Distribuzione di mantisse e serie di potenze non prolungabili.

Nota di FULVIA SKOF (a Milano).

Sunto. - *Si prende in esame un criterio sufficiente di* J. GERGEN e D. V. WIDDER, *atto a garantire la non-prolungabilità di una serie di potenze fuori della circonferenza di convergenza, e se ne fornisce una generalizzazione, stabilendo due nuovi criteri sufficienti: ci si vale di un teorema di* H. WEYL *sulla distribuzione delle mantisse e di un teorema di* E. FABRY - G. PÓLYA *sulle serie di potenze non prolungabili.*

1. Introduzione. - Fra le serie di potenze $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ne esistono di quelle che non sono prolungabili oltre il cerchio di convergenza, cioè di quelle per le quali ogni punto della circonferenza di convergenza è critico. Numerosi studi furono rivolti a stabilire condizioni sufficienti per la non-prolungabilità di una serie di potenze: ricordiamo quelli particolarmente notevoli di J. HADAMARD, E. FABRY, G. SZEGÖ, G. PÓLYA, S. MANDELBROJT, ecc.

Tutti questi criteri sufficienti richiedono, sostanzialmente, la presenza nella successione $\{a_n\}$ di tratti abbastanza estesi costituiti da coefficienti nulli (oppure abbastanza piccoli in guisa che la loro soppressione perturbi $f(z)$ soltanto per una funzione additiva, rappresentata da una serie col raggio di convergenza maggiore): la presenza di tali tratti, detti « lacune », conferisce alla serie un carattere per il quale essa si dice « serie lacunare ».

Accanto a lacune di questo tipo se ne sono considerate altre, di tipo più generale, che ammettono la presenza di coefficienti « relativamente grandi », purchè « non troppo numerosi », dei quali qualcuno in posizione più o meno vincolata.

In uno studio del 1928, J. GERGEN e D. V. WIDDER [1] hanno dato il seguente criterio:

TEOREMA. - « Se $\{n_h\}$ è una successione di interi positivi tali che $\lim_{h\to+\infty} e^{2\pi i n_h \lambda}$ esiste per qualche numero irrazionale λ, e se $\{a_{n_h}\}$, $a_{n_h} \neq 0$, è una successione di numeri tutti situati in un unico quadrante del piano complesso, la serie

$$\sum a_{n_h} z^{n_h}, \qquad \overline{\lim} \, |a_{n_h}|^{1/n_h} = 1,$$

non è prolungabile ».

[1] J. GERGEN - D. V. WIDDER, *On Taylor's Series admitting the Circle of convergence as a singular curve*, « American Journal of Mathematics », *50* (1928), pp. 139-146.

Le ipotesi che in questo criterio assicurano la sufficienza della condizione vertono:

1°) sulla «rarefazione» dei coefficienti non nulli, assicurata dall'esistenza del limite dell'esponenziale $e^{2\pi i n_h \lambda}$, essendo λ conveniente;

2°) sulla posizione delle immagini dei coefficienti non nulli che debbono appartenere ad un quadrante.

Poichè i classici teoremi di FABRY, PÓLYA, HADAMARD, ecc. per la non-prolungabilità di una serie di potenze richiedono soltanto una sufficiente rarefazione della successione $\{n_h\}$, ci siamo proposti di stabilire un criterio più generale del precedente, che possegga i seguenti requisiti:

1) In esso non figuri la condizione che vincola i coefficienti non nulli ad appartenere ad un unico quadrante del piano complesso.

2) Quando si interpreti la condizione riguardante l'esponenziale $e^{2\pi i n_h \lambda}$ come una condizione imposta all'insieme mant $n_h\lambda = n_h\lambda - [n_h\lambda]$, appartenente all'intervallo $(0, 1)$, esso imponga a tale insieme una condizione più ampia dell'esistenza di un solo punto limite.

3) La condizione più ampia di cui al punto 2) garantisca la non-prolungabilità della serie di potenze anche quando risulti verificata, anzichè lungo tutta la successione dei coefficienti $\{a_{n_h}\}$, lungo una successione di tratti, di ampiezza relativa non infinitesima, ma lontani l'uno dall'altro quanto si voglia.

2. I nuovi criteri. - Un classico teorema di H. WEYL [2] sulla uniformità di distribuzione delle mant $n\lambda$ nell'intervallo $(0, 1)$ ci ha consentito di pervenire al seguente criterio, che gode dei requisiti 1) e 2) del n. precedente:

TEOREMA I. - *La serie di potenze* $\Sigma\, a_{n_h} z^{n_h}$ *abbia raggio di convergenza 1. Essa non è prolungabile fuori di* $|z| = 1$ *se esiste un numero irrazionale* λ *tale che l'insieme dei numeri* mant $n_h\lambda = n_h\lambda - [n_h\lambda]$, *contenuto nell'intervallo* $(0, 1)$, *sia un insieme rinchiudibile* [3].

Il teorema enunciato è un caso particolare del seguente teorema che gode di tutti i requisiti 1), 2) e 3) segnalati al n. precedente:

TEOREMA II. - *La serie di potenze* $\Sigma\, a_n z^n$ *abbia raggio di convergenza 1. Essa non è prolungabile fuori di* $|z| = 1$ *se è possibile determinare*

i) *una successione* $\{p_h, q_h\}$ *crescente di coppie di interi positivi* (p_1, q_1), $(p_2, q_2), \dots, (p_h, q_h), \dots$,

ii) *un numero irrazionale* λ,

---

[2] H. WEYL, «Math. Annalen», 77 (1916), pp. 313-352; vedi anche G. H. HARDY - E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford (1938), p. 378.

[3] Un insieme si dice *rinchiudibile* quando ad ogni $\delta > 0$ si può coordinare un numero finito di intervalli (dipendente in generale da δ) tali che la somma delle lunghezze sia minore di δ e ogni punto dell'insieme appartenga ad uno almeno di detti intervalli.

Si vede facilmente che ogni insieme limitato e rinchiudibile ha il derivato ancora limitato e rinchiudibile: vale anche il viceversa.

tali che

1) $q_h - p_h > \theta p_h$, $\quad (\theta > 0$, indipendente da $h)$,

2) $\overline{\lim} \mid a_m \mid^{1/m} = 1$,

dove m percorre la successione dei tratti

$$p_1 \leqq m \leqq q_1, \qquad p_2 \leqq m \leqq q_2, \ldots, \; p_h \leqq m \leqq q_h, \ldots$$

3) *l'insieme dei punti* $\operatorname{mant} m\lambda = m\lambda - [m\lambda]$ (*contenuto nell'intervallo* (0, 1)), *costruito coi valori di m pei quali* $a_m \neq 0$, *sia rinchiudibile.*

3. **Dimostrazione del Teorema II.** - Ci limitiamo ad esporre la dimostrazione del solo Teorema II, essendo facile ottenere con alcune parti di questa (come segnaleremo alla fine) la dimostrazione diretta del Teorema I.

DIMOSTRAZIONE. - Possiamo supporre che sia $\theta p_h < q_h - p_h < K p_h$ con K indipendente da h. Infatti, se così non fosse, incominciamo a scegliere nella successione degli indici m una successione $\{ l_s \}$ (eventualmente parziale) in guisa da avere $\mid a_{l_s} \mid^{1/l_s} \to 1$. Diradando eventualmente questa successione, si può supporre che ad ogni tratto (p_h, q_h) appartenga al più un solo indice l_s. Potranno aversi tratti (p_h, q_h) nei quali non cade alcun indice l_s: in questo caso si sopprima ciascuno di tali tratti. Continuiamo a denotare la successione di tratti così ridotta con $\{ p_h, q_h \}$. È ovvio che tutte le ipotesi del teorema sono verificate ancora (compresa quella $\overline{\lim} \mid a_m \mid^{1/m} = 1$, per la presenza di un indice l_h nel tratto (p_h, q_h); si ricordi anche che ogni parte di un insieme rinchiudibile è a maggior ragione rinchiudibile).

Adesso, passiamo a restringere ogni tratto (p_h, q_h) in un tratto (p_h', q_h') intorno a l_h. Fissato $K > 2\theta$, si considerino due indici p_h', q_h' tali che sia

$$p_h \leqq p_h' \leqq l_h \leqq q_h' \leqq q_h, \qquad \theta p_h' < q_h' - p_h' < K p_h'.$$

(Questo è possibile, essendo $q_h - p_h > \theta p_h$ e $K > 2\theta$. Infatti fra tutte le coppie (p_h', q_h') tali che $p_h \leqq p_h' < q_h' \leqq q_h$, $\theta p_h' < q_h' - p_h' < K p_h'$, ne esistono di quelle con $p_h' = p_h$ e di quelle con $q_h' = q_h$, quindi ne esistono anche di quelle per le quali $p_h' \leqq l_h \leqq q_h'$, ovunque si trovi l_h. Fra queste ultime si può scegliere la coppia (p_h', q_h') in guisa che, per esempio, q_h' risulti massimo).

Continuiamo a denotare con $\{ p_h, q_h \}$ i tratti così ristretti; tutte le ipotesi del teorema continuano ad essere verificate: di più, esiste in ogni tratto (p_h, q_h) un indice l_h tale che $\mid a_{l_h} \mid^{1/l_h} \to 1$.

Ordiniamo in un'unica successione $\{ m_k \}$ tutti gli interi m, pei quali $a_m \neq 0$, appartenenti ai tratti (p_h, q_h), $(h = 1, 2, 3, \ldots)$.

Il teorema risulterà stabilito se proveremo che $k/m_k \to 0$, poichè in tal caso potremo invocare un teorema di E. FABRY - G. PÓLYA.

Fissiamo una successione monotona decrescente di numeri positivi

$$\{ \delta^{(r)} \} \qquad \delta^{(1)} > \delta^{(2)} > \ldots > \delta^{(r)} > \ldots \qquad (\delta^{(r)} \to 0),$$

e indichiamo con E il derivato dell'insieme mant $m\lambda$. Poichè mant $m\lambda$ è per ipotesi rinchiudibile, anche E è rinchiudibile; quindi, scelto $\delta^{(r)}$, è possibile determinare un insieme $\Delta^{(r)}$ di intervalli (in numero finito k_r) $\Delta_1^{(r)}, \Delta_2^{(r)}, \ldots, \Delta_{k_r}^{(r)}$, tali che per la loro lunghezza complessiva si abbia $\delta_1^{(r)} + \delta_2^{(r)} + \ldots + \delta_{k_r}^{(r)} = \delta^{(r)}$, e quando ad essi si sostituiscano gli intervalli $\overline{\Delta}_1^{(r)}, \overline{\Delta}_2^{(r)}, \ldots, \overline{\Delta}_{k_r}^{(r)}$, concentrici e ridotti alla metà rispettivamente di $\Delta_1^{(r)}, \Delta_2^{(r)}, \ldots, \Delta_{k_r}^{(r)}$, l'insieme E risulti contenuto nell'insieme $\overline{\Delta}^{(r)}$ analogo a $\Delta^{(r)}$. Per ogni r supponiamo scelto $\Delta^{(r)}$, e supponiamo la scelta fatta in guisa che sia $\Delta^{(r)} \supset \Delta^{(r+1)}$, $(r = 1, 2, 3, \ldots)$, ciò che non limita la generalità.

Sia, per ogni r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$, $\{m_{r,s}\}$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ la successione degli interi m, appartenenti ai tratti (p_h, q_h), e tali che il numero mant $m\lambda$ sia contenuto nell'insieme $\Delta^{(r)}$:

$$\begin{array}{l} m_{1,1},\ m_{1,2}, \ldots,\ m_{1,s}, \ldots \\ m_{2,1},\ m_{2,2}, \ldots,\ m_{2,s}, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{r,1},\ m_{r,2}, \ldots,\ m_{r,s}, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Procediamo con le seguenti piccole osservazioni:

1) Ogni successione $\{m_{r,s}\}$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ è contenuta nelle successioni $\{m_{p,s}\}$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ per $p < r$, perchè $\Delta^{(p)} \supset \Delta^{(r)}$.

2) Fissato arbitrariamente r, la successione $\{m_k\}$ degli interi m è contenuta definitivamente (cioè per $k \geq k_0(r)$) nella successione $\{m_{r,s}\}$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$. Infatti, fuori di $\Delta^{(r)}$ cade al più un numero finito di punti mant $m_k\lambda$.

3) Diciamo $\nu(N; \alpha, \beta)$ il numero degli interi positivi $n \leqq N$, tali che $\alpha \leqq$ mant $n\lambda \leqq \beta$. Per il teorema di H. Weyl, già citato, sulla equidistribuzione di mant $n\lambda$ nell'intervallo $(0, 1)$ è

$$\nu(N; \alpha, \beta) = (\beta - \alpha) \cdot N + \varepsilon(N; \alpha, \beta) \cdot N,$$

dove $\varepsilon \to 0$ per (α, β) fisso e $N \to +\infty$.

4) $\sum_{i=1}^{k} \nu(N; \alpha_i, \beta_i) = \left(\sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i)\right) \cdot N + \bar{\varepsilon}(N; \alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_k, \beta_k) \cdot N,$

dove $\bar{\varepsilon} \to 0$ per $(\alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_k, \beta_k)$ fissi e $N \to +\infty$.

5) Posto $(\alpha_i, \beta_i) \equiv \Delta_i^{(r)}$, la relazione precedente diventa

$$\nu(N; \Delta^{(r)}) = \delta^{(r)} \cdot N + \bar{\varepsilon}_r(N; \Delta^{(r)}) \cdot N,$$

dove $\varepsilon_r \to 0$ per $\Delta^{(r)}$ fisso e $N \to +\infty$.

6) Diciamo $\nu^*(N; \Delta^{(r)})$ il numero degli interi positivi $m \leqq N$, appartenenti ai tratti (p_l, q_l) $(l = 1, 2, 3, \ldots)$ e tali che i numeri mant $m\lambda$ siano interni all'insieme $\Delta^{(r)}$. È

$$\nu^*(N; \Delta^{(r)}) \leqq \nu(N; \Delta^{(r)}),$$

da cui

$$\nu^*(N;\ \Delta^{(r)}) \leqq \delta^{(r)} \cdot N + \varepsilon_r(N;\ \Delta^{(r)}) \cdot N < 2\delta^{(r)} \cdot N,$$

per tutti gli interi $N \geqq N_0(r)$, ed in particolare quando si scelga $N = m_{r,s} \geqq N_0(r)$. Si trova quindi

$$\nu^*(m_{r,s};\ \Delta^{(r)}) < 2\delta^{(r)} \cdot m_{r,s}.$$

Ma quando si assume $N = m_{r,s}$, risulta proprio $\nu^* = s$, per cui

$$s < 2\delta^{(r)} \cdot m_{r,s}, \qquad \frac{s}{m_{r,s}} < 2\delta^{(r)}.$$

7) Fissato $\sigma > 0$ arbitrario, si scelga $r = r(\sigma)$ in modo che sia $2\delta^{(r)} < \sigma$. Per $k \geqq k_0(\sigma)$, ogni m_k è in $\{m_{r,s}\}$ e risulta $m_k = m_{r,s(k)}$ con $k \leqq k_0 + s(k)$. Dividendo per m_k quest'ultima relazione, si ottiene

$$\frac{k}{m_k} \leqq \frac{k_0}{m_k} + \frac{s(k)}{m_{r,s(k)}}$$

e da questa si ricava

$$\overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{k}{m_k} < \sigma,$$

poichè per $k \to +\infty$ è $\frac{k_0}{m_k} \to 0$ (essendo k_0 fisso) e anche $\overline{\lim\limits_{k \to +\infty}} \frac{s(k)}{m_{r,s(k)}} \leqq$ $\leqq 2\delta^{(r)} < \sigma$.

Per $k > k_1$ risulta quindi $\frac{k}{m_k} < \sigma$, e poichè σ è arbitrario è soddisfatta la condizione $\frac{k}{m_k} \to 0$.

A questo punto possiamo dire che sussistono le tre condizioni:

1. $q_h - p_h > \theta p_h$,
2. $\overline{\lim\limits_{m \to +\infty}} |a_m|^{1/m} = 1, \qquad (p_h \leqq m \leqq q_h;\ h = 1, 2, 3, \ldots)$,
3. se $\{m_k\}$ è la successione per cui $a_{m_k} \neq 0$, è $\frac{k}{m_k} \to 0$.

Si vede facilmente che queste tre ipotesi portano di conseguenza la validità delle ipotesi del seguente teorema di E. Fabry - G. Pólya, nella forma enunciata in G. Ricci ([4]):

Teorema. - « La serie $\Sigma a_n z^n$ abbia raggio di convergenza 1. Essa non è prolungabile se è possibile determinare una successione crescente $\{p_h, q_h\}$ di coppie di interi $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_h, q_h), \ldots$ tale che si abbia:

1°) $q_h - p_h > \theta p_h \qquad (\theta > 0$, indipendente da h; $h = 1, 2, 3, \ldots)$,

2°) $\overline{\lim\limits_{m \to +\infty}} |a_m|^{1/m} = 1 \qquad (p_h \leqq m \leqq q_h;\ h = 1, 2, 3, \ldots)$,

([4]) G. Ricci, *Prolungabilità e ultraconvergenza delle serie di potenze. Modulazione del margine delle lacune*, « Rendiconti di Matem. », Univ. Ist. Naz. alta Mat. Roma (in corso di pubblicazione).

3°) è possibile scegliere ν_h indici m nel tratto $p_h \leqq m \leqq q_h$ $(h = 1, 2, 3, ...)$ in guisa che, se si denotano con m_0 gli indici rimanenti, si abbia

$$\nu_h/p_h \to 0, \qquad \overline{\lim_{m_0 \to +\infty}} \, | a_{m_0} |^{1/m_0} < 1 \text{ ».}$$

Nel nostro caso si considerino come indici m_0 quelli m pei quali $a_m = 0$; allora è ν_h il numero degli indici m pei quali $p_h < m < q_h$, $a_m \neq 0$.

Se m_k è contenuto nel tratto $p_h \leqq m_k \leqq q_h$ ed è l'ultimo indice m del tratto (p_h, q_h), abbiamo

$$\frac{\nu_h}{p_h} \leqq \frac{\nu_1 + ... + \nu_h}{p_h} = \frac{k}{p_h} < (1 + K) \cdot \frac{k}{q_h} < (1 + K) \cdot \frac{k}{m_k} \to 0.$$

Risultano così soddisfatte le condizioni del teorema di E. FABRY - G. PÓLYA e pertanto la serie $\Sigma a_n z^n$ non è prolungabile fuori di $|z| = 1$.

NOTA. - Per quanto riguarda la dimostrazione diretta del Teorema I, essa si ottiene, mediante ovvie semplificazioni, dalla precedente: fissata come sopra la successione monotona decrescente $\{\delta^{(r)}\}$, si costruisce una successione doppia $\{n_{r,s}\}$; il teorema di H. WEYL consente allora di verificare che per la successione $\{n_h\}$ è soddisfatta la condizione $h/n_h \to 0$, che esprime un classico criterio di E. FABRY per la non-prolungabilità di una serie di potenze.