le sommet en origine a l'équation

$$\bar{r} = w\bar{\alpha}(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}).$$

L'hyperplan tangent de cette hypersurface est

$$[\bar{R}, w\bar{\alpha}_{u_1}, w\bar{\alpha}_{u_2}, \dots, w\bar{\alpha}_{u_{n-2}}, \bar{\alpha}] = 0.$$

On constate que pour $w=0$ la matrice M a le rang 1, donc le sommet est un point singutier d'espèce $n-2$. En ordonnant l'équation de l'hyperplan tangent d'après w, nous obtenons l'expression

$$F = w^{n-2}[\bar{R}, \bar{\alpha}_{u_1}, \bar{\alpha}_{u_2}, \dots, \bar{\alpha}_{u_{n-2}}, \bar{\alpha}] = 0,$$

qui admet un facteur linéaire de degré $n-2$, ce qui nous donne un point singulier d'espèce $n-2$ correspondant au sommet du cône.

Réciproquement, *si chaque génératrice contient un point singulier multiple d'ordre $n-2$, celui-ci est fixe sur l'hypersurface et l'hypersurface est conique.*

En effet, soit $\bar{r} = \bar{\rho}(u_1, u_2, \dots, u_{n-2})$ le point singulier d'ordre $n-2$ correspondant à la valeur $w=0$ sur la variété. La matrice $M = (\bar{\rho}_{u_1}, \bar{\rho}_{u_2}, \dots, \bar{\rho}_{u_{n-2}}, \bar{\alpha})$ a le rang 1; donc

$$\bar{\rho}_{u_1} = h^1\bar{\alpha},\ \bar{\rho}_{u_2} = h^2\bar{\alpha}, \dots, \bar{\rho}_{u_{n-2}} = h^{n-2}\bar{\alpha}.$$

Il en résulte les relations linéaires suivantes:

$$h^2\bar{\alpha}_{u_1} - h^1\bar{\alpha}_{u_2} + (h^2{}_{u_1} - h^1{}_{u_2})\bar{\alpha} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$h^{n-2}\bar{\alpha}_{u_1} - h^1\bar{\alpha}_{u_{n-2}} + (h^{n-2}_{u_1} - h^1_{u_{n-2}})\bar{\alpha} = 0.$$

Pour que la matrice M ait le rang 1 dans ce point, les coefficients des relations ci-dessus doivent s'annuler. Il en résulte donc,

$$h^1 = 0,\ h^2 = 0, \dots,\ h^{n-2} = 0,$$

$$\bar{\rho}_{u_1} = \bar{\rho}_{u_2} = \dots = \bar{\rho}_{u_{n-2}} = 0.$$

Par conséquent $\bar{\rho} =$ const., ce qui démontre l'affirmation faite.

Les hypersurfaces coniques sont réglées de type V^{n-2}_{n-2}.

Lorsque l'hypersurface est cylindrique, chaque génératrice admet un point singulier impropre d'espèce $n-2$.

Réciproquement, *lorsque chaque génératrice contient un point singulier impropre multiple d'ordre $n-2$, l'hypersurface est cylindrique.* (La démonstration est analogue à celle faite pour les hypersurfaces coniques).

Les hypersurfaces cylindriques sont de type V^0_{n-2},

Lorsque sur une génératrice générique il existe un point singulier d'espèce $n-3$, les hyperplans tangents le long de la génératrice forment un fascicule d'hyperplans.

En effet, s'il existe sur une génératrice générique un point singulier d'espèce $n-3$, caractérisé par $w = w_1$, l'équation de l'hyperplan tangent peut être écrite sous la forme

$$(w - w_1)^{n-3}[H_0 + wH^0] = 0.$$

Lorsque w varie, en prenant des valeurs différentes de w_1, alors les hyperplans tangents le long de la génératrice forment un faisceau d'hyperplans de dimension $n-1$, qui passent par l'intersection des hyperplans $H_0 = 0$ et $H^0 = 0$, c'est-à-dire la base du faisceau est un hyperplan de dimension $n-2$. $H_0 = 0$ représente l'hyperplan tangent au point où la génératrice générique rencontre l'hypersurface directrice $\bar{\rho}$, et $H^0 = 0$ représente l'hyperplan asymptotique de la variété, correspondant à la même génératrice. Par conséquent, tous les hyperplans tangents le long d'une génératrice ont en commun une variété linéaire de dimension $n-2$, ils forment donc un faisceau d'hyperplans.

Réciproquement, *lorsque les hyperplans tangents le long d'une génératrice forment un faisceau, il existe sur la génératrice un point singulier et un seul d'espèce $n-3$*, (Pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$ on trouve les résultats antérieurs).

Les hypersurfaces de la catégorie V_0^d n'ont aucun point singulier sur une génératrice générique, et la section impropre est une variété de dimension $n-2$. Pour de telles hypersurfaces les hyperplans tangents le long d'une génératrice ont en commun seulement la génératrice g.

2. – Correspondances par parallélisme.

Soient V et V^* deux hypersurfaces réglées de S_n, entre lesquelles nous voulons établir une correspondance par hyperplans tangents complètement parallèles, correspondance qui conserve les génératrices. S'il existe une telle correspondance, les sections impropres des variétés V et V^* doivent coïncider. Du fait que la nature de la section impropre sur une variété V est déterminée par les deux indices a et d, introduits dans le chapitre précédent, il résulte que la variété V^* est coractérisée par les mêmes valeurs das indices. Donc, les variétés mises en correspondance sont de la même catégorie.

Réciproquement, deux variétés réglées V et V^* de la même catégorie, ayant la même section impropre, peuvent être mises en relation par le parallélisme des hyperplans tangents. Les hyperplans tangents correspondants sont déterminés dans un point de la variété par la section impropre commune et par les génératrices correspondantes. Par conséquent,

La condition necéssaire et suffisante pour qu'il existe une correspondance par parallélisme des hyperplans tangents qui conservent les généralrices des variétés, est que les deux variétés mises en correspondance soient de la même categorie V_a^d.

On sait que deux variétés linéaires de dimension p sont complèment parallèles dans S_n, si elles ont dans l'hyperplan impropre p points communs. Elles sont partiellement parallèles, si elles ont en commun r points impropres avec $r < p$. La dimension du parallélisme est alors $r/p < 1$.

Considérons dans S_n deux hyperplans de dimension $n-1$, H et H^*. Nous alons étudier leur parallélisme à l'aide des treillis.

La définition du parallélisme à l'aide des treillis ne comprend que le cas du parallélisme complet. En effet, H et H^* sont en relation de parallèlisme donnée par les treillis, si

$$H \cap H^* = 0, \; H \cup H^* = S_n$$
$$\text{et } S_n \text{ couvre } H \text{ et } H^*,$$
$$\text{c'est-à-dire } S_n \succ H \text{ et } S_n \succ H^*.$$

Si les hyperplans H et H^* sont partiellement parallèles, ils ne satisfont pas à cette relation, parce que $H \cup H^* = S_r$ et S_r ne couvre pas H et H^*.

Nous avons considéré dans S_n deux hypersurfaces réglées V et V^* du type le plus général V_0^{n-2}, mises en correspondance par hyperplans tangents complètement parallèles avec la conservation des génératrices.

En employant les propriétés des treillis, nous allons montrer que la condition nécessaire pour que l'on puisse établir une telle correspondance est que les génératrices correspondantes soient parallèles. Pour la démonstration nous avons employé les propriétés suivantes du parallélisme:

1°. Pour que deux variétés A et B soient parallèles entre elles, il est nécessaire et suffisant que nous ayons A parallèle à B et $d[A] = d[B]$. Grâce à cette propriété la relation de parallélisme est commutative.

2°. Si A est parallèle à B et $B \geq B' > 0$, alors A est parallèle à B' et $A \cup B' = A \cup B$.

3°. Si $C \geq A$ et A est parallèle à B, alors C est parallèle à B ou $C \geq B$.

4°. P étant un point, si nous avons les relations: A parallèle à B et $A \geq P$, alors nous avons de même la relation $B \mid A \cap (B \cup P)$.

Supposons qu'entre les hypersurfaces V et V^* nous avons ètabli une correspondance par hyperplans tangents parallèles avec la conservation des génératrices. Soient g et g^* deux génératrices correspondantes Les hyperplans tangents aux hypersurfaces V et V^* sont les éléments d'un treillis géométrique de dimension n. Ils contiennent les génératrices qui passent par les points de tangence. Supposons que les hyperplans H, H_1, H_2 tangents à l'hypersurface V aux points M, M_1, M_2 de la génératrice g sont parallèles respectivement aux hyperplans correspondants H^*, H_1^*, H_2^* tangents à l'hypersurface V^* aux points M^*, M_1^*, M_2^* de la generatrice g^*. Des relations du parallélisme $H \parallel H^*$, $H_1 \parallel H_1^*$, $H_2 \parallel H_2^*$ nous obtenons:

$$H \cap H^* = 0, \quad H \cup H^* = S_n, \quad S_n > H \quad \text{et} \quad S_n > H^*,$$

$$H_1 \cap H_1^* = 0, \quad H_1 \cup H_1^* = S_n, \quad S_n > H_1 \quad \text{et} \quad S_n > H_1^*,$$

$$H_2 \cap H_2^* = 0, \quad H_2 \cup H_2^* = S_n, \quad S_n > H_2 \quad \text{et} \quad S_n > H_2^*.$$

Les intersections des hyperplans considérés, à savoir:

$$H \cap H_1 = P_1, \; H \cap H_2 = P_2; \quad H^* \cap H_1^* = P_1^*, \; H^* \cap H_2^* = P_2^*,$$

sont des variétés linéaires de dimension $n - 2$, parce que, en considérant la loi des dimensions, nous avons

$$d[H \cap H_1] + d[H \cup H_1] = d[H] + d[H_1].$$

Si l'on connaît $d[H] = n - 1$, $d[H_1] = n - 1$, $d[H \cup H_1] = n$, il résulte $d[H \cap H_1] = n - 2$. Donc

$$d[P_1] = d[P_2] = d[P_1^*] = d[P_2^*] = n - 2.$$

Parce que V et V^* sont de la catégorie V_0^{n-2}, nous avons $P_1 \neq P_2$, $P_1^* \neq P_2^*$ et $P_1 \cap P_2 = g$, $P_1^* \cap P_2^* = g^*$.

Grâce au parallélisme introduit, il en résulte:

$$P_1 \parallel P_1^*, \; P_2 \parallel P_2^*, \; g < P_1, \; g < P_2 \; \text{et} \; g^* < P_1^*, \; g^* < P_2^*.$$

Les relations de parallélisme des variétés P_1, P_2 aux variétés P_1^*, P_2^* nous conduisent aux relations suivantes:

$$P_1 \cap P_1^* = 0, \;\; P_2 \cap P_2^* = 0,$$
$$P_1 \cup P_1^* > P_1, \;\; P_2 \cup P_2^* > P_2,$$
$$P_1 \cup P_1^* > P_1^*, \;\; P_2 \cup P_2^* > P_2^*.$$

De la propriété 3° du parallélisme nous obtenons $g^* < P_1^*$, donc $P_1 \| g^*$, et la propriété 4° implique

$$(g^* \cup M_1) \cap P_1 = d_1, \;\; (g^* \cup M_2) \cap P_2 = d_2, \tag{6}$$

où $d_1 \| g^*$ et $d_2 \| g^*$, donc $d_1 \| d_2$.

En considérant la réunion des variétés données par les premiers des relations (6) et celle des variétés d_1 et d_2 nous obtenons la relation suivante:

$$(g^* \cup M_1) \cap P_1 \cup (g^* \cup M_2) \cap P_2 = d_1 \cup d_2 .$$

En vertu de la commutativité et de l'associativité il résulte:

$$(g^* \cup M_1) \cap \{ P_1 \cup (g^* \cup M_2) \} \cap P_2 = d_1 \cup d_2,$$
$$(g^* \cup M_2) \cap \{ (g^* \cup M_2) \cup P_1 \} \cap P_2 = d_1 \cup d_2 .$$

Du fait que $M_2 < P_2$, nous avons:

$$(g^* \cup M_1) \cap (g^* \cup P_2) \cap P_1 = d_1 \cup d_2,$$
$$\{ (g^* \cup M_1) \cup g^* \} \cup (P_1 \cap P_2) = d_1 \cup d_2 .$$

En appliquant la loi d'absorption, il résulte: $g^* \cup (P_1 \cap P_2) = d_1 \cup d_2$. De la relation $P_1 \cap P_2 = g$ (la variété V étant de la catégorie V_0^{n-2}) l'on déduit que $g^* \cup g = d_1 \cup d_2$. Mais $g < P_1$, $g^* < P_1^*$ et $P_1 \| P_1^*$ impliquent $g \cap g^* = 0$, $g \cup g^* = d_1 \cup d_2^* = S_2$, $S_2 > g$ et $S_2 > g^*$, de sorte que g et g^* satisfont la relation de parallélisme. Donc $g \| g^*$. Ainsi l'on a démontré que:

La condition nécessaire pour que deux hypersurfaces de la catégorie V_0^{n-2} se correspondent par hyperplans tangents complètement parallèles avec la conservation des génératrices est que les génératrices correspondantes soient parallèles.

Nous nous proposons, cans ce qui suit, de considérer une correspondance par hyperplans tangents partiellement parallèles, qui s'obtient de l'extension du problème de la correspondance par hyperplans tangents semi-parallèles, étudiée dans S_4[10]. Dans S_4 on a mis en correspondance par plans tangents semi-parallèles deux variétés réglées de dimension 2, de sorte que la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de l'espace S_4. On constate qu'une telle correspondance ne peut pas être établie dans les espaces de dimension impaire, parce que, comme nous l'avons montré, la correspondance par parallélisme s'établit seulement entre deux variétés réglées de la même catégorie, qui ont la même dimension, et la somme des dimensions étant ègale à la dimension de l'espace ambiant, celle-ci résulte un nombre pair.

Soit S_{2n} un espace de dimension $2n$, et dans cet espace V et V^* de dimension n, qui ont dans les points correspondants des variétés linéaires tangentes Π et Π^* parallèles. Alors la dimension du parallélisme est $1/n$. En effet, les variétés tangentes Π et Π^* sont de dimension n et ont en commun un point impropre, donc la dimension du parallélisme est $1/n$. Pour ce problème nous ne pouvons pas employer les treillis, qui ne comprennent que le parallélisme complet. Nous allons employer les matrices, à l'aide desquelles nous pouvons exprimer la condition à laquelle satisfont deux variétés linéaires de dimension n pour être partiellement parallèles de dimension $1/n$.

Supposons que les équations d'une variété linéaire de dimension n sont données sous la forme matricielle dans un S_{2n}

$$A \cdot X = B, \tag{7}$$

où A est une matrice de dimension $(n,\ 2n)$ et X est une matrice-vecteur du type $(2n,\ 1)$. Les matrices A et X étant enchaînées peuvent être multipliées. La matrice B a le type $(n,\ 1)$. Ces matrices sont :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,2n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,2n} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{2n} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}.$$

La deuxième variété linéaire de dimension n s'exprime par une équation analogue à (7). Soit cette équation

$$A^* \cdot X = B^*. \tag{8}$$

où les matrices A^* et B^* sont du même type que les matrices A et B. Les deux variétés linéaires (7) et (8) sont partiellement parallèles de dimension $1/n$, si elles ont un point impropre commun. Dans ce cas la matrice C est singulière et a le rang $2n - 1$. La matrice C est une matrice quadratique de dimension $2n$ formée par les matrices A et A^* :

$$C = \begin{pmatrix} A \\ A^* \end{pmatrix}.$$

Elle est singulière si le déterminant de la matrice $|C| = 0$, c'est-à-dire

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,2n} \\ a^*_{11} & \dots & a^*_{1,2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a^*_{n1} & \dots & a^*_{n,2n} \end{vmatrix} = 0.$$

Par conséquent, la condition (9) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les variétés considérées soient partiellement parallèles de dimension $1/n$.

Considérons maintenant les deux variétés réglées V et V^* que nous voulons mettre en correspondance. Elles ont les équations

$$(10) \qquad \bar{r} = \bar{\rho}(u_i) + w\bar{\alpha}(u_i) \text{ et } \bar{r}^* = \bar{\rho}^*(u_i) + w^*\bar{\alpha}^*(u_i), \ i = 1, 2, \dots, n-1.$$

En chaque point non singulier des génératrices correspondantes on détermine les variétés tangentes Π et Π^*. La variété Π est déterminée par les vecteurs linéaires indépendants suivants:

$$\bar{\rho}_{u_i} + w\bar{\alpha}_{u_i} \text{ et } \bar{\alpha}(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

La variété Π^* est déterminée aussi par des vecteurs similaires:

$$\bar{\rho}^*_{u_i} + w^*\bar{\alpha}^*_{u_i} \text{ et } \bar{\alpha}^*(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Les variétés tangentes correspondantes Π et Π^* sont partiellement parallèles de dimension $1/n$ si la relation (9) est satisfaite. En introduisant dans cette relation les composantes des vecteurs qui déterminent les variétés tangents qui déterminent les variétés tangentes, nous obtenons

$$(11) \qquad \bar{\rho}_{u_i} + w\bar{\alpha}_{u_i}, \ \bar{\rho}^*_{u_i} + w^*\bar{\alpha}^*_{u_i}, \ \dots, \ \bar{\alpha}, \ \bar{\alpha}^*] = 0.$$

Ce déterminant est d'ordre $2n$. Développé, il nous donne la correspondance qui s'etablit entre les points des génératrices correspondantes g et g^*, lorsque les variétés tangentes correspondantes sont partiellement parallèles de dimension considérée. Par le développement de la relation (11) nous obtenons un polynôme de degré $2n-2$ en coordonnées projectives w et w^*, et de degré $n-1$ par rapport à chaque coordonnée. La correspondance entre les points des génératrices g et g^* est, donc, de la forme

$$A_0 w^{n-1} w^{*\,n-1} + A_1 w^{n-2} w^{*\,n-2} + \ldots + [\bar{\rho}_{u_i}, \bar{\rho}^*_{u_i}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*] = 0. \tag{12}$$

Les coefficients de la relation (12) sont déterminés sur une génératrice en fonction des éléments des variétés V et V^*.

De la relation (12) on déduit le résultat suivant:

La correspondance par variétés linéaires tangentes partiellement parallèles de dimension $1/n$, considérée entre deux variétés reglées de dimension n avec les génératrices correspondantes de S_{2n}, détermine entre les points des génératrices correspondantes une correspondance algébrique de degré $2n-2$ par rapport aux deux coordonnées projectives w et w^* et de degré $n-1$ par rapport à chacune séparément.

Ainsi à un point situé sur la génératrice g de V correspondent par le parallélisme définit plus haut $n-1$ points sur la génératrice g^* de V^*, où les variétés tangentes respectivement à V et V^* sont partiellement parallèles de dimension $1/n$.

Dans le cas particulier $n=4$, on retrouve le résultat de la Note [10], où la correspondance par plans tangents semi-parallèles détermine entre les points des génératrices correspondantes une correspondance de degré 2 par rapport à w et w^*, et de degré 1 par rapport à chacune séparément, c'est-a-dire on détermine une correspondance homographique entre les points des génératrices correspondantes.

De même, pour S_6 la correspondance par variétés tangentes partiellement parallèles de dimension $1/3$, considérée entre les variétés réglées à 3 dimensions qui conservent les génératrices, détermine entre les points des génératrices correspondantes une correspondance algébrique de degré 4 par rapport aux deux coordonnées projectives w et w^*, et de degré 2 par rapport à chacune séparément.

Des correspondances de ce genre peuvent être établies seulement lorsque les génératrices correspondantes g et g^* ne sont pas parallèles. Si elles sont parallèles, la relation (12) est identiquement vérifiée, et la correspondance examinée est indéterminée, parce que à chaque point de la génératrice g correspondent des points sur g^*, où les variétés linéaires tangentes Π et Π^* sont partiellement parallèles de dimension $1/n$, le point impropre commun déterminant la direction des génératrices correspondantes.

Des exemples de correspondance par parallélisme donnés ci-dessus, on constate que ce problème dépend, d'une part, de la catégorie des variétés mises en correspondance et, d'autre part, de la sorte du parallélisme par lequel se correspondent les hyperplans tangents.

En vertu de la classification établie, on peut mettre en correspondance aussi les autres types des variétés réglées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ION CREANGĂ, *Sur la correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces réglées, avec correspondance des génératrices*, «C.R. Acad. de Roumanie», T. I, nr. 4, (1937), pp. 287-290.

[2 ION CREANGĂ, RUSCIOR ȘTEFANIA, *Suprafete riglate cu generatoarele respectiv paralele, (Surfaces réglées avec les génératrices respectivement parallèles)*, «Stud. si Cercet. Șt. Acad. R. P. R., Filiala Iași», vol. III, fasc. 1-4, (1952), pp. 15-42.

[3] S.V. FINIKOV *Déformation à base principale et problèmes géométriques y liès*, Mosca, (1937).

[4] V. V. RYSHKOV, *Déformation tangentielle affine des surfaces*, «Usp. Mat. Nauk», T. XII, 3(75) (1959), 193-200.

[5] — —, *Déformation tangentielle des surfaces*, «Mat. Sb.», T. 47 (89), I, (1959), 55-110.

[6] AL MYLLER, *La transformation par plans tangents parallèles*, «Bull. Sci. Math.», Seria 2, t. III, (1928), pp. 259-265.

[7] OCTAV MAYER, *Sur les surfaces réglées*, «Ann. St. Univ. Al. I. Cuza», Iași, t. XXVI, (1940), pp. 299-308; t. XXXVI, (1941), pp. 3-11.

[8] M. HAIMOVICI, IILE POPA, *La correspondance par plans tangents parallèles.* «Ann. St. Univ. Iași, t XVIII, (1932), pp. 215-233.

[9] ȘTEFANIA RUSCIOR, *Corespondențe prin hiperplane tangente paralele între doua hipersu, prafețe riglate din S_4 afin (Correspondances par hyperplans tangents parallèles entre deux hypersurfaces réglées de S_4 affine)*, «Ann. St. Univ. Iași», vol. VIII, fasc. 2, (1962), pp. 369-394.

[10] — —, *Despre o corespondență prin plane tangente semiparalele între două familii de suprafețe din S_4 afin (Sur une correspondance par plans tangents semi-parellèles entre deux familles des surfaces de S_4 affine)*, «Bul. Inst. Polit. Iași», t. IX, fasc. 1-2, (1963), pp. 35-41.

[11] — —, *Despre hipersuprafața caracteristică a unei hipersuprafețe riglate din S^4 (Sur l'hypersurface caractéristique d'une hypersurface réglée de S_4)*, «Bull. Inst. Polit. Iași, t. IX, fasc. 3-4, (1963), pp. 1-8.

[12] — —, *Sur une classification affine des hypersurfaces réglées dans un S_4*, «Acad. Royale de Belgique. Bull. cl. de Sci», série 5, vol 50, (1964), pp. 309-314.

[13] — —, *Sur les proprietés des hypersurfaces réglées dans S_5*, «Bull. Acad. Polonaise des Sci., série math., vol. XIII, nr. 3, (1965), pp. 225-227.

[14] — —, *Aspecte algebrice ale corespondenței prin paralelism (Aspects algébriques de la correspondance par parallélisme)*, «Bul. Inst. Polit. Iași», t. VI. fasc. 1-2, (1960), pp. 1-6

[15] E. BOMPIANI, *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», serie sesta, vol. III, (1926), pp. 295-400.

[16] M. DECUYPER, *Sur quelques transformations des congruences de droites*, Dans le volume «Deuxième colloque de géométrie différentielle. C. B. R. M. Librairie Univ. Louvain.» Gauthier-Villars. Paris, (1962), pp. 45-64.

[17] DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, (1953).

[18] HUSNI-HAMID, *Sur les variétés réglées d'ordre supérieur*, «C.R. Acad. sci.», Paris, vol. 200. (1935), pp. 1911-1913.

[19] M. Kawaguchi, *An introduction to the theory of higher order space.* RAAG Memoirs, for Engineers, Physicists and Math.», vol. III, (1963), Tokyo.

[20] Mauro Picone, *Sugli iperpiani decomponenti un domino iperspaziale in parti con misure di rapporto assegnato,* «Rev. Archimede» fasc. 5, Firenze, (1963), pp. 229-235.

[21] Eugenio Togliatti, *Varietà a tre dimensioni particolari,* «Rend. Sem. Math.», Torino, vol. 21, pp. 77-85.

[22] — —, *Sur les variétés à trois dimensions de l'espace à cinq dimensions dont les tangentes principales présentent des coïncidences,* «Univ. di Genova, Pubbl. dell'Inst. di Mat.» nr. 97-98, (1962), pp. 65-76.