Une généralisation de l'intégrale de Lebesgue.

TOKUI SATŌ (Kōbe, Japon) (*)

Résumé - *Donner une généralisation de la sommation.*

1. - Introduction.

Cette note est une suite des mémoires antérieurs [1] et contient des résultats obtenus concernant les fonctions réelles définies dans R^n au point de vue de l'analyse générale et spécialement la théorie des suites filtrantes de nombres.

Il est bien connu que la sommabilité d'une fonction mesurable correspond à la convergence absolue d'une série. Nous cherchons une notion qui correspond à la convergence conditionelle d'une série dans l'intégration d'une fonction mesurable.

Pour cela, dans le muméro 2 nous rappelons l'intégrale de Lebesgue d'une fonction bornée et mesurable en utilisant la théorie des suites filtrantes de nombres comme técnique générale, et dans le numéro 3 nous esseyons de généraliser les résultats du numéro précédent.

Sauf mention expresse du contraire, dans toute la suite, $\mathfrak{M}$ désigne la famille de tous les ensembles mesurables de R^n, A un ensemble de mesure finie, et $M(A)$ la famille de toutes les fonctions mesurables dans A. $\mu(E)$ exprime la mesure d'un ensemble mesurable E.

2. - Lorsque l'on a

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m,$$

$$A_i \in \mathfrak{M} \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad (i \neq j),$$

$D_A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ s'appelle division de A. Désignons par $\mathfrak{D}_A$ l'ensemble de toutes les divisions de A.

Soient $D_A, D'_A \in \mathfrak{D}_A$:

$$D_A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\},$$

$$D'_A = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}.$$

(*) Entrata in Redazione il 14 giugno 1969.

S'il existe B_j tel que

$$B_j \subseteqq A_i, \qquad B_j \in D'_A,$$

pour A_i quelconque de D_A, nous disons que la division D'_A est plus fine que D_A, et écrivons $D_A \leqq D'_A$. Il est clair que cette relation $\leqq$ remplit les axioms d'ordre.

Pour D_A, $D'_A \in \mathfrak{D}_A$, nous posons

$$\Delta_A = \{C_{11}, C_{12}, \dots, C_{mn}\},$$

où

$$C_{ij} = A_i \cap B_j, \qquad A_i \in D_A, \qquad B_j \in D'_A,$$
$$(i = 1, 2, \dots, m; \qquad j = 1, 2, \dots, n).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \cup_{i=1}^m \cup_{j=1}^n C_{ij} &= \cup_{i=1}^m (\cup_{j=1}^n A_i \cap B_j) \\ &= \cup_{i=1}^m (A_i \cap (\cup_{j=1}^n B_j)) = \cup_{i=1}^m A_i \\ &= A, \end{aligned}$$

et sauf le cas où $i = k$, $j = l$, on a

$$\begin{aligned} C_{ij} \cap C_{kl} &= A_i \cap B_j \cap A_k \cap B_l \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$\Delta_A \in \mathfrak{D}_A, \qquad D_A \leqq \Delta_A, \qquad D'_A \leqq \Delta_A.$$

En résumé, nous pouvons énoncer:

LEMME 2.1. - *L'ensemble $\mathfrak{D}_A$ de divisions D_A d'un ensemble de mesure finie A est filtrant par rapport à l'ordre $\leqq$.*

Soit $f(x)$ une fonction définie dans A.

Posons

$$m_j = \inf_{x \in A_j} f(x), \; M_j = \sup_{x \in A_j} f(x) \qquad (j = 1, 2, \dots, n),$$

où $D_A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est une division de A, et que

$$\underline{S}_{D_A} = \Sigma_{j=1}^n m_j \mu(A_j), \; \overline{S}_{D_A} = \Sigma_{j=1}^n M_j \mu(A_j).$$

D'après le lemme 2.1, $\{\underline{S}_{D_A}\}$ et $\{\overline{S}_{D_A}\}$ sont les suites filtrantes de nombres et on a les inégalitiés

$$m\mu(A) \leqq \underline{S}_{D_A} \leqq \overline{S}_{D_A} \leqq M\mu(A),$$

où m et M sont les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ dans A respectivement (ils peuvent être $\pm\infty$).

Plus précisément, on a

$$(1) \qquad m\mu(A) \leqq \underline{S}_{D_A} \leqq \underline{S}_{D'_A} \leqq \overline{S}_{D'_A} \leqq \overline{S}_{D_A} \leqq M\mu(A)$$

pour $D_A \leqq D'_A$.

En vertu de (1), les suites filtrantes $\{\underline{S}_{D_A}\}$ et $\{\overline{S}_{D_A}\}$ sont et monotones.

D'après le théorème 1 de [1, *V*], elles ont les limites, et on a

$$(2) \qquad \underline{S} = \lim_{D_A \in \mathfrak{D}_A} \underline{S}_{D_A} = \sup_{D_A \in \mathfrak{D}_A} \underline{S}_{D_A},$$

$$(3) \qquad \overline{S} = \lim_{D_A \in \mathfrak{D}_A} \overline{S}_{D_A} = \inf_{D_A \in \mathfrak{D}_A} \overline{S}_{D_A}.$$

Posons

$$\underline{S} = \underline{\int}_A f(x)\, dx,$$

$$\overline{S} = \overline{\int}_A f(x)\, dx,$$

d'après le théorème 11 de [1. *V*], on a l'inégalité

$$\underline{\int}_A f(x)\, dx \leqq \overline{\int}_A f(x)\, dx.$$

En particulier, lorsque l'on a

$$\underline{\int}_A f(x)\, dx = \overline{\int}_A f(x)\, dx,$$

nous disons que $f(x)$ est R-intégrable. Cette valeur commune

$$\underline{\int}_A f(x)\, dx = \overline{\int}_A f(x)\, dx$$

s'appelle R-intégrale et s'écrit $(R)\int_A f(x)\, dx$. Nous appelons $\underline{\int}_A f(x)\, dx$ et

$\overline{\int}_A f(x)\,dx$ intégrales par défaut et par excès respectivement.

EXEMPLE 2.1. - Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \text{ est un nombre irrationnel dans } 0 \leqq x \leqq 1/2, \\ -\infty & \text{si } x \text{ est un nombre rationnel dans } 0 \leqq x \leqq 1/2, \\ 1 & \text{si } x \text{ appartient à l'intervalle } 1/2 < x \leqq 1. \end{cases}$$

Alors on obtient

$$\underline{\int}_A f(x)\,dx = 1/2,\ \overline{\int}_A f(x)\,dx = +\infty,$$

$$\mu(\{x : f(x) = +\infty,\ x \in [0, 1]\}) = 1/2,$$

$$\mu(\{x : f(x) = -\infty,\ x \in [0, 1]\}) = 0.$$

Soit $f(x)$ une fonction définie dans A. Par cet exemple, il faut que l'on ait pour que $f(x)$ soit R-intégrable sur A et $R\int_A f(x)dx$ soit finie.

$$\mu(\{x : |f(x)| = +\infty,\ x \in A\}) = 0.$$

D'abord, nous recherchons le cas où $f(x)$ est bornée dans A, de sort que (2) et (3) sont finis.

Donnons des propriétés élémentaires des intégrales par défaut et par excès.

Nous écrivons $\underline{S}_{D_A}(f)$ et $\overline{S}_{D_A}(f)$ au lieu de $\underline{S}_{D_A}$ et $\overline{S}_{D_A}$, pour faire clair leur dépendance de la fonction $f(x)$.

LEMME 2.2. - *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies et bornées dans A. Si l'on a*

$$f(x) \leqq g(x)$$

dans A, on obtient les inégalités

$$\underline{\int}_A f(x)\,dx \leqq \underline{\int}_A g(x)\,dx,\ \overline{\int}_A f(x)dx \leqq \overline{\int}_A g(x)dx. \tag{4}$$

En effet, on a

$$\underline{S}_{D_A}(f) \leqq \underline{S}_{D_A}(g),\ \overline{S}_{D_A}(f) \leqq \overline{S}_{D_A}(g).$$

D'après le théorème 11 de [1, V], on obtient (4).

THÉORÈME 2.1. - *Soit $f(x)$ une fonction définie et bornée dans A.*

1) *Si l'on a* $\mu(A)=0$, *on a* $\underline{\int}_A f(x)\,dx=0.$

2) $\underline{\int}_A 1dx=\mu(A).$

3) *Si l'on a* $f(x)\geqq 0$, *on a* $\underline{\int}_A f(x)\,dx \geqq 0.$

4) *Soit c une constante non négative; on a*

$$\underline{\int}_A (cf(x))\,dx=c\underline{\int}_A f(x)dx.$$

5) *Soit $f(x)$ définie et bornée dans B, où B est un ensemble de mesure finie. Si l'on a $A\cap B=\emptyset$, on a*

$$\underline{\int}_{A\cup B} f(x)=\underline{\int}_A f(x)dx+\underline{\int}_B f(x)dx\,,$$

6) *Si $f(x)$ est nulle presque partout dans A, on a*

$$\underline{\int}_A f(x)\,dx=0.$$

7) *Soit $A\subseteqq B$ où $B\in\mathfrak{M}$, $\mu(B)<+\infty$. Si l'on a $f(x)\geqq 0$ dans $B-A$, on a*

$$\underline{\int}_A f(x)dx\leqq\underline{\int}_B f(x)dx.$$

PREUVE. - 1)-4) et 7) sont clairs.

Preuve de 5). Soient $D_A\in\mathfrak{D}_A$, $D_B\in\mathfrak{D}_B$:

$$D_A=\{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m\},\quad D_B=\{B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n\}.$$

Posons

$$D_{A\cup B}=\{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n\}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}\underline{S}_{D_{A\cup B}}&=\Sigma_{i=1}^m\,\underline{\alpha}_i\,\mu(A_i)+\Sigma_{j=1}^n\,\underline{\beta}_j\,\mu(B_j)\\&=\underline{S}_{D_A}+\underline{S}_{D_B},\end{aligned}$$

où

$$\underline{\alpha}_i = \inf_{x \in A_i} f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\underline{\beta}_j = \inf_{x \in B_j} f(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

On a donc

$$\underline{S}_{D_A} + \underline{S}_{D_B} = \underline{S}_{D_{A \cup B}} \leqq \underline{S}_{D'_{A \cup B}}$$

pour $D_{A \cup B} \leqq D'_{A \cup B}$. En vertu de (2) on obtient

$$\underline{S}_{D_A} + \underline{S}_{D_B} \leqq \underline{\int}_{A \cup B} f(x) dx,$$

d'où

$$\underline{\int}_A f(x)\, dx + \underline{\int}_B f(x) dx \leqq \underline{\int}_{A \cup B} f(x) dx.$$

De même, on a

$$\underline{S}_{D_{A \cup B}} \leqq \underline{S}_{D'_A} + \underline{S}_{D'_B}$$

pour $D_A \leqq D'_A$, $D_B \leqq D'_B$, d'où

$$\underline{S}_{D_{A \cup B}} \leqq \underline{\int}_A f(x) dx + \underline{\int}_B f(x) dx,$$

et

$$\underline{\int}_{A \cup B} f(x) dx \leqq \underline{\int}_A f(x) + \underline{\int}_B f(x) dx.$$

Par suite, nous obtenons

$$\underline{\int}_{A \cup B} f(x)\, dx = \underline{\int}_A f(x) dx + \underline{\int}_B f(x) dx.$$

Preuve de 6). Posons

$$e = \{x : f(x) \neq 0,\ x \in A\}.$$

D'après l'hypothèse on a

$$\mu(e) = 0.$$

En vertu de 1) et 5), on obtient

$$\underline{\int}_A f(x) dx = \underline{\int}_{A-e} f(x) dx + \underline{\int}_e f(x) dx = \underline{\int}_e f(x) dx = 0.$$

REMARQUE. - La proposition qui s'obtient par remplacer l'intégrale par défaut par l'intégrale par excès est varie.

THÉORÈME 2.2. - *Soient $f(x) \geqq 0$ dans A et c une constante positive. Alors on a*

$$\mu(\{x : f(x) \geqq c,\ x \in A\}) \leqq \frac{1}{c} \underline{\int}_A f(x)dx. \qquad \text{(P. L. TSCHEBYSCHEFF).}$$

En effet, posons

$$B = \{x : f(x) \geqq c,\ x \in A\}.$$

D'après le théorème 2.1, on obtient

$$\underline{\int}_A f(x)dx = \underline{\int}_B f(x)dx + \underline{\int}_{A-B} f(x)dx \geqq \underline{\int}_B f(x)dx \geqq c\mu(B).$$

COROLLAIRE. - *Si l'on a* $\underline{\int}_A |f(x)|\, dx = 0$, *on a* $f(x) = 0$ *presque partout dans* A.

En effet, d'apprès le théorème 2.2, on a

$$\mu(\{x : |f(x)| \geqq 1/n,\ x \in A\}) \leqq n \underline{\int}_A |f(x)|\, dx = 0,$$

pour nombre entier quelconque n. Par suite, on obtient

$$\mu(\{x : f(x) \neq 0,\ x \in A\}) \leqq \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : |f(x)| \geqq 1/n,\ x \in A\}) = 0.$$

THÉORÈME 2.3. - *Soit $f(x)$ une fonction définie bornée et non négative dans A.*

Si l'on a

$$A = U_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad A_n \in \mathfrak{M} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad (i \neq j),$$

on a

$$\underline{\int}_A f(x)dx = \Sigma_{n=1}^{\infty} \underline{\int}_{A_n} f(x)dx.$$

PREUVE. - Prenons $D_A = \{B_1, B_2, \ldots, B_p\}$, $D_A \in \mathfrak{D}_A$.

Alors $\{A_n \cap B_1,\ A_n \cap B_2, \ldots, A_n \cap \mathrm{B}_p\}$ est une division de A_n. Posons

$$\underline{\alpha}_i = \inf_{x \in B_i} f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\underline{\alpha}_{ni} = \inf_{x \in A_n \cap B_i} f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Par définition, on a

$$\underline{\alpha}_i \leqq \underline{\alpha}_{ni}.$$

On obtient donc

$$\underline{S}_{D_A} \leqq \Sigma_{n=1}^{\infty} \Sigma_{i=1}^{p} \underline{\alpha}_{ni}\, \mu(A_n \cap B_i) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \underline{S}_{D_{A_n}}$$
$$\leqq \Sigma_{n=1}^{\infty} \underline{\int}_{A_n} f(x)dx,$$

d'où

$$\underline{\int}_{A} f(x)dx \leqq \Sigma_{n=1}^{\infty} \underline{\int}_{A_n} f(x)dx.$$

D'après le théorème 2.3 de [1, I] et le théorème 2.1, on obtient

$$\underline{\int}_{A} f(x)dx = \Sigma_{n=1}^{\infty} \underline{\int}_{A_n} f(x)dx. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Par définition, on obtient aisément le théorème suivant.

THÉORÈME 2.4. - *Pour qu'une fonction $f(x)$ définie et bornée dans A soit R-integrable sur A, il faut et il suffit qu'il existe une division $D_A \in \mathfrak{D}_A$ telle que*

$$0 \leqq \overline{S}_{D_A} - \underline{S}_{D_A} < \varepsilon,$$

pour $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.

COROLLAIRE 1. - *Si $f(x)$ est bornée et R-intégrable, on a*

$$\lim_{D_A \in \mathfrak{D}_A} \Sigma_{j=1}^{n} f(\xi_j)\mu(A_j) = (R)\int_{A} f(x)dx,$$

où $D_A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, et que ξ_j est un point quelconque de $A_j\, (j = 1, 2, \ldots, n)$.

COROLLAIRE 2. - *Si $f(x)$ est bornée et R-intégrable, $f(x)$ est aussi R-intégrable sur $B\, (\subseteqq A)$ qui est mesurable.*

LEMME 2.3. - *Pour un nombre réel quelconque m: $0 \leqq m \leqq \mu(A)$, il existe un ensemble mesurable E tel que*

$$\mu(E) = m, \qquad E \subseteqq A.$$

PREUVE. - Posons

$$S_r = \{x : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} < r\},$$

$$\varphi(r) = \mu(A \cap S_r).$$

Il suffit de montrer que $\varphi(r)$ est continue dans l'intervalle $0 \leqq r$. Par définition, $\varphi(r)$ est non décroissante dans $0 \leqq r$.

On voit aisément que $\varphi(r)$ est continue en $r=0$. Soit $r>0$; alors on a

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \varphi(r+0)-\varphi(r-0) \\ &\leqq \mu(A \cap S_{r+\rho})-\mu(A \cap S_{r-\rho}) \qquad (0<\rho<r) \\ &\leqq \mu(S_{r+\rho}-S_{r-\rho}). \end{aligned}$$

$\lim\limits_{\rho \to 0} \mu(S_{r+\rho}-S_{r-\rho})=0$ ayant lieu, on obtient

$$\varphi(r+0)=\varphi(r-0).$$

Par suite, $\varphi(r)$ est continue en r.

La réciproque du corollaire 2 du théorème 2.4. est vraie.

THÉORÈME 2.5. - *Soient $f(x)$ définie et bornée dans A et $B(\subseteqq A)$ un ensemble quelconque mesurable tel que $0<\mu(B)<\mu(A)$.*

Si $f(x)$ est R-intégrable sur B, $f(x)$ est aussi R-intégrable sur A.

PREUVE. - Puisque le théorème est clair au cas de $\mu(A)=0$, nous supposons donc $0<\mu(B)<\mu(A)$.

$f(x)$ étant bornée, on peut prendre M tel que

$$|f(x)| \leqq M \qquad x \in A.$$

Pour $\varepsilon>0$ donné à l'avance, il existe un nombre positif δ tel que

$$M\delta<\varepsilon/3, \qquad \delta<\mu(A).$$

D'après le lemme 2.3, on peut prendre un ensemble d'une manière que l'on ait

$$E \subseteqq A, \qquad \mu(E)=\delta, \qquad E \in \mathfrak{M}.$$

$f(x)$ étant R-intégrable sur $B=A-E$, il existe une division D_B telle que

$$0 \leqq \overline{S}_{D_B}-\underline{S}_{D_B}<\varepsilon/3, \qquad D_B \in \mathfrak{D}_B.$$

Soit $D_B=\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. Posons

$$D_A=\{B_1, B_2, \ldots, B_n, E\}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \underline{S}_{D_A} &= \underline{S}_{D_B} + \mu(E) \inf_{x \in E} f(x) \\ &\geqq \underline{S}_{D_B} - M\delta \end{aligned}$$

De même, on a

$$\bar{S}_{D_A} \leqq \bar{S}_{D_B} + M\delta$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leqq \bar{S}_{D_A} - \underline{S}_{D_A} &\leqq \bar{S}_{D_B} - \underline{S}_{D_B} + 2M\delta \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.4, $f(x)$ est R-intégrable sur A.

Nous dirons qu'une proppriété (P) subsiste dans A au sens généralisé par rapport à la mesure, ou brièvement au sens généralisé, si la condition suivante est satisfaite:

Soit $\varepsilon(>0)$ un nombre quelconque. La propriété (P) subsiste dans $A-e$, pour un certain ensemble mesurable e tel que l'on ait

$$e \subseteqq A, \qquad 0 < \mu(e) < \varepsilon.$$

Nous avons aisément le théorème suivant.

THÉORÈME 2.6. – *Si $f(x)$ est définie et bornée dans A et R-intégrable au sens généralisé sur A, $f(x)$ est R-intégrable sur A.*

THÉORÈME 2.7. – *Soient $f(x)$ et $g(x)$ défiinies et bornées dans A et R-intégrables sur A. Alors on a*

1) $$(R)\int_A cf(x)dx = c(R)\int_A f(x)dx \qquad (c: \text{ const.}).$$

2) $$(R)\int_A (f(x)+g(x))dx = (R)\int_A f(x)dx + (R)\int_A g(x)dx.$$

PREUVE. – 1) est clair. Nous démontrerons donc 2). D'après l'hypothèse, $f(x)+g(x)$ est bornée dans A. On a donc

$$\underline{S}_{D_A}(f) + \underline{S}_{D_A}(g) \leqq \underline{S}_{D_A}(f+g) \leqq \bar{S}_{D_A}(f+g) \leqq \bar{S}_{D_A}(f) + \bar{S}_{D_A}(g),$$

d'où

$$\begin{aligned} \underline{\int}_A f(x)dx + \underline{\int}_A g(x)\,dx &\leqq \underline{\int}_A (f(x)+g(x))dx \\ \leqq \bar{\int}_A (f(x)+g(x))dx &\leqq \bar{\int}_A f(x)dx + \bar{\int}_A g(x)dx. \end{aligned}$$

$f(x)$, $g(x)$ étant R-intégrables sur A, on obtient

$$(R)\int_A (f(x)+g(x))dx = (R)\int_A f(x)dx + (R)\int_A g(x)dx.$$

Le théorème suivant est une conséquence directe du lemme 2.2.

THÉORÈME 2.8. - *Soiet $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies et bornées dans A. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont R-intégrables sur A et*

$$f(x) \leqq g(x),$$

on a

$$(R)\int_A f(x)dx \leqq (R)\int_A g(x)dx.$$

COROLLAIRE. - *Soit $f(x)$ une fonction définie et bornée dans A et R-intégrable sur A. Si l'on a les inégalités*

$$m \leqq f(x) \leqq M \qquad (m,\ M: \text{const.}),$$

on a

$$m\mu(A) \leqq (R)\int_A f(x)dx \leqq M\mu(A).$$

THÉORÈME 2.9. - *Soient $f_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$ uniformément bornées et mesurables dans A.*

Si l'on a les inégalités

$$0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \dots \leqq f_n(x) \leqq \dots \tag{5}$$

on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{\int}_A f_n(x)dx = \underline{\int}_A f(x)dx,$$

où

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

(B. LEVI).

PREUVE. - D'après l'hypothése, $f(x)$ est bornée et mesurable dans A, et on a les inègalités

$$0 \leqq f_n(x) \leqq f(x) \qquad (n=1, 2, \dots). \tag{6}$$

Soit D_A une division arbitraire mais fixée de $\mathfrak{D}_A$.

Soit

$$D_A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\},$$

et posons

$$g(x) = \Sigma_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x),$$

où $\chi_{A_i}(x)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ sont les fonctions caractéristiques de A_i et a_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ sont des constantes non négatives.

D'abord, nous montrons que si l'on a les inégalités

$$0 \leqq g(x) \leqq f(x),$$

on obtient

$$\underline{\int}_A g(x)dx \leqq \lim_{n\to+\infty} \underline{\int}_A f_n(x)dx. \tag{7}$$

D'après le théorème d'Egoroff, pour $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ donnès à l'avance, on peut prendre un ensemble H et un nombre entier N tels que l'on ait $H \subseteqq A$, $H \in \mathfrak{M}$, $\mu(H) < \varepsilon$:

$$f(x) - \delta \leqq f_n(x), \qquad x \in A - H, \qquad n \geqq N.$$

Par définition, on a

$$\underline{S}_{D_{A-H}}(f) \leqq \underline{S}_{D_{A-H}}(f_n) + \delta\mu(A - H) \qquad n \geqq N.$$

On obtient donc

$$\underline{\int}_{A-H} f(x)dx \leqq \underline{\int}_{A-H} f_n(x)dx + \delta\mu(A - H) \qquad n \geqq N.$$

$\delta > 0$ étant arbitraire, on a

$$\underline{\int}_{A-H} f(x)dx \leqq \lim_{n\to+\infty} \underline{\int}_{A-H} f_n(x)dx.$$

D'autre part, en vertu de (4) on a

$$\underline{\int}_{A-H} f_n(x)dx \leqq \underline{\int}_{A-H} f(x)dx \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{\int}_{A-H} f_n(x)dx \leqq \underline{\int}_{A-H} f(x)dx.$$

Par suite, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\underline{\int}_{A-H} f_n(x)dx = \underline{\int}_{A-H} f(x)dx.$$

D'après l'hypothèse, on peut prendre un nombre M tel que

$$0 \leqq f_n(x) \leqq M \qquad x \in A \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

D'après le lemme 2.2, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\underline{\int}_{A-H} f_n(x)dx = \underline{\int}_{A-H} f(x)dx \geqq \underline{\int}_{A-H} g(x)dx.$$

D'après le théorème 2.1, on obtient

$$\underline{\int}_A f_n(x)dx \geqq \underline{\int}_{A-H} f_n(x)dx - M\mu(H),$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\underline{\int}_A f_n(x)dx + M\mu(H) \geqq \underline{\int}_{A-H} f(x)dx.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\underline{\int}_{A-H} g(x)dx &= \underline{\int}_A g(x)dx - \underline{\int}_H g(x)dx \\ &\geqq \underline{\int}_A g(x)dx - \alpha\mu(H),\end{aligned}$$

où

$$\alpha = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

Par suite, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\underline{\int}_A f_n(x)dx + M\mu(H) \geqq \underline{\int}_A g(x)dx - \alpha\mu(H).$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on obtient (7).

Cela posé, pour $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, on peut prendre $D_A \in \mathfrak{D}_A$ d'une manière que l'on ait

$$\underline{\int}_A f(x)dx - \varepsilon \leqq \underline{S}_{D_A}(f). \tag{8}$$

Soit $D_A=\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$. Par définition, on a

$$\underline{S}_{D_A}(f)=\Sigma_{i=1}^m m_i\mu(A_i),$$
$$m_i=\inf_{x\in A_i} f(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Posons

$$g(x)=\Sigma_{i=1}^m m_i\chi_{A_i}(x).$$

Alors on a

$$g(x)\leqq f(x).$$

En vertu de (7) et (8), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\underline{\int}_A f_n(x)dx\geqq\underline{\int}_A g(x)dx$$
$$=\Sigma_{i=1}^m m_i\mu(A_i)\geqq\underline{\int}_A f(x)dx-\varepsilon.$$

$\varepsilon>0$ étant arbitraire, on a

$$\lim_{n\to\infty}\underline{\int}_A f_n(x)dx\geqq\underline{\int}_A f(x)dx.$$

En vertu de (6), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\underline{\int}_A f_n(x)dx\leqq\underline{\int}_A f(x)dx.$$

Par suite, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\underline{\int}_A f_n(x)dx=\underline{\int}_A f(x)dx.$$

De même, nous avons le corollaire suivant.

COROLLAIRE. – *Soient $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ uniformément bornées et mesurables dans A.*

Si l'on a les inégalités

$$f_1(x)\geqq f_2(x)\geqq\cdots\geqq f_n(x)\geqq\cdots\geqq 0.$$

on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{\int}_A f_n(x)dx=\overline{\int}_A f(x)dx,$$

où

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

THÉORÈME 2.10. - *Si $f(x)$ est une fonction définie et bornée dans A et R-intégrable sur A, $f(x)$ est mesurable dans A.*

PREUVE. - D'après le théorème 2.4, on peut prendre une division D_A d'une manière que l'on ait

$$0\leqq \bar{S}_{D_A}-\underline{S}_{D_A}<\varepsilon, \qquad D_A\in\mathfrak{D}_A,$$

pour $\varepsilon>0$ donné à l'avance.

Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres tels que $\varepsilon_n\downarrow 0$. Pour ε_n, on peut prendre une division telle que

$$0\leqq \bar{S}_{D_n}-\underline{S}_{D_n}<\varepsilon_n \qquad D_n\in\mathfrak{D}_A.$$

On obtient donc une suite $\{D_n\}$ de divisions. Puisque $\mathfrak{D}_A$ est filtrant, on preut prendre une suite $\{\Delta_n\}$ d'une manière que l'on ait

$$\Delta_1=D_1,$$

$$\Delta_n\geqq\Delta_{n-1},\ \Delta_n\geqq D_n,\ \Delta_n\in\mathfrak{D}_A \qquad (n=2,3,\ldots).$$

Pour Δ_n, on obtient donc les inégalités

$$(9)\qquad 0\leqq \bar{S}_{\Delta_n}-\underline{S}_{\Delta_n}<\varepsilon_n \qquad (n=1,2,\ldots),$$

où

$$\Delta_n=\{A_{n_1},A_{n_2},\ldots,A_{n}\}$$

$$\underline{S}_{\Delta_n}=\Sigma_{k=1}^{\nu} m_{n_k}\mu(A_{n_k}),\ \bar{S}_{\Delta_n}=\Sigma_{k=1}^{\nu} M_{n_k}\mu(A_{n_k}),$$

$$m_k=\inf_{x\in A_k} f(x), \qquad M_k=\sup_{x\in A_k} f(x) \qquad (k=n_1,n_2,\ldots,n_\nu).$$

Posons

$$\underline{f}_n(x)=\Sigma_{k=1}^{\nu} m_k\chi_{A_k}(x), \qquad \bar{f}_n(x)=\Sigma_{k=1}^{\nu} M_k\chi_{A_k}(x) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Alors on obtient

$$\underline{f}_n(x)\leqq f(x)\leqq \bar{f}_n(x) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

$f(x)$ étant bornée, $\{\underline{f}_n(x)\}$ et $\{\bar{f}_n(x)\}$ sont uniformément bornées.

Par définition, on obtient

$$0 \leqq \underline{f}_1(x) \leqq \underline{f}_2(x) \leqq \dots \leqq \underline{f}_n(x) \leqq \dots,$$

$$\bar{f}_1(x) \geqq \bar{f}_2(x) \geqq \dots \geqq \bar{f}_n(x) \geqq \dots \geqq 0.$$

On a donc

$$\underline{f}(x) \leqq f(x) \leqq \bar{f}(x), \tag{10}$$

où

$$\underline{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} \underline{f}_n(x), \qquad \bar{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} \bar{f}_n(x).$$

$\underline{f}_n(x)$ et $\bar{f}_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ étant fonctions simples, $\underline{f}(x)$ et $\bar{f}(x)$ sont mesurables dans A.

Par définition, on a

$$\underline{\int}_A \underline{f}_n(x)dx = \underline{S}_{\Delta_n}, \qquad \bar{\int}_A \bar{f}_n(x)dx = \bar{S}_{\Delta_n}.$$

D'après le théorème 2.9, on obtient

$$\underline{\int}_A \underline{f}(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_{\Delta_n}, \qquad \bar{\int}_A \bar{f}(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \bar{S}_{\Delta_n}.$$

En vertu de (9), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \bar{S}_{\Delta_n} = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_{\Delta_n},$$

d'où

$$\begin{aligned}\underline{\int}_A |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)|\, dx &= \underline{\int}_A (\bar{f}(x) - \underline{f}(x))\, dx \\ &\leqq \bar{\int}_A \bar{f}(x)dx - \underline{\int}_A \underline{f}(x)dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'après le corollaire du théorème 2.2 et son corollaire, en vertu de (10), on obtient

$$\underline{f}(x) = f(x) = \bar{f}(x)$$

presque partout dans A.

THÉORÈME 2.11. - *Soient $f(x)$ bornée et mesurable dans A, et $m = \inf_{x \in A} f(x,)$ $M = \sup_{x \in A} f(x)$, Soient Δ une division de l'intervalle $[m, M]$ et $\rho(\Delta)$ la norme de la division Δ (Voir: [1. V]).*

Posons

$$\sigma_\Delta = \Sigma_{j=1}^n l_{j-1} \mu(A_j), \qquad \Sigma_\Delta = \Sigma_{j=1}^n l \mu(A_j). \tag{11}$$

Alors on a indépendantement de Δ.

$$I = \lim_{\rho(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta = \lim_{\rho(\Delta)\to 0} \Sigma_\Delta, \tag{12}$$

où

$$A_j = \{x : l_{j-1} \leqq f(x) < l_j,\ x \in A\}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

(H. LEBESGUE).

PREUVE. - Par définition, on a

$$m\mu(A) \leqq \sigma_\Delta \leqq \Sigma_\Delta \leqq M\mu(A).$$

Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des divisions de $[m, M]$ et définissons l'ordre $\leqq$ de $\mathfrak{D}$ comme le cas de l'intégration de Riemann (voir [1, V]). Alors σ_Δ et Σ_Δ sont suites filtrantes de nombres. On obtient

$$\sigma_\Delta \leqq \lim_{\Delta \in \mathfrak{D}} \sigma_\Delta \leqq \lim_{\Delta \in \mathfrak{D}} \Sigma_\Delta \leqq \Sigma_\Delta. \tag{13}$$

$f(x)$ ètant mesurable dans A, on obtient

$$A_j \in \mathfrak{M} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$A = U_{j=1}^n A_j, \qquad A_j \cap A_k = \emptyset \qquad (j \neq k).$$

On a donc

$$0 \leqq \lim_{\Delta \in \mathfrak{D}} \Sigma_\Delta - \lim_{\Delta \in \mathfrak{D}} \sigma_\Delta \leqq \Sigma_\Delta - \sigma_\Delta$$

$$= \Sigma_{j=1}^n (l_j - l_{j-1}) \mu(A_j) \leqq \rho(\Delta)\mu(A).$$

En vertu de (13), on obtient

$$\lim_{\Delta \in \mathfrak{D}} \sigma_\Delta = \lim_{\Delta \in \mathfrak{D}} \Sigma_\Delta = \lim_{\rho(\Delta)\to 0^\Delta} \sigma_\Delta = \lim_{\rho(\Delta)\to 0} \Sigma_\Delta.$$

Par suite, on a (12).

On appelle I intégrale de Lebesgue et l'exprime par $\int_A f(x)\,dx$.

THÉORÈME 2.12. – *Si $f(x)$ est bornée et mesurable, $f(x)$ est R-intégrable sur A et on a*

$$(R)\int_A f(x)dx = \int_A f(x)dx. \tag{14}$$

PREUVE. – Prenone une division Δ de l'intevalle $[\mathrm{m}, M]$ et posons

$$m_j = \inf_{x \in A_j} f(x), \qquad M_j = \sup_{x \in A_j} f(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors on a

$$l_{j-1} \leqq m_j \leqq M_j \leqq l_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

En vertu de (11), on obtient

$$\sigma_\Delta \leqq \underline{S}_{D_A} \leqq \bar{S}_{D_A} \leqq \Sigma_\Delta,$$

où $D_A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$,

$$A_j = \{x : l_{j-1} \leqq f(x) < l_j,\ x \in A\} \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

$$\underline{S}_{D_A} = \Sigma_{j=1}^n m_j \mu(A_j), \qquad \bar{S}_{D_A} = \Sigma_{j=1}^n M_j \mu(A_j).$$

On a donc

$$\sigma_\Delta \leqq \sup_{D_A \in \mathfrak{D}_A} \bar{S}_{D_A} \leqq \inf_{D_A \in \mathfrak{D}_A} \underline{S}_{D_A} \leqq \Sigma_\Delta,$$

d'où

$$\lim_{\mu(\Delta) \to 0} \sigma_\Delta \leqq \sup_{D_A \in \mathfrak{D}_A} \underline{S}_{D_A} \leqq \inf_{D_A \in \mathfrak{D}_A} \bar{S}_{D_A} \leqq \lim_{\mu(\Delta) \to 0} \Sigma_\Delta.$$

Par suite, $f(x)$ est R-intégrable sur A, et on obtient (14).

Soit $f(x)$ définie et bornée dans A. Alors *pour que $f(x)$ soit R-intégrable sur A, il faut et il suffit que $f(x)$ soit mesurable dans A.*

Nous avons donc le théorème suivant.

THÉORÈME 2.13. – *Soit $f(x)$ bornée et mesurable dans A.*
On peut prendre $\delta = \delta(\varepsilon)$ d'une manière que l'on ait

$$\left| \int_e \mathrm{f}(x)dx \right| < \varepsilon$$

sur un ensemble quelconque e:

$$e \subseteqq A, \qquad e \in \mathfrak{M}, \qquad 0 < \mu(e) < \delta,$$

$\varepsilon > 0$ *donné à l'avance.*

3. - Soit $f(x)$ bornée dans A. Si $f(x)$ est mesurable dans A, il existe l'intégrale $\int_A f(x)dx$. D'après le corollaire 2 du théorème 2.4, il existe l'intégrale $\int_X f(x)dx$ pour $X \subseteqq A$, $X \in \mathfrak{M}$, et d'après le théorème 2.13, on a

$$\lim_{\mu(A-X)\to 0} \int_X f(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

D'après le théorème 2.6, si $f(x)$ est mesurable au sens généralisé dans A, $f(x)$ est R-intégrable sur A. $f(x)$ est donc mesurable dans A. Par suite, ce cas se réduit au cas précédent.

Nous chercherons donc une intégration généralisée qui donne une valeur finie $\int_A f(x)dx$ à une fonction mesurable $f(x)$ non bornée dans A.

Lorsque $f(x)$ est une fonction appartenant à $L(A)$[1], on obtient $(L)\int_A f(x)dx$ par la sommation.

Si l'on a $f(x) \in L(A)$, $f(x)$ est nécessairement intégrable. Il s'agit de la nouvelle intégration, et on a

$$\int_A f(x)dx = (L)\int_A f(x)dx,$$

où $\int_A f(x)dx$ est la nouvelle intégrale et $(L)\int_A f(x)dx$ est l'intégrale de Lebesgue par la sommation.

D'autre part, si $f(x) \in L(A)$, on a

$$\mu(\{x : |f(x)| = \infty,\ x \in A\}) = 0,$$

c'est-à-dire $f(x)$ est finie presque partout dans A.

Par suite, *dans toute la suite sauf mention expresse du contraire, nous supposons que $f(x)$ est mesurable dans A et finie presque partout dans A.*

Soit $\lambda \geqq 0$, et posons

$$A_\lambda = \{x : |f(x)| \leqq \lambda,\ x \in A\}. \tag{1}$$

Si l'on a $\lambda \leqq \lambda'$, on obtient

$$A_\lambda \subseteqq A_{\lambda'}.$$

---

[1] $L(A)$ est la famille de toutes les fonctions sommables sur A.

Par définition, il existe $(L)\int_{A_\lambda} f(x)dx$. Fixons $f(x)$ et posons

$$I_\lambda(f)=(L)\int_{A_\lambda} f(x)dx\,.$$

Alors $I_\lambda(\mathfrak{f})$ est une fonction définie dans l'intervalle $0\leqq\lambda<+\infty$. Lorsqu'il existe $\lim_{\lambda\to+\infty} I_\lambda(\mathfrak{f})$, nous posons

$$I(\mathfrak{f})=\lim_{\lambda\to+\infty} I_\lambda(\mathfrak{f}).$$

En particulier, si $\mathfrak{f}(x)$ est bornée, on obtient

$$I(\mathfrak{f})=(L)\int_A \mathfrak{f}(x)dx.$$

Cela posé, posons

$$e=\{x:|\mathfrak{f}(x)|=+\infty,\ x\in A\},$$
$$e_\lambda=A-A_\lambda\,.$$

Alors on a

(2) $$e_\lambda=\{x:|\mathfrak{f}(x)|>\lambda,\ x\in A\}.$$

Par définition, si l'on a $\lambda<\lambda'$, on obtient

$$e_\lambda\supseteqq e_{\lambda'}\,.$$

$\mu(e_\lambda)$ est donc non croissante dans $0\leqq\lambda<+\infty$. Par suite, on obtient

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\mu(e_\lambda)\geqq 0.$$

On obtient aisément

(3) $$e=\cap_{0\leqq\lambda<+\infty} e_\lambda\,.$$

D'après l'hypothèse, on obtient

(4) $$\lim_{\lambda\to+\infty}\mu(e_\lambda)=0.$$

Lorsque $I(\mathfrak{f})$ est finie, nous disons que $\mathfrak{f}(x)$ est intégrable (sekibunkanō en Japonais), et écrivons

$$\int_A \mathfrak{f}(x)dx=I(\mathfrak{f}).$$

Dans ce cas, nous exprimons

$$\mathfrak{f}(x) \in S(A).$$

THÉORÈME 3.1. - *Pour que* $\mathfrak{f}(x) \in S(A)$, *il faut et il suffit que l'on ait* Λ *tel que*

$$(5) \qquad \left| \int_{e_\lambda - e_{\lambda'}} \mathfrak{f}(x) dx \right| < \varepsilon \qquad \lambda' > \lambda \geqq \Lambda,$$

pour $\varepsilon > 0$ *donné à l'avance.*

En effet, $A_{\lambda'} - A_\lambda = e_\lambda - e_{\lambda'}$ ayant lieu, on obtient

$$\int_{A_{\lambda'}} \mathfrak{f}(x) dx - \int_{A_\lambda} \mathfrak{f}(x) dx = \int_{A_{\lambda'} - A_\lambda} \mathfrak{f}(x) dx$$
$$= \int_{e_\lambda - e_{\lambda'}} \mathfrak{f}(x) dx.$$

On a donc (5) comme une condition nécèssaire et suffsante pour $\mathfrak{f}(x) \in S(A)$.

COROLLAIRE. - *Si l'on a*

$$\mathfrak{f}(x) \in S(A), \qquad \mathfrak{f}(x) \geqq 0,$$

on obtient

$$(6) \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \mu(e_\lambda) = 0.$$

En effet, en vertu de (5), on peut prendre Λ d'une manière que l'on ait

$$0 \leqq \int_{e_\lambda - e_{\lambda'}} \mathfrak{f}(x) dx < \varepsilon \qquad \lambda' > \lambda \geqq \Lambda,$$

d'où

$$0 \leqq \lambda(\mu(e_\lambda) - \mu(e_{\lambda'})) < \varepsilon.$$

En vertu de (4), on a

$$0 \leqq \lambda \mu(e_\lambda) \leqq \varepsilon \qquad \lambda \geqq \Lambda.$$

Si $\mathfrak{f}(x)$ est une fonction bornée et mesurable dans A, $|\mathfrak{f}(x)|$ est aussi bornée et mesurable dans A. Par suite, on obtient l'intégrale finie $\int_A |\mathfrak{f}(x)| dx$. Mais lorsque l'on a $\mathfrak{f}(x) \in S(A)$, en général il n'est pas nécessaire que

$$|\mathfrak{f}(x)| \in S(A).$$

EXEMPLE 3.1. - Soit $\mathfrak{f}(x)$ une fonction définie dans $[0, 1)$:

$$\mathfrak{f}(x)=(-1)^{n+1}(n+1) \qquad 1-\frac{1}{n}\leqq x<1-\frac{1}{n+1} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Par définition, on a

$$\int_{[0,1)}\mathfrak{f}(x)dx=\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\log 2.$$

D'autre part, on a

$$\int_{[0,1)}|\mathfrak{f}(x)|\,dx=\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

THÉORÈME 3.2. - *Soit* $\mathfrak{f}(x)\in S(A)$.

1) *Si l'on a* $e\subseteqq A$, $e\in\mathfrak{M}$, $\mu(e)=0$, *on a*

$$\int_e\mathfrak{f}(x)dx=0.$$

2) *Soit* c *une constante. Alors on a*

$$\int_A(c\mathfrak{f}(x))dx=c\int_A\mathfrak{f}(x)dx.$$

3) *Soit* B *un ensemble de mesure finie. Si l'on a* $A\cap B=\emptyset$, $\mathfrak{f}(x)\in S(A)$ $\mathfrak{f}(x)\in S(B)$, *on a* $\mathfrak{f}(x)\in S(A\cup B)$, *et*

$$\int_{A\cup B}\mathfrak{f}(x)dx=\int_A\mathfrak{f}(x)dx+\int_B\mathfrak{f}(x)dx.$$

4) *Si l'on a* $e\subseteqq A$, $e\in\mathfrak{M}$, $\mu(e)=0$, *on a*

$$\int_A\mathfrak{f}(x)dx=\int_{A-e}\mathfrak{f}(x)dx.$$

5) *Soit* $h(x)$ *définie dans* A. *Si l'on a* $\mathfrak{f}(x)=h(x)$ *presque partout dans* A, *on a* $h(x)\in S(A)$ *et*

$$\int_A\mathfrak{f}(x)dx=\int_A h(x)dx.$$

PREUVE. - 1) et 2) sont clairs.

En général, soit $\varphi(x)$ une fonction définie dans A, nous utiliserons la notation suivante:

$$(\varphi(x))_\lambda=\begin{cases}\varphi(x) \text{ pour } x:|\varphi(x)|\leqq\lambda,\ x\in A,\\ 0 \text{ pour } x:|\varphi(x)|>\lambda,\ x\in A,\end{cases}$$

où $\lambda \geqq 0$.

Preuve de 3). D'après l'hypothèse, on a $\mathfrak{f}(x) \in M(A \cup B)$, et $\mathfrak{f}(x)$ est finie presque partout dans $A \cup B$. Par définition, on obtient

$$\int_{A \cup B} (\mathfrak{f}(x))_\lambda \, dx = \int_A (\mathfrak{f}(x))_\lambda \, dx + \int_B (\mathfrak{f}(x))_\lambda \, dx$$

pour $\lambda \geqq 0$. $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_A (\mathfrak{f}(x))_\lambda \, dx = \int_A \mathfrak{f}(x) dx$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_B (\mathfrak{f}(x))_\lambda \, dx = \int_B \mathfrak{f}(x) dx$ ayant lieu, on a

$$\int_{A \cup B} \mathfrak{f}(x) dx = \int_A \mathfrak{f}(x) dx + \int_B \mathfrak{f}(x) dx.$$

Preuve de 4). On a

$$\int_A (\mathfrak{f}(x))_\lambda \, dx = \int_{A-e} (\mathfrak{f}(x))_\lambda \, dx,$$

d'où

$$\int_A \mathfrak{f}(x) dx = \int_{A-e} \mathfrak{f}(x) dx.$$

Preuve de 5). D'après l'hypothèse, on a $h(x) \in M(A)$ et $h(x)$ est finie presque partout dans A.

Posons

$$e = \{x : \mathfrak{f}(x) \neq h(x),\ x \in A\}.$$

Alors on a

$$\mu(e) = 0.$$

En vertu de 1), 3) et 4), on obtient

$$\int_A \mathfrak{f}(x) dx = \int_{A-e} \mathfrak{f}(x) dx = \int_{A-e} h(x) dx = \int_A h(x) dx. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Si l'on a

$$\mathfrak{f}(x) \in S(A_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup_{An}, \quad A_j \cap A_k = \emptyset \qquad (j \neq k),$$

en vertu de 3) du théorème précédent, on obtient

$$\int_A \mathrm{f}(x)dx = \Sigma_{j=1}^n \int_{A_j} \mathrm{f}(x)dx.$$

Mais lorsque l'on a

$$\mathrm{f}(x) \in S(A_j) \quad A_j \in \mathfrak{M} \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

$$A = U_{j=1}^{\infty} A_j, \qquad A_j \cap A_k = \emptyset \qquad (j \neq k),$$

en général, il n'est pas nécessaire que l'on a

$$(7) \qquad \int_A \mathrm{f}(x)dx = \Sigma_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \mathrm{f}(x)dx.$$

EXEMPLE 3.2. - Posons

$$A_n = \left[1 - \frac{1}{\mathrm{n}},\ 1 - \frac{1}{n+1}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

et considérons la fonction $\mathrm{f}(x)$ de l'exemple précédent.
Alors on a

$$\int_{An} \mathrm{f}(x)dx = (-1)^{n+1}/n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}[0, 1) &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots \\ &= A_1 \cup A_3 \cup A_2 \cup A_5 \cup \ldots \cup A_{4k-3} \cup A_{4k-1} \cup A_{2k} \cup \ldots\end{aligned}$$

Si l'on suppose que (7) subsiste en général, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{[0,1)} \mathrm{f}(x)dx &= \log 2 \\ &= \frac{3}{2} \log 2,\end{aligned}$$

ce qui est absurde.

D'après le théorème 3.1, $|\mathrm{f}(x)| \in S(A)$ entraîne $\mathrm{f}(x) \in S(A)$. Dans ce cas, nous disons que l'intégrale $\int_A \mathrm{f}(x)dx$ se converge absolument.

Soit $\mathrm{f}(x) \in L(A)$. Cherchons la relation entre $(L)\int_A \mathrm{f}(x)dx$ et $\int_A \mathrm{f}(x)dx$.

Si $f(x) \in L(A)$, on a $f(x) \in M(A)$; et $f(x)$ est finie presque partout dans A. On obtient

$$(L)\int_A f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_A [f(x)]_n dx = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{A-e_\lambda} f(x)dx$$
$$= \int_A f(x)dx,$$

où

$$(8) \qquad [f(x)]_\lambda = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x: -\lambda \leqq f(x) \leqq \lambda,\ x \in A, \\ \lambda & \text{pour } x: f(x) > \lambda,\ x \in A, \\ -\lambda & \text{pour } x: f(x) < -\lambda,\ x \in A. \end{cases}$$

Par suite, on obtient

$$(9) \qquad (L)\int_A f(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

Si l'on a

$$f(x) \in S(A),\ f(x) \geqq 0,$$

on obtient $f(x) \in L(A)$ et (9).
En effet, d'après le corollaire du théorème 3.1, on obtient (6).

Pour $\lambda \geqq 0$, on a donc

$$\int_A [f(x)]_\lambda dx = \int_{A-e_\lambda} f(x)dx + \lambda\mu(e_\lambda).$$

Puisque l'on a

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\mu(e_\lambda) = 0,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{A-e_\lambda} f(x)dx = \int_A f(x)dx,$$

on obtient (9).

Plus généralement, considérant $|f(x)|$, nous arivons au théorème suivant.

THÉORÈME 3.3. - *Pour que $f(x) \in S(A)$ entraîne $f(x) \in L(A)$, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_A f(x)dx$ se converge absolument.*

Le corollaire suivant est une conséquence directe de ce théorème.

COROLLAIRE. - *Si l'on a $f(x) \in S(B)$ pour un ensemble quelconque $B: B \subseteqq A$, $B \in \mathfrak{M}$, $f(x) \in S(A)$ est équivalent à $f(x) \in L(A)$.*

Soient $f(x)$, $g(x)$, $(f(x)+g(x))\in S(A)$, en général il n'est pas nécessaire que l'on a

$$\int_A (f(x)+g(x))dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx. \tag{10}$$

(Voir: l'exemple 3.4)

Lorsque l'on a $f(x)\in S(A)$, et $f(x)$ satisfait à (6), nous disons que

$$f(x)\in S_0(A).$$

Par définition, on obtient

$$L(A)\subseteqq S_0(A)\subseteqq S(A).$$

EXEMPLE 3.3. - Définissons une fonction $f(x)$ comme suit:

$$f(x)=(-1)^n n^2/\log n \qquad 1-\frac{1}{n^2}\leqq x < 1-\frac{1}{(n+1)^2} \qquad (n=3,\ 4,\ \dots).$$

Alors on obtient

$$\int_{[8/9,\ 1)} f(x)dx = \Sigma_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(n+1)^2\log n}.$$

La série du second membre est convergente. Puisque l'on a

$$n^2\geqq n+1 \qquad (\mathrm{n}=3,\dots),$$

on a

$$\frac{1}{\log n}\ \frac{2n+1}{(n+1)^2}\geqq\frac{1}{n\log n} \qquad (n=3,\ \dots).$$

D'autre part, on a

$$\int_{[8/9,\ 1)}|f(x)|dx = \Sigma_{n=3}^{+\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2\log n}$$

$$\geqq \Sigma_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\log n} = +\infty.$$

On obtient donc

$$f(x)\overline{\in} L(A), \qquad f(x)\in S_0(A).$$

Soit $f(x)$ la fonction de l'exemple 3.1. Alors on obtient

$$f(x)\overline{\in} S_0(A), \qquad f(x)\in S(A).$$

En résumé, nous pouvons énoncer:

$$L(A) \subsetneqq S_0(A) \subsetneqq S(A).$$

THÉORÈME 3.4. - *Soient* $f(x), g(x) \in S_0(A)$.

1) *Alors on obtient* $(f(x)+g(x)) \in S_0(A)$ *et* (10).

2) *Si l'on a* $f(x) \leqq g(x)$, *on a*

$$\int_A f(x)dx \leqq \int_A g(x)dx.$$

3) *Si l'on a* $f(x)\,h(x) \in S(A)$, *où* $h(x) \in M(A)$ *et* $h(x)$ *est bornée, on a*

$$f(x)h(x) \in S_0(A).$$

PREUVE. - Par définition, 3) est clair.

Preuve de 1). Nous écrivons $e_\lambda(f)$ au lieu de e_λ, pour faire clair sa dépendance da la fonction $f(x)$. On a évidemment

$$(f(x)+g(x)) \in M(A).$$

Soit $x \in e_{3\lambda}(f+g)$, où $\lambda \geqq 0$ donné à l'avance. Alors on a

$$x \in e_\lambda(f) \cup e_\lambda(g),$$

d'où

$$e_{3\lambda}(f+g) \subseteqq e_\lambda(f) \cup e_\lambda(g).$$

D'après l'hypothèse, on peut prendre λ d'une manière que l'on ait

$$\lambda\mu(e_\lambda(f)) < \varepsilon/6, \qquad \lambda\mu(e_\lambda(g)) < \varepsilon/6,$$

d'où

$$3\lambda e_{3\lambda}(f+g) < \varepsilon.$$

On obtient donc

$$(f(x)+g(x)) \in S_0(A).$$

Soit $x \in \{x : |f(x)| \leqq \lambda/2,\ |g(x)| \leqq \lambda/2,\ x \in A\}$. Alors on obtient

$$(f(x))_\lambda + (g(x))_\lambda - (f(x)+g(x))_\lambda = 0.$$

En vertu de (6), on a

$$\mu(\{x : |f(x)| > \lambda/2,\ x \in A\} \cup \{x : |g(x)| > \lambda/2,\ x \in A\}) = o(\lambda^{-1}).$$

Par suite, on obtient,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_A ((f(x)+g(x))_\lambda - (f(x))_\lambda - (g(x))_\lambda) dx = 0,$$

d'où

$$\int_A (f(x)+g(x))dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx.$$

Preuve de 2). D'après 2) du théorème 3.2, on obtient

$$\int_A (g(x)-f(x))dx = \int_A g(x)dx - \int_A f(x)dx,$$

d'où

$$(g(x)-f(x)) \in S(A).$$

Puisque l'on a $g(x)-f(x) \geqq 0$, on a

$$(g(x)-f(x)) \in L(A),$$

d'où

$$\int_A f(x)dx \leqq \int_A g(x)dx. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Lorsque l'on a

$$A_n \in \mathfrak{M},\ f(x) \in S_0(A_n) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$A = U_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad A_j \cap A_k = \emptyset \qquad (j \neq k),$$

en général, il n'est pas nécessaire que l'on a (7).

Supposons que (7) subsiste, en général.

Prenons la fonction $f(x)$ de l'exemple 3.3. Posons

$$A_n = [1-\frac{1}{n^2},\ 1-\frac{1}{(n+1)^2}) \qquad (n=3,\ 4,\ \ldots).$$

Alors on a

$$[8/9,\ 1) = A_3 \cup A_4 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$$

En chagant d'ordre du second member, on obtient

$$[8/9,\ 1) = A_3' \cup A_4' \cup \dots \cup A_n' \cup \dots$$

D'après le théorème de Riemann, on peut prendre $\{A_3', A_4', \dots, A_n', \dots\}$ d'une manière que l'intégrale $\int_A f(x)dx = \Sigma_{n=3}^{\infty} \int_{A'_n} f(x)dx$ est égale à une valeur donnée à l'avance. Ce qui est absurde.

THÉORÈME 3.5. - Soient $f_n(x) \in S(A)$ $(n = 1, 3, \dots)$.

Si $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ *sont finies et* $\{f_n(x)\}$ *converge vers* $f(x)$ *uniformement dans* A, *on a*

$$f(x) \in S(A),$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

PREUVE. - D'après l'hypothèse, on a

$$f(x) \in M(A), \qquad f(x) \neq \pm\infty \qquad x \in A.$$

On peut prendre N indépendant de x tel que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad n \geqq N,$$

pour $\varepsilon > 0$ donnè à l'avance.

On obtient donc

$$\left|\int_A (f_n(x))_\lambda\, dx - \int_A (f(x))_\lambda\, dx\right|$$

$$= \left|\int_A \{(f_n(x))_\lambda - (f(x))_\lambda\}\, dx\right|$$

$$\leqq \int_A |(f_n(x))_\lambda - (f(x))_\lambda|\, dx$$

$$\leqq \varepsilon\mu(A) \qquad n \geqq N,$$

pour $\lambda \geqq 0$. Par suite, on a

$$\left|\int_A ((f(x))^\lambda - (f(x))_{\lambda'})\, dx - \int_A ((f_N(x))_\lambda - (f_N(x))_{\lambda'})dx\right|$$

$$\leqq 2\,\varepsilon\,\mu(A),$$

d'où

$$|\int_A ((f(x))_\lambda - (f(x))_{\lambda'})\, dx|$$
$$\leqq |\int_A ((f_N(x))_\lambda - (f_N(x))_{\lambda'})\, dx| + 2\varepsilon\mu(A).$$

Puisque l'on peut prende $\Lambda > 0$ tel que

$$|\int_A ((f_N(x))_\lambda - (f_N(x))_{\lambda'})\, dx| < \varepsilon \qquad \lambda' > \lambda \geqq \Lambda,$$

d'où

$$|\int_{A_\lambda} f(x)dx - \int_{A_{\lambda'}} f(x)dx| < (1 + 2\mu(A))\, 2\varepsilon$$
$$\lambda' > \lambda \geqq \Lambda .$$

On obtient donc

$$f(x) \in S(A).$$

$$|\int_A (f(x))_\lambda\, dx - \int_A (f_n(x))_\lambda\, dx| \leqq \varepsilon\mu(A) \qquad n \geqq N,$$

pour $\lambda \geqq 0$ ayant lieu, on obtient

$$|\int_A f(x)dx - \int_A f_n(x)dx| \leqq \varepsilon\mu(A) \qquad n \geqq N.$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on obtient

$$\int_A f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n(x)dx.$$

REMARQUE - Dans son mémoire [2], M. E.C. Titchmarsh a introduit les notions de la Q-intégrale et de la A-intégrale d'une fonction $f(x)$ mesurable dans l'intervalle $[a, b]$, bien qu'il n'ait pas employé cette terminologie-ci.

Lorsqu'il existe $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b [f(x)]_n\, dx$, il a dit que $f(x)$ est Q-intégrale, et exprimé cette limite par $Q\int_a^b f(x)dx$.

Concernant la Q-intégrale, il a énoncé que « It is not necessarily true that

$$Q\int_a^b f(x)dx + Q\int_a^b g(x)dx = Q\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\, dx, \tag{11}$$

even if all the integrals exist».

EXEMPLE 3.4. - Soient

$$f(x)=\begin{cases} n & 1/n < x < 1/n\, 1/2n^2, \\ -n & -1/n-1/2n^2 < x < -1/n, \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} n & 1/n < x < 1/n+1/2n^2, \\ -n & -1/n < x < -1/n+1/2n^2, \end{cases}$$
$$(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

et $f(x)=g(x)=0$ en dehors de ces intervalles. Alors on obtient

$$Q\int_{-1}^{1} f(x)dx=0, \qquad Q\int_{-1}^{1} g(x)dx=0,$$
$$Q\int_{-1}^{1} \{f(x)+g(x)\}\,dx=\log\frac{1}{2}.$$

(E. C. Titchmarsh).

Soient $f(x)$ et $g(x)$ Q-intégrables sur l'intervalle $[a, b]$. Si l'on a

$$\mu(\{x: |f(x)| > n,\ x\in[a, b]\})=o(n^{-1}),$$
$$\mu(\{x: |g(x)| > n,\ x\in[a, b]\})=o(n^{-1}),$$

on obtient (11). (Voir : [2])

Soit E un ensemble de mesure finie dans R^n. Nous étendons les intégrales définies par Titchmarsh sur $[a, b]$ celles sur E.

Pour cela, il me semble qu'il est bien naturel de définir comme suit:

Soient $f(x)\in M(E)$, $\lambda\geqq 0$. Lorsque l'on a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_E [f(x)]_\lambda\, dx$ (finie), nous disons que $f(x)$ est Q-intègrable sur E, et nous ècrivons

$$f(x)\in Q(E),$$
$$Q\int_E f(x)dx=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_E [f(x)]_\lambda\, dx.$$

Dans ce cas, on obtient nécessairement

$$\mu(\{x: |f(x)|=+\infty,\ x\in E\})=0.$$

Nous supposons donc que $f(x)$ *est mesurable dans E et finie présque partout dans E.*

Posons

$$e_\lambda^+ = \{x : f^+(x) > \lambda,\ x \in E\},$$

$$e_\lambda^- = \{x : f^-(x) > \lambda,\ x \in E\},$$

$$e_\lambda = \{x : |f(x)| > \lambda,\ x \in E\}.$$

En vertu de (8), on obtient

$$\int_E (f(x))_\lambda\, dx = \int_E [f(x)]_\lambda\, dx - \lambda(\mu(e_\lambda^+) - \mu(e_\lambda^-)).$$

Soit

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(\mu(e_\lambda^+) - \mu(e_\lambda^-)) = l \text{ (finie)}.$$

Alors si l'on a $f(x) \in Q(E)$, on obtient

$$f(x) \in S(E),$$

$$\int_E f(x)dx = Q\int_E f(x)\, dx - l$$

Réciproquement, si l'on a $f(x) \in S(E)$, on a $f(x) \in Q(E)$ et

$$Q\int_E f(x)dx = \int_E f(x)dx + l.$$

Lorsque l'on a $f(x) \in Q(E)$ et

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\mu(e_\lambda) = 0,$$

nous disons que $f(x)$ est A-intégrable, et l'écrivons par

$$f(x) \in A(E).$$

Nous définissons l'intégrale par

$$(A)\int_E f(x)dx = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_E [f(x)]_\lambda\, dx.$$

Par définition, on a

$$\int_E [f(x)]_\lambda\, dx - \lambda\mu(e_\lambda) \leqq \int_E (f(x))_\lambda\, dx$$

$$\leqq \int_E [\mathfrak{f}(x)]_\lambda \, dx + \lambda\mu(e_\lambda).$$

Par suite, $\mathfrak{f}(x) \in A(E)$ *est équivalent à* $\mathfrak{f}(x) \in S_0(E)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. SATŌ, *Sur l'analyse générale,* (*Théorie des fonctions d'ensemble*), Annali di Mat. Pura Appl., **47** (1957).

II (*Intégrales d'applications de treillis*), ibid., **52** (1960).

III (*Différentiation d'applications de fonctions*), ibid., **59** (1962).

IV (*Entropie dans la cybernétique*), ibid., **61** (1963).

V (*Théorie des suites filtrantes de nombres*), **74** (1966).

[2] E C. TITCHMARSH, *On conjugate functions,* Proc. London Math. S., **29** (1929).