Martingale - Perimetro.

CALOGERO VINTI (Modena) (*) (**)

Sunto. - *Il lavoro è riassunto nell'introduzione.*

Introduzione.

I processi stocastici markoviani e quelli di approssimazione in perimetro alla DE GIORGI presentano dei legami di interdipendenza che sono stati messi la prima volta a fuoco in un lavoro in collaborazione con E. BAIADA [1].

Nell'esaminare la possibilità di trasportare il perimetro di un insieme in uno spazio senza una vera topologia ma con una assegnata operazione di quasi-limite alla FISCHER, quei legami di interdipendenza, visti nel loro aspetto di contributo all'indagine di un processo mediante l'altro, mi hanno indotto a generalizzare il concetto di martingala e pervenire a quello di martingale (generalizzate) generate da una coppia di applicazioni di passaggio che rappresenta lo stadio in cui appare l'intima connessione con il processo di approssimazione in perimetro.

I risultati a cui sono pervenuto rappresentano l'oggetto di questo lavoro.

Nel § 1 si riprende la definizione di operazione di quasi-limite o pseudo-topologia (H. R. FISCHER [8]) e quella di gradiente di una applicazione (A. FRÖLICHER-W. BUCHER [9]); si introduce poi la norma del gradiente definendo una norma (generalizzata) sullo spazio $L(E_1, E_2)$ delle applicazioni lineari e continue, con E_1 pseudo topologico e E_2 normato.

Nel § 2 vengono definite le martingale in senso generalizzato che rappresentano un ampliamento di quelle alla KRICKEBERG-PAUC, e si stabilisce un teorema di decomposizione alla HEWITT-YOSIDA mediante il quale una martingala (generalizzata), sotto opportune ipotesi, si decompone in una martingala che genera un processo stocastico markoviano e in una martingala puramente semplicemente additiva.

Nel § 3 si introducono le martingale generate da una applicazione di passaggio e quelle generate da una coppia di applicazioni di passaggio e in-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei programmi di ricerca matematica del C. N. R.

(**) Entrata in Redazione il 18 novembre 1969.

fine nel § 4 si definisce il perimetro di un insieme in uno spazio vettoriale con misura in cui è assegnata una compatibile operazione di quasi limite.

§ 1. - Spazi pseudo-topologici o con operazione di quasi-limite.

1.1. - Operazione di quasi-limite.

Sia $\boldsymbol{F}(E)$ la totalità dei filtri $\mathfrak{F}$ sullo spazio E e $\mathfrak{P}(\boldsymbol{F}(E))$ la totalità delle parti di $\boldsymbol{F}(E)$. Su $\boldsymbol{F}(E)$ s'introduca il semiordinamento con la relazione $\ll$ definita dall'inclusione

$$\mathfrak{F}_1 \ll \mathfrak{F}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2,$$

e dicendo $\mathfrak{F}_1$ meno fine di $\mathfrak{F}_2$ oppure $\mathfrak{F}_2$ più fine di $\mathfrak{F}_1$ quando $\mathfrak{F}_1 \ll \mathfrak{F}_2$.

Se $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \boldsymbol{F}(E)$, con $\mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2$ si denota il filtro su E dato da $\inf\{\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2\}$, che è il filtro intersezione $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$.

Analogamente se $\{\mathfrak{F}_\iota\}_{\iota\in I}$ è una famiglia di filtri su E il filtro $\bigwedge\limits_{\iota\in I} \mathfrak{F}$ è $\inf\{\mathfrak{F}_\iota\}_{\iota\in I}$.

Si denota con $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_i \in \boldsymbol{F}(E_i)$, $i = 1, 2$, il filtro prodotto sullo spazio prodotto cartesiano $E_1 \times E_2$, che è il filtro generato dalla base $\{F_1 \times F_2: F_1 \in \mathfrak{F}_1, F_2 \in \mathfrak{F}_2\}$.

Analogamente se $\mathfrak{F}_i \in \boldsymbol{F}(E_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, con $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i$ si denota il filtro prodotto sullo spazio prodotto cartesiano $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} E_i$.

Il filtro costituito da tutte le parti di E contenenti un punto x, cioè il filtro generato dalla base costituita soltanto da x, si indica con $\dot{x}$.

Filtro immagine in E_2 di un filtro $\mathfrak{F} \in \boldsymbol{F}(E_1)$ attraverso una applicazione $f: E_1 \to E_2$ è il filtro, che si denota $f(\mathfrak{F})$, generato dalla base $\{f(F): F \in \mathfrak{F}\}$.

Operazione di quasi-limite o pseudo-topologia (H. R. FISCHER [8], pag. 273) su E è una applicazione $\tau: E \to \mathfrak{P}(\boldsymbol{F}(E))$ con le proprietà

1) $\forall x \in E$, $\tau(x)$ è un $\wedge$-ideale in $\boldsymbol{F}(E)$, cioè

   $\mathfrak{F}_1 \in \tau(x)$, $\mathfrak{F}_2 \in \tau(x) \Rightarrow \mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2 \in \tau(x)$,

   $\mathfrak{F}_1 \in \tau(x)$, $\mathfrak{F}_1 \ll \mathfrak{F}_2 \Rightarrow \mathfrak{F}_2 \in \tau(x)$;

2) $\forall x \in E$, $\dot{x} \in \tau(x)$.

La coppia (E, τ) si chiama *spazio con operazione di quasi-limite o pseudo-topologico.*

Un filtro $\mathfrak{F} \in \boldsymbol{F}(E)$ si dirà *convergente* a x relativamente alla operazione di quasi-limite τ, e si scriverà $\mathfrak{F}\downarrow_x (E, \tau)$, se $\mathfrak{F} \in \tau(x)$.

Uno spazio pseudo-topologico (E, τ) si dirà *separato* se

$$\mathcal{F} \downarrow_x (E, \tau),\ \mathcal{F} \downarrow_y (E, \tau) \Rightarrow x = y.$$

Assegnate sullo spazio E due pseudo-topologie τ', τ'', si dice che (E, τ'') è *più fine* di (E, τ') oppure (E, τ') *meno fine di* (E, τ'') e si scrive $(E, \tau') \ll (E, \tau'')$, se si ha

$$\mathcal{F} \downarrow_x (E, \tau'') \Rightarrow \mathcal{F} \downarrow_x (E, \tau'),\ \forall x \in E.$$

In uno spazio (E, τ) un insieme $A \subset E$ si dice *aperto* relativamente a τ quando per ogni $x \in A$ si ha $A \in \mathcal{F}$, $\forall \mathcal{F} \in \tau(x)$.

Una applicazione $f\colon E_1 \to E_2$ di (E_1, τ_1) in (E_2, τ_2) si dice *continua* nel punto $x \in E_1$ se

$$\mathcal{F} \downarrow_x (E_1, \tau_1) \Rightarrow f(\mathcal{F}) \downarrow_x (E_2, \tau_2)$$

L'applicazione f è detta continua su E_1 se è continua in ogni suo punto.

Dati due spazi (E_1, τ_1), (E_2, τ_2) si chiama spazio *prodotto pseudo-topologico* di (E_1, τ_1) con (E_2, τ_2), e si indica $(E_1 \times E_2, \tau_1 \times \tau_2)$, la coppia costituita dallo spazio $E_1 \times E_2$ con l'applicazione $\tau_1 \times \tau_2\colon E_1 \times E_2 \to \mathcal{S}(\boldsymbol{F}(E_1 \times E_2))$ definita dalla

$$(\tau_1 \times \tau_2)(x, y) = \{\mathcal{F}\colon \exists\ \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \quad \text{con} \quad \mathcal{F}_1 \in \tau_1(x),\ \mathcal{F}_2 \in \tau_2(x),\ \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \ll \mathcal{F}\}.$$

Che $\tau_1 \times \tau_2$ gode delle proprietà 1), 2) si vede facilmente.

Sia E uno spazio vettoriale sul reale $\mathbb{R}$. Un'operazione di quasi-limite si dirà *ammissibile* in E con la struttura di spazio vettoriale se sono soddisfatte le proprietà

3) l'applicazione $(x, y) \to x + y$ del prodotto pseudo-topologico $(E \times E, \tau \times \tau)$ in (E, τ) sia continua,

4) l'applicazione $(\lambda, x) \to \lambda \cdot x$ del prodotto pseudo-topologico $(\mathbb{R} \times E, \delta \times \tau)$ in (E, τ) sia continua (1).

Uno spazio vettoriale pseudo-topologico è uno spazio vettoriale con una ammissibile operazione di quasi-limite in esso ([8], pag. 296).

PROPOSIZIONE 1.1 ([9], pag. 15). - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'operazione di quasi-limite τ di uno spazio vettoriale pseudo-topologico (E, τ) sia una topologia è che τ sia un $\wedge$-ideale fondamentale, cioè per ogni $x \in E$ esiste un filtro $\mathcal{U}_x \in \tau x)$ con $\mathcal{U}_x \ll \mathcal{F}$, $\forall \mathcal{F} \in \tau(x)$.*

---

(1) Con δ si denota l'usuale topologia nel reale $\mathbb{R}$.

Per la necessità della condizione, che è immediata, l'ipotesi che E sia vettoriale è superflua.

1.2 - **Differenziabilità.**

Con $\mathcal{H}$ indicheremo il filtro degli intorni dello zero in $\mathbb{R}$ e se $\mathcal{F} \in \boldsymbol{F}(E)$ denoteremo con $\mathcal{H} \cdot \mathcal{F}$ il filtro immagine in E, attraverso l'applicazione $f(\mu, x) = \mu \cdot x$: $\mathbb{R} \times E \to E$, del filtro $\mathcal{H} \times \mathcal{F}$ su $\mathbb{R} \times E$.

Sia r: $E_1 \to E_2$ un'applicazione tra due spazi vettoriali pseudo-topologici (E_1, τ_1), (E_2, τ_2). Si associ ad r l'applicazione $\Theta_r(\lambda, x)$: $\mathbb{R} \times E_1 \to E_2$ definita dalla

$$\Theta_r(\lambda, x) = \begin{cases} \lambda^{-1} \cdot r(\lambda \cdot x) & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

L'applicazione r è chiamata un *resto* ([9], pag. 32) se

5) $r(0) = 0$,

6) $\mathcal{H} \cdot \mathcal{F} \downarrow_0 (E_1, \tau_1) \Rightarrow \Theta_r(\mathcal{H} \times \mathcal{F}) \downarrow_0 (E_2, \tau_2)$, $\forall\, \mathcal{F} \in \boldsymbol{F}(E_1)$.

PROPOSIZIONE 1.2.1 ([9], pag. 33). - *Lo spazio $R(E_1, E_2)$ dei resti è vettoriale.*

PROPOSIZIONE 1.2.2 ([9], pag. 35). - *Se E_2 è separato ed $r \in R(E_1, E_2)$ è lineare allora r e l'applicazione nulla.*

Come conseguenza immediata di queste proposizioni si ha che data una applicazione f: $E_1 \to E_2$, con E_1, E_2 separati e fissato un punto $a \in E_1$ esiste al più una applicazione lineare l: $E_1 \to E_2$ tale che l'applicazione r: $E_1 \to E_2$ definita dalla

7) $r(h) = f(a + h) - f(a) - l(h)$, $h \in E_1$,

sia un resto.

Un'applicazione f: $E_1 \to E_2$, con E_1, E_2 separati, è detta *differenziabile* in $a \in E_1$ se esiste una applicazione lineare e continua l: $E_1 \to E_2$ tale che la trasformazione r: $E_1 \to E_2$ definita dalla 7) sia un resto.

L'applicazione $l(h)$, che è univocamente determinata, si chiama il *Gradiente* di f in $a \in E_1$ e si denota $\mathrm{Grad}_a f \cdot h$.

Nella definizione detta di differenziabilità la ragione di imporre che $l(h)$ sia continua è dovuta al fatto che senza questa condizione non è in generale vero che la composizione di due applicazioni differenziabili sia differenziabile ([9], pag. 37).

Se gli spazi E_1, E_2 sono vettoriali normati la definizione di resto e di conseguenza quella di differenziabilità coincidono con le classiche proposte da FRECHÉT ([9], pag. 42).

Siano (E_i, τ_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ degli spazi vettoriali pseudo-topologici separati ed $f\colon \bigtimes_{i=1}^{n} E_i \to E_0$. Si munisca $\bigtimes_{i=1}^{n} E_i$ con l'operazione quasi-limite prodotto. Se f è differenziabile in $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \bigtimes_{i=1}^{n} E_i$ esiste $\mathrm{Grad}_a f$. Se invece nulla si sa sulla differenziabilità di f in a ma sono differenziabili le applicazioni $x_i \to f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ di $E_i \to E_0$ in $a_i \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, non è in generale detto che la f sia differenziabile in a; in questo caso si chiamerà gradiente di f in $a \in \bigtimes_{i=1}^{n} E_i$, $\mathrm{grad}_a f$, l'applicazione lineare e continua di $\bigtimes_{i=1}^{n} E_i$ in E_0 definita dalla

$$8)\qquad \mathrm{grad}_a f \cdot (t_1, t_2, \ldots, t_n) = \mathrm{Grad}_{a_1} f \cdot t_1 + \mathrm{Grad}_{a_2} f \cdot t_2 + \ldots + \mathrm{Grad}_{a_n} f \cdot t_n,$$

ove $\mathrm{Grad}_{a_i} f$ denota il Gradiente in $a_i \in E_i$ dell'applicazione $x_i \to f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ di E_1 in E_0.

Questa definizione è giustificata dalla seguente

PROPOSIZIONE 1.2.3 ([9], pag. 90). - *Se* $f\colon \bigtimes_{i=1}^{n} E_i \to E_0$ *è differenziabile in* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \bigtimes_{i=1}^{n} E_i$ *risultano differenziabili in* $a_i \in E_i$ *le applicazioni* $f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\colon E_i \to E_0$ *e vale la* (8) *quando al primo membro di essa invece di* $\mathrm{grad}_a f$ *si scrive* $\mathrm{Grad}_a f$.

1.3 - Norma (generalizzata) sullo spazio $L(E_1, E_2)$.

Se $\mathcal{F} \in \boldsymbol{F}(E)$ ed $a \in E$, con $\mathcal{F}_{-a}$ denotiamo il filtro immagine su E del filtro $\mathcal{F}$ attraverso l'applicazione $f(x) = x - a\colon E \to E$.

Sia (E, τ) uno spazio vettoriale pseudo topologico e si denoti con $\mathcal{U}_0$ il filtro $\mathcal{U}_0 = \inf\limits_{\mathcal{F} \downarrow 0(E,\tau)} \{\mathcal{F}\}$. Sia poi $\widetilde{\mathcal{U}}_0$ il filtro generato dai convessi in $\mathcal{U}_0$ e τ_0^* la famiglia dei filtri $\tau_0^* = \{\mathcal{F}\colon \widetilde{\mathcal{U}}_0 \ll \mathcal{F},\ \mathcal{F} \in \boldsymbol{F}(E)\}$.

L'applicazione $\tau^*\colon E \to \mathcal{S}(\boldsymbol{F}(E))$ definita dalla

$$\tau^*(x) = \{\mathcal{F} \in \boldsymbol{F}(E)\colon \mathcal{F}_{-x} \in \tau_0^*\}$$

rappresenta su E un'operazione di quasi-limite compatibile con la struttura di spazio vettoriale ([8], pag. 297; [9], pag. 21).

In virtù della Proposizione 1.1 la τ^* è una topologia perchè è un $\wedge$-ideale fondamentale.

Lo spazio (E, τ^*) è quindi uno spazio vettoriale topologico localmente convesso ([3], pag. 57) e risulta $(E, \tau^*) \ll (E, \tau)$.

La topologia τ^* localmente convessa dicesi *associata* alla pseudo-topologia τ.

Se poi (E, τ) è vettoriale topologico localmente convesso risulta $(E, \tau^*) = (E, \tau)$.

Consideriamo ora uno spazio vettoriale E_1 munito di una operazione di quasi-limite τ e uno spazio vettoriale E_2 munito di una norma $\| \|_{E_2}$.

Detta τ^* la topologia localmente convessa associata alla pseudo-topologia τ denotiamo con E_1^* lo spazio E_1 munito di questa topologia.

Ogni applicazione lineare $l \colon E_1 \rightarrow E_2$ che sia continua è anche una applicazione lineare $l \colon E_1^* \rightarrow E_2$ continua ([9], pag. 30).

Viceversa se una applicazione lineare $l \colon E_1^* \rightarrow E_2$ è continua anche l'applicazione $l \colon E_1 \rightarrow E_2$ è ovviamente continua e quindi lo spazio $L(E_1, E_2)$ coincide con lo spazio $L(E_1^*, E_2)$.

Sia $\{p_\iota\}_{\iota \in I}$ una famiglia di seminorme su E_1, semiordinata progressivamente ($\forall \iota', \iota'' \in I$, $\exists \iota \in I$ tale che per ogni $x \in E_1$ è $p_{\iota'}(x) \leq p_\iota(x)$, $p_{\iota''}(x) \leq p_\iota(x)$) che genera la topologia τ^* (per l'esistenza di tale famiglia cfr. [13], pag. 75).

Poichè ogni applicazione $l \in L(E_1^*, E_2)$ solo e quando esiste un $\iota \in I$ tale che $\sup\limits_{x \colon p_\iota(x) \leq 1} \|l(x)\|_{E_2} < +\infty$, sullo spazio $L(E_1^*, E_2)$ viene ad essere definita l'operazione di quasi-limite (induttivo) con la quale $L(E_1^*, E_2)$ rappresenta il limite induttivo degli spazi $L_\iota(E_1, E_2) = \{l \colon l \in L(E_1^*, E_2), \sup\limits_{x \colon p_\iota(x) \leq 1} \|l(x)\|_{E_2} < +\infty\}$ in ciascuno dei quali è assegnata la norma $\|l\|_\iota = \sup\limits_{x \colon p_\iota(x) \leq 1} \|l(x)\|_{E_2}$ ([11], pag. 263; [13], cap. II, § 2).

Purtroppo l'operazione di quasi-limite induttivo su $L(E_1^*, E_2)$, salvo il caso che E_1 sia normato, non è generata da una norma ([11], pag. 264) e allora l'unica possibilità che si ha per normare lo spazio $L(E_1^*, E_2)$ è quella di definire su $L(E_1^*, E_2)$ una norma generalizzata che si riduce all'usuale norma (cfr. [6]. pag. 103) quando E_1^* è normato.

Questa norma generalizzata è definita per ogni $l \in L(E_1^*, E_2) = L(E_1, E_2)$ dalla

$$9) \quad \|l\| = \sup_{x \colon \exists \iota \in I,\, p_\iota(x) \leq 1} \|l(x)\|_{E_2}.$$

Si osservi che la 9) può non essere finita e inoltre che

$$10) \quad l(x) \equiv 0 \Rightarrow \|l\| = 0;$$

$$11) \quad \text{se } \lambda \in R,\ \lambda \neq 0, \text{ si ha } \|\lambda l\| = \sup_{x \colon \exists \iota \in I,\, p_\iota(x) \leq 1} \|\lambda l(x)\|_{E_2} =$$

$$= \sup_{x \colon \exists \iota \in I,\, p_\iota(x) \leq 1} |\lambda| \cdot \|l(x)\|_{E_2} = |\lambda| \cdot \|l\|;$$

$$12) \quad \|l + l'\| = \sup_{x \colon \exists \iota \in I,\, p_\iota(x) \leq 1} \|l(x) + l'(x)\|_{E_2} \leq \sup_{x \colon \exists \iota \in I,\, p_\iota(x) \leq 1} \|l(x)\|_{E_2} +$$

$$+ \sup_{x \colon \exists \iota \in I,\, p_\iota(x) \leq 1} \|l'(x)\|_{E_2} = \|l\| + \|l'\|.$$

Per mostrare che $\| \ \|$ definita dalla 9) è una norma generalizzata occorre far vedere che

$$\|l\| = 0 \Rightarrow l(x) \equiv 0.$$

Poniamo $H = \{x \in E_1 : \exists \iota \in I,\ p_\iota(x) \leq 1\}$. Si ha $0 = \|l\| = \sup_{x:\ \exists\iota\in I,\ p_\iota(x)\leq 1} \|l(x)\|_{E_2} = \sup_{x:\ x\in H} \|l(x)\|_{E_2}$ e quindi $l(x) = 0$, $\forall x \in H$.

Sia allora $x \in E_1 - H$. Risulta $p_\iota(x) > 1$, $\forall \iota \in I$, e dunque si può scrivere $l(x) = p_\iota(x) \cdot l(x/p_\iota(x))$.

Ma è $p_\iota(x/p_\iota(x)) = 1$ e quindi, poichè $x/p_\iota(x) \in H$, si ha $l(x/p_\iota(x)) = 0$ e di conseguenza $l(x) = 0$ con $x \in E_1 - H$.

Risulta quindi $l(x) \equiv 0$ quando $\|l\| = 0$.

OSSERVAZIONE. - Quando esiste il $\mathrm{grad}_x f$, dell'applicazione $f\colon E_1 \to E_2$, con E_1 vettoriale pseudo-topologico separato e E_2 vettoriale normato, poichè $\mathrm{grad}_x f \in L(E_1, E_2)$, ha senso considerare la norma (generalizzata) $\|\mathrm{grad}_x f\|$ e, nel caso particolare $E_1 = \mathbb{R}^n$, $E_2 = \mathbb{R}$, ove in $\mathbb{R}$ si assegna l'usuale metrica euclidea, si ha:

$$\|\mathrm{grad}_x f\| = (f'^2_{x_1} + f'^2_{x_2} + \dots + f'^2_{x_n})^{\frac{1}{2}}.$$

§ 2. - Martingale in senso generalizzato.

2.1. - Base stocastica.

Sia Θ uno spazio di indici, cioè di elementi semiordinati con una relazione $\ll$, e questo semiordinamento sia *progressivo*, cioè

$$\forall \tau, \rho \in \Theta,\ \exists \nu \in \Theta \quad \text{tale che} \quad \tau \ll \nu,\ \rho \ll \nu.$$

Denotiamo con $\{\Omega_\tau\}_{\tau\in\Theta}$ una famiglia indiciata di spazi.

Per ogni coppia τ, $\rho \in \Theta$, $\tau \ll \rho$, sia data una applicazione $f_{\tau,\rho}\colon \Omega_\rho \to \Omega_\tau$, di Ω_ρ in Ω_τ.

La famiglia di applicazioni $\{\omega_\tau = f_{\tau,\rho}(\omega_\rho)\}_{\tau,\rho\in\Theta:\ \tau\ll\rho}$ si dirà *proiettiva* se gode delle seguenti proprietà:

1) $f_{\tau,\tau} =$ identità, $\forall \tau \in \Theta$;

2) $f_{\tau,\nu} = f_{\tau,\rho}(f_{\rho,\nu})$, $\forall\ \tau, \rho, \nu \in \Theta : \tau \ll \rho \ll \nu$.

Data una famiglia indicata di spazi $\{\Omega_\tau\}_{\tau\in\Theta}$ assieme a una famiglia proiettiva di applicazioni $\{\omega_\tau = f_{\tau,\rho}(\omega_\rho)\}_{\tau,\rho\in\Theta:\ \tau\ll\rho}$ si chiama *spazio limite proiettivo* ([10], pag. 31) l'insieme Ω_∞ costituito dalla totalità dei punti ω_∞, ciascuno dei quali è una collezione di punti, $\omega_\infty = \{\omega_\tau : \omega_\tau \in \Omega_\tau\}_{\tau\in\Theta}$, con la condizione che in tale collezione per ogni $\tau \in \Theta$ ci sia un sol punto $\omega_\tau \in \Omega_\tau$, chiamato il τ-esimo componente di ω_∞, e inoltre $\forall \tau, \rho \in \Theta : \tau \ll \rho$ il τ-esimo componente e il ρ-esimo componente di ω_∞ siano vincolati dalla proiezione $\omega_\tau = f_{\tau,\rho}(\omega_\rho)$.

Se per ogni $\tau \in \Theta$ si denota con $f_{\tau,\infty}$ l'applicazione di Ω_∞ in Ω_τ definita dalla $\omega_\tau = f_{\tau,\infty}(\omega_\infty)$, essendo ω_τ il τ-esimo componente di ω_∞, risulta ovviamente

2') $f_{\tau,\infty} = f_{\tau,\rho}(f_{\rho,\infty}), \ \forall \tau, \rho \in \Theta : \tau \ll \rho$.

Una famiglia $\{\omega_\tau = f_{\tau,\rho}(\omega_\rho)\}_{\tau,\rho \in \Theta : \tau \ll \rho}$ di applicazioni proiettive si dirà *massimale* (semplicemente massimale secondo BOCHNER [2], pag. 118) se

3) $\forall \tau, \rho \in \Theta : \tau \ll \rho$ la $f_{\tau,\rho}$ è una applicazione di Ω_ρ su Ω_τ;

3') $\forall \tau \in \Theta$ la $f_{\tau,\infty}$ è una applicazione di Ω_∞ su Ω_τ.

Ovviamente, in questo caso, ogni punto $\omega_\tau \in \Omega_\tau$, $\forall \tau \in \Theta$, è il τ-esimo componente di almeno un punto $\omega_\infty \in \Omega_\infty$.

Chiamiamo *base stocastica* una famiglia indiciata di spazi misurabili $\{\Omega_\tau, \mathfrak{B}_\tau\}_{\tau \in \Theta}$, ove $\mathfrak{B}_\tau$ è una σ-algebra su Ω_τ, assieme a una famiglia massimale di applicazioni $\{\omega_\tau = f_{\tau,\rho}(\omega_\rho)\}_{\tau,\rho \in \Theta : \tau \ll \rho}$, con la condizione che $\forall \tau, \rho \in \Theta : \tau \ll \rho$ l'applicazione $f_{\tau,\rho}$ di Ω_ρ su Ω_τ sia $\mathfrak{B}_\rho$-misurabile.

Una base stocastica la denoteremo $\{\Omega_\tau, \mathfrak{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho \in \Theta : \tau \ll \rho}$.

2.2. - Premartingale, semimartingale, martingale.

Premartingala (*generalizzata*) di base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathfrak{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho \in \Theta : \tau \ll \rho}$ è una famiglia $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$. ove φ_τ, $\forall \tau \in \Theta$, è ùna funzione σ-additiva definita su $\mathfrak{B}_\tau$.

D'ora in avanti la base stocastica la riterremo fissa e spesso non faremo uso della locuzione «di base stocastica».

Una premartingala $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$ è detta *sottomartingala* (*generalizzata*) se $\forall \tau, \rho \in \Theta : \tau \ll \rho$ risulta

4) $\varphi_\tau(B_\tau) \leq \varphi_\rho(f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau)), \ \forall B_\tau \in \mathfrak{B}_\tau$.

Una premartingala $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$ è detta *sopramartingala* (*generalizzata*) se nella 4) vale il segno $\geq$.

Per *semimartingala* s'intende una premartingala che sia sopramartingala o sottomartingala.

Una premartingala $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$ è detta *martingala* (*generalizzata*) se nella 4) vale il segno $=$.

Ovviamente per una martingala $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$ il valore $\varphi_\tau(\Omega_\tau)$ non dipende da $\tau \in \Theta$.

Una premartingala $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$ si dirà non negativa se $\forall \tau \in \Theta$ è $\varphi_\tau \geq 0$.

La somma di due premartingale $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$, $\Psi = \{\psi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$ sulla stessa base stocastica è definita dalla premartingala $\{\varphi_\tau + \psi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$ purché $\forall \tau \in \Theta$ abbia senso $\varphi_\tau + \psi_\tau$.

La somma, se esiste, di due sottomartingale o sopramartingale o martingale è rispettivamente una sottomartingala, sopramartingala, martingala.

Una martingala $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$ è detta a *variazione limitata* quando $\forall \tau \in \Theta$ e $\forall B_\tau \in \mathcal{B}_\tau$ l'insieme numerico $\{\varphi_\tau(B_\tau)\}_{\tau \in \Theta, B_\tau \in \mathcal{B}_\tau}$ risulta limitato.

Una premartingala [sottomartingala, sopramartingala, martingala] in senso generalizzato sulla base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho \in \Theta : \tau \ll \rho}$ è una premartingala [sottomartingala, sopramartingala, martingala] in senso classico (²) *quando* Ω_τ, $\forall \tau \in \Theta$, *è una copia di uno stesso spazio* E *e le applicazioni* $f_{\tau,\rho}$, $\forall \tau, \rho \in \Theta : \tau \ll \rho$ *si riducono alla identità.*

2.3. - Martingale indotte proiettivamente.

Sia $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$ una martingala sulla base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho \in \Theta : \tau \ll \rho}$.

Le applicazioni $\omega_\tau = f_{\tau,\infty}(\omega_\infty)$ di Ω_∞ su Ω_τ, $\forall \tau \in \Theta$, generano una famiglia indiciata $\{\Omega_\infty, \mathcal{B}^*_\tau\}_{\tau \in \Theta}$ di spazi misurabili, con $\mathcal{B}^*_\tau = f^{-1}_{\tau,\infty}(\mathcal{B}_\tau)$ σ-algebra su Ω_∞.

Risulta

$$\mathcal{B}^*_\tau \subset \mathcal{B}^*_\rho, \qquad \forall \tau, \rho \in \Theta : \tau \ll \rho .$$

Fissato infatti un $\bar{B}^*_\tau = f^{-1}_{\tau,\infty}(\bar{B}_\tau) \in \mathcal{B}^*_\tau$, con $\bar{B}_\tau \in \mathcal{B}_\tau$, e adoperando la 2′) si ha $\bar{B}_\tau = f_{\tau,\infty}(\bar{B}^*_\tau) = f_{\tau,\rho}(f_{\rho,\infty}(\bar{B}^*_\tau))$, e da questa

$$f^{-1}_{\tau,\rho}(\bar{B}_\tau) \supset f_{\rho,\infty}(\bar{B}^*_\tau). \tag{5}$$

Ma per la misurabilità dell'applicazione $\omega_\tau = f_{\tau,\rho}(\omega_\rho)$ di Ω_ρ su Ω_τ è

$$f^{-1}_{\tau,\rho}(\bar{B}_\tau) = \bar{B}_\rho, \quad \text{con} \quad \bar{B}_\rho \in \mathcal{B}_\rho, \tag{6}$$

e quindi dalla (5) segue

$$f^{-1}_{\rho,\infty}(\bar{B}_\rho) \supset \bar{B}^*_\tau. \tag{7}$$

Sia ora $\bar{\omega}^*_\rho \in f^{-1}_{\rho,\infty}(\bar{B}_\rho)$, adoperando la (2′) e tenendo presente la (6) si ha $f_{\tau,\infty}(\bar{\omega}^*_\rho) = f_{\tau,\rho}(f_{\rho,\infty}(\bar{\omega}^*_\rho)) \in \bar{B}_\tau$, e da questa, in virtù della (7), $f^{-1}_{\rho,\infty}(\bar{B}_\rho) = \bar{B}^*_\tau$, cioè $\bar{B}^*_\tau \in \mathcal{B}^*_\rho$ e quindi l'asserto.

(²) Per sottomartingala, sopramartingala e martingala in senso classico vedi K. KRICKEBERG-C. PAUC [12].

Denotiamo con $\{\varphi_\tau^*\}_{\tau\in\Theta}$ la famiglia di funzioni σ-additive, ove φ_τ^*, $\forall\tau\in\Theta$, è definita su $\mathcal{B}_\tau^*$ con la legge

$$\varphi_\tau^*(B_\tau^*)=\varphi_\tau(f_{\tau,\infty}(B_\tau^*)),\qquad \forall B_\tau^*\in\mathcal{B}_\tau^*. \tag{8}$$

Risulta

$$\varphi_\tau^*=\varphi_\rho^*/\mathcal{B}_\tau^*,\qquad \forall\tau,\rho\in\Theta:\tau\ll\rho. \tag{9}$$

Si ha infatti, adoperando la (2'), $B_\tau=f_{\tau,\infty}(B_\tau^*)=f_{\tau,\rho}(f_{\rho,\infty}(B_\tau^*))$, ove $B_\tau^*=f_{\tau,\infty}^{-1}(B_\tau)$, e quindi

$$f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau)\supset f_{\rho,\infty}(B_\tau^*). \tag{10}$$

Ma se $\omega_\rho\in f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau)$, considerato un $\omega_\infty^*\in f_{\rho,\infty}^{-1}(\omega_\rho)$ è manifestamente $\omega_\infty^*\in B_\tau^*$ perchè, sempre a causa della (2'), si ha $f_{\tau,\infty}(\omega_\infty^*)=f_{\tau,\rho}(f_{\rho,\infty}(\omega_\infty^*))\in B_\tau$, e di conseguenza $\omega_\rho=f_{\rho,\infty}(\omega_\infty^*)\in f_{\rho,\infty}(B_\tau^*)$. La (10) quindi si scrive

$$f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau)=f_{\rho,\infty}(B_\tau^*). \tag{11}$$

Dalle (8), (11) e dal fatto che $\{\varphi_\tau\}_{\tau\in\Theta}$ è una martingala si deduce allora

$$\varphi_\rho^*(B_\tau^*)=\varphi_\rho(f_{\rho,\infty}(B_\tau^*))=\varphi_\rho(f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau))=\varphi_\tau(B_\tau)=\varphi_\tau^*(B_\tau^*),\ \forall B_\tau^*\in\mathcal{B}_\tau^*,$$

e quindi la (9).

La famiglia $\{\varphi_\tau^*\}_{\tau\in\Theta}$ è dunque una martingala in senso classico di base $\{\mathcal{B}_\tau^*\}_{\tau\in\Theta}$ sullo spazio limite proiettivo Ω_∞ e noi la chiameremo *martingala indotta proiettivamente su* Ω_∞ *dalla* $\Phi=\{\varphi_\tau\}_{\tau\in\Theta}$.

Posto $\mathcal{A}^*=\bigcup_{\tau\in\Theta}\mathcal{B}_\tau^*$, $\mathcal{A}^*$ è ovviamente un'algebra di BOOLE su Ω_∞.

Osserviamo che se $A^*\in\mathcal{A}^*$, appartiene contemporaneamente a $\mathcal{B}_\tau^*$, $\mathcal{B}_\rho^*$ è $\varphi_\tau^*(A^*)=\varphi_\rho^*(A^*)$; si tenga infatti presente che $\{\varphi_\tau^*\}_{\tau\in\Theta}$ è una martingala e che $\forall\tau,\rho\in\Theta$ esiste un $\nu\in\Theta$ con $\tau\ll\nu$, $\rho\ll\nu$.

Ha senso allora definire su $\mathcal{A}^*$ la funzione φ^* con la legge

$$\varphi^*(A^*)=\varphi_\tau^*(A^*),\qquad \forall\tau\in\Theta,\ \forall A^*\in\mathcal{B}_\tau^*. \tag{12}$$

La φ^* gode manifestamente delle seguenti proprietà

$$\varphi^* \text{ è additiva su } \mathcal{A}^*; \tag{13}$$

$$\varphi^*/\mathcal{B}_\tau^* \text{ è } \sigma\text{-additiva},\ \forall\tau\in\Theta. \tag{14}$$

La conoscenza di una φ^* definita su $\mathcal{A}^*$ con le proprietà (13), (14) porta alla determinazione di una martingala $\Phi=\{\varphi_\tau\}_{\tau\in\Theta}$ sulla base stocastica $\{\Omega_\tau,\ \mathcal{B}_\tau,\ f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho\in\Theta:\ \tau\ll\rho}$.

Basta porre

$$\varphi_\tau^* = \varphi^*/\mathcal{B}_\tau^*, \qquad \forall \tau \in \Theta, \tag{15}$$

e definire, per ogni $\tau \in \Theta$,

$$\varphi_\tau(B_\tau) = \varphi_\tau^*(f_{\tau,\infty}^{-1}(B_\tau)), \qquad \forall B_\tau \in \mathcal{B}_\tau \tag{16}$$

Infatti si ricordi che è $\mathcal{B}_\tau^* \subset \mathcal{B}_\rho^*$ quando $\tau \ll \rho$ e quindi la $\{\varphi_\tau^*\}_{\tau\in\Theta}$, con φ_τ^* definita dalla (15), è ovviamente una martingala in senso classico di base $\{\mathcal{B}_\tau^*\}_{\tau\in\Theta}$ su Ω_∞.

Per $\tau \ll \rho$ si ha allora

$$\varphi_\tau(B_\tau) = \varphi_\tau^*(f_{\tau,\infty}^{-1}(B_\tau)) = \varphi_\tau^*(B_\tau^*) = \varphi_\rho^*(B_\tau^*) = \varphi_\rho(f_{\rho,\infty}(B_\tau^*)), \ \forall B_\tau \in \mathcal{B}_\tau$$

e da questa, tenuto conto della (11) segue

$$\varphi_\tau(B_\tau) = \varphi_\rho(f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau)), \qquad \forall B_\tau \in \mathcal{B}_\tau$$

e quindi l'asserto.

Di conseguenza la corrispondenza $\Phi \leftrightarrow \varphi^*$ definita dalle (15), (16) è una applicazione biunivoca dell'insieme $\mathfrak{M}^*$ delle funzioni φ^* con le proprietà (13), (14) sull'insieme $\mathfrak{M}$ di tutte le martingale di base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho\in\Theta:\,\tau\ll\rho}$.

Questa corrispondenza, adoperando la nomenclatura di K. KRICKEBERG-C. PAUC ([12], pp. 470-71), la rappresentiamo con

$$\varphi^* = \mathcal{Z}(\Phi), \ \Phi = \mathcal{Z}^{-1}(\varphi^*).$$

OSSERVAZIONE. - La $\varphi^* = \mathcal{Z}(\Phi)$ è a variazione limitata se lo è la Φ e viceversa.

2.4. - Martingale σ-additive.

Analogamente al caso classico (K. KRICKEBERG-C. PAUC [12] pag. 472) una martingala $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau\in\Theta}$ sulla base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho\in\Theta:\,\tau\ll\rho}$ la diremo *σ-additiva o puramente semplicemente additiva* secondo che $\varphi^* = \mathcal{Z}(\Phi)$ è σ-additiva o puramente semplicemente additiva [3] su $\mathcal{A}^*$.

[3] Una φ non negativa e additiva su un algebra $\mathcal{A}$ è detta puramente semplicemente additiva (K. YOSIDA-E. HEWITT [19], pag. 48) se ogni ψ, σ-additiva su $\mathcal{A}$, si annulla identicamente su $\mathcal{A}$ quando soddisfa la $0 \leq \psi \leq \varphi$.

Una φ, sempre additiva su $\mathcal{A}$ ma di segno qualunque, è detta puramente semplicemente additiva se lo è la funzione φ^T variazione totale della φ.

Sussiste il seguente teorema di decomposizione

PROPOSIZIONE 2.4.1. - *Ogni martingala Φ a variazione limitata è decomponibile in un sol modo in*

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_p \tag{17}$$

con Φ_c martingala σ-additiva e Φ_p martingala puramente semplicemente additiva.

La dimostrazione è analoga al caso classico ([12], pag. 472).

Essendo $\varphi^* = \mathfrak{Z}(\Phi)$ additiva e a variazione limitata su $\mathcal{A}^*$ sussiste in modo unico la decomposizione ([19], pag. 52)

$$\varphi^* = \varphi_c^* + \varphi_p^* \tag{18}$$

con φ_c^* σ-additiva su $\mathcal{A}^*$ e φ_p^* puramente semplicemente additiva su $\mathcal{A}^*$.

La φ_c^* gode quindi delle proprietà (13), (14) e di conseguenza anche la φ_p^* perchè differenza di due funzioni che godono delle stesse proprietà.

Considerate allora le martingale $\Phi_c = \mathfrak{Z}^{-1}(\varphi_c^*)$, $\Phi_p = \mathfrak{Z}^{-1}(\varphi_p^*)$ risulta stabilita la (17). L'univocità della decomposizione (17) segue dalla univocità della decomposizione (18).

2.5. - **Martingale completate.**

Sia Θ_∞ l'insieme Θ completato dall'elemento ∞, per il quale si ponga $\tau \ll \infty$, $\forall \tau \in \Theta$.

Considerata la base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho\in\Theta:\,\tau\ll\rho}$ sia $\mathcal{B}_\infty^*$ la più piccola σ-algebra su Ω_∞ contenente $\mathcal{A}^*$ e si tenga presente che $\mathcal{A}^* = \bigcup_{\tau\in\Theta} \mathcal{B}_\tau^*$, con $\mathcal{B}_\tau^* \equiv f_{\tau,\infty}^{-1}(\mathcal{B}_\tau)$.

Sia poi $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau\in\Theta}$ una martingala sulla base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho\in\Theta:\,\tau\ll\rho}$.

Se esiste una funzione φ_∞^*, σ-additiva su $\mathcal{B}_\infty^*$, che sia un prolungamento di $\varphi^* = \mathfrak{Z}(\Phi)$, la martingala $\Phi_\infty = \{\varphi_\tau\}_{\tau\in\Theta_\infty}$, con $\varphi_\infty \equiv \varphi_\infty^*$, di base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho\in\Theta_\infty:\,\tau\ll\rho}$, ove $\mathcal{B}_\infty \equiv \mathcal{B}_\infty^*$ e $f_{\infty,\infty}$ è l'identità su Ω_∞, è detta la *completata* di Φ *o martingala completata.*

Una martingala completata $\Phi_\infty = \{\varphi_\tau\}_{\tau\in\Theta_\infty}$ di base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho\in\Theta_\infty:\,\tau\ll\rho}$ rappresenta un processo stocastico markoviano [4] se è non negativa e a variazione limitata.

PROPOSIZIONE 2.5.1. - *Una martingala $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau\in\Theta}$ sulla base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho\in\Theta:\,\tau\ll\rho}$, che sia non negativa, a variazione limitata e σ-additiva, genera un processo stocastico markoviano.*

---

[4] Per la definizione di processo stocastico markoviano cfr. [2], [7], [15].

Infatti la $\varphi^* = \mathfrak{J}(\Phi)$ è σ-additiva su $\mathfrak{A}^*$ e inoltre a variazione limitata; la φ^* ammette allora un prolungamento σ-additivo su $\mathfrak{B}^*_\infty$ ([12], pag. 463) e quindi l'asserto.

PROPOSIZIONE 2.5.2. - *Ogni martingala* $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$ *sulla base stocastica* $\{\Omega_\tau, \mathfrak{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho \in \Theta: \tau \ll \rho}$, *che sia non negativa e a variazione limitata si decompone nella somma di una martingala che genera un processo stocastico markoviano e di una martingala puramente semplicemente additiva.*

È conseguenza delle proposizioni 2.4.1, 2.5.1.

§ 3. - Martingale generate da una applicazione di passaggio di Markov e da una coppia di applicazioni di passaggio.

3.1. - Martingale generate da una applicazione di passaggio di Markov.

Sia $\{S, \mathcal{S}\}$ uno spazio misurabile, ove $\mathcal{S}$ è una σ-algebra su S.

Si chiama *nucleo* su $\{S, \mathcal{S}\}$ una applicazione $N(x, E)$: $S \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}_0^+$, di $S \times \mathcal{S}$ in $\mathbb{R}_0^+$, con le seguenti proprietà:

1) per ogni $E \in \mathcal{S}$ l'applicazione $N(x, E): S \to \mathbb{R}_0^+$, di S in $\mathbb{R}_0^+$, sia $\mathcal{S}$-misurabile;

2) per ogni $x \in S$ l'applicazione $N(x, E): \mathcal{S} \to \mathbb{R}_0^+$, di $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}_0^+$, sia σ-additiva.

Il nucleo $N(x, E)$ dicesi *sottomarkoviano* [*markoviano*] se si ha $N(x, S) \leq 1$ [$N(x, S) = 1$] $\forall x \in S$.

Chiameremo *applicazione di passaggio di Markov* su $\{S, \mathcal{S}\}$ un nucleo markoviano $N_{r,s}(x, E)$ su $\{S, \mathcal{S}\}$, dipendente da due parametri r, $s: 0 \leq r < < s < +\infty$, soddisfacente la relazione di passaggio (equazione di CHAPMAN-KOLMOGOROV)

$$\int_S N_{p,r}(x, dy) N_{r,s}(y, E) = N_{p,s}(x, E) \tag{3}$$

per ogni $E \in \mathcal{S}$ e per $0 \leq p < r < s < +\infty$.

Denotiamo con $\mathfrak{J}$ l'insieme dei reali $t: 0 \leq t_0 < t < +\infty$, e con Θ la totalità degli insiemi τ ciascuno dei quali è costituito da un numero finito di punti di $\mathfrak{J}$, tutti distinti tra loro e ordinati nel senso crescente:

$$\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_n), \quad \text{con} \quad 0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < +\infty.$$

L'insieme Θ è semiordinato progressivamente definendo $\tau \ll \rho$ ($\tau, \rho \in \Theta$) quando tutti i punti dell'insieme τ sono anche punti dell'insieme ρ.

Per ogni $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ denotiamo con $\{S^n, \mathcal{S}^n\}$ lo spazio prodotto cartesiano dello spazio $\{S, \mathcal{S}\}$ n-volte con se stesso e poniamo

$$\Omega_\tau \equiv S^n, \qquad \mathfrak{B}_\tau \equiv \mathcal{S}^n.$$

Assegniamo una famiglia proiettiva di applicazioni $\{\omega_\tau = f_{\tau,\rho}(\omega_\rho)\}_{\tau,\rho \in \Theta:\, \tau \ll \rho}$, da Ω_ρ a Ω_τ.

Se $\tau = \rho$, $f_{\tau,\rho}$ è definita dall'identità.

Se $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv \tau \ll \rho$, $\tau \neq \rho$, l'insieme ρ conterrà i punti $t_1, t_2, \ldots, t_n$ e per semplicità ci si può limitare al caso che i punti di ρ siano $n+1$, perchè il caso generale è conseguenza di questo.

Detto s l'ulteriore punto di ρ si possono presentare i seguenti casi

α) $t_i < s < t_{i+1}$ per qualche $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;

β) $t_n < s$.

Denotando con $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un generico punto di Ω_τ e con $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ un generico punto di Ω_ρ, l'applicazione $f_{\tau,\rho}: \Omega_\rho \rightarrow \Omega_\tau$ è definita nel caso α) dalle

$$x_h = y_h, \qquad h = 1, 2, \ldots, i$$

$$x_k = y_{k+1}, \quad k = i+1, \ldots, n,$$

nel caso β) dalle

$$x_j = y_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

La famiglia $\{\omega_\tau = f_{\tau,\rho}(\omega_\rho)\}_{\tau,\rho \in \Theta:\, \tau \ll \rho}$ è proiettiva e massimale e inoltre, $\forall \tau, \rho \in \Theta : \tau \ll \rho$, la $f_{\tau,\rho}$ è $\mathfrak{B}_\rho$-misurabile.

Fissato un punto $x_0 \in S$ consideriamo sulla base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathfrak{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho \in \Theta:\, \tau \ll \rho}$ la premartingala $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau \in \Theta}$, con φ_τ definita su $\mathfrak{B}_\tau$, $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, dalla legge

$$\varphi_\tau(B_\tau) = \int_{B_\tau} \prod_{j=1}^{n} N_{t_{j-1}, t_j}(x_{j-1}, dx_j). \tag{4}$$

In virtù del fatto che $N_{r,s}$ è markoviano si ha $\varphi_\tau(\Omega_\tau) = 1$, $\forall \tau \in \Theta$.

Mostriamo che la premartingala Φ è una martingala, cioè

$$\varphi_\tau(B_\tau) = \varphi_\rho(f^{-1}_{\tau,\rho}(B_\tau)), \ \forall B_\tau \in \mathfrak{B}_\tau, \ \tau \ll \rho, \tag{5}$$

e se $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \neq \rho$ basta limitarsi al caso che ρ contenga $n+1$ punti e sia s l'ulteriore punto di ρ.

Si osservi che in entrambi i casi α), β) è $f^{-1}_{\tau,\rho}(B_\tau) = B_\tau \times S$.

Nel caso α) l'espressione di $\varphi_\rho(f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau))$ è data dal secondo membro della (4) quando in esso si sostituisce B_τ con $B_\tau \times S$ e inoltre l'insieme $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ e il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si sostituiscono rispettivamente con $(s, t_1, t_2, \dots, t_n)$ e $(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ oppure rispettivamente con $(t_1, \dots, t_q, s, t_{q+1}, \dots, t_n)$ e $(x_1, x_2, \dots, x_q, x, x_{q+1}, \dots, x_n)$ secondo che $s < t_1$ oppure $t_1 < s$, e ove l'integrazione rispetto ad x va fatta su S.

Nel caso β) l'espressione di $\varphi_\rho(f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau))$ è data dal secondo membro della (4) quando in esso si sostituiscono B_τ con $B_\tau \times S$, l'insieme $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ con $(t_1, t_2, \dots, t_n, s)$, il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $(x_1, x_2, \dots, x_n, x)$ e ove l'integrazione rispetto ad x va fatta su S.

Allora adoperando nel caso α) la (3) e nel caso β) il fatto che $N_{r,s}$ è markoviano, si deduce la (5).

La martingala $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau\in\Theta}$ definita dalla (4) sulla base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho\in\Theta:\ \tau\ll\rho}$ dicesi *martingala generata dalla applicazione di passaggio di Markov* $N_{r,s}$ *su* $\{S, \mathcal{E}\}$.

Poichè questa martingala è non negativa e a variazione limitata essa si decompone, in virtù della Proposizione 2.5.2, in una martingala che genera un processo stocastico markoviano (con punto iniziale x_0) e in martingala puramente semplicemente additiva.

3.2. - **Martingale generate da una coppia di applicazioni di passaggio.**

Chiamiamo *coppia di applicazioni di passaggio* sullo spazio misurabile $\{S, \mathcal{E}\}$ due nuclei $M_{r,s}(x, E)$, $N_{r,s}(x, E)$ su $\{S, \mathcal{E}\}$, dipendenti da due parametri r, s: $0 \leq r < s < +\infty$, il primo sottomarkoviano e il secondo markoviano, soddisfacenti le relazioni di passaggio

$$(6) \qquad \int_S M_{p,r}(x, dy) N_{r,s}(y, E) = M_{p,s}(x, E)$$

$$(6) \qquad \int_S N_{p,r}(x, dy) N_{r,s}(y, E) = N_{p,s}(x, E)$$

per ogni $E \in \mathcal{E}$ e per $0 \leq p < r < s < +\infty$.

Fissato un punto $x_0 \in S$ consideriamo sulla base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho\in\Theta:\ \tau\ll\rho}$ oltre alla martingala $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau\in\Theta}$, con φ_τ definita dalla (4) su $\mathcal{B}_\tau \equiv \mathcal{E}^n$, $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, la premartingala $\Psi = \{\psi_\tau\}_{\tau\in\Theta}$, con ψ_τ definita su $\mathcal{B}_\tau$ dalla

$$(7) \qquad \psi_\tau(B_\tau) = \int_{B_\tau} M_{t_0, t_1}(x_0, dx_1) \prod_{j=1}^{n-s} N_{t_j, t_{j+1}}(x_j \ dx_{j+1}).$$

Per il fatto che $M_{r,s}$ è sottomarkoviano e che $N_{r,s}$ è markoviano risulta $\psi_\tau(\Omega_\tau) \leq 1$, $\forall \tau \in \Theta$.

Anche Ψ è una martingala.

Per mostrare che

$$(8) \qquad \psi_\tau(B_\tau) = \psi_\rho(f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau)), \qquad \forall B_\tau \in \mathcal{B}_\tau,\ \tau \ll \rho,$$

possiamo supporre, se $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_n) \neq \rho$, che ρ contenga $n+1$ punti (sia s il suo ulteriore punto) e si proceda analogamente al n. 3.1 per stabilire la (5).

Si tenga presente che in entrambi i casi α), β) è $f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau) = B_\tau \times S$.

Nel caso α) l'espressione di $\psi_\rho(f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau))$ è data dal secondo membro della (7) quando in esso si sostituisce B_τ con $B_\tau \times S$ e inoltre l'insieme $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ e il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si sostituiscono rispettivamente con $(s, t_1, t_2, \dots, t_n)$ e $(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ oppure rispettivamente con $(t_1, \dots, t_q, s, t_{q+1}, \dots, t_n)$ e $(x_1, \dots, x_q, x, x_{q+1}, \dots, x_n)$ secondo che $s < t_1$ oppure $t_1 < s$, e ove l'integrazione rispetto ad x va fatta su S.

Nel caso β) l'espressione di $\psi_\rho(f_{\tau,\rho}^{-1}(B_\tau))$ è data dal secondo membro della (7) quando in esso si sostituiscono B_τ con $B_\tau \times S$, l'insieme $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ con $(t_1, t_2, \dots, t_n, s)$, il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $(x_1, x_2, \dots, x_n, x)$ e ove l'integrazione rispetto ad x va fatta su S.

Adoperando nel caso α) la (6) oppure la (6') secondo che $s < t_1$ oppure $t_1 < s$ e nel caso β) il fatto che $N_{r,s}$ è markoviano si deduce la (8).

Le martingale $\Phi = \{\varphi_\tau\}_{\tau\in\Theta}$, $\Psi = \{\psi_\tau\}_{\tau\in\Theta}$ sulla base stocastica $\{\Omega_\tau, \mathcal{B}_\tau, f_{\tau,\rho}\}_{\tau,\rho\in\Theta:\ \tau\ll\rho}$ definite rispettivamente dalle (4), (7) si chiamano *martingale generate dalla coppia di applicazioni di passaggio* $M_{r,s}$, $N_{r,s}$.

La Ψ al pari della Φ si decompone in una martingala che genera un processo stocastico markoviano (con punto iniziale x_0) e in una martingala puramente semplicemente additiva.

§ 4. - **Perimetro.**

4.1. - Sia $\{S, \mathcal{E}, \mu\}$, con S vettoriale pseudo-topologico separato, uno spazio di misura e la σ-algebra $\mathcal{E}$ contenga gli insiemi aperti relativamente alla fissata operazione di quasi-limite [5] in S.

Su $\{S, \mathcal{E}\}$ siano assegnati due nuclei $M_{r,s}(x, E)$, $N_{r,s}(x, E)$ dipendenti dai parametri [6] $r, s : 0 \leq r < s < +\infty$.

---

[5] Le definizioni di spazio vettoriale pseudo-topologico separato e di insieme aperto sono state date in 1.1.

[6] La definizione di nucleo è stata data in 3.1. Cfr. P. A. MEYER ([15], cap. IX). Con due nuclei del tipo $M_{r,s}$, $N_{r,s}$ è stato definito in [18] il perimetro di un insieme, in uno opportuno spazio di misura, adoperando le distribuzioni di L. EHRENPREIS.

Con il simbolo $M_{r,s}f$ oppure $M_{r,s}(x, f)$, $f \geq 0$ su S e $\mathcal{E}$-misurabile, denotiamo la funzione $\mathcal{E}$-misurabile trasformata della f tramite $M_{r,s}$:

$$M_{r,s}f \equiv M_{r,s}(x, f) \equiv \int_S M_{r,s}(x, dy) f(y).$$

Analogo è il significato di $N_{r,s}f \equiv N_{r,s}(x, f)$, con $f \geq 0$ su S e $\mathcal{E}$-misurabile.

Il nucleo prodotto di composizione dei nuclei $M_{p,q}$ e $N_{r,s}$ lo indichiamo $M_{p,q} N_{r,s}$ o anche $[M_{p,q}N_{r,s}](x, E)$:

$$M_{p,q} N_{r,s} \equiv [M_{p,q}N_{r,s}](x, E) \equiv \int_S M_{p,q}(x, dy) N_{r,s}(y, E).$$

Sia $\mathfrak{L}$ la classe delle funzioni non negative su S, $\mathcal{E}$-misurabili e essenzialmente limitate, e $\mathfrak{G}$ la sottoclasse di $\mathfrak{L}$ costituita da quelle funzioni (di $\mathfrak{L}$) che ammettono μ-quasi ovunque in S il gradiente e questo sia in norma (7) $\mathcal{E}$-misurabile e essenzialmente limitato.

Supponiamo che il nucleo $N_{r,s}$ sia:

1) markoviano, cioè $\forall x \in S$ é $N_{r,s}(x, S) = 1$;

2) regolarizzante, cioè se $f \in \mathfrak{L}$ è $N_{r,s}f \in \mathfrak{G}$;

3) di approssimazione, cioè se $f \in \mathfrak{L}$ si ha $\lim\limits_{r \to s - 0} N_{r,s}(x, f) = f(x)$, μ-quasi ovunque su S.

Il nucleo $M_{r,s}$ soddisfi invece le proprietà:

4) se $f \in \mathfrak{L}$ risulti $\int_S M_{r,s}(x, f) d\mu \leq \int_S f(x) d\mu$;

5) se $f \in \mathfrak{G}$ si abbia

5') $M_{r,s}f \in \mathfrak{G}$;

5'') $\|\text{grad } M_{r,s}(x, f)\| \leq M_{r,s}\|\text{grad } f\|$, μ-quasi ovunque su S.

Supponiamo infine che per i nuclei $M_{r,s}$, $N_{r,s}$ valga la relazione di passaggio

$$(6) \qquad [M_{p,r} N_{r,s}](x, E) = N_{p,s}(x, E), \quad 0 \leq p < r < s < +\infty.$$

Sussiste allora la seguente

(7) Le definizioni di gradiente e della sua norma (generalizzata) sono state date rispettivamente in 1.2, 1.3.

PROPOSIZIONE 4.1.1. – *Comunque si fissino* $f \in \mathfrak{L}$ *e* $s \in (0, +\infty)$ *esiste il limite*

$$\lim_{r \to s-0} \int_S \|\operatorname{grad} N_{r,s}(x, f)\| \, d\mu . \tag{7}$$

Dal fatto che f è non negativa e $\mathcal{E}$-misurabile risulta

$$[M_{p,r} N_{r,s}](x, f) = M_{p,r}(x, N_{r,s} f), \qquad 0 \leq p < r < s < +\infty . \tag{8}$$

Basta approssimare f con una successione non decrescente $\{f_n\}_n$ di funzioni non negative a gradinata e $\mathcal{E}$-misurabili e osservare che

$$[M_{p,r} N_{r,s}](x, f_n) = M_{p,r}(x, N_{r,s} f_n)$$

e quindi la (8) passando al limite per $n \to \infty$.

Dalla (8) adoperando la (6) segue

$$M_{p,r}(x, N_{r,s} f) = N_{p,s}(x, f)$$

e questa, applicando ad ambo i membri l'operatore gradiente, che ha senso per le (2), (5'), si scrive

$$\operatorname{grad} M_{p,r}(x, N_{r,s} f) = \operatorname{grad} N_{p,s}(x, f). \tag{9}$$

Prendendo ora nella (9) la norma di entrambi i membri e integrando su S si ha

$$\int_S \|\operatorname{grad} M_{p,r}(x, N_{r,s} f)\| \, d\mu = \int_S \|\operatorname{grad} N_{p,s}(x, f)\| \, d\mu$$

e da questa, tenendo presente la (5''), segue

$$\int_S \|\operatorname{grad} N_{p,s}(x, f)\| \, d\mu \leq \int M_{p,r} \|\operatorname{grad} N_{r,s}(x, f)\| \, d\mu$$

e adoperando la (4):

$$\int_S \|\operatorname{grad} N_{p,s}(x, f)\| \, d\mu \leq \int_S \|\operatorname{grad} N_{r,s}(x, f)\| \, d\mu$$

Quest' ultima ci dice che $\int_S \|\text{grad } N_{r,s}(x, \text{f})\| d\mu$ è funzione non decrescente rispetto ad r e quindi esiste il limite (7).

4.2. - Chiameremo *perimetro di un insieme* $E \in \mathcal{E}$ il numero $P(E)$, finito o no, definito dalla

$$P(E) = \lim_{r \to s-0} \int_S \|\text{grad } N_{r,s}(x, E)\| d\mu$$

che esiste in virtù della Proposizione 4.1.1, con f funzione caratteristica dell' insieme E.

OSSERVAZIONE. - Se lo spazio $\{S, \mathcal{E}, \mu\}$ è lo spazio euclideo n-dimensionale con la misura μ di LEBESGUE e ove l'operazione di quasi-limite è quella di limite indotta dalla ordinaria metrica euclidea, la definizione di perimetro si riduce a quella di E. DE GIORGI [4] quando si prende

$$M_{r,s}(x, E) = N_{r,s}(x, E) = [\pi(s-r)]^{-\frac{n}{2}} \int_E e^{-\frac{|x-y|^2}{s-r}} dy$$

In questo spazio è stato studiato ([16], [17],) il problema della invarianza del perimetro rispetto ai nuclei.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BAIADA-C. VINTI, *Generalizzazioni non markoviane della definizione di perimetro*, Annali Mat. Pura e Appl., vol. LXII, 1963, pp. 1-58.

[2] S. BOCHNER, *Harmonic analysis and the theory of probability*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1955.

[3] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Livre V, Hermann, Paris, 1955.

[4] E. DE GIORGI, *Definizione e espressione analitica di perimetro di un insieme*, Rend. Accad. Lincei, Cl. Fis. Mat. Nat., vol. XIV, 1953, pp. 390-393.

[5] — —, *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, Annali Mat. Pura e Appl., vol. XXXVI, 1954, pp 191-213.

[6] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York 1960.

[7] J.L. DOOB, *Stochastic processes*, Wiley, New York, 1953.

[8] H.R. FISCHER, *Limesräume*, Math. Annalen, vol. 137, 1959, pp. 269-303.

[9] A. FRÖLICHER-W. BUCHER, *Calculus in vector spaces without norm*, Lecture Notes in Math. n. 30, Springer-Verlag, Berlin 1966.

[10] S. LEFSCHETZ, *Algebraic topology*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, vol. XXVII, 1942.

[11] H. H. KELLER, *Räume stetiger multilinearer Abbildungen als Limesräume*, Math. Annalen, vol. 159, 1965, pp. 259-270.

[12] K. KRICKEBERG-C. PAUC, *Martingales et dérivation*, Bull. Soc. Math France vol. 91, 1963, pp. 455-543.

[13] G. MARINESCU, *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions*, Veb Deutsch. Verlag der Wiss. Berlin 1963.

[14] P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Act. Sci. Ind. Hermann, Paris, 1966.

[15] — —, *Processus de Markov*, Lecture Notes in Math. n. 26, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[16] C. VINTI, *Perimetro-Variazione*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XVIII, 1964, pp. 201-231.

[17] — —, *Sull'approssimazione in perimetro e in area*, Atti Sem. Mat. Fis., Università Modena, vol. XIII, 1964, pp. 187-197.

[18] — —, *Famiglie stocastiche e perimetro in distribuzione*, Atti Sem. Mat. Fis., Università Modena, vol. XIII, 1964, pp. 198-207.

[19] K. YOSIDA-E. HEWITT, *Finitely additive measures*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 72, 1952, pp. 46-66.