Sull'equivalenza tra matrici normali di Severi.

Memoria di Mario Benedicty (a Roma).

Sunto. - *Si tratta il problema di determinare se e in quali casi gli interi caratteristici p, δ_1, δ_2, ρ e i divisori elementari delle matrici normali di* Severi *equivalenti ad una prefissata matrice ω dello stesso tipo possono essere diversi da quelli della ω. Il problema è risolto completamente se $p = \rho$ ovvero se $p = \rho + 1$; è risolto per le matrici generiche se $p > \rho + 1$.*

1. **Introduzione.** - È noto ciò che si intende per matrice quasi abeliana: è la matrice dei periodi primitivi di un corpo di funzioni quasi abeliane. Se si introduce un siffatto corpo nel modo indicato in $a)$ da Severi [7, p. 124], la definizione di matrice quasi abeliana è la seguente: è una matrice complessa $\omega^{(g, g')}$ $(g' \leq 2g)$, equivalente, nel senso più sotto precisato, ad una matrice normale di Severi, intendendosi qui per *matrice normale di* Severi una matrice del tipo

$$\left\| \begin{matrix} A^{(p)} & O^{(p, \delta_1)} & \Omega^{(p)} \\ O^{(\delta_1, p)} & U^{(\delta_1)} & \Phi'^{(\delta_1, p)} \\ O^{(\delta_2, p)} & O^{(\delta_2, \delta_1)} & \Psi'^{(\delta_2, p)} \end{matrix} \right\|, \tag{1}$$

nella quale:

A è una matrice diagonale non degenere tale che $\Delta = A^{-1}$ sia una matrice (diagonale) i cui elementi principali $d_1, d_2, \dots, d_p$ sono interi positivi con $d_1 = 1$ e d_{i-1} divisore di d_i $(i = 2, 3, \dots, p)$;

$\Omega = \Omega' + i\Omega''$ è una matrice complessa simmetrica la cui parte immaginaria Ω'' è la matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita e positiva. Le condizioni precedenti equivalgono a dire che $\| A \ \Omega \|$ è una matrice normale di Riemann; essa si dice *associata* alla (1);

$\Phi' = \| O^{(\delta_1, \rho)} \quad \Phi^{(\delta_1, p-\rho)} \|$, con Φ matrice complessa arbitraria;

$\Psi' = \left\| \begin{matrix} U^{(\rho)} & \Psi^{(\rho, p-\rho)} \\ O^{(\delta_2-\rho, \rho)} & O^{(\delta_2-\rho, p-\rho)} \end{matrix} \right\|$, con Ψ matrice complessa arbitraria.

Due matrici complesse simili $\omega^{(g, g')}$, $\omega^{*(g, g')}$ si dicono *equivalenti* se esiste una matrice complessa non degenere $\beta^{(g)}$ ed una matrice intera unimodulare $B^{(g')}$ tali che:

$$\omega^* = \beta\omega B. \tag{2}$$

Questa relazione risulta riflessiva, simmetrica e transitiva e quindi matrici equivalenti ad una matrice quasi abeliana sono quasi abeliane.

Osservo che la definizione qui data di matrice normale di SEVERI è lievemente diversa da quella originaria di SEVERI [7, p. 163], ma è ad essa equivalente, come sarà provato nel n. 12.

Se invece si definisce un corpo di funzioni quasi abeliane nell'uno o nell'altro dei modi, equivalenti, indicati con *b*) e *c*) da SEVERI [7, p. 124] e come *matrice quasi abeliana* una matrice di periodi primitivi di un siffatto corpo, si ottiene una definizione forse più generale, e coincidente con la precedente sotto l'ipotesi L [7, p. 145].

Per brevità di discorso indicherò con

MNS una *matrice normale di* SEVERI, cioè una matrice del tipo (1) o del successivo tipo (34);

MES una *matrice equivalente ad una* MNS, cioè una matrice quasi abeliana nel senso della prima definizione di questo n.;

MQA una *matrice quasi abeliana* nel senso della seconda definizione di questo n.

Ovviamente le MNS sono particolari MES, e queste, in base al terzo teorema di esistenza di SEVERI [7, p. 242] sono particolari MQA, coincidendo con esse sotto l'ipotesi L.

L'argomento del presente lavoro, in cui mi occupo esclusivamente di MES, è esposto brevemente nella nota lincea [3], nella quale trovansi pure riassunti i principali risultati. Il problema trattato, da me già posto in altri lavori [1], [2], è il seguente.

Una MNS possiede e determina gli *interi caratteristici* p, δ_1, δ_2, ρ e i *divisori elementari* $d_1, d_2, \ldots, d_p$; ad una MES rimangono associati gli interi caratteristici e i divisori elementari di ogni MNS ad essa equivalente; li chiamo *interi associati* e *divisori elementari* della MES di partenza. Come ho provato con esempi, non avviene però sempre che gli interi associati e i divisori elementari di una MES siano univocamente determinati da questa, la ragione essendo che una MES, in particolare una MNS, non è sempre equivalente ad una sola MNS. Anzi, non appena $p > 0$, ogni MNS, e quindi ogni MES, è equivalente ad infinite MNS, in conseguenza del lemma stabilito in [1, p. 334], secondo cui ogni MNS (1) è equivalente ad una MNS avente gli stessi interi caratteristici e per la quale la matrice normale di RIEMANN associata è una qualsiasi matrice normale di RIEMANN equivalente alla $\| A\ \Omega \|$. Tale fenomeno non presenterebbe però alcun inconveniente se ad esso non si sovrapponesse il fatto che in certi casi le MNS non hanno tutte i medesimi divisori elementari o i medesimi interi caratteristici. Per quanto riguarda i primi è immediata conseguenza del lemma citato che, s'intende per $p \geq 2$, una MES non individua i propri divisori elementari se non li individua la matrice di RIEMANN $\| A\ \Omega \|$ associata ad una MNS equivalente alla MES. Ma, come si vedrà, esistono intere categorie di MNS, e quindi di MES, anche in un certo senso generiche, che non individuano nemmeno i propri interi associati. Si pone dunque il problema di determinare *tutti* i sistemi di interi associati e di divisori elementari di una prefissata MES; ne dò qui la risoluzione completa nei casi $p - \rho = 0$ e $p - \rho = 1$, nonchè nei casi restanti ($p - \rho > 1$) quando la matrice sia *generica*; con ciò intendo che in una delle MNS ad essa equivalenti gli elementi $\tau_{r,s}$ ($r \geq s$; $r, s = 1, 2, \ldots, p$) della matrice Ω e tutti gli elementi delle matrici Φ e Ψ, come pure le loro parti reali e i coefficienti dell'immaginario sono algebricamente indipendenti sul campo dei numeri razionali.

Gli argomenti del presente lavoro sono così distribuiti. Nei nn. 2, 3 trovansi alcune proprietà generali della relazione di equivalenza (2) tra MQA; nel n. 4 si studiano le MES per le quali $p = \rho$; nei nn. 5, 6 si considerano alcune proprietà che permetteranno di concludere, nel n. 7 per le MES relative al caso $p - \rho = 1$ e nei nn. 8, 9 per quelle relative ai casi $p - \rho > 1$. Ai nn. $10 \div 13$ sono infine rinviate le dimostrazioni di alcuni dettagli dei nn. precedenti.

Per semplificare la scrittura di alcune formule ho adottato le seguenti convenzioni:

$M^{(r,s)}$ indica una matrice di tipo (r, s), cioè ad r righe ed s colonne; $M^{(r,r)}$ o $M^{(r)}$ una matrice quadrata ad r righe e colonne; $U^{(r)}$ la matrice diagonale unitaria ad r righe e colonne; O una matrice nulla.

Quando in una matrice taluni elementi non sono indicati in alcun modo, nemmeno con la punteggiatura, son da intendersi nulli.

Quando una matrice è decomposta in matrici minori, i tipi di queste saranno indicati in maniera sufficiente per determinare completamente la natura della decomposizione.

Talune lettere, indicanti matrici, acquisteranno significato diverso nei vari nn.; esso è precisato volta per volta, sì da non dar luogo ad equivoci.

2. **Proprietà dell'equivalenza tra MQA.** - Allo scopo di semplificare la soluzione del problema posto nel n. 1 premetto in questo n. alcune proprietà della relazione di equivalenza (2).

I. Siano ω, ω^* due matrici complesse simili e ω_1, ω_1^* due matrici complesse ad esse rispettivamente equivalenti. *Esiste allora una corrispondenza biunivoca tra le relazioni* (2) *intercorrenti tra* ω, ω^* *e le relazioni dello stesso tipo intercorrenti tra* ω_1, ω_1^*. Se infatti si fissa una delle relazioni di equivalenza tra ω ed ω_1, e una tra ω^* ed ω_1^*, e siano esse

$$\omega_1 = \beta_0 \omega B_0, \qquad \omega_1^* = \beta_0^* \omega^* B_0^*,$$

ogni relazione (2) tra ω, ω^* dà luogo ad una relazione:

$$\omega_1^* = \beta_1 \omega_1 B_1 \tag{3}$$

tra ω_1, ω_1^*, perchè da $\omega_1^* = \beta_0^* \omega^* B_0^* = \beta_0^* \beta \omega B B_0^* = \beta_0^* \beta \beta_0^{-1} \omega_1 B_0^{-1} B B_0^*$, segue che vale la (3) con $\beta_1 = \beta_0^* \beta \beta_0^{-1}$, $B_1 = B_0^{-1} B B_0^*$, le quali sono ovviamente matrici del tipo richiesto. Viceversa dalla (3) si deduce la (2) con

$$\beta = \beta_0^{*-1} \beta_1 \beta_0, \qquad B = B_0 B_1 B_0^{*-1},$$

ed ovviamente relazioni diverse tra una delle due coppie di matrici non possono dar luogo alla medesima relazione tra l'altra coppia di matrici. Se tra ω, ω^*, ovvero tra ω_1, ω_1^*, non intercorresse nessuna relazione (2), non ne intercorrerebbe alcuna nemmeno tra ω_1, ω_1^* o rispettivamente tra ω, ω^*, e ciò in conseguenza della transitività dell'equivalenza.

II. Conseguenza immediata dell'osservazione precedente è che *lo studio delle relazioni* (2) *tra due MES è equivalente allo studio delle relazioni* (2) *tra due MNS.*

III. Siano $\omega^{(g,g')}$, $\omega^{*(g,g')}$ due matrici complesse simili, e siano h, h^* le loro rispettive caratteristiche; esistono allora due matrici ω_1, ω_1^* rispettivamente equivalenti ad ω, ω^* e della forma:

$$\omega_1^{(g,g')} = \left\| \begin{matrix} \omega_2^{(h,g')} \\ O^{(g-h,g')} \end{matrix} \right\|, \qquad \omega_1^{*(g,g')} = \left\| \begin{matrix} \omega_2^{*(h^*,g')} \\ O^{(g-h^*,g')} \end{matrix} \right\|,$$

avendo ω_2, ω_2^* rispettivamente la caratteristica h, h^*.

Ciò posto: *condizione necessaria e sufficiente affinchè tra* ω, ω^* *intercorra una relazione* (2) *è che una relazione dello stesso tipo intercorra tra* ω_2, ω_2^*.

Si osservi anzitutto che condizione necessaria perchè intercorra una relazione (2) tra ω, ω^*, ovvero tra ω_1, ω_1^*, ovvero tra ω_2, ω_2^* è che sia $h = h^*$. Sia dunque $h = h^*$. Sia inoltre:

$$\omega_2^* = \beta_2 \omega_2 B_2 \tag{5}$$

una relazione del tipo (2) tra ω_2, ω_2^*; posto:

$$\beta_1 = \left\| \begin{matrix} \beta_2^{(h)} & O \\ O & U^{(g-h)} \end{matrix} \right\|,$$

si ha:

$$\beta_1 \omega B_2 = \left\| \begin{matrix} \beta_2 & O \\ O & U \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \omega_2 \\ O \end{matrix} \right\| B_2 = \left\| \begin{matrix} \beta_2 \omega_2 B_2 \\ O \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \omega_2^* \\ O \end{matrix} \right\| = \omega_1^*,$$

ove evidentemente β_1 non è degenere. Se viceversa vale la (2) e quindi la (3), scritta β_1 nella forma:

$$\beta_1 = \left\| \begin{matrix} \beta_2^{(h)} & \beta_{12}^{(h,g-h)} \\ \beta_{21}^{(g-h,h)} & \beta_{22}^{(g-h)} \end{matrix} \right\|,$$

si ha:

$$\left\| \begin{matrix} \omega_2^* \\ O \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \beta_2 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \omega_2 \\ O \end{matrix} \right\| B_1 = \left\| \begin{matrix} \beta_2\omega_2 B_1 \\ \beta_{21}\omega_2 B_1 \end{matrix} \right\|,$$

$$\begin{cases} \omega_2^* = \beta_2\omega_2 B_1 \\ \beta_{21}\omega_2 B_1 = O. \end{cases}$$

Dalla seconda relazione segue che $\beta_{21}\omega_2 = O$ e quindi $\beta_{21} = O$ perchè ω_2 è di caratteristica uguale al numero delle righe; e poi da $\beta_{21} = O$, $|\beta_1| \neq 0$ segue $|\beta_2| \neq 0$ e quindi, dalla prima, una relazione (5).

IV. Il calcolo precedente prova inoltre che *tutte e sole le relazioni del tipo* (2) *che intercorrono tra* ω_1, ω_1^* *e che sono relative ad una fissata* B, *sono date dalla* (3), *con*

$$\beta_1 = \left\| \begin{matrix} \beta_2 & \beta_{12} \\ O & \beta_{22} \end{matrix} \right\|,$$

essendo β_2 *la matrice determinata dalla relazione* (5), *valida per ipotesi e* β_{12}, β_{22} *matrici arbitrarie, salva la condizione* $|\beta_{22}| \neq 0$.

V. Dalle osservazioni III e IV segue che *lo studio delle relazioni* (2) *tra due matrici complesse equivale, a meno dell'indeterminazione precisata nella* β_1, *allo studio delle analoghe relazioni tra due matrici complesse aventi caratteristica uguale al numero delle righe.*

VI. Si consideri una MNS a g righe e g' colonne, e siano p, δ_1, δ_2, ρ i suoi interi caratteristici e h la sua caratteristica; dalla forma stessa della matrice segue $h = p + \delta_1 + \rho$, $g = p + \delta_1 + \delta_2$, $g' = 2p + \delta_1$. Se si considera un'altra MNS ω^* equivalente alla precedente, e se si indicano con g^*, g'^*, h^* il numero delle righe e delle colonne e la caratteristica e con p^*, δ_1^*, δ_2^*, ρ^* gli interi caratteristici della nuova matrice, dalle ovvie relazioni $g = g^*$, $g' = g'^*$, $h = h^*$ segue facilmente, posto $p - p^* = k$:

$$(7) \qquad \begin{aligned} & p^* = p - k \\ & \delta_1^* = \delta_1 + 2k \\ & \delta_2^* = \delta_2 - k \\ & \rho^* = \rho - k \\ & -\rho^* \leq k \leq \left[\frac{\delta_1^*}{2}\right], \quad \text{ossia} \quad -\left[\frac{\delta_1}{2}\right] \leq k \leq \rho. \end{aligned}$$

Le (7) *sono dunque condizioni necessarie perchè due MNS possano essere equivalenti.* Si osservi inoltre che $p - \rho = p^* - \rho^* = g - h = g^* - h^*$ è il valore comune della differenza tra il numero delle colonne e la caratteristica in ciascuna matrice.

VII. Dalle osservazioni II e V, tenuto conto che una MNS di caratteristica uguale al numero delle righe è caratterizzata da $\delta_2 = \rho$, nonchè del fatto che matrici equivalenti hanno caratteristiche uguali, segue che *lo studio delle relazioni* (2) *tra due MES equivale, a meno dell'indeterminazione insita nella* β, *allo studio delle relazioni dello stesso tipo tra MNS per le quali i caratteri* δ_2, ρ *sono uguali tra loro.* Si osservi che, per quanto detto, se ciò accade in una delle due matrici equivalenti, lo stesso accade nell'altra.

Più precisamente, tutte le relazioni (2) tra due MES ω, ω^* si otterranno al seguente modo: si considerino tutte le relazioni (5) tra le MNS ω_2, ω_2^* costituite dalle prime $h = h^*$ righe di due fissate MNS ω_1, ω_1^* rispettivamente equivalenti ad ω, ω^*; si passi da ciascuna di queste a tutte le relazioni (3) tra ω_1, ω_1^*; esse sono date dalla (3) essendo β_1 la matrice data dalla (6); da ciascuna di queste relazioni si passi poi alla (2) mediante le (4).

3. **Seguito.** - Allo scopo di ridurre ancora il problema proposto è utile il seguente teorema, che spiega altresì una certa analogia tra le considerazioni fatte nell'osservazione IV del n. 2 e taluni risultati di CONFORTO.

Per *relazione di* HURWITZ-CONFORTO relativa ad una MQA ω intendo una relazione

$$\lambda\omega = \omega I, \tag{8}$$

nella quale $\lambda^{(g)}$ è una matrice complessa e $I^{(g')}$ una matrice intera; una siffatta relazione si dirà *banale* se è simultaneamente $\lambda = \gamma U^{(g)}$, $I = \gamma U^{(g')}$, con γ intero; si dirà *non degenere* se è simultaneamente $|\lambda| \neq 0$, $|I| \neq 0$, si dirà una *relazione propria* se è non banale, non degenere e tale che I sia intera unimodulare. Il teorema cui accennavo è il seguente:

TEOREMA I. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè due MQA simili* $\omega^{(g,g')}$, $\omega^{*(g,g')}$, *per le quali vale una relazione* (2), *rendano soddisfatta un'altra relazione:*

$$\omega^* = \beta^*\omega B^*, \tag{9}$$

distinta dalla (2), *è che una almeno delle* ω, ω^* *renda soddisfatta una relazione propria di* HURWITZ-CONFORTO. *E se, valendo la* (2), *una delle due matrici rende soddisfatta una relazione propria di* HURWITZ-CONFORTO, *ciò accade anche per l'altra.*

Per relazione (9) *distinta* dalla (2) si intende che non è simultaneamente $\beta^* = \varepsilon\beta$, $B^* = \varepsilon B$, con $\varepsilon = \pm 1$.

Valga infatti la (2) e sia (8) una relazione propria di HURWITZ-CONFORTO relativa alla ω. Se ne deduce $\omega^* = \beta\lambda^{-1}\omega I B$; tale relazione non sarebbe distinta dalla (2) solo se fosse $\beta\lambda^{-1} = \varepsilon\beta$, $IB = \varepsilon B$, da cui $\lambda = \varepsilon U$, $I = \varepsilon U$, cosa che è stata esclusa.

Analogamente si ragiona se è verificata una relazione del tipo della (8) per la ω^*.

Siano viceversa (2), (9) due distinte relazioni tra ω, ω^*. Ne segue successivamente $\beta\omega B = \beta^*\omega B^*$, $\beta^{*-1}\beta\omega = \omega B^* B^{-1}$ e $\beta^{-1}\omega^* B^{-1} = \beta^{*-1}\omega^* B^{*-1}$,

$\beta^*\beta^{-1}\omega^* = \omega^* B^{*-1}B$ cioè relazioni non degeneri di HURWITZ-CONFORTO per la ω, rispettivamente per la ω^*, nelle quali la matrice intera che prende il posto della B è unimodulare; tali relazioni non sono banali, perchè, se lo fossero, si avrebbe $\beta^{*-1}\beta = \beta^*\beta^{-1} = \varepsilon U$, $B^*B^{-1} = B^{*-1}B = \varepsilon U$, cioè simultaneamente $\beta^* = \varepsilon\beta$, $B^* = \varepsilon B$, cosa che è stata esclusa.

Inoltre, se valgono la (2) e la (8), per la parte diretta del teorema dimostrato vale una (9) distinta dalla (2) e quindi, per la parte inversa, una relazione propria di HURWITZ-CONFORTO per la ω^*. Il teorema I è così completamente dimostrato.

In base ai risultati finora ottenuti si può affermare che: *tutte le relazioni* (2) *tra due MES* ω, ω^* *si possono costruire non appena sia nota una relazione* (2) *tra le MNS* ω_2, ω_2^* *costituite dalle prime* $h = h^*$ *righe di due MNS rispettivamente equivalenti a* ω, ω^* *e tutte le relazioni proprie di* HURWITZ-CONFORTO *di una delle due MNS* ω_2, ω_2^*.

Le relazioni di HURWITZ-CONFORTO per una MES sono state studiate da CONFORTO nella Memoria [4] — egli le aveva chiamate *relazioni generalizzate di* HURWITZ — con due complementi che trovansi nella Memoria [6]; sono tutte note quando sia $p = \rho$ ovvero quando, essendo $p < \rho$, la MES sia generica nel senso precisato nel n. 1 del presente lavoro; in quest'ultimo caso la (8) è soddisfatta solo per $I = \gamma U$.

4. Equivalenza tra MNS per le quali $p = \rho$. - In questo n. e nei seguenti nn. $5 \div 9$ cerco le MNS che sono equivalenti a qualche MNS avente interi caratteristici diversi, limitandomi a considerare MNS per le quali $\delta_2 = \rho$; tale limitazione non è restrittiva in conseguenza dell'osservazione V del n. 2.

Tratto a parte il caso in cui per una, e quindi anche per l'altra, delle due matrici considerate sia $p = \rho$, caso che, per la sua estrema semplicità, si presenta di sua natura distinto dal caso $p > \rho$.

Siano infatti $\omega^{(g,g)}$, $\omega^{*(g,g)}$ due MNS per le quali $p = \rho = \delta_2$, $p^* = \rho^* = \delta_2^*$; esse sono quindi due matrici quadrate non degeneri; ne segue che, presa comunque $B^{(g)}$ intera unimodulare, è $\omega^* = (\omega^* B^{-1}\omega^{-1})\omega B$ e quindi le due matrici sono senz'altro equivalenti; inoltre, grazie alla $U^{(g)} = \omega^{-1}\omega$, sono entrambe equivalenti alla matrice diagonale unitaria dello stesso ordine.

Tenuto conto delle osservazioni fatte, si possono dunque enunciare i seguenti teoremi.

TEOREMA II. - *Due MNS simili per le quali sia* $p = \rho$, $p^* = \rho^*$ *sono sempre equivalenti tra loro e alla MNS di caratteri* $p = \rho = 0$ *e dello stesso tipo.*

TEOREMA III. - *Una MES del tipo* (g, g') *avente caratteristica uguale al numero delle colonne, ammette gli interi associati* $p = k$, $\delta_1 = g' - 2k$, $\delta_2 = g - g' + k$, $\rho = k$ $(k = 0, 1, \ldots, [g'/2])$ *e divisori elementari arbitrari.*

Il teorema II era stato osservato da CONFORTO nel caso $g = g'$ e da me [1] nel caso generale.

5. **Una proprietà relativa a MNS equivalenti per le quali** $p > \rho$. - Per i seguenti nn. $5 \div 9$ sia $\omega^{(g, g')}$ una prefissata MNS per la quale si abbia $p > \rho = \delta_2$; sia $\omega^{*(g, g')}$ una qualunque MNS equivalente ad ω attraverso la relazione (2); una siffatta matrice esiste certamente, non fosse altro che la ω stessa, quando sia $\beta = U$, $B = U$; è in ogni caso $p^* > \rho^* = \delta_2^*$. Salvo a cambiare le denominazioni delle due matrici, si può supporre $p - p^* = k \geq 0$. Nella ω data dalla (1) e nella ω^* scritta in maniera analoga si ponga rispettivamente:

$$A = \left\| \begin{matrix} A_1^{(k)} & & \\ & A_2^{(\rho-k)} & \\ & & A_3^{(p-\rho)} \end{matrix} \right\|; \qquad A^* = \left\| \begin{matrix} A_1^{*(\rho-k)} & \\ & A_2^{*(p-\rho)} \end{matrix} \right\|;$$

$$\Delta_i = A_i^{-1}, \qquad \Delta_j^* = A_j^{*-1} \qquad (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2)$$

$$\Omega = \| \Omega_{ij} \| \qquad (i, j = 1, 2, 3); \qquad \Omega^* = \| \Omega_{ij}^* \| \qquad (i, j = 1, 2);$$

$$\Omega_{11} = \Omega_{11}^{(k)}, \qquad \Omega_{22} = \Omega_{22}^{(\rho-k)}, \qquad \Omega_{33} = \Omega_{33}^{(p-\rho)}, \qquad \Omega_{11}^* = \Omega_{11}^{*(\rho-k)}, \qquad \Omega_{22}^* = \Omega_{22}^{*(p-\rho)};$$

$$\Psi = \left\| \begin{matrix} \Psi_1^{(k, p-\rho)} \\ \Psi_2^{(\rho-k, p-\rho)} \end{matrix} \right\|; \qquad \Phi^* = \left\| \begin{matrix} \Phi_1^{*(k, p-\rho)} \\ \Phi_2^{*(\delta_1, p-\rho)} \\ \Phi_3^{*(k, p-\rho)} \end{matrix} \right\|.$$

Si ha:

$$(10) \qquad \Omega_{ii} = (\Omega_{ii})_{-1} \qquad (i = 1, 2, 3); \qquad \Omega_{jj}^* = (\Omega_{jj}^*)_{-1} \qquad (j = 1, 2)$$

$$(11) \qquad \Omega_{ij} = (\Omega_{ji})_{-1} \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j); \qquad \Omega_{12}^* = (\Omega_{21}^*)_{-1}.$$

Si noti che le sole relazioni algebriche sul campo razionale alle quali soddisfanno *necessariamente* gli elementi delle matrici i cui simboli contengono le lettere Ω, Φ, Ψ sono quelle esplicitamente indicate, cioè le (10), (11).

Si passi ora mediante combinazione lineare di righe e scambi di colonne, cioè mediante una sostituzione del tipo (2), dalle matrici ω, ω^* alle matrici ad esse equivalenti:

$$(12) \qquad \chi = \| U^{(p+\delta_1+\rho)} \quad \varphi^{(p+\delta_1+\rho, p-\rho)} \|, \qquad \chi^* = \| U^{(p+\delta_1+\rho)} \quad \varphi^{*(p+\delta_1+\rho, p-\rho)} \|,$$

ove:

$$\varphi = \| \varphi_r |, \qquad \varphi^* = \| \varphi_r^* \| \qquad (r = 1, 2, \dots, 6)$$

con:

$$(13) \qquad \begin{aligned} \varphi_1 &= \Delta_1(\Omega_{13} - \Omega_{11}\Psi_1 - \Omega_{12}\Psi_2) & \varphi_1^* &= \Phi_1^* \\ \varphi_2 &= \Delta_2(\Omega_{23} - \Omega_{21}\Psi_1 - \Omega_{22}\Psi_2) & \varphi_2^* &= \Delta_1^*(\Omega_{12}^* - \Omega_{11}^*\Psi^*) \\ \varphi_3 &= \Delta_3(\Omega_{33} - \Omega_{31}\Psi_1 - \Omega_{32}\Psi_2) & \varphi_3^* &= \Delta_{22}^*(\Omega_{22}^* - \Omega_{21}^*\Psi^*) \\ \varphi_4 &= \Phi & \varphi_4^* &= \Phi_2^* \\ \varphi_5 &= \Psi_1 & \varphi_5^* &= \Phi_3^* \\ \varphi_6 &= \Psi_2 & \varphi_6^* &= \Psi^* \end{aligned}$$

Le sostituzioni considerate sono date dalla $\chi = \beta\omega$, $\chi^* = \beta^*\omega^* B^*$ quando si prenda:

$$\beta = \| \beta_{rs} \|, \qquad \beta^* = \| \beta^*_{rs} \| \quad (r, s = 1, 2, ..., 6), \qquad B^* = \| B^*_{rs} \| \quad (r, s = 1, 2, ..., 7)$$

con:

$$\beta_{11} = \Delta_1, \quad \beta_{22} = \Delta_2, \quad \beta_{33} = \Delta_3, \quad \beta_{44} = U^{(\delta_1)}, \quad \beta_{55} = U^{(k)}, \quad \beta_{66} = U^{(\rho-k)},$$

$$\beta_{15} = -\Delta_1\Omega_{11}, \ \beta_{16} = -\Delta_1\Omega_{12}, \ \beta_{25} = -\Delta_2\Omega_{21}, \ \beta_{26} = -\Delta_2\Omega_{22}, \ \beta_{35} = -\Delta_3\Omega_{31}, \ \beta_{36} = -\Delta_3\Omega_{32},$$

$$\beta^*_{13} = U^{(k)}, \quad \beta^*_{21} = \Delta^*_1, \quad \beta^*_{32} = \Delta^*_2, \quad \beta^*_{44} = U^{(\delta_1)}, \quad \beta^*_{55} = U^{(k)}, \quad \beta^*_{66} = U^{(\rho-k)},$$

$$\beta^*_{26} = -\Delta^*_1\Omega^*_{11}, \quad \beta^*_{36} = -\Delta^*_2\Omega^*_{21},$$

$$B^*_{12} = B^*_{55} = U^{(k)}, \quad B^*_{23} = B^*_{66} = U^{(\rho-k)}, \quad B^*_{31} = B^*_{77} = U^{(p-\rho)}, \quad B^*_{44} = U^{(\delta_1)}$$

(essendo nulle le matrici minori non indicate esplicitamente).

È opportuno analizzare il tipo delle matrici φ, φ^*.

Dalle (13_1) segue:

$$\Omega_{13} = A_1\varphi_1 + \Omega_{11}\varphi_5 + \Omega_{12}\varphi_6, \qquad \Omega_{23} = A_2\varphi_2 + \Omega_{21}\varphi_5 + \Omega_{22}\varphi_6,$$

$$\varphi_3 = \Delta_3[\Omega_{33} - (\varphi_1)_{-1}A_1\varphi_5 - (\varphi_2)_{-1}A_2\varphi_6 - (\varphi_5)_{-1}\Omega_{11}\varphi_5 - (\varphi_6)_{-1}\Omega_{22}\varphi_6 - (\varphi_6)_{-1}\Omega_{21}\varphi_5 - (\varphi_5)_{-1}\Omega_{12}\varphi_6]$$

Essendo $\sigma = \Omega_{33} - (\varphi_5)_{-1}\Omega_{11}\varphi_5 - (\varphi_6)_{-1}\Omega_{22}\varphi_6 - (\varphi_6)_{-1}\Omega_{21}\varphi_5 - (\varphi_5)_{-1}\Omega_{12}\varphi_6$ una matrice simmetrica, si ha che

$$\varphi_3 = \Delta_3[\sigma - (\varphi_1)_{-1}A_1\varphi_5 - (\varphi_2)_{-1}A_2\varphi_6], \tag{14}$$

con σ matrice simmetrica. Inoltre se ω è generica, Ω_{13}, Ω_{23}, Φ, Ψ_1, Ψ_2 e quindi φ_1, φ_2, φ_4, φ_5, φ_6 sono matrici generiche nel loro tipo; essendo inoltre Ω_{33} simmetrica generica, anche σ è una matrice simmetrica generica.

Analogamente dalle (13_2) si trae:

$$\Omega^*_{12} = A^*_1\varphi^*_2 + \Omega^*_{11}\varphi^*_6$$

$$\varphi^*_3 = \Delta^*_2[\Omega^*_{22} - (\varphi^*_6)_{-1}\Omega^*_{11}\varphi^*_6 - (\varphi^*_2)_{-1}A^*_1\varphi^*_6];$$

ne segue che $\sigma^* = \Omega^*_{22} - (\varphi^*_6)_{-1}\Omega^*_{11}\varphi^*_6$ è simmetrica, quindi:

$$\varphi^*_3 = \Delta^*_2[\sigma^* - (\varphi^*_2)_{-1}A^*_1\varphi^*_6], \tag{15}$$

con σ^* matrice simmetrica. Se inoltre ω^* è generica, Φ^*_1, Ω^*_{12}, Φ^*_2, Φ^*_3, Ψ^* e quindi φ^*_1, φ^*_2, φ^*_4, φ^*_5, φ^*_6 sono matrici generiche nel loro tipo; essendo anche Ω^*_{22} simmetrica generica, pure σ^* è una matrice simmetrica generica.

Nel seguito considererò anche le matrici ψ, ψ^* definite da:

$$\psi^{(2p+\delta_1, p-\rho)} = \left\| \begin{matrix} \varphi \\ U^{(p-\rho)} \end{matrix} \right\|, \qquad \psi^{*(2p+\delta_1, p-\rho)} \left\| \begin{matrix} \varphi^* \\ U^{(p-\rho)} \end{matrix} \right\|.$$

Aggiungasi che, in base all'osservazione I del n. 2, si conosceranno tutte le relazioni (2) tra ω (1) e ω^* non appena si conosceranno tutte le relazioni (2) tra χ, χ^* (12).

6. Seguito. - Sia dunque:

$$\chi^* = \gamma\chi C^{-1} \tag{16}$$

una relazione del tipo (2) tra χ, χ^*. Si scriva C nella forma:

$$C = \begin{Vmatrix} D_{11}^{(p+\delta_1+\rho)} & -D_{12} \\ -D_{21} & D_{22}^{(p-\rho)} \end{Vmatrix}.$$

Accanto a C si consideri la matrice:

$$D = \begin{Vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{Vmatrix} = \| d_r \| = \| d_{rs} \| \qquad (r,\, s = 1, 2, \ldots, 7),$$

che è evidentemente unimodulare; in essa d_1, d_5, d_{1s}, d_{5s} sono matrici a k righe; d_2, d_6, d_{2s}, d_{6s} a $\rho - k$ righe; d_3, d_7, d_{3s}, d_{7s} a $p-\rho$ righe; d_4, d_{4s} a δ_1 righe; le d_{rr} sono quadrate.

La (16) implica:

$$\| \gamma \quad \gamma\varphi \| = \gamma \| U \quad \varphi \| = \| U \quad \varphi^* \| \begin{Vmatrix} D_{11} & -D_{12} \\ -D_{21} & D_{22} \end{Vmatrix} = \| D_{11} - \varphi^* D_{21} \quad -D_{12} + \varphi^* D_{22} \|$$

$$\gamma = D_{11} - \varphi^* D_{21}, \qquad (D_{11} - \varphi^* D_{21})\varphi = -D_{12} + \varphi^* D_{22},$$

$$D_{11}\varphi + D_{12} = \varphi^*(D_{21}\varphi + D_{22}),$$

e quindi:

$$\| D_{11} \quad D_{12} \| \psi = \varphi^* \| D_{21} \quad D_{22} \| \psi = \varphi^* d_7 \psi. \tag{17}$$

Proviamo ora che, sotto le nostre ipotesi, *qualunque sia la* ω *e quindi la* ψ, *non può essere* $| D_{21}\varphi + D_{22} | = 0$.

Se fosse infatti $| D_{21}\varphi + D_{22} | = 0$ esisterebbe una matrice complessa $\tau^{(p-\rho,1)}$ non nulla tale che $\| D_{21} \quad D_{22} \| \psi\tau = O$; allora sarebbe anche $\| D_{11} \quad D_{12} \| \psi\tau = O$ e quindi $D\psi\tau = O$, $\psi\tau = O$, da cui $\tau = O$, contro l'ipotesi.

Dalla (17) segue allora:

$$\varphi^* = \| D_{11} \quad D_{12} \| \psi (d_7\psi)^{-1},$$

cioè:

$$\varphi_r^* = d_r\psi(d_7\psi)^{-1} \qquad (r = 1,\ 2, \ldots,\ 6).$$

Pensata ora fissata ω, e quindi χ e ψ, e supponendo valida la (16', è necessario che ω^* sia normale di Severi; in particolare è necessario che Ω_{22}^*, e quindi la σ^* e, in base alla (15), la $A_2^*\varphi_3^* + (\varphi_2^*)_{-1}A_1^*\varphi_6^*$ siano matrici simmetriche. Tale condizione è ovviamente soddisfatta se $p - \rho = 1$, cioè se Ω_{22}^* si riduce ad avere un solo elemento; è per questo che tale caso sarà trattato a parte. Ad ogni modo, sia $p - \rho$ maggiore di 1 o uguale ad 1, dalla condizione detta si trae che deve essere simmetrica la seguente matrice:

$$A_2^* d_3\psi(d_7\psi)^{-1} + (d_7\psi)_{-1}^{-1}(d_2\psi)_{-1}A_1^* d_6\psi(d_7\psi)^{-1} =$$
$$= (d_7\psi)_{-1}^{-1}[(d_7\psi)_{-1}A_2^* d_3\psi + (d_2\psi)_{-1}A_1^* d_6\psi](d_7\psi)^{-1}.$$

Tale condizione, tenuto conto che $|d_7\psi| \neq 0$, equivale alla condizione di simmetria della matrice $(d_7\psi)_{-1}A_2^* d_3\psi + (d_2\psi)_{-1}A_1^* d_6\psi$, cioè alla condizione

$$\psi_{-1}[(d_6)_{-1}A_1^* d_2 + (d_3)_{-1}A_2^* d_7 - (d_2)_{-1}A_1^* d_6 - (d_7)_{-1}A_2^* d_3]\psi = 0.$$

Questa è a sua volta equivalente alla:

$$\psi_{-1}\left[\begin{Vmatrix} d_6 \\ d_3 \end{Vmatrix}_{-1} \begin{Vmatrix} A_1^* & \\ & A_2^* \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} d_2 \\ d_7 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} d_2 \\ d_7 \end{Vmatrix}_{-1} \begin{Vmatrix} A_1^* & \\ & A_2^* \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} d_6 \\ d_3 \end{Vmatrix}\right]\psi = 0,$$

cioè alla:

$$\psi_{-1}W\psi = 0 \tag{18}$$

avendo posto:

$$W^{(2p+\delta_1)} = \begin{Vmatrix} d_6 \\ d_3 \end{Vmatrix}_{-1} \begin{Vmatrix} A_1^* & \\ & A_2^* \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} d_2 \\ d_7 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} d_2 \\ d_7 \end{Vmatrix}_{-1} \begin{Vmatrix} A_1^* & \\ & A_2^* \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} d_6 \\ d_3 \end{Vmatrix}.$$

Anzitutto dall' ultima relazione segue che W è una matrice intera emisimmetrica. Inoltre essa ammette anche la seguente rappresentazione:

$$W = E_{-1}M^*E, \quad E = \begin{Vmatrix} d_5 \\ d_6 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_7 \end{Vmatrix}, \quad M^* = \begin{Vmatrix} & & & & O^{(k)} & & \\ & & & & & A_1^* & \\ & & & & & & A_2^* \\ & & & O^{(\delta_1)} & & & \\ O^{(k)} & & & & & & \\ & -A_1^* & & & & & \\ & & -A_2^* & & & & \end{Vmatrix}, \tag{19}$$

come si verifica facilmente facendo il calcolo. Poichè la matrice E si ottiene dalla D permutandone le righe, E ed E_{-1} sono unimodulari, e quindi la caratteristica di W è $2(p-k)$.

Riassumendo: fissata ω (1), affinchè la ω^* fornita dalle (12), (13), (16) sia una MNS è necessario che valga la relazione (18), ove la W, data dalla (19), è una matrice razionale emisimmetrica di caratteristica $2(p-k)$. La (18) è automaticamente soddisfatta se $p-\rho = 1$,

7. Equivalenza tra MNS per le quali $p-\rho = 1$. - In questo n. tratto il caso particolare $p-\rho = 1$; poichè anch'esso si presenta piuttosto semplice, non c'è bisogno di appoggiarsi a tutti i risultati finora conseguiti. Partiamo direttamente dalle ω (1), ω^* e passiamo alle χ, χ^* (12).

Si consideri la matrice:

$$\chi' = \lambda\chi\Lambda, \tag{20}$$

con:

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda^{-1} & \\ & U^{(p-\rho)} \end{Vmatrix}, \qquad \lambda = \| \lambda_{rs} \| \qquad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ 6),$$

ove:

$$\lambda_{11} = \lambda_{55} = U^{(k)}, \qquad \lambda_{22} = \lambda_{66} = U^{(\rho-k)}, \qquad \lambda_{44} = U^{(\delta_1)}, \qquad \lambda_{43}' = L_1^{(\delta_1, p-\rho)}$$

$$\lambda_{34} = L_2^{(p-\rho, \delta_1)}, \quad \lambda_{33} = 1 + L_2 L_1, \quad \lambda_{31} = \lambda_{33} K_1, \quad \lambda_{32} = \lambda_{33} K_2, \quad \lambda_{35} = -\lambda_{33} \Delta_3 H_1,$$

$$\lambda_{36} = -\lambda_{33} \Delta_3 H_2, \quad \lambda_{41} = L_1 K_1, \quad \lambda_{42} = L_1 K_2, \quad \lambda_{45} = -L_1 \Delta_3 H_1, \quad \lambda_{46} = -L_1 \Delta_3 H_2;$$

$H_1^{(p-\rho, k)}$, $H_2^{(p-\rho, \rho-k)}$, $K_1^{(p-\rho, k)}$, $K_2^{(p-\rho, \rho-k)}$, L_1, L_2 sono matrici intere arbitrarie del loro tipo; supposta χ data dalla (12_1), la (20) fornisce per χ' l'espressione $\chi' = \| U^{(p+\delta_1+\rho)} \quad \varphi'^{(p+\delta_1+\rho, p-\rho)} \|$, ove posto $\varphi' = \| \varphi_r' \|$ $(r = 1,\ 2, \ldots,\ 6)$, si ha:

$$\varphi_1' = \Delta_1(\Omega_{13} - \Omega_{11}\Psi_1 - \Omega_{12}\Psi_2), \qquad \varphi_2' = \Delta_2(\Omega_{23} - \Omega_{21}\Psi_1 - \Omega_{22}\Psi_2),$$

$$\varphi_3' = a = a' + ia'' = L_2\Phi + (1 + L_2 L_1)b, \quad \varphi_4' = \Phi + L_1 b, \quad \varphi_5' = \Psi_1, \quad \varphi_6' = \Psi_2,$$

con:

$$b = b' + ib'' = K_1\Delta_1(\Omega_{13} - \Omega_{11}\Psi_1 - \Omega_{12}\Psi_2) + K_2\Delta_2(\Omega_{23} - \Omega_{21}\Psi_1 - \Omega_{22}\Psi_2) + \\ + \Delta_3(\Omega_{33} - (\Omega_{31} + H_1)\Psi_1 - (\Omega_{32} + H_2)\Psi_2).$$

Le λ, Λ sono unimodulari; inoltre, *disponendo delle matrici* H_1, H_2, K_1, K_2, L_1, L_2 *si può far sì che* a'' *sia positivo e grande a piacere.*

Si osservi a questo scopo che non possono essere simultaneamente nulle per ogni scelta di H_1, H_2, le parti immaginarie delle matrici:

$$\begin{aligned} &\Omega_{13} - \Omega_{11}\Psi_1 - \Omega_{12}\Psi_2 \\ &\Omega_{23} - \Omega_{21}\Psi_1 - \Omega_{22}\Psi_2 \\ &\Omega_{33} - (\Omega_{31} + H_1)\Psi_1 - (\Omega_{32} + H_2)\Psi_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Se ciò accadesse, infatti, si avrebbe simultaneamente

$$\begin{aligned} &\Psi_1'' = 0, \qquad \Psi_2'' = 0 \\ &\Omega_{13}'' - \Omega_{11}''\Psi_1' - \Omega_{12}''\Psi_2' = 0 \\ &\Omega_{23}'' - \Omega_{21}''\Psi_1' - \Omega_{22}''\Psi_2' = 0 \\ &\Omega_{33}'' - \Omega_{31}''\Psi_1' - \Omega_{32}''\Psi_2' = 0, \end{aligned}$$

che non possono verificarsi, essendo $| \Omega'' | > 0$.

Si fissino allora H_1, H_2 così che le (21) non abbiano tutte parte immaginaria nulla; di conseguenza si possono scegliere le matrici K_1, K_2 in modo che sia $b'' \neq 0$; e si pensino fissate anche K_1, K_2 sì da soddisfare a questa condizione.

Si ha allora $a'' = L_2\Phi'' + (1 + L_2 L_1)b''$, con $b'' \neq 0$. Dopo ciò fissando arbitrariamente $L_2 \neq 0$ e lasciando L_1 arbitraria, $L_2 L_1$, e quindi $1 + L_2 L_1$, risulta essere un intero arbitrario; si può dunque trovare un'opportuna L_1 tale che a'' sia positivo e grande a piacere; l'asserzione è così provata.

Dimostriamo ora che, *salvo a scegliere opportunamente* L_1, χ' *è una MES*, cioè che la χ^* della (12_2) si può identificare con la χ' data dalla (20), ossia in modo tale che nella relativa ω^* siano verificate le condizioni perchè essa sia normale di SEVERI.

Si osservi anzitutto che in χ' non dipendono da L_1 gli elementi di φ_1', φ_2', φ_5', φ_6'. Si fissino dunque gli elementi di λ come detto sopra, salvo L_1 che rimane per ora arbitraria; si fissi inoltre a piacere Ω_{11}^*, pur di prenderla simmetrica e tale che $\Omega_{11}^{*''}$ sia la matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita positiva; si prendano Δ_1^*, Δ_2^* arbitrarie nel loro tipo, in modo cioè che Δ^* sia una matrice diagonale i cui elementi principali sono interi positivi tali che il primo sia 1 e ciascuno dei successivi sia multiplo del precedente; identificando Φ_1^*, Φ_2^*, Φ_3^*, Ψ^*, $\Delta_1^*(\Omega_{12}^* - \Omega_{11}^*\Psi^*)$ con gli elementi corrispondenti di χ' si calcolano Φ_1^*, Φ_2^*, Φ_3^*, Ψ^*, Ω_{12}^*, $\Omega_{21}^* = (\Omega_{12}^*)_{-1}$, che risultano indipendenti da L_1, salvo Φ_2^*. Dopo di che, ponendo $\Delta_2^*(\Omega_{22}^* - \Omega_{21}^*\Psi^*) = a$ si ottiene $\Omega_{22}^* = A_2^* a + \Omega_{21}^*\Psi^*$; poichè, al variare di L_1, Ω_{11}^* e Ω_{12}^* sono costanti, si può disporre di L_1 in modo da far diventare positivo e arbitrariamente grande il coefficiente dell'immaginario di Ω_{22}^*, e quindi in modo che $\| A^* \quad \Omega^* \|$ sia una matrice normale di RIEMANN e ω^* una MNS.

Si è così provato il seguente:

TEOREMA IV. - *Ogni MNS per la quale* $p - \rho = 1$, $\delta_2 = \rho$ *è equivalente ad una MNS per la quale* $p^* = p - k$, $\delta_1^* = \delta_1 + 2k$, $\delta_2^* = \rho^* = \rho - k$ ($k = 1, 2, \ldots, \rho$), *ed avente i divisori elementari arbitrari.*

In particolare, posto $k = \rho$, è $p^* = 1$, $\delta_1^* = \delta_1 + 2\rho$, $\delta_2^* = \rho^* = 0$. Quindi:

TEOREMA V. - *Ogni MNS per la quale* $p - \rho = 1$, $\delta_2 = \rho$ *è equivalente ad una MNS del tipo*

$$\left\| \begin{matrix} 1 & O & \tau^* \\ O & U^{(\delta_1^*)} & \Phi^{*(\delta_1^*, 1)} \end{matrix} \right\|, \tag{22}$$

avente quindi i caratteri $p^* = 1$, δ_1^* *arbitrario*, $\delta_2^* = \rho^* = 0$.

Se si tien conto dell'osservazione III del n. 2 si ha:

TEOREMA VI. - *Ogni MNS per la quale* $p - \rho = 1$ *è equivalente ad una MNS del tipo*

$$\left\| \begin{matrix} 1 & O & \tau^* \\ O & U^{(\delta_1^*)} & \Phi^{*(\delta_1^*, 1)} \\ O & O & O^{(\delta_2^*, 1)} \end{matrix} \right\|, \tag{23}$$

avente quindi i caratteri $p^* = 1$, δ_1^* *e* δ_2^* *arbitrari*, $\rho^* = 0$.

Tenuta poi presente l'osservazione VII del n. 2 si ha:

TEOREMA VII. - *Ogni MES del tipo* (g, g') $(g' \leq 2g)$ *per la quale la caratteristica è* $g' - 1$, *è equivalente ad una matrice normale* (23) *di caratteri* $p^* = 1$, $\delta_1^* = g' - 2$, $\delta_2^* = g - g' + 1$, $\rho^* = 0$.

Si osservi ancora che, come si proverà nel n. 10, *la matrice* ω^* *di cui si parla nei Teoremi IV, V, e quindi quella del Teorema VI, è generica non appena lo sia* ω *o* χ.

Ciò fa pensare che ogni matrice normale del tipo (23) sia equivalente ad una MNS avente il carattere p arbitrario, salvo le ovvie limitazioni $1 \leq p \leq [\delta_1^*/2]$; e ciò è vero, come prova un calcolo del tutto analogo a quello svolto, e di cui riporto i tratti essenziali nel n. 10.

Si può dunque affermare che:

TEOREMA VIII. - *Ogni matrice normale* (23), *e quindi ogni MES del tipo* (g, g') *e di caratteristica* $g' - 1$ *è equivalente ad una MNS di caratteri* $p = k + 1$, $\delta_1 = g' - 2k - 2$, $\delta_2 = g - g' + k + 1$, $\rho = k$ $(k = 0, 1, \ldots, [g'/2] - 1)$ *e divisori elementari arbitrari.*

8. **Equivalenza tra MNS per le quali** $p - \rho > 1$. - Riprendiamo ora la trattazione a partire dal punto in cui è stata interrotta alla fine del n. 6. Si supponga inoltre $p - \rho > 1$. Condizione necessaria perchè intercorra la (2) tra le matrici ω, ω^* ovvero la (16) tra le matrici χ, χ^* è che valga la (18).

Proviamo che: *se* $p - \rho > 1$ *e se* ω, *e quindi* χ *e* ψ, *è generica, la* (18) *può valere solo se* $k = 0$.

Si scriva la W (19) nella forma $W = \| w_{rs} \|$ $(r, s = 1, 2, \ldots, 7)$; ove le w_{rr} sono dei seguenti tipi: $w_{11}^{(k)}$, $w_{22}^{(\rho-k)}$, $w_{33}^{(p-\rho)}$, $w_{44}^{(\delta_1)}$, $w_{55}^{(k)}$, $w_{66}^{(\rho-k)}$, $w_{77}^{(p-\rho)}$, mentre è $w_{rs} = -(w_{sr})_{-1}$.

La (18) diviene:

$$\sum_{1}^{7}{}_{rs} (\varphi_r)_{-1} w_{rs} \varphi_s = 0,$$

avendo posto $\varphi_7 = U^{(p-\rho)}$ e osservando che bisogna ancora tener conto della (14).

Tenute presenti: l'ipotesi $p - \rho > 1$, l'ipotesi che la ψ sia generica e l'espressione della φ_3, si deduce quanto segue.

Per $\varphi_1 = O$, $\varphi_2 = O$, $\sigma = O$, $\varphi_4 = O$, $\varphi_5 = O$, $\varphi_6 = O$, si ha $w_{77} = O$.

Per φ_1 generica, $\varphi_2 = O$, $\sigma = O$, $\varphi_4 = O$, $\varphi_5 = O$, $\varphi_6 = O$, si ha $(\varphi_1)_{-1} w_{11} \varphi_1 + (\varphi_1)_{-1} w_{17} + w_{71} \varphi_1 = O$; dovendo essere separatamente uguali a zero i complessi dei termini dei vari gradi, deve essere $(\varphi_1)_{-1} w_{11} \varphi_1 = O$, $(\varphi_1)_{-1} w_{17} - w_{17})_{-1} \varphi_1 = O$. Dalla prima relazione segue notoriamente $w_{11} = O$; dalla seconda, grazie al Lemma I del n. 11, segue $w_{17} = O$, $w_{71} = O$.

Con calcolo perfettamente analogo si prova che sono nulle le matrici w_{22}, w_{27}, w_{72}; w_{44}, w_{47}, w_{74}; w_{55}, w_{57}, w_{75}; w_{66}, w_{67}, w_{76}.

Per φ_1, φ_2 generiche, $\sigma = O$, $\varphi_4 = O$, $\varphi_5 = O$, $\varphi_6 = O$ si ha $(\varphi_1)_{-1} w_{12} \varphi_2 + (\varphi_2)_{-1} w_{21} \varphi_1 = O$, che, per il Lemma II del n. 11, implica $w_{12} = O$, $w_{21} = O$.

Con calcolo analogo si prova che sono nulle le matrici w_{14}, w_{41}; w_{16}, w_{61}; w_{24}, w_{42}; w_{25}, w_{52}; w_{45}, w_{54}; w_{46}, w_{64}; w_{56}, w_{65}.

Per σ simmetrica generica $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_4 = 0$, $\varphi_5 = 0$, $\varphi_6 = 0$, si ha $\sigma\Delta_3 w_{33}\Delta_3\sigma + \sigma\Delta_3 w_{37} + w_{73}\Delta_3\sigma = 0$; separando i termini di gradi diversi, si ha poi $\sigma\Delta_3 w_{33}\Delta_3\sigma = 0$, $\sigma\Delta_3 w_{37} - (w_{37})_{-1}\Delta_3\sigma = 0$. Dalla prima relazione, tenuto conto che, essendo σ generica, è $|\Delta_3\sigma| \neq 0$, segue $w_{33} = 0$; dalla seconda, grazie al Lemma III del n. 8, si deduce $w_{73} = tA_3$, $w_{37} = -tA_3$, con t razionale.

Per φ_1, σ generiche, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_4 = 0$, $\varphi_5 = 0$, $\varphi_6 = 0$, si ha $(\varphi_1)_{-1} w_{13}\Delta_3\sigma + \sigma\Delta_3 w_{31}\varphi_1 = 0$ e, per il Lemma IV del n. 11, $w_{13} = 0$, $w_{31} = 0$.

Con calcolo analogo si prova che sono nulle le matrici w_{23}, w_{32}; w_{34}, w_{43}; w_{35}, w_{53}; w_{36}, w_{63}.

Per φ_1, φ_5 generiche $\varphi_2 = 0$, $\sigma = 0$, $\varphi_4 = 0$, $\varphi_6 = 0$, si ha $(\varphi_1)_{-1}(w_{15} - tA_1)\varphi_5 + (\varphi_5)_{-1}(tA_1 + w_{51})\varphi_1 = 0$ e, per il Lemma II del n. 11, $w_{15} = tA_1$, $w_{51} = -tA_1$.

Con calcolo analogo si prova che $w_{26} = tA_2$, $w_{62} = -tA_2$.

Quindi:

$$W = tM_1, \qquad M_1 = \| m_{rs} \| \qquad (r,\ s = 1, 2, \dots, 7), \tag{24}$$

con $m_{15} = -m_{51} = A_1$, $m_{26} = -m_{62} = A_2$, $m_{37} = -m_{73} = -A_3$, $m_{44} = O^{(\delta_1)}$; t è un numero razionale.

Un calcolo perfettamente analogo, anzi lievemente più semplice, si può condurre scambiando le veci delle due matrici ω, ω^*; ne riportiamo nel n. 10 i tratti essenziali.

Si può poi enunciare il seguente

TEOREMA IX. - *Una MNS generica per la quale sia $p - \rho > 1$ non può essere equivalente ad una MNS avente interi caratteristici diversi da quelli della prima. Cioè una MNS del tipo detto individua univocamente i suoi interi associati.*

In forma equivalente:

TEOREMA X. - *Una MES generica del tipo (g, g'), avente caratteristica minore di $g' - 1$, individua univocamente gli interi associati.*

Non è possibile rinforzare il teorema nel senso di togliere del tutto l'ipotesi che la MNS sia generica, perchè in [**1**, p. 337] ho portato un esempio abbastanza significativo di MNS con interi caratteristici arbitrari, salva solo la limitazione $p \geq 2$, la quale non individua i propri interi associati.

9. **Seguito.** - Siano ancora ω, ω^* due MNS equivalenti, e sia generica una delle due, p. es. ω; allora esse hanno interi caratteristici uguali. Se (16) è una relazione di equivalenza tra le corrispondenti matrici χ, χ^*, vale necessariamente la (18), nonchè la (24). Tenuto presente che ora è $k = 0$, si scriva la D nelle forme:

$$D = \| t_r \| = \| t_{rs} \| \qquad (r,\ s = 1, 2, \dots, 5)$$

ove le matrici t_r e t_{rr} hanno i seguenti tipi: $t_1^{(\rho,\, 2p+\delta_1)}$, $t_2^{(p-\rho,\, 2p+\delta_1)}$, $t_3^{(\delta_1,\, 2p+\delta_1)}$, $t_4^{(\rho,\, 2p+\delta_1)}$, $t_5^{(p-\rho,\, 2p+\delta_1)}$; $t_{11}^{(\rho)}$, $t_{22}^{(p-\rho)}$, $t_{33}^{(\delta_1)}$, $t_{44}^{(\rho)}$, $t_{55}^{(p-\rho)}$; si scriva inoltre A nella forma:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1^{(\rho)} & \\ & A_2^{(p-\rho)} \end{Vmatrix}. \tag{25}$$

La W della (24_1) diviene allora:

$$W = E_{-1} M^* E = t M_1, \tag{26}$$

con:

$$E = \begin{Vmatrix} t_1 \\ t_5 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_2 \end{Vmatrix},$$

ove M_1 è data dalla (24_2), nella quale si tenga conto della (25), ed M^* da (19_2), nelle quali si ponga $k = 0$.

Moltiplicando la relazione (26) per lo scalare d_p^*, che è il massimo dei divisori elementari di A^*, essa diviene

$$d_p^* W = E_{-1} d_p^* M^* E = t d_p^* M_1.$$

Poichè $d_p^* M^*$ è una matrice intera nella quale il massimo comune divisore degli elementi è 1, e E, E_{-1} sono unimodulari, anche $t d_p^* M_1$ è una matrice intera nella quale il massimo comune divisore degli elementi è 1. Essendo d_p il massimo dei divisori elementari di A, gli elementi non nulli di modulo minimo in $t d_p^* M_1$ hanno valore $\dfrac{t d_p^*}{d_p}$, e poichè essi devono essere ± 1, si ha $t = \pm \dfrac{d_p}{d_p^*}$; da ciò segue che gli elementi non nulli di $t d_p^* M_1$ sono $\pm \dfrac{d_p}{d_r}$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$, e quindi tutti interi. Inoltre due matrici come le $d_p^* M^*$, $t d_p^* M_1$ che siano intere, diagonali, con elementi diagonali ordinabili in modo tale che ciascuno sia multiplo del precedente, e che si ottengano l'una dall'altra mediante moltiplicazione a destra e a sinistra per matrici unimodulari, hanno elementi che, a prescindere dal segno e dall'ordine, sono uguali; ne segue che, essendo ordinati gli interi $\dfrac{d_p}{d_r}$ e $\dfrac{d_p^*}{d_r^*}$, si ha $\dfrac{d_p}{d_r} = \dfrac{d_p^*}{d_r^*}$; e poichè $d_1 = d_1^* = 1$, si ha $d_p = d_p^*$ e $d_r = d_r^*$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$, nonchè $t = \varepsilon = \pm 1$.

Abbiamo quindi dimostrato

TEOREMA XI. - *Una MNS generica per cui $p - \rho > 1$, e quindi una MES generica del tipo (g, g') avente caratteristica minore di $g' - 1$, determina univocamente i propri divisori elementari.*

Enunciando insieme i Teoremi IX, X, XI, si ha il seguente teorema fondamentale:

TEOREMA XII. - *Una MNS generica per la quale sia $p - \rho < 1$, o, in forma equivalente, una MES generica del tipo (g, g') avente caratteristica minore di $g' - 1$, individua univocamente gli interi associati e i divisori elementari.*

Altra conseguenza immediata dei risultati precedenti è il

TEOREMA XIII. - *Ogni MES è equivalente ad una forma canonica di uno ed uno solo dei seguenti tre tipi:*

I tipo: $\left\| \begin{matrix} U^{(\delta_1)} \\ O^{(\delta_2, \delta_1)} \end{matrix} \right\|$; $(p = \rho = 0,\ \delta_1,\ \delta_2$ arbitrari$)$;

II tipo: (23); $(p = 1,\ \rho = 0,\ \delta_1,\ \delta_2$ arbitrari$)$;

III tipo: (1), con $p - \rho > 1$; (caratteri del resto arbitrari).

Una MES equivalente ad una forma canonica generica del terzo tipo individua univocamente gli interi caratteristici ed i divisori elementari.

10. **Complementi.** - Riportiamo in questo n. alcuni calcoli che non sono stati sviluppati nei nn. precedenti, perchè analoghi a calcoli già svolti.

I. (Cfr. terz'ultimo capoverso del n. 7). Si tratta di provare che se è generica la ω data da (22), lo è anche la ω^* ad essa equivalente in base ai Teoremi IV, V, VI; a questo scopo basta evidentemente provare che è generica la relativa χ^*, quando si tenga conto della genericità della Ω_{11}^*. Infatti, fissata che sia genericamente quest'ultima, tenendo presente l'espressione delle matrici che compongono χ^* e tenendo fisse le matrici H_1, H_2, K_1, K_2, L_1, L_2: sono generiche Φ_3^*, Ψ^* perchè rispettivamente uguali a Ψ_1, Ψ_2 che lo sono per ipotesi; fissate che siano Ω_{11}, Ω_{12}, Ω_{22}, rimangono arbitrarie Ω_{13} e Ω_{23}, e ciò assicura la genericità di Φ_1^* e Ω_{12}^*; dopo di che Ω_{22}^* e Φ_2^* dipendono da Ω_{33} e Φ, le sole ancora arbitrarie, al seguente modo:

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega_{22}^* &= A_2^*(1 + L_2L_1)\Delta_3\Omega_{33} + L_2\Phi + N_1 \\ \Phi_2^* &= L_1\Delta_3\Omega_{33} + \Phi + N_2, \end{aligned} \right.$$

essendo N_1, N_2 matrici indipendenti da Ω_{33}, Φ; l'inversione di queste formule:

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega_{33} &= A_3[A_2^* + (A_2^* - 1)L_2L_1]^{-1}(\Omega_{22}^* - L_2\Phi_2^* - N_1 - L_2N_2) \\ \Phi &= \Phi_2^* - N_2 - L_1\Delta_3\Omega_{33}, \end{aligned} \right.$$

è possibile quando, tenuto conto dell'arbitrarietà, sia pure non assoluta, di L_1 si sia fatto a priori in modo che sia $A_2^* + (A_2^* - 1)L_2L_1 \neq 0$, cosa evidentemente possibile. La mutua dipendenza di Ω_{22}^*, Φ_2^* da Ω_{33}, Φ assicura quindi la simultanea genericità delle due coppie di matrici, quando si osservi che, variando Ω_{22}^* in un intorno sufficientemente piccolo del suo valore iniziale, lo stesso accade anche per Ω_{33} e quindi si possono simultaneamente rispettare le disuguaglianze riemanniane, senza ledere la genericità degli elementi considerati.

II. (Cfr. penultimo capoverso del n. 7). Per provare che ogni prefissata matrice del tipo (23) è equivalente ad una MNS avente il carattere p arbitrario entro le limitazioni $1 \leq p \leq [\delta_1^*/2]$, basta provare l'affermazione per la (22), ottenuta dalla (23) sopprimendone le ultime δ_2^* righe. Una eventuale MNS equivalente alla (22) è necessariamente del tipo

$$\omega_1 = \left\| \begin{matrix} A_1^{(p)} & & & \Omega_{11}^{(p)} & \Omega_{12} \\ & A_2^{(1)} & & \Omega_{21} & \Omega_{22}^{(1)} \\ & & U^{(\delta_1^*-2p)} & 0 & \Phi \\ & & & U^{(p)} & \Psi \end{matrix} \right\|,$$

ed è equivalente a

$$\chi_1 = \left\| \begin{matrix} U^{(p)} & & & & \Delta_1(\Omega_{12} - \Omega_{11}\Psi) \\ & 1 & & & \Delta_2(\Omega_{22} - \Omega_{21}\Psi) \\ & & U^{(\delta_1^*-2p)} & & \Phi \\ & & & U^{(p)} & \Psi \end{matrix} \right\|.$$

Si sostituisca la (22) con la matrice equivalente

$$\chi_1^* = \left\| \begin{matrix} U^{(p)} & & & & \Phi_1^* \\ & 1 & & & \tau^* \\ & & U^{(\delta_1^*-2p)} & & \Phi_2^* \\ & & & U^{(p)} & \Phi_3^* \end{matrix} \right\|,$$

e si ponga:

$$\chi_1 = \lambda^* \chi_1^* \Lambda^*,$$

con:

$$\lambda^* = \left\| \begin{matrix} U^{(p)} & & & \\ & 1 + L_2 L_1 & L_2 & \\ & L_1 & U^{(\delta_1^*-2p)} & \\ & & & U^{(p)} \end{matrix} \right\|, \qquad \Lambda^* = \left\| \begin{matrix} \lambda^{*-1} & \\ & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Risulta allora $\Omega_{22} = A_2[\tau^*(1 + L_2 L_1) + L_2 \Phi_2^*] + \Omega_{21}\Psi$, mentre Ω_{11}. Ω_{21}, Φ_2^*, Ψ sono indipendenti da L_1; tenuto conto che $\tau^{*''} > 0$, si può dunque disporre delle matrici intere arbitrarie contenute nella λ^* in modo che Ω_{22}'' sia positivo e grande a piacere, in modo cioè che ω_1 sia una MNS.

III. (Cfr. capoverso precedente il teorema IX del n. 8). Si tratta di sviluppare i calcoli dei nn. 5, 6 e 8 nell'ipotesi $p - p^* \leq 0$ anzichè nell'ipotesi $p - p^* \geq 0$, o, ciò che è lo stesso, scambiando le veci delle due matrici. Si parta cioè dalle χ, χ^* (12) e si supponga valida una relazione:

$$\chi = \gamma^* \chi^* C^{*-1},$$

analoga alla (16). Introdotta la matrice D^* analoga alla D del n. 6, affinchè possa valere la relazione precedente, essendo ω, ω^* MNS, è necessario che sia valida l'analoga della (18), cioè la

$$\psi^*_{-1} W^* \psi^* = O, \tag{27}$$

ove W^* è una matrice intera emisimmetrica data da:

$$W^* = E^*_{-1} M E^*, \qquad M = \begin{Vmatrix} & & A \\ & O^{(\delta_1)} & \\ -A & & \end{Vmatrix}, \tag{28}$$

e ψ^* è definita alla fine del n. 6; anche qui la matrice E^* è ottenuta dalla D^* permutandone opportunamente le righe; la (28) è l'analoga della (19). Se ora ω^*, e quindi χ^* e ψ^*, sono generiche, dalla (27) segue:

$$W^* = t M_1^*, \qquad M_1^* = \| m_{rs} \| \qquad (r,\ s = 1, 2, \ldots, 7), \tag{29}$$

con $m_{15} = m_{51} = O^{(k)}$, $m_{26} = -m_{62} = A_1^*$, $m_{37} = -m_{73} = -A_2^*$, $m_{44} = O^{(\delta_1)}$; quindi, confrontando le caratteristiche delle due espressioni di W^*, si hanno le stesse conclusioni del calcolo del n. 8.

11. Lemmi.

I. *Se* $\rho^{(r,s)} = \| \rho_{ih} \|$ $(i = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s)$ *è una generica matrice complessa e* $w^{(q,r)} = \| w_{ki} \|$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ *è una matrice razionale, la relazione*

$$\rho_{-1} w_{-1} - w\rho = O \tag{30}$$

è soddisfatta se e solo se $s = 1$ *ovvero* $w = O$.

In ogni caso $\rho_{-1} w_{-1} - \rho w$ è una matrice emisimmetrica; quindi se $s = 1$ ovvero se $w = 0$ la (30) è soddisfatta. Viceversa, se vale la (30) e se $s > 1$, presi comunque h, k tali che $1 \leq h < k \leq s$, si ha:

$$\sum_1^r {}_i (\rho_{ih} w_{ki} - \rho_{ik} w_{hi}) = O.$$

Poichè le ρ_{ih}, ρ_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sono elementi di ρ tutti distinti, se ne trae $w_{ki} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, q;\ i = 1, 2, \ldots, r)$, cioè $w = O$.

II. *Se* $\rho^{(r,s)} = \| \rho_{ih} \|$, $\rho'^{(r',s)} = \| \rho'_{jk} \|$ *sono due matrici complesse, generiche, uguali o distinte, e se* $w^{(r',r)} = \| w_{ij} \|$ *è razionale, emisimmetrica se* $\rho = \rho'$, *la relazione*

$$\rho_{-1} w_{-1} \rho' - \rho'_{-1} w \rho = O \tag{31}$$

è soddisfatta se e solo se $s = 1$ *ovvero* $w = O$.

Infatti la matrice al primo membro della (31) è in ogni caso emisimmetrica, quindi se $s = 1$ ovvero se $w = O$ la (31) è automatica.

Viceversa, se vale la (31) e se $s \geq 2$, si prendano h, k tali che $1 \leq h < k \leq s$. Si ha:

$$\sum_{1}^{r}{}_i \sum_{1}^{r'}{}_j (\rho_{ih}\rho'_{jk} - \rho_{ik}\rho'_{jh})w_{ji} = 0,$$

identicamente rispetto alle ρ_{ih}, ρ_{ik}, ρ'_{jh}, ρ'_{jk} $(i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, r')$.

Sia $\rho \neq \rho'$; essendo $h \neq k$, le variabili considerate sono tutte distinte tra loro. Poichè il prodotto $\rho_{ih}\rho'_{jk}$ compare solo col coefficiente w_{ji}, è $w_{ji} = 0$ e quindi $w = 0$.

Se invece $\rho = \rho'$, la (31), tenuto conto del fatto che w è emisimmetrica, diviene

$$\sum_{1}^{r}{}_{i<j} (\rho_{ih}\rho_{jk} - \rho_{jh}\rho_{ik})w_{ji} = 0.$$

Essendo $i \neq j$, $h \neq k$, ogni prodotto $\rho_{ih}\rho_{jk}$ o $\rho_{jh}\rho_{ik}$ ha per coefficiente solo w_{ji} che è quindi nullo, salvo eventualmente il caso che sia $i = h, k$ e $j = h, k$; è allora

$$w_{kh}(\rho_{hh}\rho_{kk} - \rho_{hk}\rho_{kh}) = 0$$

da cui anche $w_{kh} = 0$; quindi $w = 0$.

III. *Se* $\sigma^{(s,s)} = \| \sigma_{ih} \|$ *è una matrice complessa simmetrica generica;* $A^{(s,s)}$ *una matrice razionale diagonale non degenere i cui elementi principali siano* $a_1, a_2, \ldots, a_s$; $w^{(s,s)} = \| w_{ik} \|$ *una matrice razionale, la relazione*

$$\sigma A w_{-1} - w A \sigma = 0 \tag{32}$$

è soddisfatta se e solo $w = tA^{-1}$, *con* t *numero razionale.*

Che da $w = tA^{-1}$ segua la (32) è immediato.

Per provare la parte inversa si osservi anzitutto che $\sigma A w_{-1} - w A \sigma$ è emisimmetrica, quindi per $s = 1$ il teorema è banale; sia dunque $s \geq 2$. Presi allora h, k tali che $1 \leq h < k \leq s$, si ha

$$\sum_{1}^{s}{}_i a_i(\sigma_{hi}w_{ki} - \sigma_{ik}w_{hi}) = 0$$

Ora le σ_{hi}, σ_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sono elementi di σ tutti distinti, ad eccezione di σ_{hk} che compare per $i = h$, $i = k$; la relazione precedente diviene dunque, ordinata rispetto alle variabili:

$$\sum_{1}^{r}{}_{i \neq h,\, k} a_i(\sigma_{hi}w_{ki} - \sigma_{ik}w_{hi}) + a_h\sigma_{hh}w_{kh} - a_k\sigma_{kk}w_{hk} + \sigma_{hk}(a_k w_{kk} - a_h w_{hh}) = 0;$$

da tale relazione segue $w_{ki} = 0$ per $i \neq k$, e $w_{11}a_1 = w_{22}a_2 = \ldots = w_{ss}a_s$. Chiamato t il valore comune a queste quantità, si ha $w_{kk} = \dfrac{t}{a_k}$ e quindi la tesi.

IV. *Se* $\sigma^{(s,s)} = \| \sigma_{ih} \|$ *è una matrice complessa simmetrica generica,* $\rho^{(r,s)} = \| \rho_{jk} \|$ *una matrice complessa generica,* $A^{(s,s)}$ *una matrice diagonale razionale non degenere con gli elementi principali* $a_1, a_2, \dots, a_s$; $w^{(r,s)} = \| w_{ij} \|$ *una matrice razionale, la relazione:*

$$\sigma A w_{-1} \rho - \rho_{-1} w A \sigma = O \tag{33}$$

è soddisfatta se e solo se $s = 1$ *ovvero* $w = O$.

Infatti la matrice al primo membro della (33) è in ogni caso emisimmetrica, quindi se $s = 1$ ovvero se $w = O$ la (33) è automatica.

Viceversa, se vale la (33) e se $s \geq 2$, la (33) diviene:

$$\sum_{1}^{s}{}_i \sum_{1}^{r}{}_j \, a_i(\sigma_{hi}\rho_{jk} - \sigma_{ik}\rho_{jh}) w_{ji} = 0 ;$$

presi h, k tali che $1 \leq h < k \leq s$, accade che le ρ_{jh}, ρ_{jk} sono tutte distinte tra loro e dalle σ_{hi}, σ_{ik}; ed è anche sempre $\sigma_{hi} \neq \sigma_{ik}$; ne segue $w_{ji} = 0$ e quindi $w = O$.

12. Sulla definizione di MNS.

Come ho già detto nel n. 1, la definizione ivi data di MNS non è quella originale. Proverò qui la sua equivalenza con la definizione di SEVERI, che è la seguente: chiamasi *matrice normale* (di SEVERI) una matrice del tipo:

$$\left\| \begin{matrix} A_0^{(p)} & \Omega_0^{(p)} & O^{(p,\delta_1)} \\ O^{(\delta_1,p)} & \Phi_0^{(\delta_1,p)} & B_0^{(\delta_1)} \\ O^{(\delta_2,p)} & \Psi_0^{(\delta_2,p)} & O^{(\delta_2,\delta_1)} \end{matrix} \right\| , \tag{34}$$

nella quale:

$B_0 = 2\pi i U^{(\delta_1)}$;

Ψ_0 è una matrice complessa arbitraria, la cui caratteristica indichiamo con ρ; è allora $\rho \leq p$, $\rho \leq \delta_2$;

Φ_0 è una matrice complessa arbitraria;

$\| A_0 \quad \Omega_0 \|$ è una matrice normale di RIEMANN che si dice *associata* alla (1_0). Ciò significa che A_0 è una matrice diagonale non degenere tale che $\Delta = 2\pi i A_0^{-1}$ sia una matrice diagonale a elementi principali interi positivi $d_1, d_2, \dots, d_p$, tali che $d_1 = 1$ e che d_{i-1} sia multiplo di d_i $(i = 2, 3, \dots, p)$; e che $\Omega_0 = \Omega_0' + i\Omega_0''$ è una matrice complessa simmetrica la cui parte reale Ω_0' sia la matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita negativa.

In [7] si opera sulla forma (34) ancora qualche semplificazione di cui faremo cenno nel corso di questo n.

Che ogni matrice del tipo (1) sia equivalente ad una matrice (34) è immediato: basta moltiplicarla a sinistra per $2\pi i U^{(p+\delta_1+\delta_2)}$ ed eseguire un'opportuna permutazione di righe e colonne.

Che viceversa ogni matrice (34) sia equivalente ad una matrice (1) è provato dalle seguenti considerazioni.

Anzitutto, mediante scambi di linee e di colonne, che si ottengono moltiplicando la (34) a destra e a sinistra per opportune matrici unimodulari, la si riduce alla matrice equivalente:

$$\begin{Vmatrix} A_0 & O & \Omega_0 \\ O & B_0 & \Phi_0 \\ O & O & \Psi_0 \end{Vmatrix}$$

Dividendo poi per lo scalare $2\pi i$, cioè moltiplicando a sinistra per $\frac{1}{2\pi i} U^{(p+\delta_1+\delta_2)}$, si perviene alla matrice equivalente

$$\begin{Vmatrix} A & O & \Omega_1 \\ O & U & \Phi_1 \\ O & O & \Psi_1 \end{Vmatrix} \tag{35}$$

nella quale $A = \Delta^{-1}$, $\Omega_1 = \frac{1}{2\pi i}\Omega_0$, $\Phi_1 = \frac{1}{2\pi i}\Phi_0$, $\Psi_1 = \frac{1}{2\pi i}\Psi_0$; Φ_1, Ψ_1 rimangono matrici arbitrarie, la seconda di caratteristica ρ; Ω_1 è una matrice simmetrica la cui parte immaginaria è la matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita e positiva.

Si passa poi dalla (35) ad una matrice ad essa equivalente mediante le seguenti operazioni, indicate da SEVERI in [7, p. 253, 254].

Si sostituisce alle righe di posti $p+\delta_1+1$, $p+\delta_1+2, \ldots, p+\delta_1+\delta_2$ una loro combinazione lineare non degenere e si esegue un' opportuna permutazione delle colonne di posti $2p+1$, $2p+2, \ldots, 2p+\delta_1$, sì da portare Ψ_1 alla forma

$$\Psi_2 = \begin{Vmatrix} U^{(\rho)} & \Psi_3^{(\rho, p-\rho)} \\ O^{(\delta_2-\rho, \rho)} & O^{(\delta_2-\rho, p-\rho)} \end{Vmatrix}, \quad \text{con} \quad \Psi_3^{(\rho, p-\rho)} = \begin{Vmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \ldots \Psi_{1, p-\rho} \\ \cdots & \cdots \\ \Psi_{\rho 1} & \Psi_{\rho 2} \ldots \Psi_{\rho, p-\rho} \end{Vmatrix}; \tag{36}$$

si esegue poi sulle righe di posti $1, 2, \ldots, p$ la stessa permutazione che si è operata sulle ultime colonne, sì da riportare a forma simmetrica la matrice che prende il posto della Ω_1; operando poi la stessa permutazione sulle prime p colonne si riporta a forma diagonale la matrice che prende il posto della A; si perviene così alla matrice:

$$\begin{Vmatrix} A_1 & O & \Omega_2 \\ O & U & \Phi_2 \\ O & O & \Psi_2 \end{Vmatrix} \tag{37}$$

ove A_1 differisce da A solo per una permutazione degli elementi principali; le altre matrici sono dello stesso tipo delle matrici di posto omologo in (35), salvo Ψ_2 che è del tipo (36), con Ψ_3 arbitraria.

Si cerchi ora, sempre mediante relazioni di equivalenza, di mantenere la forma (37), riottenendo però A al posto di A_1. Ciò è possibile al seguente modo.

Nella (37) si ponga anzitutto:

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} A_2^{(\rho)} & \\ & A_3^{(p-\rho)} \end{matrix} \right\|, \qquad \Omega_2 = \left\| \begin{matrix} \Omega_3^{(\rho)} & \Omega_4 \\ \Omega_5 & \Omega_6^{(p-\rho)} \end{matrix} \right\|, \qquad \Phi_2 = \| \Phi_3^{(\delta_1, \rho)} \quad \Phi_4^{(\delta_1, p-\rho)} \| .$$

È immediato che, senza turbare la sua forma, si possono permutare arbitrariamente in (37) gli elementi principali di A_2 eseguendo una medesima permutazione successivamente: sulle righe di posti $1, 2, \dots, \rho$; sulle colonne di posti $1, 2, \dots, \rho$; sulle colonne di posti $p + \delta_1 + 1$, $p + \delta_1 + 2, \dots, p + \delta_1 + \rho$; sulle righe di posti $p + \delta_1 + 1$, $p + \delta_1 + 2, \dots, p + \delta_1 + \rho$. Analogamente per quanto riguarda A_3. Per provare dunque che si può eseguire una qualunque permutazione sugli elementi principali di A_1, mantenendo il tipo (37), basterà provare che si possono scambiare tra loro l'ultimo elemento di A_2 e il primo elemento di A_3. Ora ciò è possibile come segue: si invertono le colonne di posti ρ, $\rho + 1$; le colonne di posti $p + \delta_1 + \rho$, $p + \delta_1 + \rho + 1$; le righe di posti ρ, $\rho + 1$. Con ciò si ottiene nella A_1 l'inversione voluta, le altre matrici minori mantengono il loro tipo, salvo $\| U \quad \Psi_3 \|$ che diviene:

$$\| \Psi_4^{(\rho, \rho)} \quad \Psi_5^{(\rho, p-\rho)} \| = \left\| \begin{matrix} 1 & \Psi_{11} & 0 & \Psi_{12} \dots \Psi_{1, p-\rho} \\ \ddots & \dots & \dots & \dots \\ & \Psi_{\rho, 1} & 1 & \Psi_{\rho, 2} \dots \Psi_{\rho, p-\rho} \end{matrix} \right\| .$$

Sia n un intero tale che $\Psi_{\rho 1} + n$ sia non nullo e che sia intero il prodotto di n per il quoziente r degli elementi diagonali di posto $\rho + 1$ e ρ nella matrice A_1. Sia inoltre $N^{(p-\rho, \rho)}$ la matrice che ha nulli tutti gli elementi, salvo l'ultimo elemento della prima riga, che si prende uguale ad n. Dal calcolo segue immediatamente che se, dopo aver compiuto sulla (37) le inversioni di linee già precisate, si moltiplica la matrice così ottenuta a sinistra e a destra rispettivamente per

$$\left\| \begin{matrix} U^{(\rho)} & N_{-1} & \\ & U^{(p-\rho)} & \\ & & U^{(\delta_1 + \delta_2)} \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} U^{(\rho)} & -rN_{-1} & & & \\ & U^{(p-\rho)} & & & \\ & & U^{(\delta_1)} & & \\ & & & U^{(\rho)} & \\ & & & N & U^{(p-\rho)} \end{matrix} \right\|,$$

si perviene ad una matrice che differisce come tipo dalla (37) soltanto in quanto al posto della matrice minore $\| U \quad \Psi_3 \|$ trovasi la:

$$\| \Psi_4 \quad \Psi_5 \| \cdot \left\| \begin{matrix} U^{(\rho)} & \\ N & U^{(p-\rho)} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & \Psi_{11} & \dots \\ \ddots & & \dots \\ & \Psi_{\rho, 1} + n \dots & \end{matrix} \right\|,$$

le cui prime ρ colonne formano una matrice non degenere. Sostituendo quindi alle righe di posti $p+\delta_1+1$, $p+\delta_1+2, \ldots$, $p+\delta_1+\rho$ una loro opportuna combinazione lineare si pone al posto di Ψ_4 la matrice diagonale unitaria, e sottraendo dalla matrice formata dalle righe di posti $p+1$, $p+2, \ldots, p+\delta_1$ la nuova matrice formata delle righe $p+\delta_1+1, p+\delta_1+2, \ldots$, $p+\delta_1+\rho$ moltiplicata a sinistra per la nuova Φ_3, si perviene ad una matrice del tipo (1), nella quale al posto di A_1 si ha dunque la matrice ottenuta invertendo gli elementi diagonali di posti ρ, $\rho+1$ della A_1. Si può quindi alla fine porre la A al posto della A_1, e giungere così alla nuova *forma normale di* SEVERI, cioè ad una matrice del tipo (1), forma di cui mi sono già servito in [1] e [2], e che meglio si adatta agli sviluppi algoritmici qui necessari.

13. Una generalizzazione del gruppo modulare ristretto.

Come osservazione conclusiva, faccio notare come la (26) conduca ad una generalizzazione del concetto di gruppo modulare ristretto e di gruppo simplettico.

Per *gruppo modulare ristretto* (cfr. [5, p. 124]) relativo alla matrice $\Delta^{(p)}$ del tipo indicato nel n. 1 di questo lavoro, si intende l'insieme delle matrici unimodulari $T^{(2p)}$ tali che:

$$(38)\qquad TM'T_{-1} = M', \qquad M' = \begin{Vmatrix} & \Delta \\ -\Delta & \end{Vmatrix}.$$

Si prova che tale insieme è effettivamente un gruppo e che le sue matrici sono necessariamente modulari.

Ponendo $C = T^{-1}$ e passando alle matrici inverse nei due membri della (38_1), essa equivale alla:

$$(39)\qquad C_{-1}MC = M, \qquad M = \begin{Vmatrix} & A \\ -A & \end{Vmatrix},$$

che si può quindi prendere come definitrice del gruppo modulare ristretto.

Ciò posto, si parta dalla (26); tenuto conto del fatto che $k=0$, $t=\varepsilon=\pm 1$, $A = A^*$, essa diviene:

$$(40)\qquad E_{-1}ME = \varepsilon M_1,$$

in cui M è data dalla (28_2), M_1 si ottiene da M cambiando segno alle ultime $p-\rho$ righe e colonne, E è la matrice del n. 9.

Si consideri la matrice unimodulare

$$P = \begin{Vmatrix} U^{(\rho)} & & & \\ & & & U^{(p-\rho)} \\ & & U^{(\delta_1+\rho)} & \\ & U^{(p-\rho)} & & \end{Vmatrix};$$

essa è tale che: $PE = D$ (cfr. n. 9), $P = P_{-1} = P^{-1}$, $PMP = M_1$; dalla (40) segue allora $E_{-1}PPMPPE = \varepsilon M_1$, e quindi:

$$D_{-1}M_1D = \varepsilon M_1. \tag{41}$$

Posto poi

$$Q = \left\| \begin{matrix} U^{(p+\delta_1+\rho)} & \\ & -U^{(p-\rho)} \end{matrix} \right\|,$$

e tenuto conto del fatto che: $Q = Q_{-1} = Q^{-1}$, $QM_1Q = M$, $QDQ = C$ (cfr. n. 6), dalla (41) segue $QD_{-1}QQM_1QQDQ = \varepsilon QM_1Q$, e quindi:

$$C_{-1}MC = \varepsilon M, \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{42}$$

Si consideri una matrice C, soddisfacente alla

$$C_{-1}MC = M; \tag{43}$$

posto:

$$R = \left\| \begin{matrix} U^{(p+\delta_1)} & \\ & -U^{(p)} \end{matrix} \right\|, \tag{44}$$

la C e la CR soddisfanno ovviamente alla (42), perchè $RMR = -M$. Viceversa è ovvio che se C soddisfa alla (42), o C o CR soddisfa alla (43). Cioè: *condizione necessaria e sufficiente perchè C e CR soddisfacciano alla* (42) *è che una di esse soddisfaccia alla* (43). È ovvio che la (43) è una generalizzazione della (39).

Inoltre: *L'insieme delle matrici unimodulari soddisfacenti alla* (42), *e l'insieme delle matrici unimodulari soddisfacenti alla* (43) *è un gruppo.*

Se infatti C', C'' sono unimodulari e soddisfanno la (42), cioè se $C'_{-1}MC' = \varepsilon' M$, $C''_{-1}MC'' = \varepsilon'' M$, si ha $\varepsilon' C''_{-1}C'_{-1}MC'C'' = \varepsilon'' M$, cioè $(C'C'')_{-1}M(C'C'') = \varepsilon'\varepsilon'' M$, e quindi anche $C'C''$ soddisfa la (42); se vale la (42) si ha anche, per moltiplicazione a sinistra per C_{-1}^{-1} e a destra per C^{-1}, $\varepsilon M = C_{-1}^{-1}MC^{-1}$, e quindi anche C^{-1} soddisfa la (42); quanto basta perchè l'insieme considerato sia sottogruppo del gruppo delle matrici unimodulari. Se, nella precedente dimostrazione, si pone $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = 1$, si ha l'analoga dimostrazione per la (43).

Ciò posto, dati gli interi non negativi p, δ_1, e una matrice diagonale $\Delta^{(p)}$, i cui elementi diagonali sono interi positivi $d_1, d_2, \dots, d_p$, tali che $d_1 = 1$ e che d_{i-1} sia divisore di d_i $(i = 2, 3, \dots, p)$ chiamo *gruppo unimodulare ristretto* {*gruppo simplettico*}, relativo ai caratteri p, δ_1 e alla matrice Δ, l'insieme delle matrici unimodulari {reali non degeneri} $C^{(2p+\delta_1)}$ soddisfacenti alla relazione (43), nella quale la matrice M è data dalla (28_2), con $A = \Delta^{-1}$.

L'opportunità della definizione è giustificata, oltre che dall'analogia formale con la (39), or ora messa in luce, da un'analogia sostanziale dovuta al seguente fatto.

Le affermazioni dei nn. precedenti e di questo n., tenuto conto del fatto che $k=0$ e delle relazioni dette tra le matrici soddisfacenti alla (42) e alla (43), implicano la seguente proprietà: *data una generica MNS* $\omega^{(g,g')}$ $(g'=2p+\delta_1)$ *per cui* $p-\rho>1$ *e una matrice unimodulare* $C^{(g')}$, *condizione necessaria perchè esista una matrice complessa non degenere* $\gamma^{(g)}$ *tale che* $\gamma\omega C$ *sia una MNS è che* C *oppure* CR *appartenga al gruppo unimodulare ristretto relativo ai caratteri* p, δ_1 *e alla matrice* Δ, *associati alla MNS* ω. E questo teorema è l'analogo, sia pure in forma più debole, di un teorema della teoria delle matrici abeliane [5], secondo il quale: *data una generica matrice normale di* RIEMANN, $\omega^{*(p,2p)}$ *e una matrice unimodulare* $C^{(2p)}$, *condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una matrice complessa non degenere* $\gamma^{(p)}$ *tale che* $\gamma\omega^{*}C$ *sia una matrice normale di* RIEMANN *è che* C *appartenga al gruppo modulare ristretto.*

BIBLIOGRAFIA

[1] M. BENEDICTY, *Sui caratteri di matrici quasi abeliane equivalenti*, « Rend. di Mat. », (5), 12 (1953), p. 332-339.

[2] M. BENEDICTY, *Matrici quasi abeliane*, Quaderno in corso di pubblicazione a cura del Circolo di Ricerche Matematiche in Collaborazione, Roma.

[3] M. BENEDICTY, *Interi caratteristici e divisori elementari delle matrici normali di Severi*, « Rend. Lincei », (8), 16 (1954), p. 716.

[4] F. CONFORTO, *Sulla totalità delle relazioni generalizzate di Hurwitz di una matrice quasi abeliana*, « Ann. di Mat. », (4), 28 (1949), p. 299-315.

[5] F. CONFORTO, *Funzioni abeliane modulari*, lezioni raccolte dal Dott. M. ROSATI, vol. I, Docet, Roma, (1951).

[6] F. CONFORTO, *Sulle trasformazioni in sè della varietà quasi abeliana di Picard, che sono rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie*, « Rend. di Mat. », (5), 13 (1954), p. 219-248.

[7] F. SEVERI, *Funzioni quasi abeliane*, « Pont. Ac. Scient. Scripta Varia », 4 (1947).