Sul contatto di superficie algebriche lungo curve.

Memoria di DIONISIO GALLARATI (a Genova).

Sunto. - *Si studiano alcune questioni generali relative al contatto d'ordine assegnato di due ipersuperficie algebriche F e G dello spazio S_r lungo una varietà $\mathcal{C}$ $(r-2)$-dimensionale, ottenendo fra l'altro una semplice condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mathcal{C}$, contata q volte, esaurisca l'intersezione di F e G. In secondo luogo si considera il caso di due superficie algebriche immerse in una V_3 algebrica ed aventi un contatto semplice lungo una curva priva di punti multipli; ed in particolare, qualora V_3 sia lo spazio ordinario, si prova che certe condizioni segnalate da* B. SEGRE *come condizioni necessarie affinchè una data superficie F possa essere tangente ad un'altra superficie lungo un'assegnata curva $\mathcal{C}$ (non singolare), sono anche sufficienti se l'ordine di F è inferiore a* 5. *Infine si dà l'effettiva costruzione delle superficie circoscritte ad una superficie F d'ordine $m = 2, 3, 4$, e si mostra come i metodi impiegati possano essere utilizzati anche quando si abbandoni l'ipotesi $m < 5$.*

INTRODUZIONE

1. In una classica Memoria sulle V_3 algebriche, B. SEGRE (1) ha notato incidentalmente che due superficie algebriche immerse in una V_3 ed aventi un contatto semplice lungo una curva posseggono generalmente su questa qualche punto doppio ed ha approfondito alcune delle questioni che a ciò si collegano (2). L. GODEAUX (3) ha studiato elementarmente siffatte questioni

(1) B. SEGRE, *Nuovi contributi alla geometria sulle varietà algebriche,* « Mem. Acc. d'Italia », 5, (1934), pp. 479-576.

(2) Relativamente al contatto di due superficie o di due ipersuperficie, cfr. anche: B. SEGRE, *On limits of algebraic varieties, in particular of their intersections and tangential forms,* « Proc. London Math. Soc. », (2), 47, (1942), pp. 351-403, e J. G. SEMPLE, *Contact conditions for surfaces,* « Proc. R. Irish Acad. », vol. XLIII, Section A, n. 5, (1936), pp. 49-71.

(3) L. GODEAUX, *Sur le contact de surfaces cubiques,* « Bull. de la Société royale de Sciences de Liège », 20 gennaio 1944, pp. 1-10; *Sur le contact de surfaces le long de courbes,* id., 17 febbraio 1944, pp. 46-58; *Construction d'une surface canonique de neuvième ordre,* « Bull. de l'Académie royale de Belgique », 2 maggio 1944, pp. 202-212; *Construction d'une surface canonique de huitième ordre,* « Bull. des Sciences Mathématiques », 2ª serie, t. LXVIII, luglio-agosto 1944, pp. 1-13; *Remarque sur le contact des surfaces,* « Bull. de l'Académie royale des Belgiques », 7 ottobre 1944, pp. 391-396; *Sur la construction de surfaces canonique de l'espace ordinaire,* id. 1° agosto 1945, pp. 288-300; *Sur les surfaces circoscrites à une surface cubique,* « Bull. de la Société royale de Sciences de Liège », 19 giugno 1947, pp. 110-119; *Remarques sur les surfaces inscrites dans une surface cubique,* « Bull. de la Société royale de Sciences de Liège », 3 marzo 1950, pp. 150-157; *Sur les surfaces algébriques d'ordre n dont les adjointes d'ordre n — 4 possèdent une partie fixe,* « Rend. di Mat. e delle sue Applicazioni », serie V, vol. X, fasc. 1-2, Roma, (1951), pp. 1-12

in alcuni casi speciali in cui le due superficie sono nello spazio ordinario, investigando pure in taluno di essi la possibilità di contatti d'ordine superiore.

B. SEGRE ha quindi ripreso lo studio generale dei contatti lungo curve tra due superficie algebriche di una V_3 algebrica, stabilendo delle condizioni *necessarie* affinchè due superficie F e G di V_3, entrambe prive di curve multiple, si tocchino lungo una curva $\mathcal{C}$ priva di singolarità; tali condizioni assumono un aspetto particolarmente semplice qualora V_3 sia lo spazio ordinario e permettono fra l'altro di stabilire quali siano i casi che a priori possano presentare due superficie F_m e G_n dello spazio ordinario, di ordini rispettivi m ed n tra loro tangenti lungo una curva: tutto ciò trovasi in alcuni appunti manoscritti che gentilmente B. SEGRE ha messo a mia disposizione (4).

Il prof. B. SEGRE mi ha proposto di approfondire la questione di decidere se tutti i casi a priori possibili si possano effettivamente verificare; ed è questo il problema di cui sopratutto mi occupo qui, giovandomi anche di alcune osservazioni supplementari contenute nei suddetti appunti.

Già per $m = 4$ (ed n *qualunque*) *non tutti i casi risultano possibili*; e ciò a differenza di quanto accade nel caso in cui $m \leq 3$ (ed n qualunque) relativamente al quale poco c'è da aggiungere dopo i risultati di B. SEGRE e di L. GODEAUX.

Qualora $m \leq 4$, si ha tuttavia che se una superficie F_m appartenente allo spazio ordinario e dotata soltanto di nodi contiene una curva $\mathcal{C}$ d'ordine $\frac{1}{2} mn$, priva di singolarità, soddisfacente alle condizioni indicate da B. SEGRE, tale curva è certo curva di contatto di F_m con una superficie d'ordine n, sicchè *le condizioni necessarie indicate da B. Segre risultano anche sufficienti qualora una delle due superficie abbia ordine* < 5.

Il primo dei tre capitoli in cui ho diviso il presente lavoro, è dedicato allo studio di alcune questioni generali relative ai contatti d'ordine $q - 1$ di due ipersuperficie algebriche F e G, appartenenti ad uno spazio lineare ad r dimensioni S_r, lungo una varietà $\mathcal{C}$, di dimensione $r - 2$, che contata q volte esaurisca l'intersezione di F e G.

Tra l'altro do una semplice condizione *necessaria e sufficiente* affinchè due ipersuperficie F e G presentino un contatto d'ordine $q - 1$ lungo una varietà $\mathcal{C}$ nel modo sopra precisato; tale condizione appare particolarmente utile in tutta la ricerca, e consente di ottenere in modo rapido vari risultati che mi sembrano non privi di interesse.

I capitoli successivi sono volti ad approfondire il caso dei contatti ordinari lungo curve di due superficie algebriche appartenenti allo spazio ordinario ($q = 2$, $r = 3$). Nel capitolo 2°, attraverso lo studio del sistema lineare

(4) In tali appunti B. SEGRE accenna pure a contatti del second'ordine.

delle superficie G d'ordine n che — lungo una data curva $\mathcal{C}$ — toccano semplicemente un'assegnata superficie F d'ordine m appartenente all'ordinario spazio S_3, stabilisco la sufficienza delle condizioni segnalate da B. SEGRE, almeno per $m < 5$, sotto l'ipotesi che esista effettivamente una superficie F e su essa una curva $\mathcal{C}$ per le quali tali condizioni siano soddisfatte. L'esame di quest'ipotesi occupa il capitolo 3°, nel quale, con procedimenti elementari, determino tutte le superficie G d'ordine n qualunque circoscritte ad una superficie F d'ordine $m = 2, 3, 4$, scrivendo senz'altro le equazioni di tali superficie, ad eccezione di due casi particolari (per $m = 4$) che non sono riuscito ad approfondire. Per $m = 2, 3$ ritrovo fatti già noti, che tuttavia è opportuno richiamare e presentare in forma più utile per il seguito.

Il procedimento impiegato può essere utilizzato anche per $m \geq 5$; a titolo d'esempio, accenno rapidamente ai casi in cui $m = 5, 6$.

Mi propongo di tornare sull'argomento in un lavoro successivo, ove approfondirò anche lo studio dei contatti di ordine superiore.

Aggiungo ancora che il problema della determinazione di tutte le superficie dello spazio ordinario circoscritte ad una data, può gettar luce su quello (non ancora compiutamente risolto ([5])), della determinazione del massimo numero dei nodi delle superficie algebriche di dato ordine m.

Nel n. 6 espongo alcuni dei risultati contenuti negli appunti di B. SEGRE, usando le notazioni e la nomenclatura introdotte da B. SEGRE nella Memoria citata in ([1]), che nel seguito verrà indicata con B. S.

CAPITOLO I.

2. Osserviamo anzitutto che il problema della determinazione di tutte le forme di uno spazio lineare S_r di dato ordine $n \geq m$, che abbiano un contatto d'ordine $q - 1$ con una data forma *irriducibile* F_m, d'ordine m, lungo una data varietà $\mathcal{C}$ di dimensione $r - 2$ ed ordine $\frac{1}{q}\, mn$, è risolto non appena si sia determinata una di siffatte forme.

Infatti se $x_0, x_1, \dots, x_r$ sono coordinate proiettive omogenee di punto in S_r ed $F_m = 0$ ([6]) è l'equazione di F_m, e se G_n e G_n^* sono due ipersuperficie

---

([5]) Cfr. F. SEVERI, *Sul massimo numero di nodi di una superficie di dato ordine dello spazio ordinario e di una forma di un iperspazio*, « Annali di Matematica », 4, (25), (1946), pp. 1-41; B. SEGRE, *Sul massimo numero di nodi delle superficie di dato ordine*, « Boll. U.M.I. », 3, 2, (1947), pp. 204-212; *Sul massimo numero di nodi delle superficie algebriche*, « Atti Acc. Ligure di Scienze e Lettere », vol. X, fasc. 1°, Genova (1952), p. 15; E. G. TOGLIATTI, *Sulle superficie algebriche col massimo numero di punti doppi* (Conferenza tenuta a Torino il 16 marzo 1950), « Rendiconti Sem. Mat. di Torino », t. IX, (1950), pp. 47-59.

([6]) Indicherò con lo stesso simbolo A_h una forma algebrica di grado h nelle variabili $x_0, x_1, \dots, x_r$ e l'ipersuperficie di S_r di equazione $A_h = 0$.

dello stesso ordine n che abbiano un contatto d'ordine $q-1$ con F_m lungo $\mathcal{C}$, l'ipersuperficie del fascio da esse determinato che passa per un generico punto di F_m contiene F_m come parte, e quindi esiste una forma Λ_{n-m} d'ordine $n-m$ tale che:

$$G_n \equiv \Lambda_{n-m} F_m + G_n^* ;$$

segue da ciò che le ipersuperficie di S_r di ordine $n \geq m$ che lungo $\mathcal{C}$ abbiano un contatto d'ordine $q-1$ con F_m, *se non contengono tutte F_m come parte, costituiscono un sistema lineare di dimensione*

$$\delta = \binom{n-m+r}{r}$$

Se $n = q\nu$ e $\mathcal{C}$ è la completa intersezione di F_m con una forma H_ν, il problema è senz'altro risolto, potendosi assumere in tal caso $G_n^* \equiv H_\nu^q$; ed anzi qualora F_m sia priva di punti multipli e sia $r \geq 4$, poichè ogni varietà ad $r-2$ dimensioni appartenente ad F_m è la completa intersezione di F_m con un'altra forma di S_r [7], il problema non ammette altre soluzioni. Il fatto continua a sussistere anche per $r = 3$ ed $m \geq 4$, qualora F_m sia la superficie generale dell'ordine m; è ben noto invero che una tale superficie contiene solo le curve intersezioni complete della superficie stessa con le altre superficie delle spazio [8].

Il caso in cui $\mathcal{C}$ sia la completa intersezione di F_m con una forma H_ν rientra come caso particolare in quello in cui esistano due forme H_λ e $B_{q\lambda-n}$ la prima delle quali passi per $\mathcal{C}$ e seghi ulteriormente F_m in una varietà $\mathcal{E}$ di dimensione $r-2$ ed ordine $\frac{1}{q}m(\lambda q - n)$, mentre la seconda abbia un contatto d'ordine $q-1$ con F_m lungo $\mathcal{E}$.

Se esistono due forme H_λ e $B_{q\lambda-n}$ nelle condizioni ora specificate, e se la forma G_n presenta un contatto d'ordine $q-1$ con F_m lungo $\mathcal{C}$ le due ipersuperficie

$$H_\lambda^q = 0, \qquad G_n \cdot B_{q\lambda-n} = 0$$

segano su F_m la stessa varietà, e quindi esiste una forma $A_{q\lambda-m}$ tale che

$$A_{q\lambda-m} F_m + B_{q\lambda-n} G_n \equiv H_\lambda^q . \tag{1}$$

---

[7] F. SEVERI, *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli*, « Rendic. Acc. Naz. dei Lincei », (5), (1906), pp. 691-696.

[8] M. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*, Berliner Abhandlungen, (1882); G. FANO, *Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme*, « Atti dell'Acc. di Torino », (1808-1809); S. LEFSCHETZ, *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to Abelian varieties*, « Trans Am. Math. Soc. », (1921); per una dimostrazione algebrico-geometrica di tale teorema, cfr. A. FRANCHETTA, *Sulle curve appartenenti ad una superficie generale d'ordine $m \geq 4$ dell'S_3*, « Rendic. Acc. Naz. dei Lincei », (8), 3, (1947), pp. 71-78.

Viceversa, se le forme F_m e G_n sono tali che esistano tre forme $A_{q\lambda-m}$, $B_{q\lambda-n}$, H_λ, di gradi uguali ai rispettivi indici, per cui valga la (1), e se di più si suppone che la varietà:

$$F_m = G_n = A_{q\lambda-m} = B_{q\lambda-n} = 0$$

abbia dimensione $\leq r-3$, risulta immediatamente che le ipersuperficie $G_n = 0$, e $B_{q\lambda-n} = 0$ presentano un contatto d'ordine $q-1$ con F_m lungo varietà $\mathcal{C}$ ed $\mathcal{E}$ appartenenti entrambe alla ipersuperficie H_λ, ed un contatto d'ordine $q-1$ con $A_{q\lambda-m}$ lungo varietà $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{M}$ anch'esse appartenenti ad H_λ. Infatti se P è, ad esempio, una soluzione generica del sistema $F_m = G_n = 0$ e se q' è la molteplicità di tale soluzione per il sistema stesso ([9]), le forme $A_{q\lambda-m}$ e $B_{q\lambda-n}$, per le ipotesi fatte, non si annullano simultaneamente in P, e quindi P è soluzione di molteplicità q' per uno almeno dei due sistemi $F_m \equiv B_{q\lambda-n}G_n = 0$, $G_n = A_{q\lambda-m}F_m = 0$, ossia per uno almeno due sistemi $F_m = H_\lambda^q = 0$, $G_n = H_\lambda^q = 0$, onde $q' = q$.

Ebbene, è facile vedere che questo è il caso più generale possibile; si ha cioè che: *condizione necessaria e sufficiente affinchè due ipersuperficie algebriche di S_r, F e G, entrambe irriducibili, abbiano un contatto d'ordine $q-1$ lungo una varietà $\mathcal{C}$ di dimensione $r-2$, che contata q volte esaurisca la loro intersezione, è che esistano tre forme, H, A, B, tali che sussista l'identità*

$$AF + BG \equiv H^q \tag{1}$$

e tali che la varietà $F = G = A = B = 0$ abbia al più la dimensione $r-3$.

Infatti è noto che se F e G sono due ipersuperficie algebriche di S_r aventi un contatto d'ordine $q-1$ lungo una varietà $\mathcal{C}$ che contata q volte ne esaurisca l'intersezione (e comunque spezzata), e se una forma K presenta lungo $\mathcal{C}$ un contatto d'ordine $q-1$ con F e con G, esistono due forme A e B tali che sussista l'identità

$$K \equiv AF + BG;$$

in particolare, se H è una ipersuperficie di ordine sufficientemente elevato passante (semplicemente) per $\mathcal{C}$, si può assumere $K \equiv H^q$, e quindi esiste un'identità della forma (1): ed è facile riconoscere che è possibile scegliere H in modo che la varietà $F = G = A = B = 0$ abbia dimensione $\leq r-3$ ([10]).

([9]) F. SEVERI, *Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni pei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione*, « Annali di Matematica », serie IV, vol. 26, (1947), pp. 221-270.

([10]) Si può precisare anzi che ciò avviene senz'altro qualora $\mathcal{C}$ ed $\mathcal{E}$ non abbiano a comune una parte $(r-2)$-dimensionale. A tale scopo consideriamo in S_r un generico S_2 (che possiamo supporre abbia equazioni $x_3 = x_4 = \ldots = x_r = 0$): esso sega F e G in due curve f e g (di equazioni $f = F(x_0, x_1, x_2, 0, \ldots, 0) = 0$, $g = G(x_0, x_1, x_2, 0, \ldots, 0) = 0$) prive di parti comuni, le quali presentano un contatto d'ordine $q-1$ nei punti del gruppo γ sezione di $\mathcal{C}$ con l'S_2, ed H in una curva h (di equazione $h = H(x_0, x_1, x_2, 0, \ldots, 0) = 0$) segante f fuori di γ nel gruppo ε (non avente alcun punto a comune con γ) dei punti ove $\mathcal{E}$

Si ha come *corollario* che: *se $\mathcal{C}$ è una varietà di dimensione $r-2$ che contata q volte dia la completa intersezione di due ipersuperficie F e G, una forma qualunque H passante genericamente per $\mathcal{C}$ sega ulteriormente F e G lungo due varietà $\mathfrak{S}$ ed $\mathfrak{L}$ le quali contate q volte danno le complete intersezioni di F e G con due forme, che a loro volta presentano un contatto d'ordine $q-1$ in ogni punto della loro intersezione* [11].

3. Dimostriamo ora che: *se F_m, d'ordine m, possiede su $\mathcal{C}$ una varietà doppia σ di dimensione $r-3$ ed ordine $s \geq 0$, le ipersuperficie G_n, d'ordine $n \geq m$, che lungo $\mathcal{C}$ hanno un contatto d'ordine $q-1 \geq 1$ con F_m, posseggono su $\mathcal{C}$ una varietà doppia τ, di dimensione $r-3$ ed ordine*

$$t = \frac{1}{q} mn(n-m) + s, \tag{2}$$

che — al variare di G_n — descrive su $\mathcal{C}$ un sistema lineare.

Se H_λ è una forma d'ordine λ sufficientemente elevato passante per $\mathcal{C}$, per quanto visto al precedente n. 2, esistono due forme $A_{q\lambda-m}$ e $B_{q\lambda-n}$ di gradi uguali ai rispettivi indici, per cui si abbia identicamente

$$A_{\lambda q-m}F_m + B_{\lambda q-n}G_n \equiv H_\lambda^q;$$

differenziando si ottiene:

$$A_{\lambda q-m}dF_m + F_m dA_{\lambda q-m} + B_{\lambda q-n}dG_n + G_n dB_{\lambda q-n} \equiv qH_\lambda^{q-1}dH_\lambda,$$

---

sega l'S_2. Posto ancora $a = A(x_0, x_1, x_2, 0, \dots, 0)$, $b = B(x_0, x_1, x_2, 0, \dots, 0)$, risulta per la (1):

$$h^q = af + bg. \tag{1'}$$

Denotiamo con π il genere di f, con $u_1, u_2, \dots, u_\pi$ gli integrali abeliani di prima specie attaccati ad f scelti in modo che le condizioni di allineamento di m punti $P_1, P_2 \dots, P_m$ di f siano

$$\sum_{1}^{m} {}_i\, u_j(P_i) \equiv 0 \pmod{\omega_1, \dots, \omega_{2\pi}} \qquad (j = 1, \dots, \pi),$$

con $U_j(\gamma)$ ed $U_j(\varepsilon)$ le somme dei valori assunti dall'integrale u_j rispettivamente nei punti dei gruppi γ ed ε. Risulta, a meno di multipli dei periodi

$$qU_j(\gamma) \equiv 0, \qquad U_j(\gamma) + U_j(\varepsilon) \equiv 0 \qquad (j = 1, \dots, \pi),$$

e quindi $qU_j(\varepsilon) \equiv 0$ $(j = 1, \dots, \pi)$; sicchè esiste una curva b_0 (di equazione $b_0 = 0$) che ha ordine $q\lambda - n$ e non contiene f come parte, le cui intersezioni con f sono tutte assorbite dai punti del gruppo ε ciascuno contato q volte. Le due curve $h^q = 0$, $b_0 g = 0$ segano f nello stesso gruppo di punti e quindi esiste nel fascio da esse determinato una curva contenente f come parte, ossia un polinomio a_0, di grado $q\lambda - m$, tale che sia $h^q \equiv a_0 f + b_0 g$; risulta dunque $(a_0 - a)f + (b_0 - b)g \equiv 0$, od anche (poichè f e g non hanno alcuna componente comune): $a \equiv a_0 + rg$, $b \equiv b_0 + sf$ (con r ed s opportune forme ternarie). Le quattro curve f, g, a, b sono allora prive di punti comuni perchè in tali condizioni sono certo f, g, a_0, b_0, (ed anzi anche f, g, b_0). Ma ciò significa che la varietà $F = G = A = B = 0$ ha dimensione $\leq r-3$.

[11] Per $q = 1$ si ha che: se F è una forma di S_r e $\mathcal{C}$ è una V_{r-2} completa intersezione di F con un'altra forma dello spazio, ogni forma passante per $\mathcal{C}$ sega ulteriormente F in una varietà $\mathfrak{D}$ che è ancora la completa intersezione di F con un'altra forma dello spazio.

e *sulla varietà* $\mathcal{C}$, nei punti della quale risulta $F_m = G_n = H_\lambda = 0$, si ha

$$A_{\lambda q - m} dF_m + B_{\lambda q - n} dG_n \equiv 0,$$

e ciò significa che aggiungendo alla varietà α (di dimensione $r-3$ ed ordine $\frac{1}{q} mn(\lambda q - m)$) intersezione di $\mathcal{C}$ con l'ipersuperficie $A_{\lambda q - m}$, la varietà σ dei punti doppi che F_m possiede su $\mathcal{C}$ (nei punti della quale risulta $dF_m = 0$), si ha la stessa varietà che risulta aggiungendo alla varietà β (di dimensione $r-3$ ed ordine $\frac{1}{q} mn(\lambda q - n)$) intersezione di $\mathcal{C}$ con $B_{\lambda q - n}$, la varietà τ dei punti doppi che G_n possiede su $\mathcal{C}$ (nei punti della quale risulta $dG_n = 0$); eppertanto se $s \geq 0$, $t \geq 0$ sono gli ordini di σ e τ deve aversi:

$$\frac{1}{q} mn(\lambda q - m) + s = \frac{1}{q} mn(\lambda q - n) + t,$$

ossia

$$s - t = \frac{1}{q} mn(m - n),$$

e cioè la (2).

Che le varietà τ descrivano su $\mathcal{C}$ un sistema lineare, segue subito osservando che se G_n e G_n^* hanno entrambe un contatto d'ordine $q-1$ con F_m lungo $\mathcal{C}$, esiste una forma Λ_{n-m} per cui

$$G_n \equiv G_n^* + F_m \Lambda_{n-m};$$

e di qui, differenziando:

$$dG_n \equiv dG_n^* + F_m d\Lambda_{n-m} + \Lambda_{n-m} dF_m;$$

sulla varietà $\mathcal{C}$ si ha dunque:

$$dG_n \equiv dG_n^* + \Lambda_{n-m} dF_m,$$

e quindi

$$\frac{\partial G_n}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial G_n^*}{\partial x_k} + \Lambda_{n-m} \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \qquad (k = 0,\ 1, \ldots\ r),$$

e ciò prova quanto si è affermato. Al sistema lineare descritto su $\mathcal{C}$ dalle varietà τ appartengono, in particolare, le varietà τ_0 spezzate in σ e nelle varietà λ intersezioni di $\mathcal{C}$ con tutte le forme d'ordine $n - m$ di S_r, Λ_{n-m}.

4. Aggiungiamo poche parole relativamente alle singolarità che F_m e G_n possono avere su $\mathcal{C}$.

Se un punto P di $\mathcal{C}$ è h-plo per F_m e k-plo per G_n, deve essere necessariamente $hk \leq q$, se no $\mathcal{C}$ avrebbe in quel punto una singolarità. Se fosse invero $hk > q$, un generico piano π segherebbe F_m e G_n in due curve aventi ivi molteplicità di intersezione $> q$ e quindi P assorbirebbe più d'una delle $\frac{mn}{q}$ intersezioni di $\mathcal{C}$ con π, onde sarebbe punto multiplo di $\mathcal{C}$. Ed anzi, un piano π passante per P e *generico* deve segare F_m e G_n in due curve aventi in P la molteplicità di intersezione q.

Notiamo che se $q=2$, oppure $q=3$, un punto di $\mathcal{C}$ che sia multiplo per F_m (o per G_n) è necessariamente punto semplice di G_n (o, rispettivamente, di F_m), e precisamente:

a) se $q=2$ i punti multipli che ad esempio F_m possiede su $\mathcal{C}$ sono necessariamente doppi;

b) se $q=3$ i punti multipli che F_m possiede su $\mathcal{C}$ sono tripli oppure doppi biiperplanari, con uno degli iperpiani tangenti ad F_m coincidente con l'iperpiano tangente a G_n.

Ciò premesso, supponiamo che due ipersuperficie F_m e G_n (con $m \leq n$) dello spazio S_r abbiano contatto semplice oppure del second'ordine ($q=2$, oppure $q=3$) lungo una varietà $\mathcal{C}$ di dimensione $r-2$ ed ordine $\frac{1}{2}mn$ oppure $\frac{1}{3}mn$ *priva di singolarità*; sono allora possibili due casi:

a) *F_m non possiede su $\mathcal{C}$ una varietà doppia σ di dimensione $r-3$*, mentre G_n possiede su $\mathcal{C}$ una varietà doppia τ di dimensione $r-3$ ed ordine $\frac{1}{q}mn(n-m)$ (e quindi nulla se $m=n$). Tale caso si presenta ad esempio se $\mathcal{C}$ è la completa intersezione di F_m con una forma H_ν (ed $n=q\nu$) e si ha $G_n \equiv H_\nu^q - F_m\Lambda_{n-m}$. Ed anzi è questo l'unico caso possibile qualora F_m sia affatto priva di singolarità.

b) *F_m possiede su $\mathcal{C}$ una varietà doppia σ di dimensione $r-3$ ed ordine s*; G_n possiede allora una varietà doppia τ di dimensione $r-3$ ed ordine $t=\frac{1}{q}mn(n-m)+s$. Ma allora, se si vuole che $\mathcal{C}$ sia priva di singolarità, occorre che σ e τ siano prive di punti a comune: e ciò esige che sia $r \leq 5$.

Dunque il caso di due ipersuperficie F_m e G_n dello spazio S_r che in ogni punto ad esse comune abbiano un contatto del primo o del secondo ordine, ed aventi *entrambe* ∞^{r-3} punti doppi sulla varietà di contatto supposta priva di singolarità, *non può certo presentarsi se $r>5$*; ed anzi, se $r>5$, la varietà di contatto possiede almeno una V_{r-6} di punti singolari ([12]).

([12]) In una Nota in corso di stampa sugli « Atti dell'Accademia Ligure di Scienze e Lettere », (dal titolo: *Sulle ipersuperficie cubiche circoscritte ad una quadrica*), ho approfondito lo studio dei contatti ordinari tra due forme F e G, di ordini $m=2$ ed $n=3$ rispettivamente, appartenenti allo spazio S_r, determinando tutti i tipi proiettivamente distinti di forme cubiche di S_r circoscritte ad una quadrica (aventi cioè con essa un contatto semplice lungo una $V^3{}_{r-2}$) con la sola ipotesi che F e G siano entrambe irriducibili (qualunque siano le singolarità ch'esse posseggano su $V^3{}_{r-2}$ o fuori di $V^3{}_{r-2}$, e comunque la $V^3{}_{r-2}$ sia singolare o spezzata); ed il risultato è che la $V^3{}_{r-2}$ di contatto può essere priva di singolarità solamente se è $r \leq 4$, mentre se $r \geq 5$ è necessariamente un cono; ed anzi per $r \geq 5$ due forme F_2 e G_3 tra loro tangenti lungo una $V^3{}_{r-2}$, sono necessariamente i coni che da uno spazio $S_{r-\rho-1}$ proiettano due ipersuperficie del secondo e del terzo ordine rispettivamente,

5. È facile provare che: *se F_m e G_n sono due ipersuperficie di ordini m ed n $(m \leq n)$, aventi un contatto d'ordine $q-1$ lungo una varietà $\mathcal{C}$ di dimensione $r-2$ ed ordine $\frac{1}{q}mn$ ed aventi su $\mathcal{C}$ due varietà doppie σ e τ $(r-3)$-dimensionali, esistono ipersuperficie d'ordine opportuno $n' > n$ aventi un contatto d'ordine $q-1$ con G_n lungo una varietà $\mathcal{C}'$ d'ordine $\frac{1}{q}nn'$ passante per τ.*

Ciò si dimostra scrivendo effettivamente le equazioni di ipersuperficie d'ordine n' la cui intersezione con G_n è costituita da una varietà $\mathcal{C}'$, passante per τ, contata q volte.

Siano $A_{\lambda q-m}$, $B_{\lambda q-n}$, H_λ tre forme tali che

$$A_{\lambda q-m}F_m + B_{\lambda q-n}G_n \equiv H_\lambda^q, \tag{3}$$

e consideriamo in S_r le ipersuperficie $\Phi_{n'}$ d'ordine

$$n' = q(\lambda + \mu) - m$$

dove μ è un intero arbitrario, di equazione:

$$\Phi_{n'} \equiv G_n K_{n'-n} + \sum_{0}^{q-1}{}_j \binom{q}{j} F_m^{q-j-1} H_\lambda^j L_{\lambda+\mu-m}^{q-j} M_\mu^j + A_{q\lambda-m} M_\mu^q = 0,$$

ove $K_{n'-n}$, $L_{\lambda+\mu-m}$, M_μ sono arbitrarie forme il cui grado è indicato dal rispettivo indice.

Poichè risulta

$$F_m\Phi_{n'} \equiv G_n F_m K_{n'-n} + \sum_{0}^{q}{}_j \binom{q}{j} F_m^{q-j} L_{\lambda+\mu-m}^{q-j} H_\lambda^j M_\mu^j - H_\lambda^q M_\mu^q + A_{q\lambda-m} M_\mu^q F_m,$$

ossia, tenuto conto della (3):

$$F_m\Phi_{n'} \equiv G_n(K_{n'-n}F_m - M_\mu^q B_{q\lambda-n}) + (H_\lambda M_\mu + F_m L_{\lambda+\mu-m})^q,$$

e poichè il sistema

$$F_m = \Phi_{n'} = G_n = K_{n'-n}F_m - M_\mu^q B_{q\lambda-n} = 0,$$

se M_μ è scelta genericamente, possiede al più ∞^{r-3} soluzioni, le forme $\Phi_{n'}$ hanno un contatto d'ordine $q-1$ con G_n lungo tutta la varietà $\mathcal{C}'$ ch'esse hanno a comune con G_n.

---

appartenenti ad un S_ρ (con $\rho \leq 4$), e tra loro tangenti lungo una $V^3{}_{\rho-2}$, ad eccezione, per $r=5$, di un solo caso, quello in cui G_3 sia la $V^3{}_4$ ricoperta dalle corde di una superficie di VERONESE τ, ed F_2 sia un S_2-cono il cui vertice σ è un piano tangente di τ, che si tocchino lungo il cono che proietta τ dal punto di contatto con σ.

Sarebbe interessante approfondire il caso in cui m ed n siano qualunque; ma mentre il caso $m=2$, $n=3$ si presenta relativamente semplice in virtù della circostanza che le corde della varietà doppia di G_3 appartengono a G_3, ritengo che il caso generale dovrebbe presentare difficoltà non lievi.

Notiamo che le $\Phi_{n'}$ passano semplicemente per τ: infatti questa è luogo di punti almeno doppi per $G_n K_{n'-n} = 0$ ed almeno $(q-1)$-pli per ciascuna delle ipersuperficie

$$F_m^{q-j-1} H_\lambda^j L_{\lambda+\mu-m}^{q-j} M_\mu^j = 0,$$

mentre, data la genericità di M_μ è luogo di punti soltanto semplici per $A_{q\lambda-m} M_\mu^q = 0$; è chiaro che ciò è vero anche per $q = 2$, purchè anche la forma $L_{\lambda+\mu-m}$ sia scelta genericamente.

In modo perfettamente analogo si vede che hanno un contatto d'ordine $q-1$ con G_n lungo una varietà $\mathcal{C}''$ passante semplicemente per τ, le ipersuperficie $\Psi_{n''}$ di ordine

$$n'' = q\mu + m$$

con μ intero arbitrario, di equazione:

$$\Psi_{n''} \equiv G_n R_{n''-n} + \sum_{0}^{q-1}{}_j \binom{q}{j} A_{q\lambda-m}^{q-j-1} H_\lambda^j V_{\lambda+\mu+m-q\lambda}^{q-j} W_\mu^j + F_m W_\mu^q = 0,$$

ove $R_{n''-n}$, $V_{\lambda+\mu+m-q\lambda}$, W_μ denotano forme arbitrarie di grado uguale al rispettivo indice. Risulta infatti, tenuto conto della (3):

$$A_{q\lambda-m}\Psi_{n''} \equiv G_n(A_{q\lambda-m}R_{n''-n} - W_\mu^q B_{q\lambda-n}) + (A_{q\lambda-m}V_{\lambda+\mu+m-q\lambda} + H_\lambda W_\mu)^q.$$

CAPITOLO II.

6. Passiamo ora a studiare più dettagliatamente il caso $q = 2$, $r = 3$.

Sia V_3 una varietà algebrica a tre dimensioni senza punti doppi, X una superficie canonica (impura) di V_3, F e G due superficie algebriche di V_3 che si tocchino semplicemente lungo una curva $\mathcal{C}$ irriducibile e priva di punti multipli e si seghino ulteriormente lungo una curva $\mathfrak{D}$ (eventualmente nulla). Supponiamo che F e G abbiano al più un numero finito di punti doppi ordinari di cui $s \geq 0$, $t \geq 0$ giacciano su $\mathcal{C}$, siano i punti P_i e Q_j, costituenti su $\mathcal{C}$ i gruppi σ e τ.

Risulta:

$$(FG) \equiv 2\mathcal{C} + \mathfrak{D} + \Sigma P_i \quad (\text{su } F)$$
$$(GF) \equiv 2\mathcal{C} + \mathfrak{D} + \Sigma Q_j \quad (\text{su } G),$$

onde, segando con $\mathcal{C}$:

$$(\mathcal{C}G) \equiv 2(\mathcal{C}^2)_F + (\mathcal{C}\mathfrak{D}) + \sigma$$
$$(\mathcal{C}F) \equiv 2(\mathcal{C}^2)_G + (\mathcal{C}\mathfrak{D}) + \tau;$$

ma (B. S. form. 23):

$$(\mathcal{C}^2)_F \equiv \varkappa_{\mathcal{C}} - (\mathcal{C},\ F + X), \qquad (\mathcal{C}^2)_G \equiv \varkappa_{\mathcal{C}} - (\mathcal{C},\ G + X),$$

e quindi *su* $\mathcal{C}$:

(4) $$\sigma \equiv (\mathcal{C},\ 2F + G + 2X) - 2\varkappa_{\mathcal{C}} - (\mathcal{C},\ \mathfrak{D})$$

(5) $$\tau \equiv (\mathcal{C},\ 2G + F + 2X) - 2\varkappa_{\mathcal{C}} - (\mathcal{C},\ \mathfrak{D})$$

epperciò:

(6) $$\sigma - \tau \equiv (\mathcal{C},\ F - G).$$

Se, in particolare, $\mathfrak{D}$ non esiste le (4), (5) divengono:

$$\sigma \equiv (\mathcal{C},\ 2F + G + 2X) - 2\varkappa_{\mathcal{C}}$$
$$\tau \equiv (\mathcal{C},\ 2G + F + 2X) - 2\varkappa_{\mathcal{C}},$$

e numerativamente, denotando con p il genere di $\mathcal{C}$:

$$p = 1 + \frac{1}{4}[\mathcal{C},\ 2F + G + 2X] - \frac{1}{4}s = 1 + \frac{1}{4}[\mathcal{C},\ 2G + F + 2X] - \frac{1}{4}t.$$

Se V_3 è uno spazio S_3 ed m, n sono gli ordini rispettivamente di F e G, poichè $[\mathcal{C},\ X] = -2mn$ si ha:

(7) $$s - t = \frac{1}{2}mn(m - n)$$

(8) $$p = 1 + \frac{1}{8}mn(2m + n - 8) - \frac{1}{4}s.$$

Abbiamo così delle condizioni necessarie per il contatto semplice di F e G lungo $\mathcal{C}$ (che contata due volte ne esaurisca l'intersezione); da esse si deduce che devono inoltre essere verificate le condizioni:

(9) $mn \equiv 0 \pmod 2$; (10) $mn(2m + n) - 2s \equiv 0 \pmod 8$ [13].

7. Se G e G^* sono due superficie di V_3 tangenti ad F lungo una medesima curva $\mathcal{C}$ e σ, τ, τ^* sono i gruppi dei punti doppi che F, G, G^* hanno su $\mathcal{C}$, risulta su $\mathcal{C}$:

$$\sigma - \tau \equiv (\mathcal{C},\ F - G), \qquad \sigma - \tau^* \equiv (\mathcal{C},\ F - G^*)$$

e quindi

$$\tau - \tau^* \equiv (\mathcal{C},\ G - G^*)$$

e pertanto, *se G varia in un sistema lineare, il gruppo τ descrive su $\mathcal{C}$ una serie lineare.*

---

[13] Da ciò si deducono delle condizioni necessarie per il contatto semplice di due ipersuperficie F_m e G_n dello spazio S_r lungo una varietà $\mathcal{C}$ di dimensione $r-2$ ed ordine $\frac{1}{2}mn$: in tal caso devono ancora essere verificate le (7), (8), (9), (10) ove s e t denotino gli ordini delle varietà σ e τ di dimensione $r-3$ che sono doppie per F_m e per G_n rispettivamente ed appartengono a $\mathcal{C}$, e p sia il genere delle sezioni spaziali di $\mathcal{C}$.

Se $V_3 \equiv S_3$, sia Σ il sistema lineare di dimensione $\delta = \binom{n-m+3}{3}$ di tutte le G_n che lungo una data curva $\mathcal{C}$ d'ordine $\frac{1}{2}mn$ e genere $p = 1 + \frac{1}{8}mn(2m+n-8) - \frac{1}{4}s$ toccano semplicemente una F_m avente s nodi su $\mathcal{C}$ (supposto che esistano delle G_n in simili condizioni, non contenenti F_m come parte), e g_t^ρ la serie lineare descritta su $\mathcal{C}$ dal gruppo τ dei punti doppi che le G_n di Σ posseggono su $\mathcal{C}$.

Se $\Sigma' \subset \Sigma$ è il sistema lineare ∞^{h-1} delle superficie d'ordine n aventi $\mathcal{C}$ come linea doppia, se G_n è una generica superficie di Σ e $G_n^{(1)}, G_n^{(2)}, \ldots, G_n^{(h)}$ sono h superficie di Σ' linearmente indipendenti, le superficie di Σ:

$$\lambda G_n + \lambda_1 G_n^{(1)} + \lambda_2 G_n^{(2)} + \ldots + \lambda_h G_n^{(h)} = 0$$

hanno tutte il medesimo gruppo τ di punti doppi su $\mathcal{C}$; e sono ∞^h. Viceversa, se esistono ∞^h superficie di Σ aventi su $\mathcal{C}$ il medesimo gruppo τ di nodi e costituenti il sistema Σ^*, le ∞^{h-1} superficie di Σ^* che in un punto preso genericamente su $\mathcal{C}$ toccano un piano distinto dal piano ivi tangente ad F_m, hanno $\mathcal{C}$ come linea doppia; dunque: *la dimensione della serie lineare g_t^ρ descritta da τ su $\mathcal{C}$ è esattamente*

$$\rho = \delta - h,$$

ove h denota il massimo numero di superficie d'ordine n, linearmente indipendenti, che passano doppiamente per $\mathcal{C}$.

Si può dimostrare che *se $n > 4m-8$ la deficienza della g_t^ρ è almeno $s-1$.*

Siano infatti $G_n^{(1)}$ e $G_n^{(2)}$ due superficie d'ordine n aventi $\mathcal{C}$ come curva doppia; al fascio da esse individuato appartiene una superficie contenente F_m come parte, e quindi

$$G_n^{(1)} \equiv G_n^{(2)} + \theta_{n-m} F_m \tag{11}$$

ove θ_{n-m} è una superficie di ordine $n-m$ *passante per* $\mathcal{C}$; viceversa se $G_n^{(2)}$ ha $\mathcal{C}$ come linea doppia e θ_{n-m} passa per $\mathcal{C}$, la superficie $G_n^{(1)}$ fornita dalla (11) passa doppiamente per $\mathcal{C}$; ed anzi la (11), una volta fissata $G_n^{(2)}$, fornisce tutte le superficie d'ordine n aventi $\mathcal{C}$ come linea doppia. Sono quindi possibili due casi:

a) esiste una $G_n^{(2)}$ passante doppiamente per $\mathcal{C}$ e non contenente F_m come parte; allora $h = k+1$, dove k denota il massimo numero delle superficie d'ordine $n-m$ linearmente indipendenti passanti per $\mathcal{C}$;

b) non esiste una $G_n^{(2)}$ siffatta; allora $h = k$.

La serie lineare segata su $\mathcal{C}$ dalle superficie d'ordine $n-m$ ha ordine $t-s$ e dimensione $k_0 = \delta - k - 1$; se $n > 4m-8$ essa è certo non speciale $\left(\text{poichè } t-s = \frac{1}{2}mn(n-m) > \frac{1}{4}mn(2m+n-8) \geq 2p-2\right)$, e pertanto:

$$k_0 = \delta - k - 1 \leq t - s - p,$$

il secondo membro essendo la dimensione della serie completa cui $g_{t-s}^{k_0}$ appartiene. Si ottiene da ciò

$$k \geq \delta - t + s + p - 1,$$

e pertanto nel primo caso risulta $h \geq \delta - t + s + p$ e quindi

$$\rho = \delta - h \leq t - s - p,$$

e nel secondo caso $h \geq \delta - t + s + p - 1$ e quindi

$$\rho = \delta - h \leq t - s - p + 1.$$

D'altra parte anche la serie g_t^{ρ} è non speciale e quindi la dimensione della serie completa cui essa appartiene è $t - p$; segue allora che la deficienza della g_t^{ρ} è almeno $s - 1$ (ed anzi, nel primo caso è almeno s).

8. Sia F_m una superficie d'ordine m di S_3 passante semplicemente per una curva $\mathfrak{C}$ di ordine h e genere π, ed avente s nodi su $\mathfrak{C}$; relativamente ad essa stabiliamo il seguente *lemma*:

Se Σ è il sistema lineare delle superficie K di ordine k passanti semplicemente per $\mathfrak{C}$, il numero delle condizioni (lineari) da imporre ad una K di Σ affinchè tocchi semplicemente F_m lungo $\mathfrak{C}$ è al più

$$\vartheta = h(m + k - 4) - 2(\pi - 1) - s + 1.$$

Per dimostrarlo, consideriamo in una V_3 algebrica su cui si facciano le stesse ipotesi del n. 6 due superficie F e K irriducibili aventi a comune una curva $\mathfrak{C}$ irriducibile e priva di punti multipli, e segantisi ulteriormente lungo una curva $\mathfrak{R}$; supponiamo dapprima che F e K non abbiano punti multipli su $\mathfrak{C}$.

I punti di $\mathfrak{C}$ in cui F e K si toccano sono ovviamente i punti del gruppo $(\mathfrak{C}\mathfrak{R})$. D'altra parte (B. S. form. 27) sussiste l'equivalenza

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{R}) \equiv (\mathfrak{C},\ F + K + X) - \varkappa_{\mathfrak{C}},$$

e quindi *F e K si toccano in*

$$z = [\mathfrak{C},\ F + K + X] - 2(\pi - 1) \tag{12}$$

punti di $\mathfrak{C}$. Se poi F e K posseggono rispettivamente $s \geq 0$ e $v \geq 0$ punti doppi ordinari su $\mathfrak{C}$, in luogo della (12) si ha:

$$z = [\mathfrak{C},\ F + K + X] - 2(\pi - 1) - (s + v). \tag{13}$$

In particolare, quando $V_3 \equiv S_3$ risulta:

$$z = h(m + k - 4) - 2(\pi - 1) - (s + v) \text{ (14)}, \tag{14}$$

(14) La (14) si può dimostrare elementarmente come segue: la prima polare F' rispetto ad F di un punto O generico dello spazio, sega $\mathfrak{C}$ in $h(m-1)$ punti di cui s formano il gruppo σ dei punti doppi di F su $\mathfrak{C}$ ed $a = h(m-1) - s$ costituiscono il gruppo α dei punti

e condizione affinchè F e K si tocchino in infiniti punti di $\mathcal{C}$, e quindi poichè $\mathcal{C}$ è irriducibile e semplice per entrambe le superficie, condizione affinchè si tocchino lungo $\mathcal{C}$ è che esse si tocchino in

$$z+1 = h(m+k-4) - 2(\pi-1) - (s+v) + 1$$

punti di $\mathcal{C}$. Fissati su $\mathcal{C}$ ϑ *punti generici* le condizioni da imporre ad una superficie già passante per $\mathcal{C}$ perchè in tali punti tocchi F_m (anch'essa passante per $\mathcal{C}$) *sono al più* ϑ, tutte lineari, e con ciò il lemma è provato.

Notiamo che se la curva $\mathfrak{R}$, residua intersezione di F e K, si suppone priva di singolarità si ha, insieme alla (13):

$$z = [\mathfrak{R},\ F+K+X] - 2(g-1) - (s+v),$$

ove g denota il genere di $\mathfrak{R}$, e quindi

$$g = \frac{1}{2}[\mathfrak{R} - \mathcal{C},\ F+K+X] + \pi,$$

e se $V_3 \equiv S_3$:

$$g = \frac{1}{2}(mk-2h)(m+n-4) + \pi. \tag{15}$$

9. Ciò premesso, consideriamo in S_3 una superficie F_m, d'ordine m, avente soltanto nodi, e su di essa una curva irriducibile $\mathcal{C}$ di ordine $\frac{1}{2}mn$ e genere

$$p = 1 + \frac{1}{8}mn(2m+n-8) - \frac{s}{4};$$

supponiamo inoltre che $\mathcal{C}$ sia priva di singolarità e che passi per $s \geq 0$ nodi di F_m.

---

di $\mathcal{C}$ ove il piano tangente ad F passa per O; analogamente, la prima polare K' di O rispetto a K sega $\mathcal{C}$ in $h(k-1)$punti di cui $b = h(k-1) - v$ costituiscono il gruppo β dei punti di $\mathcal{C}$ ove il piano tangente a K passa per O. Quando O descrive una retta r, α e β descrivono su $\mathcal{C}$ due serie lineari g_a^1 e g_b^1 tra loro proiettive, e dicendo omologhi due punti di $\mathcal{C}$ quando appartengono a due gruppi omologhi di tali serie, si ottiene su $\mathcal{C}$ una corrispondenza algebrica di indici (a, b) la cui valenza è manifestamente *zero*. I punti uniti in tale corrispondenza sono allora $a+b$, e se P è uno di essi i piani tangenti in P ad F e K segano su r lo stesso punto O, e dovendo entrambi contenere la tangente in P ad $\mathcal{C}$, se questa non è incidente ad r coincidono. Poichè il rango di $\mathcal{C}$ è $2(h+\pi-1)$ si ha:

$$z = a+b-2(h+\pi-1) = h(m-1) - s + h(k-1) - v - 2(h+\pi-1) = h(m+k-4) - 2(\pi-1) - (s+v).$$

In particolare, se F e K non si toccano in alcun punto di $\mathcal{C}$ (e cioè se $z=0$), il genere di $\mathcal{C}$ è $\pi = 1 + \frac{h}{2}(m+k-4) - \frac{1}{2}(s+v)$ (formula ben nota nel caso che $\mathcal{C}$ sia la completa intersezione di F con K). Una semplice conseguenza di tale fatto è che se per una curva $\mathcal{C}$ passano due superficie F e K, i cui ordini siano uno pari ed uno dispari, che siano entrambe prive di punti doppi su $\mathcal{C}$ e che non si tocchino in alcun punto di $\mathcal{C}$, l'ordine di $\mathcal{C}$ è necessariamente *pari*.

Se $m \leq n$, e $\mathcal{C}$ non è la completa intersezione di F_m con un'altra superficie dello spazio, le superficie diverse da F_m che passano per $\mathcal{C}$ hanno ordine non inferiore a $\nu + 1$, ove $\nu = E\left(\frac{n}{2}\right)$ $\left(\text{parte intera di } \frac{n}{2}\right)$; se $g_{N_l}^{R_l}$ è la serie lineare segata su $\mathcal{C}$ dalle superficie $H_{\nu+l}$ d'ordine $\nu + l$ (con $l \geq 1$), risulta

$$N_l = \frac{1}{2} mn(\nu + l)$$

$$R_l = \binom{\nu+l+3}{3} - \binom{\nu+l+3-m}{3} - \varepsilon_l - 1 = \frac{1}{2}(\nu + l)(\nu + l - m + 4) + \binom{m-1}{3} - \varepsilon_l,$$

dove ε_l denota il massimo numero di $H_{\nu+l}$ linearmente indipendenti passanti per $\mathcal{C}$ e non contenenti F_m come parte. Se i_l è l'indice di specialità della $g_{N_l}^{R_l}$ si ha allora

$$R_l \leq \frac{1}{2} mn(\nu + l) - 1 - \frac{1}{8} mn(2m + n - 8) + \frac{s}{4} + i_l,$$

e cioè:

$$\varepsilon_l \geq \binom{m-1}{3} + \frac{1}{2} m\rho_l(\rho_l - m + 4) + 1 - \frac{s}{4} - i_l, \tag{16}$$

ove, per brevità, si è posto

$$\rho_l = \nu + l - \frac{1}{2} n \quad (\text{e quindi } 0 \leq l - 1 < \rho_l \leq l).$$

Se risulta $\varepsilon_l \geq 1$, le $H_{\nu+l}$ passanti per $\mathcal{C}$ e non contenenti F_m come parte costituiscono un sistema lineare Σ_l $\infty^{\varepsilon_l - 1}$, seganti su F_m, fuori di $\mathcal{C}$, un sistema lineare Σ_l^*, anch'esso di dimensione $\varepsilon_l - 1$, di curve $\mathcal{E}$ il cui ordine h_l ed il cui genere π_l sono:

$$h_l = m(\nu + l) - \frac{1}{2} mn = m\rho_l \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \pi_l &= \frac{1}{2} m(\nu + l - n)(m + \nu + l - 4) + \frac{1}{8} mn(2m + n - 8) + 1 - \frac{s}{4} = \\ &= \frac{1}{2} m\rho_l(\rho_l + m - 4) + 1 - \frac{s}{4}, \end{aligned} \tag{18}$$

e poichè $\mathcal{C}$ è priva di singolarità, le curve $\mathcal{E}$ passano per gli s nodi che F_m possiede su $\mathcal{C}$.

Per poter concludere che $\mathcal{C}$ è la curva di contatto di F_m con una G_n, *occorre* e *basta* vedere se una delle curve $\mathcal{E}$ di Σ_l^* è curva di contatto di F_m con una superficie $B_{2\rho_l}$, di ordine $2\rho_l$.

Consideriamo allora il sistema *algebrico* Ξ_l delle superficie $B_{2\rho_l}$ che non contengono come parte F_m e che passano per una almeno delle $\mathcal{E}$: esso si compone di ∞^{ε_l-1} sistemi lineari, ciascuno dei quali è la totalità delle $B_{2\rho_l}$ che non contengono come parte F_m, e che passano per una data delle $\mathcal{E}$; ed ogni superficie di Ξ_l può al più appartenere a due di tali sistemi lineari, onde se $\varepsilon_l^{(0)}-1$ è la dimensione di uno di essi, e χ_l è quella di Ξ_l risulta

$$\chi_l = \varepsilon_l + \varepsilon_l^{(0)} - 2\,;$$

d'altra parte se $g_{N_l^{(0)}}^{R_l^{(0)}}$ è la serie lineare segata su una delle $\mathcal{E}$ da tutte le superficie d'ordine $2\rho_l$ dello spazio, risulta

$$N_l^{(0)} = 2m\rho_l^2 \qquad R_l^{(0)} = m\rho_l(2\rho_l - m + 4) + \binom{m-1}{3} - \varepsilon_l^{(0)}$$

e quindi

$$\varepsilon_l^{(0)} \geq \binom{m-1}{3} + \frac{1}{2}\,m\rho_l(\rho_l - m + 4) + 1 - \frac{s}{4} - i_l^{(0)},$$

ove $i_l^{(0)}$ denota l'indice di specialità della $g_{N_l^{(0)}}^{R_l^{(0)}}$.

Le condizioni da imporre ad una superficie di uno dei sistemi lineari di cui Ξ_l si compone per toccare F_m lungo la relativa curva $\mathcal{E}$, per il lemma, sono al più

$$\vartheta_l = m\rho_l(2\rho_l + m - 4) - 2(\pi_l - 1) - s + 1 = m\rho_l^2 - \frac{s}{2} + 1,$$

e pertanto qualche superficie di Ξ_l è tangente ad F_m lungo una delle curve $\mathcal{E}$ qualora risulti

$$\chi_l = \varepsilon_l + \varepsilon_l^{(0)} - 2 \geq \vartheta_l\,. \tag{19}$$

Notiamo che se $l \geq m-3$ si ha $\rho_l > m-4$ e quindi

$$N_l - 2p + 2 = \frac{1}{2}\,mn(\nu + l) - \frac{1}{4}\,mn(2m + n - 8) + \frac{s}{2} = \frac{1}{2}\,mn(\rho_l - m + 4) + \frac{s}{2} > \frac{s}{2} \geq 0$$

$$N_l^{(0)} - 2\pi_l + 2 = 2m\rho_l^2 - m\rho_l(\rho_l + m - 4) + \frac{s}{2} = m\rho_l(\rho_l - m + 4) + \frac{s}{2} > \frac{s}{2} \geq 0,$$

onde $i_l = i_l^{(0)} = 0$, sicchè se $l \geq m-3$ la (19) è certo verificata se

$$2\binom{m-1}{3} - m\rho_l(m-4) \geq 1. \tag{20}$$

È subito visto che *tale condizione è sempre soddisfatta per* $m \leq 4$ (nel qual caso si ha sempre $l \geq m-3$); ma, com'è facile verificare, non vale più per $m \geq 5$. Si può dunque concludere con il seguente

TEOREMA. - *Se* F_m *è una superficie d'ordine* $m \leq 4$ *appartenente allo spazio ordinario e dotata solamente di nodi, e se* $\mathcal{C}$ *è una curva d'ordine* $\frac{1}{2}mn$ *(con* $n \geq m$*) tracciata su* F_m*, priva di singolarità, passante per* $s \geq 0$ *nodi di* F_m *ed avente genere* $p = 1 + \frac{1}{8}mn(2m+n-8) - \frac{1}{4}s$*, esiste un sistema lineare di dimensione* $\binom{n-m+3}{3}$ *di superficie d'ordine* n *aventi con* F_m *un contatto semplice lungo* $\mathcal{C}$.

In particolare se $m=4$ ed F_m è una F_4 di KUMMER a moduli generali, poichè ogni curva algebrica $\mathcal{C}$ di tale F_4 ha ordine pari $2n$ e genere $p = 1 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{s}{4}$ (ove $s \geq 0$ è il numero dei nodi di F_4 giacenti su $\mathcal{C}$), si ritrova il noto Teorema di G. HUMBERT secondo cui ogni curva algebrica appartenente ad una F_4 di KUMMER è la curva di contatto di F_4 con un'altra superficie che non sega più ulteriormente F_4 (15).

10. È facile provare che *se su una* F_m *esiste una curva* $\mathcal{C}$ *di ordine* $\frac{1}{2}mn$ *e genere* $p = 1 + \frac{1}{8}mn(2m+n-8) - \frac{s}{4}$ *priva di singolarità e passante per* s *nodi di* F_m*, lungo la quale* F_m *sia toccata da una* G_n *con* $n > 2m-8$ (16), *di curve analoghe alla* $\mathcal{C}$ *ne esiste tutto un sistema lineare la cui dimensione è non minore di* $p - \frac{1}{2}mn(m-4) + \binom{m-1}{3} - 1$.

Sia invero $\mathcal{G}$ la residua intersezione di F_m con una superficie $H_{\nu+l}$ passante per $\mathcal{C}$; se $n > 2m-8$, la $g^{R_l^*}_{N_l^*}$ segata su $\mathcal{G}$ dalle superficie d'ordine $\nu + l$ dello spazio, è certo non speciale poichè risulta

$$N_l^* - 2\pi_l + 2 = \frac{1}{2}m\rho_l(n-2m+8) + \frac{s}{2} > \frac{s}{2} \geq 0,$$

e se ε_l^* è il numero delle $H_{\nu+l}$ linearmente indipendenti passanti per $\mathcal{G}$ e non contenenti F_m come parte, risulta con facile calcolo:

$$\varepsilon_l^* \geq p - \frac{1}{2}mn(m-4) + \binom{m-1}{3};$$

(15) G. HUMBERT, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, « Journ. Math. pures et appliquées », 4, (1883), pp. 29-170, e pp. 361-475.

(16) Si noti che se $n \geq m$ la condizione $n > 2m-8$ è certo soddisfatta se è $m < 8$.

e ciò, poichè le $\infty^{\varepsilon_l^*-1}$ $H_{\nu+l}$ passanti per $\mathcal{G}$ segano su F_m altrettante curve che sono nelle medesime condizioni di $\mathcal{C}$ (e tra le quali c'è la $\mathcal{C}$ stessa), prova quanto si è affermato.

Se poi si tien conto che lungo ciascuna delle curve $\mathcal{C}$, F_m è toccata da tutte le G_n di un sistema lineare di dimensione $\binom{n-m+3}{3}$ e che due diverse $\mathcal{C}$ dànno luogo a due sistemi lineari che non possono avere alcuna superficie in comune, si conclude che *se esiste una curva $\mathcal{C}$ nelle condizioni suddette, F_m è l'inviluppo di un sistema algebrico di G_n la cui dimensione è almeno* $p-\frac{1}{2}mn(m-4)+\binom{m-1}{3}+\binom{n-m+3}{3}-1=p-\frac{1}{2}mn^2+\binom{n+3}{3}-2$, *ciascuna delle quali tocca F_m lungo una curva che ha lo stesso ordine e lo stesso genere della $\mathcal{C}$ e che passa per gli s nodi che F_m possiede su $\mathcal{C}$.*

CAPITOLO III.

11. Le superficie dello spazio ordinario circoscritte ad una F_2 oppure ad una F_3, sono state studiate completamente da L. GODEAUX; conviene tuttavia aggiungere alcune osservazioni.

Per $m=2$ le (7), (8), (10), porgono

$$(21)\qquad \begin{cases} t-s=n(n-2) \\ p=\frac{1}{4}(n-2)^2-\frac{s}{4} \\ s\equiv n^2 \pmod 4. \end{cases}$$

Distinguiamo due casi, a seconda della parità di n:

a) $n=2\nu$. Risulta $s\equiv 0 \pmod 4$, e quindi $s=0$, $p=(\nu-1)^2$. È ben noto che una curva d'ordine 2ν appartenente ad una F_2 non specializzata ed avente il genere $p=(\nu-1)^2$ è la completa intersezione di F_2 con una superficie d'ordine ν.

b) $n=2\nu+1$. Risulta $s\equiv 1 \pmod 4$, e quindi $s=1$ e $p=\nu(\nu-1)$. Poichè (cfr. n. 9) $\varepsilon_1\geq 1$, la curva $\mathcal{C}$ appartiene a qualche superficie d'ordine $\nu+1$ segante ancora F_2 secondo una generatrice. Sia $H_{\nu+1}$ una di tali superficie ed $\mathcal{G}$ la generatrice di F_2 che appartiene ad $H_{\nu+1}$; se $G_{2\nu+1}$ è una superficie tangente ad F_2 lungo $\mathcal{C}$, B_1 il piano tangente ad F_2 lungo la retta $\mathcal{G}$, T_1 un altro piano passante per $\mathcal{G}$, ed S_1 il piano tangente ad F_2 lungo la retta residua intersezione di F_2 con T_1, esiste una forma $A_{2\nu}$ per cui

$$(22)\qquad G_{2\nu+1}B_1\equiv F_2A_{2\nu}+H_{\nu+1}^2.$$

D'altra parte si può supporre $F_2\equiv T_1^2-B_1S_1$ ed inoltre (poichè $H_{\nu+1}$ passa per $\mathcal{G}$) esistono due forme φ_ν e ψ_ν d'ordine ν tali che

$$H_{\nu+1}\equiv\varphi_\nu B_1+\psi_\nu T_1;$$

la (22) diviene pertanto:

$$B_1(G_{2\nu+1} + A_{2\nu}S_1 - \varphi_\nu^2 B_1 - 2\varphi_\nu\psi_\nu T_1) \equiv T_1^2(A_{2\nu} + \psi_\nu^2)$$

e ciò implica l'esistenza d'una $M_{2\nu-1}$ tale che

$$A_{2\nu} \equiv M_{2\nu-1}B_1 - \psi_\nu^2,$$

e quindi

$$G_{2\nu+1} \equiv M_{2\nu-1}F_2 + \varphi_\nu^2 B_1 + 2\varphi_\nu\psi_\nu T_1 + \psi_\nu^2 S_1.$$

Per $m = 3$ le (7), (8), (9), (10), forniscono:

$$(23)\qquad \begin{cases} n = 2\nu \\ s \equiv 0 \pmod 4 \qquad (\text{e quindi } s = 0,\ 4) \\ t = 3\nu(\nu - 3) + s \\ p = \dfrac{3}{2}\nu(\nu - 1) - \dfrac{1}{4}s + 1. \end{cases}$$

Se $s = 0$, $\mathcal{C}$ è necessariamente intersezione completa di F_3 con una H_ν: invero $\mathcal{C}$ ha ordine 3ν e genere $p = 1 + \frac{3}{2}\nu(\nu - 1)$ e la serie segata su di essa dalle H_ν è *non speciale* (perchè $3\nu^2 > 3\nu(\nu - 1) = 2p - 2$). Detto allora ε_0 il massimo numero di forme H_ν, linearmente indipendenti, passanti per $\mathcal{C}$ e non contenenti F_3 come parte, risulta:

$$\binom{\nu+3}{3} - \binom{\nu}{3} - \varepsilon_0 - 1 \leq 3\nu^2 - \frac{3}{2}\nu(\nu - 1) - 1$$

onde $\varepsilon_0 \geq 1$.

Sia ora $s = 4$: $\mathcal{C}$, d'ordine 3ν e genere $\frac{3}{2}\nu(\nu - 1)$, è la residua intersezione di F_3 con una $H_{\nu+1}$ passante per una cubica sghemba $\mathcal{E}$ di F_3; infatti le $H_{\nu+1}$ segano su $\mathcal{C}$ una serie non speciale e se ε_1 è il numero delle $H_{\nu+1}$ passanti per $\mathcal{C}$ e non contenenti F_3 come parte, si ha $\varepsilon_1 \geq 3$. Inoltre, poichè $\mathcal{C}$ deve passare semplicemente per i quattro nodi di F_3, la cubica $\mathcal{E}$ passa per tali punti, e si vede facilmente che tra gli ∞^1 coni quadrici che contengono $\mathcal{E}$ ce n'è uno ed uno solo tangente ad F_3 lungo $\mathcal{E}$.

Si può supporre che $\mathcal{E}$ sia luogo del punto $(1,\ t^3,\ t^2,\ t)$ e che l'equazione

$$\alpha t^4 + \beta t^3 + \gamma t^2 + \delta t + 1 = 0$$

fornisca i quattro valori di t corrispondenti ai quattro nodi di F_3 (essendo α, β, γ, δ numeri complessi arbitrari); ed inoltre che il cono quadrico tangente ad F_3 lungo $\mathcal{E}$ abbia l'equazione:

$$B_2 \equiv x_1x_3 - x_2^2 = 0.$$

Si vede allora senza difficoltà che l'equazione di F_3 risulta

$$F_3 \equiv L_1 B_2 + \Omega_3 = 0$$

ove si è posto:

$$L_1 \equiv \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_0, \qquad \Omega_3 \equiv x_3^3 - 2x_0 x_2 x_3 + x_1 x_0^2.$$

Una generica superficie d'ordine $\nu + 1$ passante per $\mathcal{E}$ può scriversi

$$R_{\nu-2} F_3 + \varphi_{\nu-1} B_2 + \psi_{\nu-1}^3 \omega_2 = 0,$$

ove $\omega_2 \equiv x_3^2 - x_0 x_2$ ed $R_{\nu-2}$, $\varphi_{\nu-1}$, $\psi_{\nu-1}$ sono arbitrarie forme di grado uguale al rispettivo indice, e $\mathcal{C}$ risulta quindi ulteriore intersezione di F_3 con una superficie

$$H_{\nu+1} \equiv \varphi_{\nu-1} B_2 + \psi_{\nu-1} \omega_2 = 0,$$

passante per $\mathcal{E}$.

Sia ora $G_{2\nu}$ una superficie tangente ad F_3 lungo $\mathcal{C}$: esiste una forma $A_{2\nu-1}$ per cui

$$G_{2\nu} B_2 \equiv F_3 A_{2\nu-1} + H_{\nu+1}^2,$$

ossia

$$G_{2\nu} B_2 \equiv F_3 A_{2\nu-1} + B_2(\varphi_{\nu-1}^2 B_2 + 2\varphi_{\nu-1}\psi_{\nu-1}\omega_2) + \psi_{\nu-1}^2 \omega_2^2. \tag{24}$$

D'altra parte sussiste l'identità di immediata verifica:

$$x_3 F_3 \equiv (x_3 L_1 + x_0^2) B_2 + \omega_2^2$$

e quindi la (24) riducesi alla:

$$G_{2\nu} B_2 \equiv F_3(A_{2\nu-1} + x_3 \psi_{\nu-1}^2) + B_2[\varphi_{\nu-1}^2 B_2 + 2\varphi_{\nu-1}\psi_{\nu-1}\omega_2 - (x_3 L_1 + x_0^2)\psi_{\nu-1}^2],$$

e ciò implica l'esistenza d'una forma $M_{2\nu-3}$ tale che

$$A_{2\nu-1} \equiv M_{2\nu-3} B_2 - x_3 \psi_{\nu-1}^2.$$

Risulta allora:

$$G_{2\nu} \equiv M_{2\nu-3} F_2 + \varphi_{\nu-1}^2 B_2 + 2\varphi_{\nu-1}\psi_{\nu-1}\omega_2 - (x_3 L_1 + x_0^2)\psi_{\nu-1}^2.$$

12. Occupiamoci ora di superficie circoscritte ad una superficie del quart'ordine F_4, appartenente allo spazio ordinario.

Per $m = 4$ le (7), (8), (10) porgono:

$$\begin{cases} t = 2n(n-4) + s \\ p = 1 + \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{4} s \\ s \equiv 2n^2 \pmod 4), \end{cases} \tag{25}$$

e si ha inoltre (cfr. n. 9):

$$(26)\qquad \begin{cases} \varepsilon_l \geq 2\rho_l^2 + 2 - \frac{1}{4}s \\ \varepsilon_l^{(0)} \geq 2\rho_l^2 + 2 - \frac{1}{4}s \\ \vartheta_l = 4\rho_l^2 + 1 - \frac{1}{2}s \\ h_l = 4\rho_l \\ \pi_l = 2\rho_l^2 + 1 - \frac{1}{4}s, \end{cases}$$

ove

$$\begin{cases} \rho_l = l & \text{se } n \text{ è pari.} \\ \rho_l = l - \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Incominciamo con l'osservare che $\mathcal{C}$ può essere la completa intersezione di F_4 con un'altra superficie dello spazio, H_ν d'ordine ν, solo se $n = 2\nu$; d'altra parte, se $n = 2\nu$, la serie lineare $g_{N_0}^{R_0}$ segata su $\mathcal{C}$ dalle superficie d'ordine ν è certo *non speciale* se $s > 0$, giacchè $N_0 = 4\nu^2 = 2p - 2 + \frac{1}{2}s$; se ε_0 è il numero delle H_ν linearmente indipendenti e non contenenti F_4 come parte, si ha $\varepsilon_0 \geq 2 - \frac{s}{4}$; segue da ciò che se $0 < s \leq 4$ (ed $n = 2\nu$) la curva $\mathcal{C}$ è certo la completa intersezione di F_4 con una H_ν. Lo stesso può dirsi anche per $s = 0$, risultando in tal caso $N_0 = 2p - 2$ e quindi $R_0 \leq p - 1$, da cui $\varepsilon_0 \geq 1$.

Esaminiamo separatamente tutti i casi che in base alle (25) son *a priori* possibili, e cioè:

$$s = 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16 \quad \text{ed} \quad n = 2\nu$$
$$s = 2,\ 6,\ 10,\ 14 \quad \text{ed} \quad n = 2\nu + 1$$

a) $s = 0$, $n = 2\nu$: caso già trattato (anche da B. SEGRE).

b) $s = 2$, $n = 2\nu + 1$: *caso impossibile.* Risulterebbe (cfr. n. 9) $\varepsilon_1 \geq 2$, e le curve $\mathcal{E}$ sarebbero ∞^1 coniche (passanti per i due nodi di F_4) ciascuna delle quali dovrebbe essere conica di contatto di F_4 con un piano e quindi conterrebbe altri quattro nodi di F_4, contro l'ipotesi che F_4 non possegga linee multiple ([17]). In forza di quanto si è visto si conclude che su una F_4

([17]) Si badi che in tutto ciò è essenziale l'ipotesi che i punti doppi di F_4 siano punti doppi ordinari. Se, ad esempio, F_4 possedesse due tacnodi P_1, P_2 potrebbero esistere delle $G_{2\nu+1}$ tangenti ad F_4 lungo una curva passante per P_1, P_2; invero supposto che dotata di soli nodi non esistono curve di ordine $4\nu+2$ e genere $2\nu^2+2\nu+1$ passanti semplicemente per due nodi di F_4.

c) $s=4$, $n=2\nu$: anche questo caso è *impossibile* se non si rinuncia all'ipotesi che la curva $\mathcal{C}$ sia priva di singolarità; abbiamo visto infatti che se esiste su F_4 una curva $\mathcal{C}$ d'ordine 4ν e genere $2\nu^2$, essa è la completa intersezione di F_4 con una superficie H_ν, e se $\mathcal{C}$ passa per quattro nodi di F_4, essi sono necessariamente punti singolari di $\mathcal{C}$.

d) $s=6$, $n=2\nu+1$. Poichè $\varepsilon_1 \geq 1$, *esiste una conica $\mathcal{G}$ passante per i sei nodi che F_4 possiede su $\mathcal{C}$*, e tale conica è la residua intersezione di F_4 con una superficie d'ordine $\nu+1$, $H_{\nu+1}$, passante per $\mathcal{C}$. Il piano $B_1=0$ al quale la conica $\mathcal{G}$ appartiene, tocca F_4 lungo $\mathcal{G}$ e se $T_2=0$ è una quadrica passante per $\mathcal{G}$, esistono tre forme R_3, φ_ν, $\psi_{\nu-1}$ di gradi 3, ν, $\nu-1$ rispettivamente tali che

$$F_4 \equiv T_2^2 - B_1R_3, \qquad H_{\nu+1} \equiv \varphi_\nu B_1 - \psi_{\nu-1}T_2.$$

Se $G_{2\nu+1}$ è una superficie tangente ad F_4 lungo $\mathcal{C}$ esiste allora una forma $A_{2\nu-2}$ per cui

$$G_{2\nu+1}B_1 \equiv A_{2\nu-2}(T_2^2 - B_1R_3) + (\varphi_\nu B_1 - \psi_{\nu-1}T_2)^2$$

ossia

$$B_1(G_{2\nu+1} + A_{2\nu-2}R_3 - \varphi_\nu^2 B_1 + 2\varphi_\nu\psi_{\nu-1}T_2) \equiv T_2^2(\psi_{\nu-1}^2 + A_{2\nu-2}),$$

e ciò implica l'esistenza di una forma $M_{2\nu-3}$ per cui

$$A_{2\nu-2} + \psi_{\nu-1}^2 \equiv M_{2\nu-3}B_1\,;$$

ne segue che *tutte* le $G_{2\nu+1}$ tangenti semplicemente ad F_4 lungo $\mathcal{C}$ sono:

$$G_{2\nu+1} \equiv M_{2\nu-3}F_4 + \varphi_\nu^2 B_1 - 2\varphi_\nu\psi_{\nu-1}T_2 + \psi_{\nu-1}^2R_3 = 0.$$

e) $s=8$, $n=2\nu$: risulta $\varepsilon_1 \geq 2$; gli otto nodi di F_4 su $\mathcal{C}$ appartengono dunque ad ∞^1 quartiche ellittiche $\mathcal{G}$ ($h_1=4$, $\pi_1=1$), onde sono i *punti base di una rete di quadriche*. Se $B_2=0$ è una quadrica tangente ad F_4 lungo una $\mathcal{G}^{(0)}$ delle quartiche $\mathcal{G}$, e se $T_2=0$ è un'altra quadrica passante per $\mathcal{G}^{(0)}$, le superficie $T_2^2=0$ ed $F_4=0$ segano su B_2 la stessa curva, ed esiste quindi una forma quadratica R_2 per cui

$$F_4 \equiv T_2^2 - R_2B_2.$$

$F_4 \equiv M_2^2 - ABCD = 0$, con $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$ piani di uno stesso fascio ed M_2 forma quadratica, sono tangenti ad F_4 lungo una curva passante per i due tacnodi le superficie di equazione

$$G_{2\nu+1} \equiv F_4M_{2\nu-3} + \varphi_\nu^2A + 2\varphi_\nu\psi_{\nu-1}M_2 + \psi^2_{\nu-1}BCD = 0,$$

ove $M_{2\nu-3}$, φ_ν, $\psi_{\nu-1}$ sono arbitrarie forme di gradi uguali al rispettivo indice.

D'altra parte se $H_{\nu+1}$ è una superficie che contiene $\mathcal{C}^{(0)}$, risulta:

$$H_{\nu+1} \equiv \varphi_{\nu-1} B_2 - \psi_{\nu-1} T_2$$

con $\varphi_{\nu-1}$, $\psi_{\nu-1}$ forme di grado $\nu - 1$.

Sia allora $G_{2\nu}$ una superficie tangente ad F_4 lungo $\mathcal{C}$: esiste una forma $A_{2\nu-2}$ per cui:

$$G_{2\nu} B_2 \equiv A_{2\nu-2}(T_2^2 - R_2 B_2) + (\varphi_{\nu-1} B_2 - \psi_{\nu-1} T_2)^2,$$

e, ripetendo un ragionamento già fatto in precedenza, si conclude che *tutte* le superficie $G_{2\nu}$ che toccano semplicemente F_4 lungo la curva $\mathcal{C}$ sono:

$$G_{2\nu} \equiv F_4 M_{2\nu-4} + \varphi_{\nu-1}^2 B_2 - 2\varphi_{\nu-1}\psi_{\nu-1} T_2 + \psi_{\nu-1}^2 R_2 = 0.$$

f) $s = 10$, $n = 2\nu + 1$. Risulta $\varepsilon_2 \geq 4$ (ed invece $\varepsilon_1 \geq 0$) e quindi esistono (almeno) ∞^3 curve $\mathcal{C}$ del sesto ordine e di genere 3 ($h_2 = 6$, $\pi_2 = 3$) passanti per i dieci nodi che F_4 possiede su $\mathcal{C}$, e ciascuna di tali curve è curva di contatto di F_4 con una superficie cubica B_3; se

$$B_3 \equiv L_1 E_2 + \Omega_3$$

con L_1 forma lineare, $E_2 \equiv x_1 x_3 - x_2^2$, $\Omega_3 \equiv x_3^3 - 2x_0 x_2 x_3 + x_1 x_0^2$ (cfr. n. 11), risulta:

$$F_4 \equiv N_1 B_3 + \alpha_1^2 E_2 + 2\alpha_1 \beta_1 \omega_2 - (x_3 L_1 + x_0^2)\beta_1^2 = 0,$$

con N_1, α_1, β_1 forme lineari generiche ed $\omega_2 \equiv x_3^2 - x_0 x_2$, e ripetendo un ragionamento precedente si prova senza difficoltà che *tutte* le superficie d'ordine $2\nu + 1$ tangenti ad F_4 lungo $\mathcal{C}$ hanno equazione

$$G_{2\nu+1} \equiv M_{2\nu-3} F_4 + \varphi_{\nu-1}^2 (N_1 E_2 - \beta_1^2 x_3) + 2\varphi_{\nu-1}\psi_{\nu-1}(\alpha_1 E_2 - \omega_2 \beta_1) - \psi_{\nu-1}^2 B_3 = 0,$$

ove $M_{2\nu-3}$, $\varphi_{\nu-1}$, $\psi_{\nu-1}$ sono forme arbitrarie di grado uguale al rispettivo indice.

g, h) $s = 12$, $n = 2\nu$; $s = 14$, $n = 2\nu + 1$: non sono riuscito ad approfondire completamente questi due casi; ritengo tuttavia ch'essi non si possano presentare.

i) $s = 16$, $n = 2\nu$. F_4 è una superficie di KUMMER; ora, lo studio delle curve algebriche tracciate su una superficie di KUMMER a moduli generali è completamente esaurito dalla classica Memoria di G. HUMBERT sulle superficie iperellittiche citata in ([15]), ove trovasi una classificazione completa delle curve giacenti su F_4.

In particolare esiste una famiglia, che HUMBERT chiama « singolare », di curve d'ordine 4ν passanti per i 16 nodi di F_4, ciascuna delle quali è l'intersezione di F_4 con una superficie d'ordine $\nu + 2$ condotta per quattro coniche singolari appartenenti ad uno stesso degli ottanta gruppi di ROSENHAIN ([18]); la famiglia singolare dipende da $2\nu^2 - 3$ parametri, e si ha inoltre

---

([18]) Gruppo di ROSENHAIN è il gruppo di quattro piani singolari formanti un tetraedro avente per vertici quattro punti singolari; cfr. ROSENHAIN, Mémoires couronnées *Savants étrangeres,* t. XI; ed anche G. HUMBERT, loc. cit. in ([15]).

che per due curve di F_4 appartenenti ad essa, passa una superficie d'ordine 2ν la cui completa intersezione con F_4 è data dalle due curve in questione.

Sia ora $H_{\nu+2}$ una superficie d'ordine $\nu+2$ segante su F_4 la curva $\mathcal{C}$ e quattro coniche giacenti nei quattro piani $A_1=0$, $B_1=0$, $C_1=0$, $D_1=0$; se $G_{2\nu}$ è una superficie tangente ad F_4 lungo $\mathcal{C}$ le due superficie

$$G_{2\nu}A_1B_1C_1D_1=0, \qquad H_{\nu+2}^2=0$$

segano su F_4 la stessa curva, onde sussiste un'identità del tipo:

$$G_{2\nu}A_1B_1C_1D_1+F_4\Lambda_{2\nu}\equiv H_{\nu+2}^2, \tag{27}$$

ove $\Lambda_{2\nu}$ è una forma di grado 2ν. Se $\nu=2$, $G_{2\nu}$ è anch'essa una superficie di KUMMER, i cui sedici nodi appartengono alla curva $\mathcal{C}$ (19).

Altre identità analoghe alla (27) si ottengono, ad esempio, come segue: sia $B_{2\nu}$ una seconda superficie d'ordine 2ν circoscritta ad F_4 lungo una curva $\mathcal{E}$ appartenente anch'essa alla famiglia (singolare) in cui $\mathcal{C}$ è contenuta. Se $K_{2\nu}$ è una superficie d'ordine 2ν passante per $\mathcal{C}$ e per $\mathcal{E}$ (che insieme esauriscono l'intersezione di F_4 con $K_{2\nu}$), risulta:

$$A_{4\nu-4}F_4+B_{2\nu}G_{2\nu}\equiv K_{2\nu}^2, \tag{28}$$

$A_{4\nu-4}$ essendo un polinomio di grado $4\nu-4$.

È particolarmente notevole il caso $\nu=2$; la (28) riducesi alla

$$A_4F_4+B_4G_4\equiv K_4^2; \tag{29}$$

G_4 e B_4 sono anch'esse due superficie di KUMMER circoscritte ad F_4 e passanti per i 16 nodi di F_4 ed aventi su F_4 i 16 nodi; anche A_4 risulta una superficie di KUMMER circoscritta alle G_4 e B_4, le curve di contatto essendo su K_4 (20).

Aggiungo ancora che se G_4 ed M_4 sono due superficie di KUMMER tangenti ad F_4 lungo la stessa curva $\mathcal{C}$ (d'ordine 8, e genere 5), le ∞^1 superficie del fascio Σ da esse determinato, sono tutte tangenti ad F_4 lungo la stessa curva $\mathcal{C}$, e quindi sono tutte superficie di KUMMER aventi i sedici nodi su $\mathcal{C}$; ed anzi sono queste *tutte* le superficie (di KUMMER) tangenti ad F_4 lungo $\mathcal{C}$. I gruppi dei sedici nodi che su $\mathcal{C}$ hanno le singole superficie di Σ (ed in particolare il gruppo dei nodi di F_4), appartengono ad una stessa g_{16}^1.

---

(19) F. KLEIN, in *Configurationen bei der Kummers' Flachen*, « Math. Ann. », t. XXVII, ha riconosciuto con considerazioni fondate sulla *Liniengeometrie* l'esistenza di superficie di KUMMER G_4 circoscritte ad una data F_4 di KUMMER, approfondendo lo studio della configurazione dei sedici punti e dei sedici piani singolari delle G_4.

(20) Cfr. G. HUMBERT, loc. cit. in (15), p. 111.

OSSERVAZIONE. - Rileviamo esplicitamente che sopra una F_4 di KUMMER a moduli generali, ove ogni curva algebrica è curva di contatto con un'altra superficie dello spazio, *non esistono,* come risulta dalla più volte citata Memoria di HUMBERT, curve prive di singolarità e passanti per 2, 4, 12, 14 dei 16 punti singolari di F_4.

13. Vogliamo ora mostrare come il metodo impiegato possa essere utilizzato anche per $m > 4$, accennando rapidamente ai casi $m = 5$, ed $m = 6$.

Per $m = 5$ le (7), (8), (9), (10) porgono:

$$\text{(30)}\qquad \begin{cases} n = 2\nu \\ t = 5\nu(2\nu - 5) + s \\ p = 1 + \frac{5}{2}\nu(\nu + 1) - \frac{1}{4}s \\ s \equiv 0 \pmod 4 \quad (\text{e quindi } s = 0, 4, 8, \dots, 24, 28, ?)\,; \end{cases}$$ [21]

si ha inoltre, con le notazioni del n. 9,

$$N_l = 5\nu(\nu + l), \qquad h_l = 5l, \qquad \pi_l = \frac{5}{2}l(l + 1) + 1 - \frac{1}{4}s$$

ed anche:

$$\begin{cases} \varepsilon_l \geq 5 + \frac{5}{2}l(l - 1) - \frac{1}{4}s - i_l \\ \varepsilon_l^{(0)} \geq 5 + \frac{5}{2}l(l - 1) - \frac{1}{4}s - i_l^{(0)} \\ \vartheta_l = 5l^2 - \frac{1}{2}s + 1. \end{cases}$$

a) $s = 0$. Dimostriamo che $\mathcal{C}$ *è necessariamente la completa intersezione di* F_5 *con una* L_ν. Invero risulta $N_1 = 5\nu(\nu + 1) = 2p - 2$ e quindi $i_1 \leq 1$ ed $\varepsilon_1 \geq 4$. Esistono allora ∞^3 superficie $H_{\nu+1}$ passanti per $\mathcal{C}$ e contenenti ulteriormente una sezione piana $\mathcal{E}$ di F_5 $(\pi_1 = 6)$. Se $H_{\nu+1}^{(0)}$ è una di queste e se $K_1 = 0$ è il piano della curva $\mathcal{E}^{(0)}$ contenuta in $H_{\nu+1}^{(0)}$, poichè $H_{\nu+1}^{(0)}$ passa per $\mathcal{E}^{(0)}$, esistono due forme L_ν ed $S_{\nu-4}$ tali che:

$$H_{\nu+1}^{(0)} \equiv K_1 L_\nu + F_5 S_{\nu-4}\,;$$

dunque il sistema $H_{\nu+1}^{(0)} = F_5 = 0$ è equivalente all'altro $F_5 = K_1 L_\nu = 0$ onde $\mathcal{C}$ è la completa intersezione di F_5 con la superficie $L_\nu = 0$.

---

[21] Non è ancora noto se esista una F_5 dello spazio ordinario dotata di 32 nodi. B. SEGRE, nella Nota: *Sul massimo numero di nodi delle superficie algebriche,* già citata in [5], ha dimostrato tuttavia che una F_5 soddisfacente a certe ipotesi di generalità non può possedere più di 31 punti doppi isolati, ed è noto che tale limite è raggiunto dalla F_5 di TOGLIATTI (Cfr. E. G. TOGLIATTI, *Una notevole superficie del 5° ordine con soli punti doppi isolati,* « Festschr. R. Fueter », Zürich, (1940), pp. 127-132).

b) $s = 4$: *caso impossibile.* Risulta $N_1 = 5\nu(\nu+1) = 2p$ e quindi $i_1 = 0$, $\varepsilon_1 \geq 4$, $\pi_1 = 5$; se $\mathcal{C}$ è non singolare per i quattro nodi di F_5 passerebbero tutti i piani dello spazio, e ciò è manifestamente assurdo.

c) $s = 8$: *caso impossibile.* Risulta: $i_1 = 0$, $\varepsilon_1 \geq 3$, $\pi_1 = 4$.

d) $s = 12$: *caso impossibile.* Risulta $i_1 = 0$, $\varepsilon_1 \geq 2$, $\pi_1 = 3$: esisterebbero ∞^1 sezioni piane $\mathcal{G}$ passanti per i 12 nodi che F_5 possiede su $\mathcal{C}$, onde F_5 avrebbe una retta doppia.

e) $s = 16$; risulta $i_1 = 0$, $\varepsilon_1 \geq 1$, $\pi_1 = 2$. I sedici nodi di F_5 appartengono ad una curva $\mathcal{G}$ di quint'ordine e di genere due appartenente ad F_5; tale curva è contenuta in una quadrica B_2, la quale è necessariamente un cono (se no la curva di quint'ordine $\mathcal{G}^*$, residua intersezione di F_5 con B_2 segherebbe $\mathcal{G}$ in 16 anzichè in 13 punti e quindi B_2 sarebbe tangente ad F_5 lungo $\mathcal{G}$, mentre una quadrica non specializzata non può essere circoscritta ad una F_5). Il cono B_2 tocca F_5 lungo $\mathcal{G}$.

Se $B_2 \equiv x_0^2 - x_1x_2 = 0$, si ha:

$$F_5 \equiv B_2M_3 + x_1\varphi_2^2 + 2x_0\varphi_2\psi_2 + x_2\psi_2^2 = 0$$

$$G_{2\nu} \equiv \Lambda_{2\nu-5}F_5 + L_{\nu-1}^2B_2 + 2(\varphi_2x_1 + \psi_2x_0)L_{\nu-1}N_{\nu-2} + (x_1M_3 - \psi_2^2)N_{\nu-2}^2 = 0,$$

ove M_3, φ_2, ψ_2, $\Lambda_{2\nu-5}$, $L_{\nu-1}$, $N_{\nu-2}$ sono forme arbitrarie di grado uguale al rispettivo indice.

f) $s = 20$. Risulta $i_2 = 0$, $\varepsilon_2 \geq 5$ (mentre $\varepsilon_1 \geq 0$). Esistono allora ∞^4 curve $\mathcal{G}$ d'ordine 10 e genere 11 passanti per i 20 nodi di F_5. Poichè $\varepsilon_2^{(0)} \geq 5$ e $\vartheta_2 = 11$ non si può affermare che una (e quindi anche ogni altra) delle curve $\mathcal{G}$ sia curva di contatto di F_5 con una superficie del quart'ordine B_4 avente su $\mathcal{G}$ dieci punti doppi; ma *se esiste* una curva $\mathcal{G}$ soddisfacente a tale condizione, si può supporre che la superficie B_4 tangente lungo di essa ad F_5 abbia equazione (cfr. n. 12, *f*):

$$B_4 \equiv N_1S_3 + \alpha_1^2E_2 + 2\alpha_1\beta_1\omega_2 - (x_3L_1 + x_0^2)\beta_1^2 = 0,$$

ove è $S_3 \equiv L_1E_2 + \Omega_3$, ed L_1, N_1, α_1, β_1 sono forme lineari arbitrarie, ed inoltre

$$E_2 \equiv x_1x_3 - x_2^2, \qquad \Omega_3 \equiv x_3^3 - 2x_0x_2x_3 + x_1x_0^2, \qquad \omega_2 \equiv x_3^2 - x_0x_2.$$

Risulta, come subito si verifica:

$$E_2B_4 \equiv (\alpha_1E_2 + \beta_1\omega_2)^2 + S_3(N_1E_2 - \beta_1^2x_3),$$

ed allora l'equazione di F_5 è:

$$F_5 \equiv \Lambda_1B_4 + S_3M_1^2 + 2M_1Q_1(\alpha_1E_2 + \beta_1\omega_2) - Q_1^2(N_1E_2 - \beta_1^2x_3) = 0$$

ove Λ_1, M_1, Q_1 sono forme lineari; e poichè si ha:

$$F_5S_3 \equiv [S_3M_1 + Q_1(\alpha_1E_2 + \beta_1\omega_2)]^2 + B_4(\Lambda_1S_3 - E_2Q_1^2),$$

sono tangenti ad F_5 lungo una curva d'ordine 5ν passante per i 20 nodi di F_5, le superficie

$$G_{2\nu} \equiv F_5 D_{2\nu-5} + P_{\nu-2}^2 B_4 + 2P_{\nu-2} T_{\nu-2}[S_3 M_1 + Q_1(\alpha_1 E_2 + \beta_1 \omega_2)] - T_{\nu-2}^2(\Lambda_1 S_3 - E_2 Q_1^2) = 0$$

dove $D_{2\nu-5}$, $P_{\nu-2}$, $T_{\nu-2}$ denotano forme arbitrarie di grado uguale al rispettivo indice.

g) i casi $s = 24$, $s = 28$, che non ho approfondito, presentano maggiori difficoltà in quanto — per essi — non si può più sfruttare la conoscenza dei possibili tipi di superficie circoscritte ad una superficie d'ordine inferiore a cinque.

14. Per $m = 6$, i casi a priori possibili sono i seguenti:

a) $n = 2\nu$, $s = 0, 4, 8, \ldots, 56, 60, ?$ $[s \equiv 0 \pmod 4]$ [22]

b) $n = 2\nu + 1$, $s = 3, 7, 11, \ldots, 63$ $[s \equiv 3 \pmod 4]$;

si possono certamente verificare i seguenti:

1) $n = 2\nu$, $s = 0, 24, 32, 40$

2) $n = 2\nu + 1$, $s = 15, 27, 31, 35$,

ma non ho approfondito i casi rimanenti.

Aggiungo che, *qualora $s = 0$, la curva $\mathcal{C}$ è certamente la completa intersezione di F_6 con una superficie d'ordine ν, L_ν.*

Invero, se $s = 0$, risulta $i_2 \leq 1$ ($i_2 = 1$ se la $g_{N_2}^{R_2}$ è la serie canonica di $\mathcal{C}$), $\varepsilon_2 \geq 10$, $h_2 = 12$, $\pi_2 = 25$.

Esistono ∞^9 superficie d'ordine $\nu + 2$ seganti su F_6, fuori di $\mathcal{C}$, ∞^9 curve $\mathcal{G}$ d'ordine 12, e genere 25: le curve $\mathcal{G}$ sono le complete intersezioni di F_6 con le ∞^9 quadriche dello spazio [23].

Se $K_2 = F_6 = 0$ è una $\mathcal{G}^{(0)}$ di tali curve $\mathcal{G}$, ed $H_{\nu+2}$ è la superficie d'ordine $\nu + 2$ che contiene $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\mathcal{C}$, esistono due forme L_ν e $T_{\nu-4}$ per cui

$$H_{\nu+2} \equiv L_\nu K_2 + T_{\nu-4} F_6,$$

e quindi il sistema $H_{\nu+2} = F_6 = 0$ equivale all'altro $F_6 = L_\nu K_2 = 0$, onde la superficie L_ν passa per $\mathcal{C}$.

---

(22) B. SEGRE, nella Nota citata in (5) ed in (21), ha provato che una F_6 dello spazio ordinario soddisfacente a certe ipotesi di generalità, non può possedere più di 63 punti doppi, ed ha costruito una F_6 per la quale tale massimo è raggiunto; ma non è ancora completamente accertato che non esistano F_6 dotate di 64 nodi. È stata invece provata la non esistenza di F_6 con 67 nodi: cfr. A. B. BASSET, *The maximum number of double points on a surface*, « Nature », 73, (1906), p. 246.

(23) Si ricordi che 25 è il massimo genere delle curve sghembe d'ordine 12, e che ogni curva di genere massimo tra quelle di dato ordine appartiene ad una quadrica, e se è d'ordine pari, essa è la completa intersezione di tale quadrica con un'altra superficie dello spazio.