Nuovi Risultati sulle «Catene» di Numeri Primi.

Memoria di MARCO CUGIANI (a Milano).

Sunto. - *Facendo seguito alle ricerche svolte in un precedente lavoro si riprendono in considerazione le «catene» (costituite da numeri primi consecutivi le cui differenze soddisfano particolari limitazioni), e se ne studiano alcuni nuovi tipi. Sopratutto si considerano quelle catene, appartenenti all'intervallo* $((1-\eta)\xi, \xi)$, *nelle quali la differenza fra due successivi elementi è sempre in valore assoluto minore (o quelle altre catene in cui tale differenza è sempre non minore) di un'espressione del tipo* $\alpha \cdot \log \xi$, *nei casi* $\alpha < 1$ *ed* $\alpha > 1$. *Si forniscono alcune limitazioni relative sia all'estensione della massima catena, sia al numero complessivo delle catene nell'intervallo.*

1. - Introduzione.

In un nostro precedente [1] lavoro [1] abbiamo esposto alcuni risultati relativi al comportamento delle «catene» di numeri primi consecutivi a differenza limitata; qui intendiamo adesso continuare le ricerche sullo stesso argomento.

Incominceremo col richiamare i concetti fondamentali in questo ordine di questioni, concetti che riteniamo di dover qui riesporre in forma più ampia e più precisa.

Sia p_i l'i-esimo numero primo e $\delta_i = p_{i+1} - p_i$, la differenza di due numeri primi consecutivi. Consideriamo la successione di numeri interi positivi:

$$\{\delta_i\} \qquad \delta_1 = p_2 - p_1, \ \delta_2 = p_3 - p_2, \dots, \ \delta_i = p_{i+1} - p_i, \dots$$

e pensiamo fissata un'altra successione:

$$\{d_i\} \qquad\qquad d_1, \ d_2, \dots, \ d_i, \dots$$

di numeri reali positivi.

Possiamo pensare di operare un confronto fra gli elementi corrispondenti delle due successioni: potrà accadere che per qualche indice i, ed in particolare per parecchi indici consecutivi risulti $\delta_i < d_i$.

Orbene noi chiameremo *catena di tipo* Δ, o più precisamente di tipo $\Delta\{d_i\}$, ogni insieme:

$$p_n, \ p_{n+1}, \dots, \ p_N \qquad (N \geq n+1) \tag{1}$$

di numeri primi consecutivi per cui $\delta_i < d_i$ ($i = n, n+1, \dots, N-1$), e che non sia ulteriormente prolungabile, tale cioè che risulti:

$$\delta_{n-1} \geq d_{n-1} \quad (\text{oppure } n = 1); \qquad \delta_N \geq d_N.$$

[1] I numeri fra parentesi quadre si riferiscono alla nota bibliografica posta alla fine del presente lavoro.

Può anche accadere che una sola catena sia costituita da tutti i numeri p_i (per esempio se si pone $d_i = p_i$), o da tutti i p_i per $i \geq i_0$ (per esempio se si pone $d_i = p_i/4$).

Se la catena è finita diremo $\rho = N - n$ il numero delle coppie (p_i, p_{i+1}) contenute nella catena stessa.

Analogamente chiameremo *catena di tipo* Δ^*, o meglio $\Delta^* \{ d_i \}$, ogni insieme (1) per cui si abbia $\delta_i \geq d_i$ $(i = n, n+1, \ldots, N-1)$, e che non sia ulteriormente prolungabile, tale cioè che risulti:

$$\delta_{n-1} < d_{n-1} \quad (\text{oppure } n = 1); \qquad \delta_N < d_N.$$

Se la catena è finita diremo $\rho^* = N - n$ il numero delle coppie (p_i, p_{i+1}) in essa contenute.

È evidente che le catene Δ e Δ^* si alternano mentre i percorre la successione dei numeri naturali e che due catene consecutive hanno un estremo in comune; purchè, naturalmente, non tutti i numeri primi appartengano ad una stessa catena (come nel caso $d_i = p_i$, caso in cui non esistono catene Δ^*).

Si possono dare definizioni analoghe riferendosi, anzichè alla successione totale dei p_i, ad un sottoinsieme di essa costituito da un numero finito di elementi consecutivi.

Più precisamente fissati due numeri reali η e ξ $(0 < \eta \leq 1, \xi > 0)$ si considerino i numeri primi p_i appartenenti all'intervallo $((1-\eta)\xi, \xi)$, per i quali cioè risulti $(1-\eta)\xi < p_i \leq \xi$. Chiameremo allora *catene di tipo* Δ *relative all'intervallo* $((1-\eta)\xi, \xi)$ gli insiemi (1) per cui risulta $\delta_i < d_i$ $(i = n, n+1, \ldots, N-1)$ costituiti esclusivamente di numeri p_i per cui $(1-\eta)\xi < p_i \leq \xi$, e non ulteriormente prolungabili.

Tali catene sono adunque degli insiemi (1) soddisfacenti alle condizioni:

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta_i \ < d_i \ \text{ per } \ i = n, n+1, \ldots, N-1; \ (1-\eta)\xi < p_n < p_N \leq \xi \\ \delta_{n-1} \geq d_{n-1}, \ \text{ oppure } \ p_{n-1} \leq (1-\eta)\xi \\ \delta_N \ \geq d_N, \ \text{ oppure } \ p_{N+1} > \xi. \end{cases}$$

Analogamente le *catene* Δ^* *relative all'intervallo* $((1-\eta)\xi, \xi)$ saranno degli insiemi (1) soddisfacenti a queste altre condizioni:

$$(2^*) \qquad \begin{cases} \delta_i \ \geq d_i \ \text{ per } \ i = n \ n+1, \ldots, N-1; \ (1-\eta)\xi < p_n < p_N \leq \xi \\ \delta_{n-1} < d_{n-1}, \ \text{ oppure } \ p_{n-1} \leq (1-\eta)\xi \\ \delta_N \ < d_N, \ \text{ oppure } \ p_{N+1} > \xi. \end{cases}$$

Più precisamente potremo indicare con $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\nu$ le successive catene di tipo Δ relative all'intervallo $((1-\eta)\xi, \xi)$, ordinate per valori crescenti dei p_n, ed analogamente $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \ldots, \Delta_{\nu^*}^*$ le successive catene Δ^* relative all'intervallo stesso.

Similmente indicheremo con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ i numeri delle coppie (p_i, p_{i+1}) appartenenti alle corrispondenti catene Δ e con $\rho_1^*, \rho_2^*, \ldots, \rho_{\nu^*}^*$ quelli delle corrispondenti Δ^*.

I numeri ν e ν^* saranno determinati in dipendenza della successione $\{d_i\}$ e dei valori η e ξ, e potremo scrivere: (²)

$$\nu = \nu(\{d_i\}; \eta, \xi) \qquad \nu^* = \nu^*(\{d_i\}; \eta, \xi);$$

essi rappresentano il numero di catene, rispettivamente di tipo Δ o Δ^*, contenute nell'intervallo.

In particolare potrà accadere che non esista nessuna catena relativa all'intervallo (se vi sono meno di due numeri primi p_i per cui $(1-\eta)\xi < p_i \leq \xi$), oppure che ne esista una sola. In tal caso potrà accadere che essa debba essere riguardata come parte di una catena più estesa quando si vadano a considerare le catene relative ad un intervallo più ampio.

Così pure quando esistano più catene relative a un certo intervallo può darsi che la prima e l'ultima di esse debbano essere riguardate come parti di catene più estese se considerate in relazione a un intervallo più ampio.

È evidente la relazione:

$$|\nu - \nu^*| \leq 1$$

e per il teorema dei numeri primi sarà inoltre:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \rho_i + \sum_{i=1}^{\nu^*} \rho_i^* \backsim \eta\xi/\log\xi \quad \text{per} \quad \xi \to +\infty.$$

Il nostro studio riguarda il comportamento dei numeri ν e ν^*, ρ e ρ^* relativi all'intervallo $((1-\eta)\xi, \xi)$. Per quanto si riferisce alla successione $\{d_i\}$ essa potrà essere costruita secondo uno dei seguenti schemi:

a) d_i indipendente da i; $d_1 = d_2 = d_3 = \ldots = d$,

b) d_i dipendente da i secondo una legge opportuna; per esempio $d_i = \mu \log p_i$ (μ costante).

Nel caso *a*) si potrà assumere d costante, oppure d variabile in dipendenza di altri parametri (diversi dall'indice i). Sia $d = f(s)$, con s parametro; risulterà allora stabilita, in dipendenza di s, la composizione delle catene, sia sulla successione totale dei p_i, sia su un qualunque intervallo.

Fissato η può essere interessante considerare in particolare la composizione delle catene nell'intervallo $((1-\eta)\xi, \xi)$ quando si assuma $\xi = s$, e sorge allora il problema del comportamento asintotico delle catene in tale intervallo quando si faccia tendere s (e quindi ξ) all'infinito.

In tali casi noi ci riferiremo direttamente a ξ come parametro e scriveremo $d = f(\xi)$, $\nu = \nu(f(\xi); \eta, \xi)$, ecc.

Nel precedente lavoro [1] erano stati esaminati sopratutto i casi:

$$d_i = \log p_i; \qquad d = \log\xi; \qquad d = f(\xi).$$

(²) Quando sia $d_i = d$ indipendente da i scriveremo più semplicemente $\nu(d; \eta, \xi)$ e $\nu^*(d; \eta, \xi)$.

Nel terzo caso $f(\xi)$, monotona, era tale che:

$$f(\xi) \to +\infty \text{ per } \xi \to +\infty; \qquad f(\xi) < (1/16 - \varepsilon)\log\xi, \text{ per } \xi \geq \xi_0 .$$

Nel presente lavoro considereremo sopratutto i casi:

$$d_i = \mu \log p_i; \qquad d = \mu \log \xi \qquad (\mu < 1)$$
$$d_i = \lambda \log p_i; \qquad d = \lambda \log \xi \qquad (\lambda > 1)$$

e riprenderemo in esame brevemente il caso $d = f(\xi)$, dove $f(\xi)$, monotona non decrescente, soddisferà adesso alle condizioni meno restrittive:

$$f_1 < f(\xi) < (1/8 - \varepsilon)\log\xi, \text{ per } \xi \geq \xi_0 \ (f_1 = f_1(\eta, \varepsilon)).$$

2. - **Risultati.**

Passiamo ora ad enunciare le proposizioni che ci ripromettiamo di dimostrare nel presente lavoro.

In primo luogo due teoremi che verranno dimostrati rispettivamente ai numeri 4 e 5; per tali dimostrazioni ci serviremo di alcuni recenti risultati del RICCI [5], sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi.

Sia $\bar\theta$ l'estremo superiore dei valori θ per cui vale la relazione:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}\, x + O(x \cdot \exp(-\log^\theta x))$$

(è noto che $\bar\theta \geq 4/7$). Possiamo allora enunciare i due teoremi nella forma seguente (η si suppone prefissato una volta per tutte):

TEOREMA A. - *Esiste un* $\mu_0 \leq 15/16$ *tale che per ogni* μ, *con* $\mu_0 < \mu < 1$, *e per ogni* $\theta < \bar\theta$, *posto* $d = \log\xi$, *si ha (per* $\xi \to +\infty$*):*

$$\exp(\log^\theta \xi) = o(\nu(\mu\log\xi;\ \eta,\ \xi)) = o(\nu^*(\mu\log\xi;\ \eta,\ \xi)) \tag{3}$$

ed analoghe relazioni valgono anche per $d_i = \mu \log p_i$.

TEOREMA B. - *Esiste un* $\lambda_0 > 1$ *tale che, per ogni* λ, *con* $1 < \lambda < \lambda_0$, *e per ogni* $\theta < \bar\theta$, *posto* $d = \lambda\log\xi$, *si ha (per* $\xi \to +\infty$*):*

$$\exp(\log^\theta \xi) = o(\nu^*(\lambda\log\xi;\ \eta,\ \xi)) = o(\nu(\lambda\log\xi;\ \eta,\ \xi)) \tag{4}$$

ed analoghe relazioni valgono per $d_i = \lambda \log p_i$.

Fra le proposizioni preliminari che ci serviranno alla dimostrazione di questi due teoremi riteniamo opportuno di enunciare qui esplicitamente il teorema seguente, che verrà dimostrato al n. 4:

TEOREMA C. - *Indichiamo con* $Z(d;\ \eta,\ \xi)$ *il numero delle coppie* (p_i, p_{i+1}), *contenute nell'intervallo* $((1-\eta)\xi,\ \xi)$, *per le quali risulta* $\delta_i < d$*; ciò equivale a porre:*

$$Z(d;\ \eta,\ \xi) = \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i .$$

Assumiamo poi $d = \varphi(\xi)$, *dove* $\varphi(\xi)$ *è una funzione monotona non decrescente tale che, per* $\xi \geq \xi_0$, *risulti* $\varphi(\xi) \leq \alpha \cdot \log \xi$, *con* α *costante* < 1.

Se, per ξ *abbastanza grande, si ha:*

$$Z(\varphi(\xi)\,;\ \eta,\ \xi) \geq \frac{c\eta\xi}{\log^M \xi}$$

con M *e* c *costanti positive* ($M \geq 1$, *e naturalmente* $c \leq 1$ *per* $M = 1$), *allora, per ogni* $\theta < \bar{\theta}$, *risulta* (*per* $\xi \rightarrow +\infty$):

$$\exp(\log^\theta \xi) = o(\nu(\varphi(\xi)\,;\ \eta,\ \xi) = o(\nu^*(\varphi(\xi)\,;\ \eta,\ \xi). \tag{5}$$

Enunciamo qui infine un teorema che in sostanza approfondisce e precisa meglio il contenuto del teorema I, esposto in [1]. Si tratta del seguente:

TEOREMA D. - *Sia* $f(\xi)$ *una funzione monotona non decrescente soddisfacente alla condizione* $f(\xi) \leq (1/8 - \sigma) \cdot \log \xi$, *per* ξ *abbastanza grande* $\left(\sigma \text{ costante positiva opportuna } < \frac{1}{8}\right)$.

Scelto k *positivo* $< \sigma$ *esiste un numero* $f_1 = f_1(\eta,\ \sigma,\ k)$ *tale che, se per* ξ *abbastanza grande risulta* $f(\xi) > f_1$, *si avrà, posto* $d = f(\xi)$:

$$\operatorname{Max} \rho^* > k \log \xi / f(\xi) \tag{6}$$

per ξ *abbastanza grande.*

La dimostrazione del presente teorema si può condurre in modo perfettamente analogo a quella del teorema I, di [1], ricordato sopra, solo che si sostituisca al lemma I ([3]), colà impiegato, il seguente ([4]):

LEMMA 1. - *Fissato* $\varepsilon > 0$, *tutte le volte che* d *e* ξ *sono abbastanza grandi* (*in dipendenza esclusivamente di* η *e di* ε), *si ha:*

$$Z(d\,;\ \eta,\ \xi) < (8 + \varepsilon) d \cdot \frac{\eta\xi}{\log^2 \xi}.$$

3. - Osservazioni.

Accanto alle proposizioni enunciate nel n. precedente vogliamo qui prospettare alcune osservazioni che ci sembrano degne di un certo interesse.

OSSERVAZIONE 1ª. - Ricordiamo che HARDY e LITTLEWOOD hanno formulato una congettura ([5]), in base alla quale il numero delle coppie $(p_i,\ p_j)$ di

---

([3]) Questo lemma I si trova in [1] alla pag. 124, la dimostrazione del teorema I, sempre in [1], segue alla pag. 125.

([4]) Il presente lemma 1 (come il lemma I di [1]) è un immediato corollario del lemma 2 di [4], ivi esposto e dimostrato alle pagg. 146 e seg.

([5]) A questo proposito si veda la nota [2].

numeri primi tali che $p_j - p_i = 2a > 0$, $p_j \leq \xi$ è asintotico a:

$$2H \cdot \prod_{3 \leq p \mid a} \frac{p-1}{p-2} \cdot \xi/\log^2 \xi \quad \text{per } \xi \to +\infty \qquad \left(H = \prod_{p \geq 3}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\right).$$

Ora segue quasi immediatamente dal Teorema C, è sarà del resto brevemente dimostrato al n. 4 che: se vale la congettura di HARDY e LITTLEWOOD, allora, per ogni d fisso > 2, si ha:

$$\exp(\log^\theta \xi) = o(\nu(d;\, \eta,\, \xi)) = o(\nu^*(d;\, \eta,\, \xi)). \tag{7}$$

OSSERVAZIONE 2ª. - Sia $\alpha(\xi)$ una funzione tale che, per $\xi \geq \xi_0$, risultino soddisfatte le condizioni:

$$\alpha(\xi) \text{ monotona}; \qquad \alpha(\xi) \leq (\log\log\log \xi)^2; \qquad \log \xi/\alpha(\xi) \text{ monotona}$$

ed inoltre $\alpha(\xi) \to +\infty$ per $\xi \to +\infty$.

Sia poi q un numero primo tale che nell'intervallo:

$$q - \log q/\alpha(q), \qquad q + \log q/\alpha(q)$$

non cada alcun numero primo diverso da q. Il numero primo q si dirà allora *fortemente isolato*. È stato recentemente dimostrato che *quasi* tutti i numeri primi sono fortemente isolati [6], e ne segue ovviamente che esistono catene estese quanto si vuole di numeri primi fortemente isolati.

Noi vogliamo qui inoltre osservare che, posto $d = \log \xi/\alpha(\xi)$, il Teorema D ci dà immediatamente:

$$\operatorname{Max} \rho^* > \alpha(\xi)/(8 + \varepsilon), \text{ per ogni } \varepsilon > 0 \text{ e } \xi \geq \xi_0(\eta,\, \varepsilon). \tag{8}$$

La (8) fornisce un limite inferiore (tendente all'∞ insieme con ξ) per l'estensione della massima catena di numeri primi fortemente isolati contenuta nell'intervallo $((1-\eta)\xi,\, \xi)$.

OSSERVAZIONE 3ª. - La limitazione inferiore del $\operatorname{Max} \rho^*$ nel caso di un d fisso era stata da noi appena accennata in [1], alle pagine 125-26, dove si era voluto soltanto, con un procedimento di prima approssimazione, giungere in qualche modo alla detta maggiorazione. Naturalmente il risultato è facilmente migliorabile, come accenneremo adesso.

Anzitutto va osservato che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un d_0, dipendente da η e da ε, tale che, per ogni $d \geq d_0$ si ha:

$$\operatorname{Max} \rho^* > \frac{1}{(8+\varepsilon)d} \log \xi \qquad (\xi \geq \xi_0(\eta,\, \varepsilon))$$

e questa è ancora un'immediata conseguenza del Teorema D.

Per ogni $d > 2$ (e quindi in particolare per gli eventuali $d < d_0$) si può poi arrivare facilmente ad una limitazione più vantaggiosa di quella accennata in [1], come ci ha fatto osservare il sig. K. PRACHAR.

---

[6] A questo proposito si vedano i lavori [3] e [6].

Ad esempio si può giungere con un calcolo relativamente semplice alla limitazione:

$$\text{Max}\,\rho^* > \frac{1}{14d}\log\xi \qquad (\text{per ogni } d > 2,\ \xi \geq \xi_0(\eta)) \tag{9}$$

come sarà accennato al n. 6. Tale risultato si potrebbe facilmente migliorare spingendo i calcoli più innanzi, ma non abbiamo creduto opportuno insistervi oltre.

OSSERVAZIONE 4ª. - La forma esponenziale dei primi membri delle relazioni (3) (4) (5) (7) è strettamente legata alla espressione del resto nel teorema dei numeri primi. Se si suppone diversa tale espressione quelle relazioni vengono in conseguenza modificate. Ad esempio supponendo vera l'ipotesi di RIEMANN le relazioni suddette assumono una forma del tipo:

$$\sqrt{\xi}/\log^\beta\xi = O(\nu). \tag{10}$$

Al n. 6 faremo vedere ad esempio per la relazione (3) come, sotto tale ipotesi, essa possa esser sostituita dalla (10) con $\beta = 2$. Considerazioni analoghe valgono per le altre relazioni.

4. - Dimostrazione dei Teoremi A e C.

Alla dimostrazione dei due teoremi premettiamo il seguente:

LEMMA 2. - *Se* $\varphi(\xi)$ *è una funzione monotona non decrescente, ed esiste un* α *positivo* < 1, *tale che risulti* $\varphi(\xi) < \alpha \cdot \log\xi$, *per* $\xi \geq \xi_0$, *allora posto* $d = \varphi(\xi)$, *i numeri* ρ_i, *relativi alle catene* $\Delta(\varphi(\xi))$ *nell'intervallo* $((1-\eta)\xi,\ \xi)$, *soddisfano alla limitazione:*

$$\rho = O(\xi \cdot \exp(-\log^\theta\xi)) \quad \textit{per ogni } \theta < \bar{\theta}. \tag{11}$$

Si ha infatti, in ogni Δ:

$$p_N < p_n + \rho \cdot \varphi(\xi) \leq p_n + \rho \cdot \alpha \log\xi; \qquad N = n + \rho;$$

$$\text{Li}\,p_N \leq \text{Li}\,p_n + \rho \cdot \alpha \log\xi \left(\frac{d}{dz}\text{Li}\,z\right)_{z=z_0} \qquad (p_n < z_0 < p_N)$$

e quindi:

$$\text{Li}\,p_N < \text{Li}\,p_n + \alpha\rho\frac{\lg\xi}{\log\xi + \log(1-\eta)}$$

$$N = n + \rho < n + O(\xi \cdot \exp(-\lg^\theta\xi)) + \alpha\rho\frac{\log\xi}{\log\xi - c(\eta)};$$

per $\xi \geq \xi_1(\alpha, \eta)$ si ha: $\alpha\log\xi/(\log\xi - c(\eta)) < 1$,

e quindi

$$\rho = O(\xi \cdot \exp(-\lg^\theta\xi)) \qquad \text{c. v. d.}$$

Da questo lemma discende subito il Teorema C.

Sia infatti $\varphi(\xi)$ definita come sopra e, posto $d = \varphi(\xi)$, si abbia:

$$Z(\varphi(\xi);\ \eta,\ \xi) = \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i \geq \frac{c\eta\xi}{\lg^M \xi}.$$

Sarà allora, per $\theta < \theta_1 < \bar{\theta}$:

$$\exp(\log^{\theta} \xi) = o(\exp(\log^{\theta_1} \xi)/\log^M \xi);$$

e inoltre, per la (11): $\operatorname{Max} \rho < c_1 \xi \cdot \exp(-\log^{\theta_1} \xi)$; quindi:

$$\nu(\varphi(\xi);\ \eta,\ \xi) \geq \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \rho_i}{\operatorname{Max} \rho} \geq \frac{c\eta\xi}{\log^M \xi} \cdot \frac{\exp(\log^{\theta_1} \xi)}{c_1 \xi} \geq$$

$$\geq \frac{c}{c_1} \eta \frac{\exp(\log^{\theta_1} \xi)}{\log^M \xi}$$

d'onde segue l'asserto.

Dal Teorema C segue facilmente il Teorema A, ove si tenga conto dei risultati del RICCI, esposti in [5]. Precisamente a noi interessa la seguente proposizione (7):

LEMMA 3. - *In corrispondenza di ogni* μ $(15/16 < \mu < 1)$ *è sempre possibile trovare una costante positiva c, per cui si ha:*

$$Z(\mu \log \xi;\ \eta,\ \xi) > c\eta\xi/\log \xi.$$

Sono quindi soddisfatte le ipotesi del Teorema C per $\varphi(\xi) = \mu \log \xi$ e con $M = 1$.

Il Teorema A diventa allora un caso particolare del Teorema C e con ciò esso è dimostrato.

Dal Teorema C deriva poi anche la seguente proposizione.

Se per una certa costante positiva d si ha:

$$Z(d;\ 1,\ \xi) \backsim \frac{c\xi}{\log^M \xi} \qquad (c > 0) \text{ per } \xi \to +\infty, \tag{12}$$

allora vale la relazione:

$$\exp(\log^{\theta} \xi) = o(\nu(d;\ \eta,\ \xi)) \tag{13}$$

per ogni η $(0 < \eta \leq 1)$.

Dalla (12) si ottiene infatti, con facile ragionamento (8):

$$Z(d;\ \eta,\ \xi) \backsim \frac{c\eta\xi}{\lg^M \xi} > \frac{(c-\varepsilon)\eta\xi}{\log^M \xi} \qquad (\text{per } \xi \geq \xi_0)$$

e si ricade allora nelle ipotesi del Teorema C.

(7) Si veda [5], Teorema XIV.

(8) Per questo ragionamento si può vedere [4], pag. 136, nota a piè di pagina.

Indichiamo poi con $Z'(2a;\ \eta,\ \xi)$ il numero delle coppie di numeri primi (p_i, p_j), tali che: $(1-\eta)\xi < p_i < p_j \leq \xi$; $p_j - p_i = 2a$, con a intero positivo.

Se allora si sostituisce nel primo membro della (12) $Z'(2a;\ 1,\ \xi)$ in luogo di $Z(d;\ 1,\ \xi)$, si giunge facilmente a un'altra proposizione, perfettamente analoga alla precedente, ove nella (13) si supponga: $2a < d \leq 2a + 2$.

Si ottiene infatti da $Z'(2a;\ 1,\ \xi) \backsim c\xi/\log^M \xi$, con il solito ragionamento [8]:

$$Z'(2a;\ \eta,\ \xi) > \frac{(c-\varepsilon)\eta\xi}{\lg^M \xi} \qquad (\text{per } \xi \geq \xi_0)$$

ed essendo $Z(d;\ \eta,\ \xi) \geq Z'(2a;\ \eta,\ \xi)$ si ritorna al solito al Teorema C.

Ne risulta in particolare provata l'affermazione da noi fatta all'Osservazione 1ª.

5. - Dimostrazione del Teorema B.

Passiamo ora a dimostrare il Teorema B.

A tal fine ci serviremo del seguente:

LEMMA 4. - *Esistono due costanti* $\lambda > 1$ *e* $c_1 > 0$ *per cui, posto* $d = \lambda \log \xi$, *si ha:*

(14) $$\sum_{\delta_i \geq d} \delta_i > c_1 \eta \xi \qquad (\text{per } \xi \geq \xi_0)$$

dove la sommatoria a primo membro si intende estesa a tutte le differenze $\delta_i \geq \lambda \log \xi$ *di numeri primi consecutivi compresi nell'intervallo* $((1-\eta)\xi,\ \xi)$.

Ciò si deduce facilmente dal Lemma 3.

Consideriamo infatti un numero μ $(15/16 < \mu < 1)$ ed un altro numero $\lambda > \mu$, lasciando per ora indeterminato il valore di λ. Consideriamo poi le tre sommatorie, estese a tutte le differenze δ_i di numeri primi consecutivi compresi nell'intervallo $((1-\eta)\xi,\ \xi)$:

$$\Sigma_1 = \sum_{\delta_i < \mu \lg \xi} \delta_i \qquad \Sigma_2 = \sum_{\mu \lg \xi \leq \delta_i < \lambda \lg \xi} \delta_i \qquad \Sigma_3 = \sum_{\lambda \lg \xi \leq \delta_i} \delta_i .$$

Avremo:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \backsim \eta\xi; \qquad \Sigma_3 \backsim \eta\xi - \Sigma_1 - \Sigma_2 .$$

Per il Lemma 3 possiamo scrivere:

$$Z(\mu \log \xi;\ \eta,\ \xi) = c\frac{\eta\xi}{\log \xi}, \text{ dove } c = c(\xi) > c_0 > 0 \quad \text{per } \xi \geq \xi_0,$$

e quindi (per $\xi \geq \xi_0$):

$$Z(\lambda \log \xi;\ \eta,\ \xi) - Z(\mu \log \xi;\ \eta,\ \xi) < (1 - c + \varepsilon)\eta\xi/\log \xi,$$

se ne deduce:

$$\Sigma_2 < (1 - c + \varepsilon)\lambda\eta\xi$$

ed essendo:

$$\Sigma_1 \leq c\mu\eta\xi,$$

avremo:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 < \{ (1 - c + \varepsilon)\lambda + c\mu \} \eta\xi.$$

Fissato allora ε positivo $< c_0(1 - \mu)$ ne risulta (essendo: $0 < c_0 < c < 1$):

$$\frac{1 - c\mu}{1 - c + \varepsilon} > \Lambda = \frac{1 - c_0\mu}{1 - c_0 + \varepsilon} > 1,$$

e quindi, quando sia: $1 < \lambda < \Lambda$ si avrà:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 < (1 - c_1 - \varepsilon_1)\eta\xi \ \ (c_1 \text{ ed } \varepsilon_1 > 0)\,; \ \Sigma_3 > c_1\eta\xi \qquad \text{c. v. d.}$$

Possiamo ora dimostrare il Teorema B.

Riferendoci al Lemma 4 sia λ_0 l'estremo superiore dei λ per cui vale la (14). Scelto λ $(1 < \lambda < \lambda_0)$ fissiamo $d = \lambda \log \xi$ e consideriamo la i-esima catena Δ^*, ponendo in essa; $M_i = (p_N - p_n)/\rho_i^*$, sarà quindi $M_i \geq \lambda \log \xi$. Ora avremo:

$$p_N = p_n + \rho_i^* M_i\,; \qquad \mathrm{Li}\, p_N \geq \mathrm{Li}\, p_n + \rho_i^* M_i \frac{1}{\log \xi}\,;$$

$$N = n + \rho_i^* \geq n + O(\xi \cdot \exp(-\log^{\theta_1} \xi)) + \rho_i^* M_i/\log \xi \quad \text{con } \theta_1 < \bar{\theta}\,;$$

se ne deduce:

$$\rho_i^* \left(\frac{M_i}{\log \xi} - 1\right) = O(\xi \cdot \exp(-\log^{\theta_1} \xi)\,;$$

$$\rho_i^* M_i \cdot \left\{ \left(1 - \frac{\log \xi}{M_i}\right) \Big/ \log \xi \right\} = O(\xi \cdot \exp(-\log^{\theta_1} \xi))\,;$$

ed essendo $\dfrac{\log \xi}{M_i} \leq \dfrac{1}{\lambda} < 1$, se ne deduce:

$$\rho_i^* M_i = O(\xi \cdot \log \xi \cdot \exp(-\log^{\theta_1} \xi) = O(\xi \exp(-\log^{\theta_2} \xi))$$

per ogni $\theta_2 < \theta_1 < \bar{\theta}$.

Ora abbiamo, per la (14):

$$\sum_{i=1}^{\nu^*} \rho_i^* M_i = \sum_{\delta_i \geq \lambda \log \xi} \delta_i > c_1 \eta\xi,$$

e quindi

$$\nu^*(\lambda \log \xi\,;\ \eta,\ \xi) > \frac{c_1\eta\xi}{\mathrm{Max}\, \rho_i^* M_i} > c_2 \exp(\log^{\theta_2} \xi)$$

e di qui segue l'asserto per ogni $\theta < \theta_2$ e quindi, per l'arbitrarietà di θ_1 e θ_2, per ogni $\theta < \bar{\theta}$.

6. - Dimostrazione delle Formule (9) e (10).

Dimostriamo adesso la (9).

Ci serviremo del noto teorema di VIGGO BRUN, in base al quale si ha; per ogni a fisso e ξ abbastanza grande (in dipendenza di η):

$$Z'(2a;\ \eta,\ \xi) < C_1 \cdot \prod_{3\leq p\mid a} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{\eta\xi}{\log^2 \xi}$$

dove si può assumere $C_1 = (16+\varepsilon)\cdot H$ $\left(H = \prod_{p\geq 3}'\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\right)$.

Ora abbiamo per un d fisso > 2:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \rho_i < C_1 \frac{\eta\xi}{\log^2 \xi} \cdot \sum_{0<a\leq \frac{d}{2}} \prod_{3\leq p\mid a} \frac{p-1}{p-2} =$$

$$= C_1 \frac{\eta\xi}{\log^2 \xi} \sum_{0<a\leq \frac{d}{2}} \prod_{3\leq p\mid a} \left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{2}{(p-2)(p+1)}\right) <$$

$$< C_1 \frac{\eta\xi}{\log^2 \xi} \cdot \prod_{p\geq 3}\left(1 + \frac{2}{(p-2)(p+1)}\right) \cdot \sum_{0<a\leq \frac{d}{2}} \prod_{3\leq p\mid a}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Si dimostra poi facilmente che, ad esempio:

$$\prod_{p\geq 3}\left(1 + \frac{2}{(p-2)(p+1)}\right) < \frac{21}{10}$$

e perciò:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \rho_i < C_1 \frac{\eta\xi}{\log^2 \xi} \cdot \frac{21}{10} \cdot \sum_{0<a\leq \frac{d}{2}} \sum_{2\nmid f\mid a} \frac{1}{f}\ (^{9}) \leq$$

$$\leq C_1 \frac{\eta\xi}{\log^2 \xi} \cdot \frac{21}{10} \cdot \sum_{\substack{0<f\leq \frac{d}{2} \\ 2\nmid f}} \frac{1}{f} \cdot \frac{d}{2f} \leq$$

$$\leq C_1 \cdot \frac{21}{20} d \cdot \frac{\eta\xi}{\log^2 \xi} \sum_{2\nmid f} \frac{1}{f^2} = \frac{21}{20} C_1 d \frac{\eta\xi}{\log^2 \xi} \cdot \frac{\pi^2}{8} = A$$

e sarà quindi anche $\nu(d;\ \eta,\ \xi) < A$ ed ancora $\nu^*(d;\ \eta,\ \xi) < A+1$.

Ora essendo:

$$\sum_{i=1}^{\nu^*} \rho_i^* \backsim \eta\xi/\log \xi - \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i \backsim \eta\xi/\log \xi$$

---

(9) Un calcolo di questo tipo si può trovare in [3], pag. 115.

se ne deduce (per $\xi \geq \xi_0$):

$$\operatorname{Max} \rho^* \geq \frac{\Sigma \rho^*}{A+1} > \frac{160}{21(C_1+\varepsilon)\pi^2 d} \log \xi >$$

$$> \frac{160}{21(16+2\varepsilon)H\pi^2} \frac{\log \xi}{d} > \frac{160}{21 \cdot 16 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10} \frac{\log \xi}{d} = \frac{1}{14} \frac{\log \xi}{d}.$$

Accenniamo infine alla forma che assume il Teorema A nell'ipotesi di RIEMANN.

Osserviamo in primo luogo che la (11) adesso si potrà scrivere così:

$$\rho = O(\sqrt{\xi} \cdot \log \xi)$$

come si deduce immediatamente ricalcando la stessa linea di dimostrazione e tenendo conto della suddetta ipotesi.

La (5) diventa allora:

$$\frac{\sqrt{\xi}}{\log^{M+1} \xi} = O(\nu(\varphi(\xi)\,;\ \eta,\ \xi))$$

di qui, per $\varphi(\xi) = \mu \log \xi$, tenuto conto del Lemma 3 si ricava immediatamente:

$$\frac{\sqrt{\xi}}{\log^2 \xi} = O(\nu(\mu \log \xi\,;\ \eta,\ \xi))$$

che è appunto la (10) con $\beta = 2$.

NOTA BIBLIOGRAFICA

[1] M. CUGIANI, *Sulle « catene » di numeri primi consecutivi a differenza limitata*, « Ann. Mat. pura e appl. », (4), *36* (1954), 121-132.

[2] G. H. HARDY & J. E. LITTLEWOOD, *Note on Messrs Shah and Wilson's paper entlitled: « On an empirical formula connected with Goldbach's Theorem »*, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », *19* (1919), 245-254.

[3] K. PRACHAR, *Über ein Resultat von A. Walfisz*, « Monatsh. für Math. », *58* (1954), 114-116.

[4] G. RICCI, *Sul Coefficiente di Viggo Brun*, « Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa », (3), 7 (1953), 133-151.

[5] G. RICCI, *Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi*, « Rivista mat. Univ. Parma », *5* (1955), 3-54.

[6] A. WALFISZ, *Numeri primi isolati*, « Doklady Akad. Nauk SSSR », N. S. *90* (1953), 711-713 (in lingua russa).