# Sulla rappresentazione asintotica delle funzioni di Bessel di uguale ordine ed argomento.

Memoria di LUIGI GATTESCHI (a Bari).

**Sunto.** - *Partendo da una rappresentazione integrale delle funzioni di* HANKEL $H_\nu^{(1)}(\nu)$ *e* $H_\nu^{(2)}(\nu)$ *e facendo uso della teoria delle serie inviluppanti di* J. G. VAN DER CORPUT *si perviene ad uno sviluppo asintotico delle funzioni di* BESSEL $J_\nu(\nu)$ *e* $Y_\nu(\nu)$ *e si valuta il termine complementare di tale sviluppo.*

**Summary.** - *From an integral rapresentation of the* HANKEL *functions* $H_\nu^{(1)}(\nu)$ *and* $H_\nu^{(2)}(\nu)$ *and by using* VAN DER CORPUT'*s theory of enveloping series we obtain an asymptotic expansion for* BESSEL *functions* $J_\nu(\nu)$ *and* $Y_\nu(\nu)$. *An upper bound for the error term is also obtained.*

1. **Introduzione.** - Il problema della valutazione delle funzioni di BESSEL $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$ per grandi valori reali di $\nu$ e di $x$ è stato studiato dettagliatamente [**1**, cap. 8] (1), ma, nella maggior parte dei casi, non è possibile conoscere esattamente il campo di validità delle formule ottenute.

Oltremodo complicata si presenta la questione quando l'ordine $\nu$ e l'argomento $x$ sono pressochè uguali. Un primo risultato in tale senso, basato sul principio della fase stazionaria, è dovuto a J. W. NICHOLSON [**1**, p. 248]. Lo svantaggio principale delle formule di NICHOLSON dipende dalla non rigorosità del metodo col quale esse sono state ottenute, e questo ne rende impossibile la determinazione del loro campo di validità.

Recenti ricerche di F. G. TRICOMI [**2**], K. M. SIEGEL e F. B. SLEATOR [**3**], D. PARK [**4**] hanno mostrato che conoscendo $J_\nu(\nu)$ e $Y_\nu(\nu)$ è possibile ottenere delle rappresentazioni asintotiche e delle disuguaglianze relative alle funzioni $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$. F. G. TRICOMI ha tra l'altro stabilito degli sviluppi formali per $J_\nu(\nu)$ e $X_\nu(\nu)$.

In questo lavoro vengono ottenute per $J_\nu(\nu)$ e $Y_\nu(\nu)$ le due formule

$$J_\nu(\nu) = \frac{1}{3\pi}\sum_{p=0}^{r-1} D_p\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} \operatorname{sen}\frac{2p+1}{3}\pi + \rho_1,$$

$$Y_\nu(\nu) = \frac{-1}{3\pi}\sum_{p=0}^{r-1}\left(B_p + D_p\cos\frac{2p+1}{3}\pi\right)\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} + \rho_2,$$

(1) I numeri in grassetto fra parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della Memoria.

dove

$$B_p = \sum_{m=0}^{p} \frac{(-6)^m}{m!} A_{p-m}^{(m)} \Gamma\left(\frac{2p+1}{3} + m\right),$$

$$D_p = \sum_{m=0}^{p} \frac{(-6)^m}{m!} A_{p-m}^{(m)} \Gamma\left(\frac{2p+1}{3} + m, \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}\right),$$

essendo $A_k^{(m)}$ il coefficiente di $\xi^k$ nello sviluppo di

$$\left(\frac{1}{5!} + \frac{\xi}{7!} + \frac{\xi^2}{9!} + \dots\right)^m,$$

in serie di potenze di $\xi$.

È data inoltre una esplicita valutazione di $\rho_1$ e $\rho_2$.

Nello stabilire le formule di cui sopra abbiamo fatto ricorso alla teoria delle serie inviluppanti introdotta recentemente da J. G. VAN DER CORPUT [5, 6]. Nel paragrafo seguente diamo un breve cenno di tale teoria.

## 2. Cenni sulla teoria delle serie inviluppanti.

Si considerino le due serie formali

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

dove gli $a_n$ sono reali o complessi e gli $A_n$ reali non negativi.

Se accade che

$$|a_n| \leq A_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ è detta una *maggiorante* della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Indicheremo ciò con la notazione di POINCARÉ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n << \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Diremo inoltre che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *inviluppa il numero* $s$ rispetto alla maggiorante $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$, se per $n = 0, 1, 2, \dots$, risulta

$$|s - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})| \leq A_n,$$

e scriveremo, con la notazione di J. G. VAN DER CORPUT.

$$s \prec \sum_{n=0}^{\infty} a_n << \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Quanto sopra equivale a

$$s = \sum_{h=0}^{n-1} a_h + \vartheta_n A_n, \qquad |\vartheta_n| \leq 1.$$

Nel caso particolare $A_n = \lambda \mid a_n \mid$, dove $\lambda \geq 1$ e non dipende da $n$, diremo che *$s$ è inviluppato da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ con il fattore $\lambda$.*

Negli sviluppi asintotici noi ci dobbiamo talvolta accontentare dell'ordine di grandezza dei termini della maggiorante, al contrario, lo scopo principale della teoria delle serie inviluppanti è la determinazione di maggioranti i termini delle quali siano completamente noti. Noi possiamo così disporre non solo dell'ordine di grandezza dell'errore nello sviluppo in esame ma anche di un suo confine superiore, e ciò è della massima importanza ai fini del calcolo numerico.

Ci limitiamo qui a riportare due teoremi dei quali faremo uso nel seguito. Per la dimostrazione rimandiamo ai due volumi di J. G. VAN DER CORPUT [5, 6].

1) *Teorema della sostituzione formale. Se*

$$t \prec \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n << \sum_{n=0}^{\infty} B_n \mid s \mid^n,$$

$$s \prec \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n << \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mid z \mid^n,$$

*allora*

$$t \prec \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n << \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mid z \mid^n,$$

*dove le due serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mid z \mid^n,$$

*sono ottenute rispettivamente dallo sviluppo secondo le potenze di $z$ delle serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_m \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)^m, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} B_m \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mid z \mid^n \right)^m.$$

2) *Teorema d'integrazione. Sia la funzione $f(z)$ definita ed integrabile lungo una curva $\Gamma$ del piano complesso $z$, se risulta inoltre*

$$f(z) \prec \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) << \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z),$$

*e gli integrali*

$$\int_{\Gamma} u_n(z) dz, \qquad \int_{\Gamma} U_n(z) dz, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

*esistono, allora*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz \prec \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} u_n(z) dz << \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} U_n(z) \mid dz \mid.$$

**3. Alcuni risultati preliminari.**

Per le funzioni di HANKEL, o funzioni di BESSEL di terza specie, $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ valgono le seguenti rappresentazioni integrali di SOMMERFELD [1, p. 178]

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{i}{\pi}\int_{\infty+i\pi}^{-\infty} e^{x\,\mathrm{senh}\,z-\nu z}\,dz, \tag{1}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{-i}{\pi}\int_{\infty-i\pi}^{-\infty} e^{x\,\mathrm{senh}\,z-z\nu}\,dz, \tag{2}$$

dove il cammino di integrazione, in accordo col « *metodo del colle* » [1, p. 240], è, per il primo integrale, quello indicato in figura e per il secondo il cammino simmetrico del precedente rispetto all'asse reale.

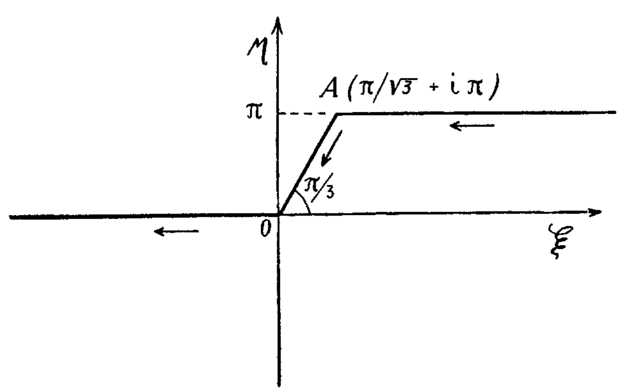


Fig. 1.

Nel caso particolare $x = \nu$ la (1) diviene

$$H_\nu^{(1)}(\nu) = \frac{i}{\pi}\int_{\infty+i\pi}^{-\infty} e^{\nu(\mathrm{senh}\,z-z)}\,dz. \tag{3}$$

Sulla semiretta per $A$ si ha

$$\left| e^{\nu(\mathrm{senh}\,z-z)} \right| = e^{-\nu(\mathrm{senh}\,\xi+\xi)},$$

ma

$$\mathrm{senh}\,\xi + \xi > \xi \geq \frac{\pi}{3},$$

quindi

$$\left| -\int_{\frac{\pi}{3}+i\pi}^{\infty+i\pi} e^{\nu(\operatorname{senh} z - z)} dz \right| \leq \int_{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}^{\infty} e^{-\nu(\operatorname{senh} \xi + \xi)} d\xi <$$

$$< \int_{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}^{\infty} e^{-\nu\xi} d\xi = \frac{e^{-\nu\pi/\sqrt{3}}}{\nu},$$

da cui segue

$$H_{\nu}^{(1)}(\nu) = \frac{-i}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{\nu(\operatorname{senh} z - z)} dz + \int_{0}^{A} e^{\nu(\operatorname{senh} z - z)} dz + \varepsilon \right\}, \tag{4}$$

$$|\varepsilon| < \frac{e^{-\nu\pi/\sqrt{3}}}{\nu}. \tag{5}$$

Passiamo ora alla valutazione dell' integrale

$$I = \int_{-\infty}^{0} e^{\nu(\operatorname{senh} z - z)} dz = \int_{0}^{\infty} e^{-\nu(\operatorname{senh} \rho - \rho)} d\rho,$$

che possiamo anche scrivere

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-\nu\rho^3/6} e^{-\nu(\operatorname{senh} \rho - \rho - \rho^3/6)} d\rho.$$

È necessario a questo punto determinare una serie inviluppante la funzione

$$e^{-\nu(\operatorname{senh} \rho - \rho - \rho^3/6)}.$$

Si ha

$$\operatorname{senh} \rho - \rho - \frac{\rho^3}{6} = \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho^7}{7!} + \dots + \frac{\rho^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots,$$

da cui

$$\left| \operatorname{senh} \rho - \rho - \frac{\rho^3}{6} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^{k+3}}{(2k+3)!} \right| \leq \frac{\rho^{2n+3}}{(2n+3)!} \cosh \rho,$$

e quindi

$$\operatorname{senh} \rho - \rho - \frac{\rho^3}{6} \prec \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{2k+3}}{(2k+3)!} \ll \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{2k+3}}{(2k+3)!} \cosh \rho.$$

Per la funzione $e^{-x}$, con $x$ positivo, si ha invece che essa è inviluppata dal suo sviluppo con il fattore 1, cioè

$$e^{-x} \prec \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} << \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Applicando il teorema della sostituzione formale alle due serie inviluppanti trovate si ottiene

$$e^{-\nu\left(\operatorname{senh}\rho-\rho-\frac{\rho^3}{6}\right)} \prec \sum_{k,\,m=0}^{\infty} \frac{(-6)^m}{m!} A_k^{(m)} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(k+m)} <<$$

$$<< \sum_{k,\,m=0}^{\infty} \frac{(6\cosh h\rho)^m}{m!} A_k^{(m)} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(k+m)},$$

avendo posto

$$(6) \qquad \boxed{\left(\frac{1}{5!} + \frac{\xi}{7!} + \frac{\xi^2}{9!} + \ldots\right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(m)} \xi^k},$$

il che implica, per i primi valori di $k$,

$$A_0^{(m)} = \frac{1}{(5!)^m}, \qquad A_1^{(m)} = \frac{m}{(5!)^{m-1}7!}, \qquad A_2^{(m)} = \frac{6m(6m+1)}{(5!)^{m-2}7!\,9!}, \ldots .$$

Ne segue per il teorema di integrazione delle serie inviluppanti,

$$I \prec \sum_{k,\,m=0}^{\infty} \frac{(-6)^m}{m!} A_k^{(m)} \int_0^{\infty} e^{-\nu\rho^3/6} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(k+m)} d\rho <<$$

$$<< \sum_{k,\,m=0}^{\infty} \frac{6^m}{m!} A_k^{(m)} \int_0^{\infty} (\cosh\rho)^m e^{-\nu\rho^3/6} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(k+m)} d\rho.$$

L'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu\rho^3/6} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(k+m)} d\rho$$

può agevolmente calcolarsi ricorrendo al cambiamento di variabile

$$\rho = \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}},$$

che lo trasforma in

$$\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2(k+m)+1}{3}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{m+\frac{2(k+m-1)}{3}} dt =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2(k+m)+1}{3}} \Gamma\left(\frac{2(m+k)+1}{3} + m\right),$$

ed abbiamo allora

$$I \prec \frac{1}{3}\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(-6)^m}{m!}A_k^{(m)}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2(m+k)+1}{3}}\Gamma\left(\frac{2(m+k)+1}{3}+m\right) <<$$

$$<< \sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{6^m}{m!}A_k^{(m)}\int_0^{\infty}(\cosh\rho)^m e^{-\nu\rho^3/6}\left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(k+m)}d\rho.$$

Non ci restano ora che da valutare gli integrali figuranti nella serie maggiorante cioè

$$J_{k,m}=\int_0^{\infty}(\cosh\rho)^m e^{-\nu\rho^3/6}\left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(k+m)}d\rho <$$

$$< \int_0^{\infty} e^{m\rho-\nu\rho^3/6}\left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(k+m)}d\rho.$$

Si ponga

$$J_1=\int_0^{\left(\frac{12m}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{m\rho-\nu\rho^3/6}\left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(k+m)}d\rho,$$

$$J_2=\int_{\left(\frac{12m}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{m\rho-\nu\rho^3/6}\left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(k+m)}d\rho.$$

Si ha per $0 \leq \rho \leq (12m/\nu)^{\frac{1}{2}}$

$$m\rho-\nu\frac{\rho^3}{6}\leq\frac{2}{3}m\sqrt{\frac{2m}{\nu}},$$

quindi

$$J_1 < e^{\frac{2}{3}m\sqrt{\frac{2m}{\nu}}}\left(\frac{\nu}{6}\right)^m\frac{\left(\frac{12m}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}(2k+5m+1)}}{2k+5m+1}=$$

$$=e^{\frac{2}{3}m\sqrt{\frac{2m}{\nu}}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{k+\frac{3}{2}m+\frac{1}{2}}\frac{(2m)^{\frac{1}{2}(2k+5m+1)}}{2k+5m+1}.$$

Inoltre poichè per $\rho > (12m/\nu)^{\frac{1}{2}}$ risulta,

$$m\rho-\nu\rho^3/6 < -\frac{\nu}{12}\rho^3,$$

si ha

$$J_2 < \left(\frac{\nu}{6}\right)^m \int_{\left(\frac{12m}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{\nu}{12}\rho^3} \rho^{2k+5m} d\rho,$$

e, con il cambiamento di variabile

$$\frac{\nu}{12}\rho^3 = t.$$

$$J_2 < \frac{1}{3}\left(\frac{\nu}{6}\right)^m \left(\frac{12}{\nu}\right)^{\frac{2k+5m+1}{3}} \int_{\frac{\nu}{12}\left(\frac{12m}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}}}^{\infty} e^{-t} t^{\frac{2k+5m+1}{3}-1} dt <$$

$$< \frac{1}{3} 2^{\frac{2k+5m+1}{3}} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2k+2m+1}{3}} \Gamma\left(\frac{2(m+k)+1}{3} + m\right).$$

Ne viene dunque per $J_{k,m}$

(7)
$$J_{k,m} < e^{\frac{2}{3} m \sqrt{\frac{2m}{\nu}}} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{k+\frac{3}{2}m+\frac{1}{2}} \frac{(2m)^{\frac{2k+5m+1}{2}}}{2k+5m+1} +$$
$$+ \frac{1}{3} 2^{\frac{2k+5m+1}{3}} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2(k+m)+1}{3}} \Gamma\left(\frac{2(k+m)+1}{3} + m\right).$$

Si ha così per $I$ la seguente rappresentazione

$$I \prec \frac{1}{3} \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(-6)^m}{m!} A_k^{(m)} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2(m+k)+1}{3}} \Gamma\left(\frac{2(m+k)+1}{3} + m\right) <<$$

$$<< \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{6^m}{m!} A_k^{(m)} J_{k,m}.$$

Raccogliendo i termini in cui $m+k$ ha un determinato valore $p$, segue che

(8)
$$I \prec \frac{1}{3} \sum_{p=0}^{\infty} B_p \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} << \sum_{p=0}^{\infty} C_p$$

avendo posto

(9)
$$\boxed{B_p = \sum_{m=0}^{p} \frac{(-6)^m}{m!} A_{p-m}^{(m)} \Gamma\left(\frac{2p+1}{3} + m\right)},$$

(10)
$$C_p = \sum_{m=0}^{p} \frac{6^m}{m!} A_{p-m}^{(m)} J_{p-m,m}.$$

Per la valutazione dell'integrale

$$I_1 + iI_2 = \int_0^A e^{\nu(\operatorname{senh} z - z)} dz,$$

posto

$$z = \rho e^{i\pi/3}, \qquad 0 \leq \rho \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

si ha

$$I_1 + iI_2 = \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} e^{-\nu\frac{\rho^3}{6}} e^{\nu\left(\operatorname{senh}\rho e^{i\pi/3} - \rho e^{i\pi/3} + \frac{\rho^3}{6}\right)} e^{i\pi/3} d\rho.$$

Occorre ora inviluppare la funzione

$$e^{-\nu\left(\rho e^{i\pi/3} - \operatorname{senh}\rho e^{i\pi/3} - \frac{\rho^3}{6}\right)}.$$

Come precedentemente, da

$$\rho e^{i\pi/3} - \operatorname{senh}\rho e^{i\pi/3} - \frac{\rho^3}{6} = -\frac{\rho^3}{6} + \frac{\rho^3}{6}\left(1 + \frac{\rho^2}{4 \cdot 5} e^{\frac{2\pi i}{3}} + \ldots\right),$$

segue

$$\rho e^{i\pi/3} - \operatorname{senh}\rho e^{i\pi/3} - \frac{\rho^3}{6} \prec \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{2k+3}}{(2k+3)!} e^{\frac{2k\pi i}{3}} << \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{2k+3}}{(2k+3)!} \cosh\rho.$$

Applicando il teorema di sostituzione formale avremo

$$e^{-\nu\left(\rho e^{i\pi/3} - \operatorname{senh}\rho e^{i\pi/3} - \rho^3/6\right)} \prec \sum_{k,\,m=0}^{\infty} \frac{(-6)^m}{m!} A_k^{(m)} e^{\frac{2(m+k)\pi i}{3}} \rho^{2(m+k)} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m <<$$

$$<< \sum_{k,\,m=0}^{\infty} \frac{(6\cosh\rho)^m}{m!} A_k^{(m)} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(m+k)},$$

da cui

$$I_1 + iI_2 \prec \sum_{k,\,m=0}^{\infty} \frac{(-6)^m}{m!} A_k^{(m)} e^{\frac{2(m+k)+1}{3}\pi i} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} e^{-\nu\rho^3/6} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(m+k)} d\rho <<$$

$$<< \sum_{k,\,m=0}^{\infty} \frac{6^m}{m!} A_k^{(m)} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} (\cosh\rho)^m e^{-\nu\rho^3/6} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(m+k)} d\rho.$$

Per gli integrali che figurano nella serie maggiorante si ha

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} (\cosh \rho)^m e^{-\nu\rho^3/6} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(m+k)} d\rho <$$

$$< \int_0^{\infty} (\cosh \rho)^m e^{-\nu\rho^3/6} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(m+k)} d\rho = J_{k,m}.$$

Posto poi $\nu\rho^3/6 = t$ otteniamo

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} e^{-\nu\rho^3/6} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(m+k)} d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2(m+k)+1}{3}} \int_0^{\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}} e^{-t} t^{m+\frac{2(m+k-1)}{3}} dt =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2(m+k)+1}{3}} \Gamma\left(\frac{2(m+k)+1}{3} + m, \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}\right),$$

avendo indicato con $\Gamma(a, x)$ la funzione *gamma incompleta* definita da

$$\Gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt, \qquad \mathbf{R}\, a > 0.$$

Si ha così

$$I_1 + iI_2 \prec \frac{1}{3} \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(-6)^m}{m!} A_k^{(m)} e^{\frac{2(m+k)+1}{3}\pi i} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2(m+k)+1}{3}} \Gamma\left(\frac{2(m+k)+1}{3} + m, \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}\right) <<$$

$$<< \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{6^m}{m!} A_k^{(m)} J_{k,m};$$

da cui, come per l'analoga valutazione di $I$

$$I_1 + iI_2 \prec \frac{1}{3} \sum_{p=0}^{\infty} D_p \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} e^{\frac{2p+1}{3}\pi i} << \sum_{p=0}^{\infty} C_p,$$

avendo posto

$$\boxed{D_p = \sum_{m=0}^{p} \frac{(-6)^m}{m!} A_{p-m}^{(m)} \Gamma\left(\frac{2p+1}{3} + m, \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}\right)}, \tag{11}$$

e con $C_p$ dato dalla (10).

Separando il reale dall'immaginario otteniamo

$$(12)\quad I_1 + iI_2 \prec \frac{1}{3}\sum_{p=0}^{\infty}\left\{ D_p\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}}\cos\frac{2p+1}{3}\pi + iD_p\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}}\operatorname{sen}\frac{2p+1}{3}\pi\right\} << \sum_{p=0}^{\infty} C_p .$$

Se osserviamo ora che per la (7) è

$$J_{p-m,m} \leq e^{\frac{2}{3}m\sqrt{\frac{2m}{\nu}}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+m+1}{2}}\frac{(2m)^{\frac{2p+3m+1}{2}}}{2p+3m+1} + \\ + \frac{1}{3}2^{\frac{2p+3m+1}{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}}\Gamma\left(\frac{2p+1}{3}+m\right),$$

e che, per $0 \leq m \leq p$,

$$\frac{(2m)^{\frac{2p+3m+1}{2}}}{2p+3m+1} \leq \frac{(2p)^{\frac{5p+1}{2}}}{5p+1},$$

avremo per $\nu \geq 6$

$$(13)\qquad J_{p-m,m} \leq \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}}\left\{ e^{\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{2p}{\nu}}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{6}}\frac{(2p)^{\frac{5p+1}{2}}}{5p+1} + \frac{1}{3}2^{\frac{5p+1}{2}}\Gamma\left(\frac{2p+1}{3}+p\right)\right\}.$$

La (8) e la (12) potranno quindi essere scritte

$$(14)\qquad I \prec \frac{1}{3}\sum_{p=0}^{\infty} B_p\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} << \sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon_p,$$

$$(15)\quad I_1 + iI_2 \prec \frac{1}{3}\sum_{p=0}^{\infty}\left\{ D_p\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}}\cos\frac{2p+1}{3}\pi + iD_p\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}}\operatorname{sen}\frac{2p+1}{3}\pi\right\} << \sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon_p,$$

essendo per la (10) e per la (13)

$$(16)\qquad \boxed{\begin{aligned}\varepsilon_p \leq \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}}\Bigg\{ & e^{\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{2p}{\nu}}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}}\frac{(2p)^{\frac{5p+1}{2}}}{5p+1} + \\ & + \frac{1}{3}2^{\frac{5p+1}{2}}\Gamma\left(\frac{2p+1}{3}+p\right)\Bigg\}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{6^m}{m!}A_{p-m}^{(m)}\right.\end{aligned}}$$

**4. Valutazione asintotica di $J_\nu(\nu)$ e $Y_\nu(\nu)$.**

Per le posizioni fatte nel paragrafo precedente abbiamo

$$\pi H_\nu^{(1)}(\nu) = I_2 - (I_1 + I)i + \varepsilon,$$

con

$$|\,\varepsilon\,| < \frac{e^{-\nu\pi/\sqrt{3}}}{\nu},$$

e conseguentemente dalla (2)

$$\pi H_\nu^{(2)}(\nu) = I_2 + (I_1 + I)i + \varepsilon .$$

da queste per le note relazioni

$$J_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)}{2}, \qquad Y_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)}{2i},$$

segue

$$\pi J_\nu(\nu) = I_2 + \varepsilon, \qquad \pi Y_\nu(\nu) = -(I_1 + I) + \varepsilon.$$

Dalla (14) e dalla (15) si ha

$$I = \frac{1}{3}\sum_{p=0}^{r-1} B_p \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} + \eta_r,$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\sum_{p=0}^{r-1} D_p \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} \cos\frac{2p+1}{3}\pi + \eta_r,$$

$$I_2 = \frac{1}{3}\sum_{p=0}^{r-1} D_p \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} \operatorname{sen}\frac{2p+1}{3}\pi + \eta_r,$$

dove $|\eta_r| < \varepsilon_r$ ed $\varepsilon_r$, $B_p$, $D_p$ sono dati rispettivamente dalla (16), (9), (11).

Se ne deducono per $J_\nu(\nu)$ e $Y_\nu(\nu)$ i seguenti sviluppi asintotici (cfr. formule (6), (9), (11), (16)).

$$\tag{17} \boxed{\begin{aligned} & J_\nu(\nu) = \frac{1}{3\pi}\sum_{p=0}^{r-1} D_p \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} \operatorname{sen}\frac{2p+1}{3}\pi + \frac{\varepsilon + \eta_r}{\pi}, \\ & Y_\nu(\nu) = \frac{-1}{3\pi}\sum_{p=0}^{r-1} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} \left(B_p + D_p \cos\frac{2p+1}{3}\pi\right) + \frac{\varepsilon + 2\eta_r}{\pi}, \\ & |\eta_r| < \varepsilon_r, \qquad |\varepsilon| < \frac{e^{-\nu\pi/\sqrt{3}}}{\nu}, \qquad \nu \geq 6. \end{aligned}}$$

5. **Un'applicazione dei precedenti risultati.** - Vogliamo ora stabilire servendoci della prima delle (17) una semplicissima limitazione per $J_\nu(\nu)$.

Per $r = 2$ si ha

$$\tag{18} J_\nu(\nu) = \frac{1}{3\pi} D_0 \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \frac{\varepsilon + \eta_2}{\pi},$$

con

$$|\eta_2| \leq \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{5}{3}} \left[e^{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{\nu}}} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{5}{6}} \frac{4^{\frac{11}{2}}}{11} + \frac{1}{3} 2^{\frac{11}{3}} \Gamma\left(\frac{5}{3} + 2\right)\right] (A_2^{(0)} + 6A_1^{(1)} + 18A_0^{(2)}).$$

Dopo qualche calcolo, tenuto conto che è

$$D_0 = \Gamma\left\{\frac{1}{3},\ \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}\right\},$$

si ha

$$J_\nu(\nu) = \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{3},\ \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}\right\}}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{6}} \pi \nu^{\frac{1}{3}}} + \rho, \tag{19}$$

con

$$|\rho| < \frac{e^{-\nu\pi/\sqrt{3}}}{\nu\pi} + \frac{1,4}{\pi}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{5}{3}}. \tag{19'}$$

La (19) è in accordo con la formula asintotica di CAUCHY [1, p. 231]

$$J_\nu(\nu) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{6}} \pi \nu^{\frac{1}{3}}},$$

salvo che in luogo della funzione gamma vi figura la gamma incompleta.
Se si osserva che è

$$\Gamma\left\{\frac{1}{3},\ \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}\right\} = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \vartheta e^{-\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}} \left\{\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}\right\}^{-\frac{2}{3}}, \qquad 0 < \vartheta < 1$$

la (19) può allora scriversi

$$J_\nu(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{6}} \pi \nu^{\frac{1}{3}}} + \rho^*$$

con

$$|\rho^*| \leq |\rho| + \frac{e^{-\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}}}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{6}} \pi \nu^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\frac{\nu}{6}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

ne segue per la (19')

$$|\rho^*| \leq \frac{e^{-\frac{\nu\pi}{\sqrt{3}}} + 0,521\, e^{-\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}}}{\pi\nu} + \frac{1,4}{\pi}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{5}{3}}.$$

La (19) può ulteriormente migliorarsi con l'osservare che la formula di Cauchy dà un'approssimazione per eccesso di $J_\nu(\nu)$ [1, p. 259]. Si ha pertanto

$$\boxed{J_\nu(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{6}} \pi \nu^{\frac{1}{3}}} - \theta\eta} , \tag{20}$$

con $0 < \theta \leq 1$ e

$$\eta = \frac{e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} + 0{,}521\, e^{-\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}}}{\pi\nu} + \frac{1{,}4}{\pi}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{5}{3}} . \tag{20'}$$

## BIBLIOGRAFIA

[1] G. N, Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge, 1948.

[2] F. G. Tricomi, *Sulle funzioni di Bessel di ordine ed argomento pressochè uguali*, « Atti Acc. Sci. Torino », *83*, 1947-1949, pp. 3-20.

[3] K. M. Siegel-F. B. Sleator, *Inequalities involving cylindrical functions of nearly equal argument and order*, « Proceed. of Amer. Math. Soc. », *5*, 1954, pp. 337-344.

[4] D. Park, *Asymptotic Properties of Bessel Functions and the Radiation from a Synchrotron*. « Journ. of Math. and Phys. », *33*, pp. 179-184.

[5] J. G. van der Corput, *Asymptotic Expansions I*, Stanford University, 1950-1951.

[6] J. G. van der Corput, *Asymptotic Expansions II*, National Bureau of Standards, Los Angeles, 1951.