Sulle varietà multiple non lineari: estensioni del teorema d'Enriques relativo all'esistenza dei piani multipli.

Memoria di ERMANNO MARCHIONNA (a Milano).

Sunto. - *Si considerano una superficie algebrica $F(x, y, z) = 0$ ed una sua curva D^*, e si assegnano condizioni necessarie e sufficienti affinchè esista una funzione $u = u(x, y, z)$ dei punti di F che sia diramata dalla D^*.*

Tali condizioni sono riportate al cosiddetto « piano multiplo associato alla funzione u », e risultano la naturale estensione delle note condizioni d'invarianza di ENRIQUES.

I risultati raggiunti vengono estesi alle varietà multiple (non lineari). Si mostra infatti che l'esistenza di una V_{r-1} multipla di S_r, diramata da una sua D_{r-2}, dipende da quella di una *sua sezione con* un *S_3 generico.*

INTRODUZIONE

In questo lavoro determino alcune condizioni (necessarie e sufficienti) affinchè una curva D^* tracciata sopra una superficie algebrica F sia di diramazione per una funzione algebrica dei punti di F.

Il problema — nel caso in cui F sia un piano — è stato risolto per via topologica da ENRIQUES (¹) con le note condizioni d'invarianza; ZARISKI ha successivamente illustrato le condizioni d'ENRIQUES traducendole in altre riguardanti il gruppo di POINCARÉ relativo ad $F - D^*$ (ove F è ancora un piano) (²).

L'estensione agli spazi multipli del teorema d'esistenza di ENRIQUES e delle considerazioni di ZARISKI è stata fatta da SEVERI (³).

Restava ancora essenzialmente aperto il problema di estendere i risultati di ENRIQUES dai piani multipli alle superficie e varietà multiple non lineari.

Le difficoltà della questione (avvertite del resto anche da LEFSCHETZ e da SEVERI (⁴)) sembravano non poche, sopratutto perchè una superficie può possedere cicli lineari non nulli (ed essere irregolare).

(¹) F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*, « Annali di Matematica », serie IV, tomo I (1923).

(²) O. ZARISKI, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, « American Journal of Math. », vol. 51 (1929). Dello stesso autore cfr. anche l'opera *Algebraic surfaces*, pag. 168.

(³) F. SEVERI, *Le varietà multiple diramate*, « Memorias de Matematica del Instituto Jorge Juan », Madrid, (1946).

(⁴) Cfr. S. LEFSCHETZ, *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques*, pag. 58, « Mémorial des Sciences math. », XL, Gauthier Villars, Paris (1929). SEVERI, l. c. in (³), n. 8, osserv. 3ª. Ricordiamo anche che in un caso particolare (quello ciclico) il nostro problema è stato ampiamente trattato da A. COMESSATTI, *Sulle superficie multiple cicliche*, « Rend. Sem. Matem. Padova », vol. 1, (1930).

Tuttavia — seguendo un'idea che ha già dato buoni risultati in un precedente lavoro [5] — queste difficoltà vengono qui superate (in un certo senso aggirate), riconducendo i problemi riguardanti una superficie multipla ad altri inerenti al cosiddetto « piano multiplo associato ».

La linea direttiva della ricerca è la seguente.

Si considerino una superficie algebrica $F(x, y, z) = 0$ e la funzione $z = z(x, y)$ da essa definita, la quale possiede, sopra il piano xy, una certa curva di diramazione Φ.

Sia $u = u(x, y, z)$ una funzione algebrica a μ valori dei punti di F, diramata da una certa curva D^* della F. La u risulta una funzione ad $m\mu$ valori di x ed y, che — considerata in questo senso — conviene ora indicare con w.

Pertanto
$$w = w(x, y) = u(x, y, z(x, y)).$$

La funzione w è il cosiddetto *piano multiplo associato* ad u.

Essa possiede come curva di diramazione sopra il piano xy una curva $\Psi = \Phi + D$ composta dalla curva Φ (contata μ volte) e dalla proiezione D di D^* (eseguita dal punto improprio Z_∞ dell'asse z).

Il gruppo di monodromia della funzione w è imprimitivo: i suoi m sistemi d'imprimitività corrispondono alle determinazioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$ della funzione $z(x, y)$ e vengono scambiati per determinati cammini avvolgenti Φ; scambi (o sostituzioni più complesse) fra gli elementi di un medesimo sistema si hanno in corrispondenza a cammini che avvolgono D (o anche Φ).

Viceversa, se esiste una funzione $w(x, y)$ ad $m\mu$ valori ed a gruppo di monodromia imprimitivo, la quale sia diramata nel modo suindicato dalla curva $\Psi = \Phi + D$, esiste anche una funzione a μ valori dei punti di F, diramata su questa dalla D^*.

Orbene, qui determino appunto le condizioni necessarie e sufficienti cui deve soddisfare la curva Ψ affinchè esista la funzione w, e di conseguenza la u.

Le condizioni trovate sono la naturale estensione delle condizioni d'invarianza d'ENRIQUES; le novità rispetto alla trattazione di questo Autore stanno nel fatto che la curva di diramazione Ψ possiede una componente μ-pla Φ (per cui le sostituzioni legate a Φ non sono semplici scambi) ed esiste inoltre un nuovo tipo di punti critici.

In sostanza, il problema posto viene risolto *rappresentando la superficie F* mediante la *curva di diramazione* Φ della funzione $z(x, y)$ — definita da F — ed *il sistema di sostituzioni* sulle determinazioni di z legate alla stessa Φ.

Ciò permette di tradurre proprietà d'immersione della curva D^* rispetto alla superficie F in proprietà della curva $\Psi = \Phi + D$; e viceversa.

---

(5) Cfr. E. MARCHIONNA, *Sull'identità birazionale delle ipersuperficie multiple diramate da una medesima varietà*, « Annali di Matematica », serie IV, vol. 37 (1954), pp. 265-290.

Si noti che questo ordine di idee, oltre che essere il più naturale per la rappresentazione di un piano multiplo $z(x, y)$, è il più adatto per le applicazioni effettive. Infatti la verifica che D^* sia una curva di diramazione per una funzione a μ valori dei punti di F si riduce alla verifica che la treccia di CHISINI relativa alla curva Ψ soddisfi alle nostre condizioni d'invarianza; il che risulta immediato una volta che sia nota la treccia di Ψ, la cui costruzione ed impiego son risultati agevoli e comodi in questo tipo di problemi.

Nell'ultimo paragrafo del lavoro mostro che (analogamente a quanto è stato fatto per gli spazi multipli da CHISINI ([6])) l'esistenza di una varietà multipla diramata dipende da quella di una sua superficie multipla sezione.

Con ciò resta risolto dal punto di vista topologico il problema di estendere il teorema d'esistenza di RIEMANN-HURWITZ dalle funzioni di una variabile a quelle di più variabili.

Una trattazione *completa* del problema dal punto di vista algebrico — non meno interessante di quello topologico — si presenta alquanto ardua.

Essa ha avuto inizio con una memoria di B. SEGRE ([7]) dedicata ai piani multipli generali, cui han fatto seguito studi condotti da vari autori ([8]) sui piani tripli e quadrupli e sui piani multipli rigati, nonchè i miei lavori sull'esistenza e sulla costruzione effettiva dei piani e spazi multipli nel cosiddetto « caso semplice » (di cui è caso particolare quello trattato da SEGRE) ([9]).

Questi ultimi lavori mostrano chiaramente che la difficoltà essenziale della trattazione algebrica consiste nel riconoscere che una certa curva è intersezione completa, o è tale per l'aggiunta di una parte doppia convenientemente legata ad essa.

Aggiungo infine che essendo riuscito a caratterizzare le curve intersezioni complete appartenenti ad uno spazio qualunque e prive di punti multipli, ho potuto stabilire un teorema d'esistenza *algebrico* per una funzione $u = u(x, y, z)$, definita su una superficie algebrica *generale* dello spazio ordinario da una ipersuperficie pure *generale* (dello spazio S_4). Di tale teorema ho dato l'estensione alle varietà multiple del cosiddetto tipo « generale » ([10]); e qui si noti

---

([6]). O. CHISINI, *Courbes de diramation des plans multiples et tresses algébriques*, Deuxième Colloque de Géométrie algébrique, Liège (1952).

([7]) B. SEGRE, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali*, « Mem. dell'Acc. d'Italia », (1930).

([8]) Ad es. O. CHISINI, G. ZAPPA, G. POMPILJ, C. F. MANARA, G. MASOTTI BIGGIOGERO, B. D'ORGEVAL. Per una bibliografia completa sull'argomento vedi la nota di O. CHISINI citata in ([6]).

([9]) E. MARCHIONNA, *Una nuova caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli*, « Rend. Accademia dei Lincei », serie VIII, vol. XI, fasc. 3-4 (1951); *Varietà intersezioni complete e varietà di diramazione*, « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXXXV (1952); *Costruzione di una funzione algebrica di due o più variabili avente un'assegnata varietà di diramazione*, « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXXXVI (1953).

([10]) E. MARCHIONNA, *Curve e varietà di diramazione per superficie ed ipersuperficie multiple generali*, « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXXXV (1952).

che a priori appare possibile ottenere con variazione continua una varietà multipla qualsiasi da una del tipo « generale », sia pure con spezzamenti e riduzione della varietà diramante.

I. - Posizione del problema.

1. Consideriamo una superficie algebrica d'ordine m,

$$F(x, y, z) = 0$$

la quale abbia soltanto singolarità ordinarie — cioè una curva doppia nodale C ed un numero finito di punti tripli, che siano tripli anche per C — e sia genericamente disposta rispetto agli assi di riferimento (in particolare non passi per il punto improprio Z_∞ dell'asse z).

Sia Φ la curva di diramazione sul piano xy della funzione

$$z = z(x, y)$$

definita da F.

Φ è l'immagine della curva Φ^* di contatto del cono circoscritto ad F da Z_∞ (non computando in questo il cono che proietta la curva doppia di F).

La curva Φ sarà dotata soltanto di nodi e di cuspidi *essenziali* (e non di singolarità più elevate): i primi corrispondono alle bitangenti di F condotte per Z_∞, le seconde alle rette per Z_∞ che hanno un contatto tripunto con F.

Consideriamo ora su F una curva algebrica D^* d'ordine pari, anch'essa genericamente disposta rispetto agli assi e dotata soltanto di nodi e di cuspidi.

La proiezione di D^* sul piano xy — eseguita da Z_∞ — è una curva D che tocca Φ in un certo numero di punti T (proiezioni dei punti T^* comuni a Φ^* e D^*) e la incontra ulteriormente in un certo numero di punti R generalmente semplici (corrispondenti alle rette per Z_∞ che s'appoggiano tanto a Φ^* quanto a D^*).

Nei paragrafi successivi (e più precisamente nei n. 4, 5, 6, 7) indicheremo le condizioni topologiche (necessarie e sufficienti) cui deve soddisfare la curva

$$\Psi = \Phi + D$$

(composta da Φ e D) affinchè esista una funzione algebrica dei punti di F che sia diramata dalla D^*.

2. Consideriamo innanzitutto una sezione della superficie F con un piano generico, che assumiamo come piano $x = 0$; tale sezione, diciamo f, abbia in comune con l'asse z gli m punti distinti $O_1^*, O_2^*, \ldots, O_m^*$

Com'è noto, i cicli lineari di $F - D^*$ ([11]) — che prendiamo uscenti da uno degli m punti considerati, ad esempio da O_1^* — si riducono ai cicli

([11]) Cioè tracciati su F senza traversare D^*. Qui e nel seguito ci si riferisce naturalmente alle Riemanniane degli enti in questione.

lineari (pure uscenti da O_1^*) di $f-(f, D^*)$ ([12]), ove con (f, D^*) s'indica il gruppo dei punti d'incontro di f e D^*.

Questi ultimi cicli si ottengono tutti dai *cicli di una base* costituita:

a) da un sistema di cappi d_j^* aventi l'origine in O_1^* ed avvolgenti i punti D_j^* del gruppo (f, D^*);

b) dai $2p$ cicli C_h^* di un sistema di retrosezioni di f passanti per O_1^* (p è il genere di f).

Il gruppo di monodromia di un'eventuale funzione algebrica u dei punti di F, che abbia μ valori e sia diramata dalla D^*, viene generato dalle sostituzioni S^* legate ai cicli d_j^* e C_h^*.

Orbene, le condizioni cui devono soddisfare la curva D^* ed il sistema di sostituzioni S^* affinchè esista la funzione u sono le seguenti:

I) *Le S^* devono generare il gruppo di monodromia di una curva μ-pla f_u* (cioè di una funzione $u(y, z)$ dei punti di f, a μ valori) *la quale abbia per punti di diramazione i punti D_j^** ([13]). Questo perchè il gruppo di monodromia di una superficie (od ipersuperficie) multipla si riduce a quello di una sua *generica* curva multipla sezione ([14]).

II) *Se si considera la sezione piana f* (della superficie F) *variabile nel fascio $x=\lambda y$, la curva μ-pla $f_u^{(\lambda)}$* (avente per punti di diramazione su f le intersezioni di D^* con il piano $x=\lambda y$, e dedotta con continuità dalla f_u iniziale) *deve ritornare in se stessa per qualunque cammino chiuso percorso nel piano π_λ della variabile complessa λ.*

Nel n. 4 mostreremo che le condizioni I, II sono, non solo necessarie per l'esistenza della funzione u (il che è ovvio), ma anche sufficienti. Esse forniscono così una prima forma del teorema d'esistenza che è lo scopo del nostro lavoro.

La sufficienza delle condizioni I, II verrà dimostrata traducendo le medesime in opportune «condizioni d'invarianza» relative alla curva $\Psi=\Phi+D$ (introdotta nel paragrafo precedente).

([12]) È questo un noto teorema di PICARD, precisato in seguito da SEVERI. Cfr. PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, Paris, Gauthier Villars (1897), pag. 86; F. SEVERI, l. c. in ([3]), n. 2.

([13]) E per questo è necessario e sufficiente che:

a) le S^* generino un gruppo transitivo;

b) il prodotto di tutte le sostituzioni S^* — relative al cammino composto dai cappi d_j^* e dai $4p$ cicli C_h^* e C_h^{*-1} presi nell'ordine che essi presentano nell'intorno di O_1^* — dia l'identità.

Cfr. H. HURWITZ, *Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, «Mathematische Annalen (Leipzig)», XXXIX Band, (1891). ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Zanichelli (Bologna), vol. III, pag. 429.

([14]) Cfr. l. c. in ([5]), n. 2.

La precisazione di queste condizioni d'invarianza (n. 5) permetterà di dare (nel n. 7) una seconda forma del Teorema d'esistenza, più significativa ed utile per le applicazioni.

II. - **Richiami sulle curve multiple.**

3. Alla ricerca delle condizioni d'invarianza premettiamo alcuni richiami sulle curve multiple.

Consideriamo ancora una curva μ-pla f_u definita sulla curva piana f d'equazioni

$$\begin{cases} F(0,\ y,\ z) = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

da una funzione a μ valori

$$u = u(y,\ z)$$

la quale abbia per punti di diramazione i punti D_j^* del gruppo $(f,\ D^*)$.

Chiameremo retta multipla associata ad f_u la funzione ad $m\mu$ valori

$$w(y) = u(y,\ z(y)),$$

ove $z(y)$ è la funzione ad m valori definita da $F(0,\ y,\ z) = 0$ ([15]).

I punti di diramazione di $w(y)$ sono le intersezioni Φ_i e D_j della retta $x = z = 0$, rispettivamente con la curva Φ (di diramazione per la funzione $z(x,\ y)$ definita dalla superficie $F(x,\ y,\ z) = 0$) e con la curva D (proiezione di D^*).

Tali punti sono distinti, data la genericità della sezione $x = 0$.

Precisiamo ora come qui conviene assumere le sostituzioni generatrici del gruppo Γ di monodromia della funzione $w(y)$ (gruppo ovviamente imprimitivo).

Nel piano π_y della variabile complessa y assumiamo innanzitutto un sistema di cappi rettilinei φ_i e d_j, i quali escano da un punto generico — che supporremo coincidere con $O(y = 0)$ — ed avvolgano rispettivamente i punti di diramazione Φ_i e D_j.

I cappi d_j verranno considerati nel seguito come proiezioni di cappi d_j^* della curva f, avvolgenti i punti D_j^* e partenti tutti da un medesimo punto O_1^* di f (ove O_1^* è uno degli m punti O_h^* di f che vengono proiettati in O dal punto Z_∞). Questi cappi d_j^* restano così univocamente definiti dai cappi d_j.

Consideriamo poi gli m valori $z_1, z_2, \ldots, z_m$ della funzione $z(y)$ nel punto O, e conseguentemente gli m punti O_h^* $(y = 0,\ z = z_h)$ della curva f, e osserviamo

---

([15]) Ciò è in accordo con la nomenclatura adottata nel mio lavoro citato in ([5]), ove il lettore potrà trovare anche una trattazione più diffusa di parte delle cose dette in questo paragrafo.

che ciascun valore z_i ($i = 2, 3, \dots, m$) si ottiene da z_1 mediante un cammino chiuso σ_i in π_y (che ovviamente potrebbe, ma non importa, ridursi ad un cappio, sia pur diverso dai cappi φ).

Ad un punto O_h^* corrispondono μ valori della funzione $u(y, z)$, i quali considerati come determinazioni di $w(y)$ in O, verranno indicati con w_{h1}, $w_{h2}, \dots, w_{h\mu}$.

In definitiva al punto O corrispondono $m\mu$ valori di $w(y)$ che risultano divisi in m gruppi (linee della seguente tabella, relative ciascuna ad uno degli m valori di $z(y)$ in O):

$$\begin{matrix} w_{11} & w_{12} \dots\dots & w_{1\mu} \\ w_{21} & w_{22} \dots\dots & w_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{m1} & w_{m2} \dots\dots & w_{m\mu} \end{matrix}$$

Qui i secondi indici sono fissati ad arbitrio per gli elementi della prima riga; quelli della i-ma ($i = 2, 3, \dots, m$) sono fissati in modo che il cammino σ_i (che muta appunto in questa la prima linea) lasci fermi i secondi indici.

Ora le linee della tabella rappresentano appunto i sistemi d'imprimitività del gruppo Γ. È ovvio e noto che *la sostituzione legata ad un cappio* φ *è un insieme di* μ *scambi fra gli elementi di due linee* h *e* j (16), che potrebbe essere per esempio

$$(w_{h1}\ w_{j1})(w_{h2}\ w_{j2}) \dots (w_{h\mu}\ w_{j\mu}).$$

In altre parole essa produce uno scambio fra i primi indici delle w_{ik} ed una sostituzione s involutoria (eventualmente l'identità, e in tutti i casi $s^2 = 1$) sui secondi indici.

La sostituzione legata ad un cappio d *consiste invece in uno scambio fra due* w_{ik} *appartenenti ad una stessa linea della tabella* (e così operante solo sui secondi indici).

Si osservi ora che un cammino γ^* (su f) chiuso e partente da O_1^* corrisponde ad un unico cammino chiuso su π_y partente da O; onde è ovvio che *le sostituzioni* S *del gruppo* Γ *di monodromia della* $w(y)$ *definiscono univocamente le sostituzioni* S^* *sulle* $u_k = w_{1k}$, cioè *il gruppo di monodromia* Γ^* *della curva* μ*-pla* f_u.

Viceversa *date le sostituzioni generatrici del gruppo* Γ^* *restano definite anche le sostituzioni del gruppo* Γ.

Per la dimostrazione si indichi con σ_i^* il cammino (su f) corrispondente di σ_i e collegante O_1^* con O_i^*.

Un qualunque cammino chiuso γ, su π_y, partente da O, dà luogo (su f)

---

(16) Infatti il cappio φ percorso due volte corrisponde a cammini infinitesimi della f non avvolgenti alcun punto D_j^*, e quindi lascia ferma ciascuna w_{ik}.

ad un sistema di m cammini γ_i^* $(i = 1, 2, \dots, m)$: ciascun γ_i^* parte da O_i^* ed arriva ad un punto O_h^*.

Qualora γ_i^* non parta da O_1^*, o non sia chiuso (cioè sia $i \neq h$) si consideri in sua vece il cammino (chiuso e partente da O_1^*)

$$(\sigma_i^*)\gamma_i^*(\sigma_h^*)^{-1}.$$

Di tale cammino è noto l'effetto globale, essendo noto il gruppo Γ^*; e d'altra parte è noto l'effetto di σ_i^* e σ_h^*, sicchè è noto anche l'effetto di γ_i^*.

Valendo ciò per ogni i, risulta noto l'effetto di γ, cioè noto tutto il gruppo di monodromia Γ (17).

III. - Dimostrazione delle condizioni d'invarianza.

4. Avvertiamo innanzitutto che il concetto di retta (o curva) multipla con dati punti di diramazione e gruppo di monodromia viene ora usato nel suo significato più ampio; pensiamo cioè non ad una sola funzione, ma a

(17) Si può anche dare una dimostrazione più concreta della precedente, come segue.

Anzitutto i cappi d_j operano sul primo sistema d'imprimitività perchè proiezioni di cappi d_j^* della f uscenti tutti dal punto O_1^*; ed essendo $w_{1k} = u_k$, gli scambi che i cappi d_j producono sul secondo indice k delle w_{1k} sono uguali a quelli prodotti dai corrispondenti cappi d_j^* sull'indice delle u_k.

Inoltre riduciamo il sistema dei cappi φ a dare un gruppo di monodromia della funzione $z(y)$ del tipo «LÜROTH-CLEBSCH». (Cfr. ad es. ENRIQUES-CHISINI, l. c. in (13), vol. III, pag. 422). Con ciò si hanno successivamente $2p + 2$ cappi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2p+2}$ ($p =$ genere di f) cui compete un unico scambio $z_1\, z_2$; due cappi $\varphi_{2p+3}, \varphi_{2p+4}$ cui compete lo scambio $z_2\, z_3$; .... due cappi $\varphi_{2p+2m-3}, \varphi_{2p+2m-2}$ cui compete lo scambio $z_{m-1}\, z_m$.

Un sistema (qui comodo) di $2p$ cicli riemanniani C_h^* di f è rappresentato su π_y da $2p$ cicli γ_h, con

$$\gamma_h = \varphi_h + \varphi_{h+1} \qquad (h = 1, 2, \dots, 2p). \tag{1}$$

Orbene note le sostituzioni π_h^* relative ai cicli C_h^* (e di conseguenza le sostituzioni π_h relative ai cicli γ_h), e fissata la sostituzione involutoria s_1 sui secondi indici delle w_{1k} relativa a φ_1 (il che equivale a precisare ora i nomi delle w_{2k}, cioè ad assumere σ_2 coincidente con φ_1) si trovano successivamente come conseguenza delle relazioni (1) le sostituzioni $s_2, s_3, \dots, s_{2p+1}$ relative ai cappi $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{2p+1}$.

Prima di esaminare l'effetto degli altri cappi conviene qui osservare che π_h si può decomporre in due sostituzioni π', π'' — che operano separatamente sulle w_{1k} e sulle w_{2k} — e che la π' è nota quando si conosca π_h^* (si ricordi che $u_k = w_{1k}$); pertanto per determinare s_{h+1} con le (1) non occorre conoscere tutta la π_h, ma soltanto il suo fattore π', come si verifica subito ricordando che s_{h+1} è involutoria.

Proseguendo, la sostituzione relativa a φ_{2p+2} si ottiene tenendo conto del fatto che

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2p+1} + \varphi_{2p+2} = 0.$$

Infine, indichiamo con w_{3k} il valore dedotto con continuità da w_{2k} lungo φ_{2p+3} (e così da w_{1k} tramite il cammino $\sigma_3 = \varphi_1 + \varphi_{2p+3}$). La sostituzione legata a φ_{2p+4} è uguale a quella relativa a φ_{2p+3}, poichè la somma $\varphi_{2p+3} + \varphi_{2p+4}$ è nulla.

In modo analogo si trovano le sostituzioni relative alle restanti coppie di cicli.

tutta la classe delle funzioni birazionalmente identiche rappresentate sulla retta multipla stessa.

Ciò posto, muoviamo con continuità la sezione $x=0$ nel fascio $x=\lambda y$, facendo variare il parametro complesso λ in funzione di un parametro reale t; e su ogni retta del fascio consideriamo la *retta multipla* d'ordine $m\mu$

$$w_\lambda = w_\lambda(y)$$

trasformata con continuità della retta multipla iniziale $w(y)$. Precisamente la $w_\lambda(y)$ abbia per punti di diramazione i punti $\Phi_i^{(\lambda)}$ e $D_j^{(\lambda)}$ ottenuti intersecando la retta $x=\lambda y$ con le curve Φ e D; inoltre i cappi relativi $\varphi_i^{(\lambda)}$ e $d_j^{(\lambda)}$ siano sempre supposti rettilinei [18].

Alla retta multipla $w_\lambda(y)$ si può sempre ritenere associata una curva μ-pla variabile $f_u^{(\lambda)}$ [19] definita sulla sezione della superficie $F(x, y, z)=0$ con il piano $x=\lambda y$. La $f_u^{(\lambda)}$ ha come punti di diramazione i punti D_j^* comuni alla curva D^* ed al piano $x=\lambda y$, e ad essa sono legati in modo univocamente definito (per ogni valore del parametro t) cappi d_j^*, cicli riemanniani C_h^*, e relative sostituzioni.

Ora se la curva multipla f_u ritorna in sè per *qualsiasi* cammino chiuso percorso nel piano π_λ della variabile complessa λ (cioè se è soddisfatta la condizione II del n. 2) altrettanto avviene della retta multipla associata $w_\lambda(y)$ [20]; e viceversa.

Orbene questo ritornare in sè di $w_\lambda(y)$ per ogni circolazione sul parametro λ, costituisce *una condizione globale d'invarianza* che non solo è *necessaria* (com'è ovvio) per l'esistenza di una funzione $u(x, y, z)$ dei punti di F diramata dalla D^*, ma è anche sufficiente (dal che segue la sufficienza delle condizioni I e II del n. 2).

Infatti la retta multipla $w_\lambda(y)$ definisce una famiglia di funzioni algebriche (ad $m\mu$ valori) birazionalmente identiche, entro la quale è possibile fissarne razionalmente una (proiettivamente definita)

$$\bar{w}_\lambda = \bar{w}(\lambda, y)$$

---

(18) Le sostituzioni legate ai cappi variati saranno esattamente quelle di partenza finchè un punto di diramazione non attraversi uno dei cappi, nel qual caso la sostituzione legata a quest'ultimo subisce un'ovvia trasformazione.

(19) Questo perchè: *a*) il gruppo Γ di monodromia di $w_\lambda(y)$ rimane un gruppo imprimitivo; *b*) i sistemi d'imprimitività di Γ corrispondono alle determinazioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$ della funzione $z(y)$ definita dalla curva d'equazioni: $F(x, y, z)=0$, $x=\lambda y$.

(20) Più precisamente il ritornare in sè della $w_\lambda(y)$ significa che, quantunque durante il movimento due (o più) cappi possano sostituirsi fra di loro ed un punto di diramazione possa tagliare il cappio relativo ad un altro (ed alterare perciò la sostituzione relativa a quest'ultimo), tuttavia alla fine del movimento questi cambiamenti devono eliminarsi fra di loro; e ciò, ripetiamo, comunque sia stato scelto il cammino chiuso in π_λ.

col noto metodo di determinazione e simmetrizzazione di ENRIQUES [21]: il che implica che entro la famiglia delle funzioni birazionalmente identiche

$$\begin{cases} u_\lambda = u_\lambda\,(y,\ z) \\ F(\lambda y,\ y,\ z) = 0 \end{cases}$$

rappresentate dalla curva μ-pla $f_u^{(\lambda)}$, resta determinata *razionalmente* una funzione $\bar{u}$:

$$(1) \qquad \begin{cases} \bar{u} = \bar{u}(\lambda y,\ y,\ z) \\ F(\lambda y,\ y,\ z) = 0 \end{cases}$$

(associata a $\bar{w}(\lambda,\ y)$).

Ora, *se è soddisfatta la condizione d'invarianza,* la funzione $\bar{w}(\lambda,\ y)$ resta determinata *univocamente* per ogni valore della variabile complessa λ (cioè esiste una funzione $w(x,\ y)$ ad $m\mu$ valori diramata dalla curva $\Psi = \Phi + D$).

Conseguentemente anche *la funzione associata* $\bar{u}$ data dalle (1) *resta determinata univocamente per ogni valore di* λ, e con ciò (eliminando λ fra le (1) e la relazione $x = \lambda y$) risulta stabilita l'esistenza di una funzione algebrica a μ valori

$$\bar{u} = \bar{u}(x,\ y,\ z)$$

dei punti della superficie $F(x,\ y,\ z) = 0$, diramata su questa dalla curva D^*.

5. Il verificarsi della « condizione d'invarianza » globale dimostrata nel paragrafo precedente dipende da *condizioni d'invarianza elementari* (che ora indicheremo), relative a cammini elementari di π_λ mediante i quali si compone un qualsiasi cammino chiuso.

Ricordiamo innanzitutto che i punti di diramazione Φ_i e D_j della $w_\lambda(y)$ si ottengono tagliando la retta $x = \lambda y$ con le componenti della curva

$$\Psi = \Phi + D.$$

Diremo punto critico di Ψ un punto in cui vengano a coincidere due punti A e B di diramazione di $w_\lambda(y)$, cioè un punto H tale che la retta OH abbia con Ψ due intersezioni riunite in H (e due sole, data la genericità del punto O rispetto a Ψ).

I punti critici di Ψ verranno più precisamente indicati:

a) con H_1, se sono punti di contatto semplice di Ψ (cioè delle sue componenti Φ e D) con rette uscenti da O;

b) con H_2 se sono nodi di Ψ (cioè nodi di una delle componenti Φ e D, oppure punti d'intersezione semplice di queste ultime);

c) con H_3 se sono cuspidi di Ψ (cioè di Φ o D);

---

[21] Cfr. ENRIQUES, l. c. in [1], pagg. 196-197.

d) con H_4 se sono tacnodi di Ψ (cioè punti T di contatto di Φ e D) ([22]).

Ed è ovvio che per le ipotesi di generalità fatte in precedenza, la Ψ non possiede altri punti critici.

Diremo poi punti critici del piano π_λ i punti $\lambda = h_{r'}$ tali che la retta $x = h_r y$ passi per un punto critico H_r di Ψ.

Qualunque cammino chiuso di π_λ uscente dal punto $\lambda = 0$ e non attraversante i punti $h_{r'}$ è equivalente alla somma di un certo numero di cappi uscenti dal punto $\lambda = 0$ ed avvolgenti ciascuno un punto critico $h_{r'}$.

Ciò posto le *condizioni elementari d'invarianza* sono le seguenti:

« Si consideri in π_λ un cammino γ_r, fisso ma arbitrario, che esca dal punto $\lambda = 0$ ed avvolga un punto critico $h_{r'}$ ($r = 1, 2, 3, 4$).

Siano A e B i due punti di diramazione della retta multipla $w_\lambda(y)$ che confluiscono nel corrispondente punto critico H_r di Ψ.

Allora se a e b sono le sostituzioni sulle w_{ik} relative ad A e B ([23]) *(in prossimità di H_r), dovrà essere per γ_r:*

$$(ab)^r = 1 \text{ ».}$$

La dimostrazione — che esporremo nel n. 6 — è analoga a quella data da ENRIQUES per le sue condizioni d'invarianza, quantunque qui intervengano sostituzioni involutorie che non sono sempre scambi per il fatto che Ψ possiede una componente multipla Φ ([24]).

6. Per la dimostrazione ricordiamo dapprima l'effetto che ha sulle sostituzioni a e b un giro elementare intorno ad un punto critico del tipo H_1 (più precisamente un cammino chiuso γ_1 di π_λ che abbia origine nel punto $\lambda = 0$ ed avvolga il punto $\lambda = h_1$ corrispondente alla retta OH_1).

Nel piano π_y tale effetto si riduce — come osserva ENRIQUES — a quello di un cerchietto infinitesimo che circondi H_1, a cui corrisponde un

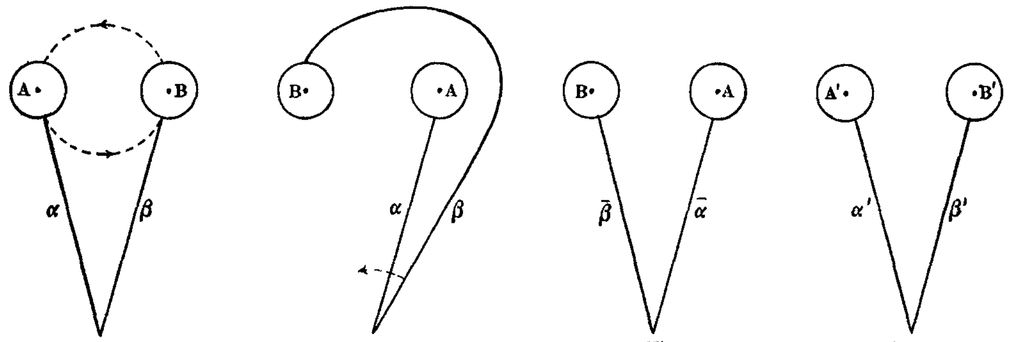
---

([22]) Tale nomenclatura riflette la natura topologica dei punti critici; cioè la rappresentazione di un punto critico (in cui coincidano due punti di Ψ) mediante una potenza dello scambio (ik). Precisamente $(ik)^1$: contatto; $(ik)^2$: nodo; $(ik)^3$: cuspide; $(ik)^4$; tacnodo. Cfr. O. CHISINI, *I punti singolari di una curva algebrica come prodotto di sostituzioni*, « Rend. Ist. Lombardo », vol. 74, fasc. II (1941).

([23]) Per cappi che diventano consecutivi e coincidono quando coincidono A e B.

([24]) Facciamo notare che, se si prescinde dalle differenze effettive accennate nel testo e da altre varianti di enunciazione, le nostre condizioni d'invarianza coincidono sostanzialmente con quelle che sono state assegnate prima (1920) da CHISINI relativamente ai casi $r = 2$, $r = 4$, e poi (1923) da ENRIQUES per i casi $r = 1, 2, 3$. Cfr. O. CHISINI, *Sugli incroci delle curve di diramazione per una funzione algebrica di due variabili*, ed anche: *Sui contatti delle curve di diramazione, ecc.*, « Rend. Accademia dei Lincei », vol. XXIX (1920). F. ENRIQUES, l. c. in ([1]).

cerchietto descritto complessivamente dai punti A e B, ognuno dei quali percorre uno dei due archi $A\ B$ indicati dal disegno I sottoriprodotto.



(I) (II) (III) (IV)

Ebbene osserviamo le figure I, II, III, IV che rappresentano gli stadi successivi della trasformazione. Il passaggio dalla I alla II mostra l'effetto sui cappi α e β prodotto dal cammino γ_1 e dal conseguente movimento di A e B lungo gli archi di cerchio indicati dalla figura I. Il passaggio dalla II alla III, per rendere rettilinei i cappi, consiste nel trasportare il cappio β dalla destra alla sinistra di α. Il passaggio dalla III alla IV consiste nel cambiare i nomi dei cappi $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ e dei punti di diramazione, che diventano quelli della posizione iniziale.

Al posto dei cappi α e β abbiamo così i cappi

$$\alpha' = \alpha\beta\alpha^{-1}$$
$$\beta' = \alpha$$

(gli altri cappi non hanno subito variazioni).

La condizione d'invarianza $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ porta alla condizione topologica

$$\alpha = \beta \tag{1}$$

e viceversa.

La (1) si traduce nella relazione fra le sostituzioni:

$$a = b,$$

la quale esprime la condizione d'invarianza elementare relativa ad un punto critico H_1. Tenendo conto del fatto che a e b sono involutorie, la relazione precedente può scriversi nella forma

$$(ab) = 1.$$

Vediamo ora l'effetto che ha sui cappi α e β e sulle sostituzioni a e b un giro elementare intorno ad un punto critico h_2, h_3, od h_4 di π_λ (corrispondenti rispettivamente ad un nodo H_2, ad una cuspide H_3, o ad un tacnodo H_4 di Ψ).

Com'è noto, l'effetto di tale trasformazione equivale rispettivamente a quello prodotto dall'applicazione successiva di 2, 3, 4 trasformazioni prodotte da un giro elementare intorno ad un punto critico h_1 (corrispondente ad un punto di diramazione semplice H_1 della Ψ).

Cosicchè, per un giro elementare intorno ad un punto critico h_2, h_3, h_4, al posto dei cappi α e β abbiamo rispettivamente i cappi

$$\begin{array}{ll} \alpha'' = \alpha\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}, & \beta'' = \alpha\beta\alpha^{-1} \\ \alpha''' = \alpha\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}, & \beta''' = \alpha\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} \\ \alpha'''' = \alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}, & \beta'''' = \alpha\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}. \end{array}$$

Le condizioni d'invarianza $\alpha'' = \alpha$, $\alpha''' = \alpha$, $\alpha'''' = \alpha$ (oppure le $\beta'' = \beta$, $\beta''' = \beta$, $\beta'''' = \beta$) portano rispettivamente alle condizioni topologiche

$$\begin{gathered} \alpha\beta = \beta\alpha \\ \alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta \\ (\alpha\beta)^2 = (\beta\alpha)^2 \end{gathered}$$

e viceversa.

Queste condizioni si traducono poi nelle relazioni fra sostituzioni

$$\begin{gathered} ab = ba \\ aba = bab \\ (ab)^2 = (ba)^2 \end{gathered}$$

che esprimono le condizioni d'invarianza elementari relative ai punti critici H_2, H_3, H_4.

Tenendo conto del fatto che a e b sono involutorie, le stesse condizioni si possono esprimere nella forma

$$\begin{gathered} (ab)^2 = 1 \\ (ab)^3 = 1 \\ (ab)^4 = 1 \quad (^{25}). \end{gathered}$$

IV. - **Il teorema d'esistenza per le superficie multiple.**

7. Riepiloghiamo le considerazioni dei paragrafi precedenti. Il problema di decidere che una curva D^* della superficie F,

$$z = z(x, y),$$

---

[25] Naturalmente le relazioni topologiche fra cappi e sostituzioni espresse dalle condizioni d'invarianza sono il riflesso di altre relazioni che legano i cappi d_j^*, i cicli lineari C_h^*, e le sostituzioni relative alla curva multipla $f_u^{(\lambda)}$ associata a $w_\lambda(y)$. Si veda, per questo, il n. 9.

è diramante per una funzione a μ valori dei punti di F,

$$u = u(x,\ y,\ z),$$

è ricondotto alla verifica che la curva

$$\Psi = \Phi + D$$

è diramante per un piano multiplo ad $m\mu$ valori

$$w = w(x,\ y)$$

a gruppo imprimitivo, con sistemi d'imprimitività corrispondenti alle m determinazioni di z.

Più precisamente:

Si considera dapprima una sezione f della superficie F con un piano generico ($x = 0$) ed *una* delle possibili curve μ-ple f_u diramate su f dai punti, D_f^*, d'incontro con D^* (tali curve μ-ple sono in numero finito). Si considerano poi la retta multipla ad $m\mu$ valori, $w(y)$, associata ad f_u, e la retta multipla $w_\lambda(y)$ dedotta con continuità da $w(y)$.

Infine la condizione d'invarianza globale (che porta all'esistenza del piano multiplo $w(x,\ y)$ e quindi della funzione u) viene ricondotta a condizioni elementari. Si ha così il

TEOREMA D'ESISTENZA: « *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione a μ valori*

$$u = u(x,\ y,\ z)$$

dei punti di F, la quale sia diramata dalla curva D^*, è che fra le varie curve μ-ple f_u ne esista una tale che: *per ogni giro elementare* descritto dal parametro λ, *le sostituzioni a e b — relative a due qualunque punti di diramazione A e B di $w_\lambda(y)$ che vadano a coincidere in un punto critico H_r di Ψ* ($r = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) quando i punti A e B e i conseguenti cappi rettilinei α e β siano diventati sufficientemente vicini ([26]) — *siano legate dalla relazione*

$$(ab)^r = 1 \text{ ».}$$

8. Il teorema d'esistenza ora enunciato ha carattere topologico. Ne segue che vale anche per le superficie multiple la significativa osservazione fatta da ENRIQUES per i piani multipli, cioè:

Dato su F un sistema continuo $\{D^*\}$ di curve D^*, dotate di δ nodi e di k cuspidi, se una curva del sistema, generica (nel senso di possedere esattamente δ nodi e k cuspidi), risulta di diramazione per una funzione a μ valori dei punti di F, altrettanto accade per le altre curve D^*.

([26]) Esprimiamo in questa forma il concetto di cappi onestamente vicini dell'ENRIQUES; con ciò si vuol dire che, nell'ulteriore fase in cui cappi α e β si riuniscono, essi non vengono attraversati da altri punti di diramazione.

9. NOTA. - Le condizioni d'esistenza I, II del n. 2 possono essere tradotte in altre riguardanti il gruppo di POINCARÉ di $F - D^*$, in modo analogo a quello seguito da ZARISKI relativamente al teorema d'esistenza d'ENRIQUES, e poi da SEVERI per quel che riguarda gli spazi multipli ([27]).

Ricordiamo che gli elementi generatori del gruppo G sono in numero finito. Infatti — come abbiamo già detto nel n. 2 — ogni ciclo lineare di $F - D^*$ uscente da un punto O_1^* può ridursi ad un ciclo di $f - (f, D^*)$ pure uscente da O_1^*, essendo f la sezione di F con un piano generico uscente da O_1^* (che noi assumeremo ancora come piano $x = 0$).

Si possono assumere come generatori del gruppo G i generatori $g_1, g_2 \dots, g_\nu$ del gruppo G_0 di POINCARÉ relativo ad $f - (f, D^*)$, vale a dire un sistema di cappi d_j^* avvolgenti i punti del gruppo (f, D^*) ed un sistema di $2p$ cicli riemanniani indipendenti della f condotti a passare per O_1^*.

Però siccome i generatori indipendenti di G possono essere in numero inferiore ai ν indicati, il gruppo G_0 è in generale più ampio di G.

Ricordiamo ora che fra i generatori di G intervengono certe relazioni; indichiamo qui come si ottengano talune di esse (quelle che a noi interessano per il seguito).

Innanzitutto occorre tener conto dei legami indipendenti fra i generatori g_i sopra $f - (f, D^*)$; questi legami (che saranno in un certo numero q) si possono sempre esprimere scrivendo che certi prodotti di elementi generatori sono uguali ad 1. Abbiamo così un primo gruppo di relazioni elementari di G:

$$\varphi_l(g_1, g_2, \dots, g_\nu) = 1 \qquad l = 1, 2, \dots, q. \tag{1}$$

Ma vi sono altre relazioni che occorre tener presenti.

Muoviamo con continuità la sezione facendo variare il suo piano nel fascio $x = \lambda y$ che supponiamo avere un punto base in O_1^*.

Consideriamo gli s cammini elementari γ del piano π_λ che avvolgono i vari punti critici h_1, h_2, h_3, h_4 di cui si è già discorso nei n. 5, 6.

([27]) Cfr. ZARISKI, l. c. in ([2]) e SEVERI, l. c. in ([3]). Per le notizie riguardanti il gruppo di POINCARÉ cfr. anche VEBLEN, *Analysis situs*, American Math. Society, Colloquium Pubblications, vol. V, 2ª ed., (1931).

Qui ricordiamo brevemente che cosa s'intenda per gruppo di POINCARÉ inerente ad $F - D^*$.

Fissiamo un generico punto O_1^* in $F - D^*$ e consideriamo i *cicli lineari orientati* di $F - D^*$ uscenti da O_1^*.

Due di questi cicli g_1 e g_2 si dicono equivalenti quando uno di essi è riducibile all'altro per continuità tenendo fisso O_1^*; si scrive allora che $g_1 = g_2$.

Le singole *classi* di cicli equivalenti sono gli *elementi* del gruppo G di POINCARÉ.

Il prodotto $g_1 g_2$ di due cicli g_1 e g_2 è il ciclo che si ottiene percorrendo prima g_1 e poi g_2. In generale $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$, cioè il prodotto non è commutativo. È poi ovvio che cosa s'intenda per g^{-1}. Inoltre i cicli che si riducono con continuità ad O_1^*, tenendo fermo O_1^*, verranno indicati col simbolo 1.

Allorchè si descrive γ, un ciclo g_i di $f-(f, D^*)$ si muta in un ciclo g_i' della stessa curva, e su $F-D^*$ si ha $g_i=g_i'$.

Ma su $f-(f, D^*)$ i due cicli non sono in generale equivalenti; è noto soltanto che g_i' si può esprimere su $f-(f, D^*)$ mediante i cicli generatori $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$. Cioè si ha

$$g_i'=\varphi_{ij}(g_1, g_2, \ldots, g_\nu), \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, \nu \\ j=1, 2, \ldots, s \end{pmatrix}$$

essendo φ_{ij} un conveniente prodotto dei generatori $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$.

Orbene, poichè su $F-D^*$ si ha $g_i'=g_i$, avremo

$$g_i=\varphi_{ij}(g_1, g_2, \ldots, g_\nu). \tag{2}$$

Le νs relazioni (2), aggiunte alle q relazioni (1), formano un sistema Σ di *relazioni elementari* di G.

Non si può affermare a priori che il sistema Σ fornisca un sistema completo di relazioni fra i generatori di G [28], ma la cosa qui non interessa.

Ciò posto, le condizioni d'esistenza I, II (del n. 2) possono essere ora presentate nella seguente nuova forma:

« *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione irriducibile a μ valori*

$$u=u(x, y, z)$$

dei punti della superficie F, e diramata su F dalla curva D^* con prefissate sostituzioni $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ sui cicli generatori del gruppo G di Poincaré inerente ad $F-D^*$, è che le S generino un gruppo transitivo e soddisfino alle $q+\nu s$ relazioni elementari (1) *e* (2) *di G: cioè sia*

$$\varphi_l(S_1, S_2, \ldots, S_\nu)=1 \tag{1'}$$

$$S_i=\varphi_{ij}(S_1, S_2, \ldots, S_\nu) \text{ [29] ».} \tag{2'}$$

V. - Un criterio d'esistenza per le varietà multiple diramate.

10. Il problema dell'esistenza delle varietà multiple diramate si riduce a quello delle superficie multiple risolto nei paragrafi precedenti.

---

[28] La completezza di Σ è stata provata nel caso in cui F è un piano. Cfr. Van Kampen, *On the fundamental group of an algebraic curve*, « American Journal of Math. », vol. LV (1933).

[29] Infatti se le S generano un gruppo transitivo e soddisfano le condizioni (1') allora è soddisfatta la condizione I del n. 2 (cioè le S generano il gruppo di monodromia di una curva μ-pla f_u).

Inoltre se le S soddisfano anche le condizioni (2') allora è soddisfatta la condizione II del n. 2 (cioè variando la sezione f nel fascio $x=\lambda y$, la curva multipla f_u ritorna in sè per ogni circolazione di λ). Viceversa se sono soddisfatte le condizioni I, II, sono soddisfatte anche le (1') e (2').

Sussiste infatti il

TEOREMA. - « *Si considerino in uno spazio ad r dimensioni un'ipersuperficie algebrica F ed una sua varietà algebrica D^*, semplice e ad $r-2$ dimensioni.*

Siano $\overline{F}$ e $\overline{D}^*$ la superficie e la curva sezioni rispettive di F e D^* con uno spazio S_3, generico ma fissato.

Se la $\overline{D}^*$ è curva diramante per una funzione a μ valori dei punti della superficie $\overline{F}$, allora la varietà D^* è pure diramante per una funzione a μ valori dei punti dell'ipersuperficie F ».

Diamo qui la dimostrazione per $r=4$ (il passaggio ad r qualunque non implica difficoltà).

Consideriamo dunque in uno spazio S_4 a 4 dimensioni (riferito alle coordinate non omogenee x, y, z, t) un'ipersuperficie algebrica d'equazione

$$F(x, y, z, t)=0$$

d'ordine m e non passante per il punto improprio Z_∞ dell'asse z.

Sia D^* una superficie algebrica, giacente su F e dotata di curve multiple che supporremo solo nodali e cuspidali.

La curva $\overline{D}^*$ sezione di D^* con un S_3 generico (che assumeremo come iperpiano $t=0$) sia curva di diramazione per una funzione algebrica a μ valori

$$\overline{u}=\overline{u}(x, y, z)$$

dei punti della superficie

$$\overline{F}(x, y, z, 0)=0, \qquad t=0.$$

Dobbiamo dimostrare che D^* è superficie di diramazione per una funzione algebrica a μ valori

$$u=u(x, y, z, t)$$

dei punti dell'ipersuperficie F.

Consideriamo innanzitutto la funzione algebrica ad m valori

$$z=z(x, y, t)$$

definita dall'ipersuperficie $F(x, y, z, t)=0$; sia

$$\Phi(x, y, t)=0$$

la sua superficie di diramazione sull'iperpiano $z=0$.

Consideriamo anche la superficie D proiezione della D^* sull'iperpiano $z=0$ eseguita da Z_∞, ed indichiamo con

$$\Psi=\Phi+D$$

la superficie composta da Φ e D.

Siano inoltre $\overline{\Psi}$, $\overline{\Phi}$, $\overline{D}$ le curve sezioni delle omonime superficie col piano $t=0$ (dello spazio $z=0$).

Per ipotesi la curva

$$\bar{\Psi} = \bar{\Phi} + \bar{D}$$

è di diramazione per il piano multiplo

$$\bar{w}(x, y) = \bar{u}(x, y, z(x, y, 0))$$

associato alla funzione a μ valori

$$\bar{u}(x, y, z)$$

dei punti della superficie $\bar{F}$ (che definisce la funzione ad m valori $z(x, y, 0)$).

Tale piano multiplo ha ordine $m\mu$; il suo gruppo di monodromia Γ è ovviamente imprimitivo; gli m sistemi d'imprimitività di Γ corrispondono alle m determinazioni di $z(x, y, 0)$ in un punto generico O del piano $z = t = 0$ (che supponiamo essere quello di coordinate $x = y = t = 0$).

Per un teorema di CHISINI [30] si può ora affermare che la superficie

$$\Psi = \Phi + D$$

è diramante per una funzione ad $m\mu$ valori

$$w = w(x, y, t).$$

Questa ha ovviamente lo stesso gruppo di monodromia della sua sezione dianzi considerata [31]

$$\bar{w}(x, y, 0) = \bar{w}(x, y),$$

cioè ha un gruppo imprimitivo i cui m sistemi d'imprimitività corrispondono alle determinazioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$ della funzione $z(x, y, 0)$ nel punto O, che sono anche determinazioni in O della funzione $z = z(x, y, t)$ definita dalla ipersuperficie $F(x, y, z, t) = 0$.

Si conclude che alla funzione ad $m\mu$ valori

$$w = w(x, y, t)$$

è associata una funzione a μ valori

$$u = u(x, y, z, t)$$

dei punti di F, diramata su F dalla superficie D^*.

---

(30) Cfr. CHISINI, l. c. in (6). Il teorema citato afferma che una superficie Ψ è di diramazione per uno spazio multiplo d'ordine n, se la sua sezione $\bar{\Psi}$ con un piano generico di un fascio è diramante per un piano n-plo. Il nostro teorema consiste quindi nell'estensione del risultato di CHISINI dagli spazi multipli alle varietà multiple (non lineari).

(31) Infatti i gruppi di monodromia delle due funzioni $w(x, y, t)$ e $\bar{w}(x, y, 0)$ coincidono entrambi con quelli della retta multipla $\bar{w}(0, y, 0)$, che è sezione di entrambe. (Cfr. ancora l'osservazione fatta nel n. 2 della nota citata in (5)).