Variazioni di segno condizionate e teorema di Fabry.

Memoria di GIOVANNI RICCI (a Milano).

Sunto. - *Si estende il campo di applicabilità della classica condizione sufficiente di* E. FABRY *per il punto critico sulla circonferenza di convergenza: questa condizione richiede l'ispezione della successione dei coefficienti su una successione di tratti e il computo di certe variazioni di segno. Per ottenere la nostra estensione si introduce il concetto di «variazione di segno condizionata» che consente tanto un computo più favorevole quanto la possibilità di ridurre l'ispezione alla parte centrale dei tratti. - 1. Posizione del problema. - 2. Variazioni di segno condizionate. - 3. Condizione unilaterale con quante si vogliono variazioni di segno (Teor. I). - 4. Una funzione ausiliaria. - 5. Condizione sufficiente espressa con le variazioni di segno condizionate (Teor. II). - 6. Il tratto ridotto (Teor. III, IV e V). - 7. Criteri sufficienti per le serie di potenze non prolungabili (Teor. VI). - 8. Alcuni lemmi noti. - 9. Un nuovo lemma. - 10. Maggiorazione di* Π_P. *- 11. Dimostrazione del lemma principale. - 12. Dimostrazione del Teor. II. - 13. Dimostrazione del Teor. V.*

1. Posizione del problema. - Una proposizione classica di E. FABRY, al seguito di altre analoghe dovute a G. VIVANTI, A. PRINGSHEIM, J. HADAMARD, ecc., assegna una condizione sufficiente atta a localizzare un punto critico di una serie di potenze (¹); la proposizione a cui alludiamo è la seguente:

TEOREMA (E. FABRY). - « La serie di potenze $\Sigma\, a_n z^n$ abbia raggio di convergenza 1. Il punto 1 è critico se è possibile determinare:

(i) una successione $\{n_h\}$ crescente di indici interi $n_1, n_2, \ldots$,

(ii) una successione $\{\gamma_h\}$ di orientazioni $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$,

(iii) un numero reale $0 < \theta < 1$, tali che risulti (²)

$$(1.1)\qquad \mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \qquad \{\mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \to 1 \qquad \text{per } h \to +\infty,$$

e detto v_h il numero delle variazioni di segno (passaggi da $+$ a $-$ oppure da $-$ a $+$, trascurando gli eventuali zeri) della successione finita di numeri reali $\mathrm{Re}\,(a_m e^{-i\gamma_h})$, dove l'indice m appartiene al tratto

$$(I_h')\qquad (1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h,$$

risulta $v_h/n_h \to 0$ per $h \to +\infty$ ».

(¹) E. FABRY, « Annales École normale supér. », (3), *13*, 367-399. E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.* 2. Aufl., Berlin 1929, pp. 14-16, 76-86. Noi seguiremo l'esposizione di E. LANDAU; in questa opera si trovano anche indicazioni bibliografiche.

(²) Per semplicità denoteremo con $\alpha^{1/n}$ la radice n-esima aritmetica di un numero reale e positivo α e con $|z|^{1/n}$ la radice n-esima aritmetica del modulo di z.

In questa interessante proposizione si vede il proposito di espandere la portata della condizione sufficiente nell'intento:

1°) di limitare l'ispezione sulla successione dei coefficienti, a certi tratti I_h (di ampiezza relativa non infinitesima) distaccati quanto si vuole l'uno dall'altro, purchè centrati su una successione $\{a_{n_h}\}$ con $|a_{n_h}|^{1/n_h} \to 1$;

2°) di scegliere, per ogni I_h, una orientazione γ_h di aggiustamento lungo la quale le componenti $\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})$ soddisfino ancora alle (1.1) e il numero v_h dei passaggi, dal semipiano $\operatorname{Re}(ze^{-i\gamma_h}) > 0$ all'opposto, dei coefficienti a_m con l'indice m in I_h, costituisca una percentuale infinitesima, cioè verifichi la condizione $v_h/n_h \to 0$.

Ci proponiamo adesso il seguente problema: È possibile, nel computo di tali variazioni di segno, trascurare quelle provocate da componenti $\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})$ che non siano troppo grandi? Certamente si, quando tale confine della grandezza sia contenuto entro i limiti di una « perturbazione » $\Sigma\, b_n z^n$ della serie di potenze e per la quale $\overline{\lim}\, |b_n|^{1/n} < 1$, poichè essa conduce a $\Sigma\,(a_n + b_n) z^n$ e non altera l'insieme dei punti critici sulla circonferenza di convergenza $|z| = 1$. Ma il problema diventa significativo se viene richiesto che il confine per la grandezza delle componenti $\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})$ da trascurare nel computo delle variazioni, non rientri nella condizione $\overline{\lim}\, |b_n|^{1/n} < 1$ che caratterizza le perturbazioni trascurabili a priori.

Alla soluzione di questo problema è rivolta la presente Memoria: dopo avere definite molto naturalmente le variazioni condizionate da una funzione $\psi(n)$ o ψ-variazioni (la funzione ψ sarà poi quella che assegna, in ciascun tratto I_h, il confine superiore di cui parlavamo sopra), si stabilisce un criterio sufficiente della forma richiesta (Teor. II). Altri criterî sufficienti (Teor. III, IV e V) sono rivolti a restringere il computo delle variazioni di segno a un tratto I_h^*, collocato al centro di I_h e avente ampiezza relativa infinitesima. Vengono poi esplicitamente enunciate alcune condizioni sufficienti (Teor. VI) a garantire che $\Sigma\, a_n z^n$ non sia prolungabile, cioè che la circonferenza $|z| = 1$ sia linea critica e che discendono come corollarî dalle precedenti.

Nella seconda parte della Memoria (nn. 8-13), dopo avere richiamati alcuni lemmi noti, si dà la dimostrazione di un nuovo lemma che utilizziamo poi per dimostrare i Teoremi II e V che sono le proposizioni più generali da cui seguono tutte le altre come corollarî.

2. Variazioni di segno condizionate. – Sia

$$\{u_n\} \qquad u_0,\ u_1,\ \dots,\ u_N$$

una successione finita di $N+1$ numeri reali e sia $\psi(n)$ una funzione non negativa

$$\psi(n) \geqq 0, \qquad\qquad (n = 0,\ 1, \dots,\ N).$$

Si dirà che due elementi u_n, u_{n+r} di $\{u_n\}$ (anche non consecutivi) presentano *una variazione di segno condizionata da* ψ o *una* ψ*-variazione di segno* quando è

$$u_n > \psi(n), \quad u_{n+r} < -\psi(n+r) \text{ oppure } u_n < -\psi(n), \quad u_{n+r} > \psi(n+r),$$

mentre tutti gli (eventuali) elementi intermedî u_t $(n < t < n+r)$ sono tutti in modulo non superiori a $\psi(t)$, cioè

$$|u_t| \leqq \psi(t), \qquad (n < t < n+r).$$

In sostanza, il computo delle ψ-variazioni di segno lungo $\{u_n\}$ si eseguisce come il computo delle variazioni di segno ordinarie lungo la successione ottenuta da $\{u_n\}$ sostituendo lo zero a ogni elemento $|u_t| \leqq \psi(t)$.

È evidente che, se $\psi_1(n) \leqq \psi_2(n)$, il numero delle ψ_2-variazioni non supera quello delle ψ_1-variazioni.

Le variazioni di segno ordinarie si diranno le 0-variazioni.

3. Limitazione unilaterale con quante si vogliono variazioni di segno. - Come consentire, senza limitazione del numero, le variazioni di segno di $\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})$? Una risposta è fornita dal seguente

Teorema I. - *La serie di potenze $\Sigma a_n z^n$ abbia raggio di convergenza 1. Il punto 1 è critico se è possibile determinare*

(i) *una successione $\{n_h\}$ crescente di indici interi $n_1, n_2, \ldots$,*

(ii) *una successione $\{\gamma_h\}$ di orientazioni $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$,*

(iii) *due numeri reali e positivi θ (abbastanza piccolo) e K (abbastanza grande)*

tali che risulti

$$\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \qquad \{\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \to 1 \qquad \textit{per } h \to +\infty, \tag{3.1}$$

e, per tutti gli indici m di ogni tratto

$$(1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h, \tag{I_h}$$

risulti, con $m = n_h \pm u$ e $h = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) \geqq -\frac{K}{n_h} \exp(u^2/n_h) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}). \tag{3.2}$$

Osservazione. - Questa condizione (3.2) ci mostra che la componente $\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})$, con $m \in I_h$, può cambiare segno senza limitazione sul numero delle variazioni, a patto che essa, da una parte (qui dalla parte negativa), non superi in modulo l'espressione

$$\psi_h^*(u) = \frac{K}{n_h} \exp(u^2/n_h) \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}),$$

la quale, rispetto allo scarto $u = |n_h - m|$ è dell'ordine esponenziale e nelle zone estreme del tratto I_h non pone alcun vincolo, poichè concede una libertà superiore a quella consentita dal teorema di CAUCHY-HADAMARD per il raggio di convergenza 1: infatti, ponendo $u = \tau n_h$, per la stessa espressione abbiamo

$$|\psi_h^*(u)|^{1/m} = \{ |\psi_h^*(u)|^{1/n_h} \}^{n_h/m} = \{ \exp(\tau^2) \cdot \lambda_h \}^{n_h/m}$$

con

$$\lambda_h = (K/n_h)^{1/n_h} \cdot \{ \mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) \}^{1/n_h} \to 1$$

ed essendo

$$1/(1+\theta) < n_h/m < 1/(1-\theta)$$

(fra limiti fissi) risulta $\lambda_h^{n_h/m} \to 1$ e

$$|\psi_h^*(u)|^{1/m} > \exp(\tau^2/(1+\theta)) \cdot (1+o(1))$$

che risulta > 1 per τ fisso, $\to 1$ per $\tau \to 0$.

La dimostrazione di questo Teor. I si trova in G. RICCI [3] ove si trae anche partito dall'eventuale emisimmetria del tratto I_h; si potrebbe anche vedere che la dimostrazione del Teor. II (vedi n. 5) esposta nei nn. 8-12, col semplice adattamento di porre $g(z) \equiv 1$ (costante), conduce proprio al Teor. I.

4. Una funzione ausiliaria. - Che cosa accade quando esistono in ogni tratto I_h, dei coefficienti a_m pei quali non è soddisfatta la condizione (3.2)? Allora siamo in presenza delle variazioni di segno « sostanziali » e il loro insieme deve essere regolato, sia per ciò che riguarda il loro numero v_h, sia per ciò che riguarda la loro posizione nel tratto I_h. È evidente che una tale regolamentazione si potrà ricavare dall'andamento della classica funzione intera $g(z)$ di G. FABER [4] che fornisce i ripiegamenti atti a sopprimere le variazioni di segno; ma il nostro scopo è di ricavare una condizione del tipo consueto, cioè una condizione che richieda soltanto l'ispezione di ogni tratto I_h isolatamente, senza impegnare in forma solidale, attraverso la trascendente $g(z)$, quello che accade negli altri tratti I_l $(l \neq h)$; per superare questa difficoltà, abbiamo dovuto stabilire un nuovo lemma (vedi n. 9, Lemma principale) che fornisce una maggiorazione del rapporto $|g(m)/g(n_h)|$ mediante una *funzione ausiliaria* $\Phi(u, v)$ *calcolata con gli elementi attinenti esclusivamente a* I_h.

Poniamo

$$\Phi(u, v) = \begin{cases} u\,\{\log(v/u) + 4\}, & \text{per } 1 \leqq u \leqq v \\ v\,\{\log(u/v) + 4\}, & \text{per } 1 \leqq v \leqq u. \end{cases} \tag{4.1}$$

Questa funzione $\Phi(u, v)$ è definita nel quadrante $(1 \leqq u,\ 1 \leqq v)$, è simmetrica rispetto alle due variabili u e v, ed è crescente rispetto a ciascuna delle variabili; infatti le derivate parziali:

$$\Phi_u = \log(v/u) + 3 \text{ oppure } = v/u, \qquad \Phi_v = u/v \text{ oppure } = \log(u/v) + 3$$

---

(3) G. RICCI, *Emisimmetria di tratti e teorema di Vivanti-Pringsheim-Hadamard-Fabry relativo ai punti critici*, « Bollettino U. M. I. », III, *9*, pp. 126-135, (1954); qui figura soltanto la costante θ, ma il teorema è equivalente a quello enunciato sopra.

(4) Vedi E. LANDAU, loc cit. in (1), pp. 78-83.

sono positive. In particolare, perchè ci sarà utile nel seguito, osserviamo che per $v \leqq u$ è

$$\Phi(u,\ v+1) > \Phi(u,\ v) + \log\,(u/(v+1)). \tag{4.2}$$

Infatti

$$\begin{aligned}\Phi(u,\ v+1) - \Phi(u,\ v) &= \\ &= (v+1)\,\{\log\,(u/(v+1)) + 4\} - v\,\{\log\,(u/v) + 4\} \\ &= \log\frac{u}{v+1} + 4 - v\log\left(1+\frac{1}{v}\right) \\ &\geqq \log\frac{u}{v+1} + 3 > \log\frac{u}{v+1}\,.\end{aligned}$$

5. Condizione sufficiente espressa con le variazioni di segno condizionate. - Sussiste il seguente

TEOREMA II. - *La serie di potenze* $\Sigma\, a_n z^n$ *abbia raggio di convergenza 1. Il punto 1 è critico se è possibile determinare*

(i) *una successione* $\{n_h\}$ *crescente di indici interi* $n_1,\ n_2, \ldots,$

(ii) *una successione* $\{\gamma_h\}$ *di orientazioni* $\gamma_1,\ \gamma_2, \cdots,$

(iii) *una successione* $\{V_h\}$ *di numeri interi positivi tali che*

$$V_h \to +\infty, \qquad V_h/n_h \to 0, \tag{5.1}$$

(iv) *due numeri reali e positivi* θ *(abbastanza piccolo) e* K *(abbastanza grande),*

tali che risulti

$$\mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \qquad \{\mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \to 1 \tag{5.2}$$

e il numero $v_h(\psi_h)$ *delle* ψ_h*-variazioni di segno dell'allineamento di numeri reali*

$$\mathrm{Re}\,(a_m e^{-i\gamma_h}), \qquad (1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h \tag{5.3}$$

verifichi la disuguaglianza

$$v_h(\psi_h) \leqq V_h \qquad (h = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \tag{5.4}$$

La funzione $\psi_h(u)$ *condizionatrice delle* ψ_h*-variazioni di segno è la seguente*

$$\psi_h(u) = \frac{K}{n_h V_h^2}\exp\left\{\frac{u^2}{n_h} - \Phi(u,\ V_h)\right\}\mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}), \tag{5.5}$$

dove $\Phi(u,\ v)$ *è la funzione definita in* (4.1).

CASO COMPLEMENTARE. - *Il punto 1 è critico anche se per* $V_h = V_0$ *(costante) il numero delle variazioni* $v_h(\psi_h)$ *verifica la disuguaglianza*

$$v_h(\psi_h) \leqq V_0 - 1. \tag{5.4*}$$

OSSERVAZIONE I. - Si dice « θ abbastanza piccolo e K abbastanza grande », perchè, se la (5.4) (o la (5.4)*) è verificata per una coppia di numeri θ e K, essa è, a maggior ragione, verificata per ogni coppia θ' e K' con $\theta' \leq \theta$, $K' \geqq K$. Infatti, se $\theta' \leqq \theta$, il tratto $(1-\theta')n_k \leqq$ $\leqq m \leqq (1+\theta')n_k$ è contenuto in quello considerato in (5.3); inoltre il secondo membro di (5.5) non diminuisce se in luogo di K si sostituisce K'. Per questa doppia ragione risulta $v_k(\psi'_k) \leq v_k(\psi_k)$. La possibilità di sostituire a V_k un numero V_k' più piccolo può fare aumentare ulteriormente il secondo membro di (5.5) (si tenga presente che $\Phi(u, v)$ è crescente al crescere di v).

Sostituiamo alla funzione $\psi_k(u)$ una funzione $\Psi_k(u) \leqq \psi_k(u)$; allora $v_k(\psi_k) \leqq v_k(\Psi_k)$ e da $v_k(\Psi_k) \leqq V_k$ (oppure $\leq V_0 - 1$) segue che 1 è critico.

In particolare, sia $v_k(0)$ il numero delle variazioni ordinarie di segno presenti in (5.3); nelle ipotesi del teor. di E. FABRY (vedi n. 1), $v_k(0)/n_k \to 0$, possiamo assumere $V_k = v_k(0) + 1$ e risulta $(\psi_k(u) > 0)$

$$v_k(\psi_k) \leqq v_k(0) = V_k - 1 < V_k = o(n_k);$$

la condizione (5.1) del Teor. II è soddisfatta e il punto 1 è critico. Pertanto il teorema classico di E. FABRY è contenuto nel Teor. II: ma questo è sostanzialmente più generale di quello? La risposta è affermativa ed è contenuta nell'Osservazione seguente.

OSSERVAZIONE II. - L'interesse della forma di $\psi_k(u)$ sta nel fatto che l'espressione $u^2/n_k - \Phi(u, V_k)$ dell'esponente in (5.5) può presentare il sottraendo $\Phi(u, V_k)$ di ordine notevolmente inferiore a quello di u^2/n_k.

Per illustrare questa osservazione consideriamo il caso in cui la coppia (u, V_k) soddisfi alle limitazioni $(\delta > 0)$:

$$\sqrt{(2+\delta)n_k \log n_k} < u \leqq \theta n_k, \qquad V_k < u^2/(n_k \log n_k). \tag{5.6}$$

Una facile verifica mostra che per $h \geqq h_0(\delta)$ risulta

$$\psi_k(u) > n_k^{\delta/3}\,\mathrm{Re}\,(a_{n_k} e^{-i\gamma_k}); \tag{5.7}$$

pertanto, fra i coefficienti a_m soppressi nel tratto I_k per computare le ψ_k-variazioni (condizionate), ve ne possono essere di quelli che hanno la componente reale $\mathrm{Re}\,(a_m e^{-i\gamma_k})$ di modulo maggiore di $\mathrm{Re}\,(a_{n_k} e^{-i\gamma_k})$ e quindi la serie di potenze $\Sigma\, a_n z^n$ non si può in generale ottenere mediante una perturbazione $\Sigma\, b_n z^n$, con $\overline{\lim}\, |\, b_n\,|^{1/n} < 1$, da un' altra serie $\Sigma\,(a_n - b_n) z^n$ che verifichi la condizione $v_k(0)/n_k$ del teorema classico di E. FABRY.

Osserviamo inoltre che il numero dei coefficienti a_m, aventi grande componente e che vengono soppressi per procedere al computo delle ψ_k-variazioni, può, nel caso più favorevole, raggiungere l'espressione $2(\theta - o(1))n_k$ e così ricoprire quasi tutto il tratto I_k, lasciando scoperto soltanto un *tratto centrale* I_k^*.

Che dalle limitazioni (5.6) segua la (5.7) si vede al modo seguente: $\Phi(u, v)$ è funzione crescente al crescere di v, inoltre

$$V_k \leqq u^2/(n_k \log n_k) = u \cdot u/(n_k \log n_k) < u$$

e quindi

$$\begin{aligned}\Phi(u,\ V_k) &< \frac{u^2}{n_k \log n_k}\left\{\log \frac{n_k \log n_k}{u} + 4\right\} \\ &< \frac{u^2}{n_k \log n_k}\left\{\log \sqrt{\frac{n_k \log n_k}{2+\delta}} + 4\right\} \\ &< \frac{u^2}{n_k \log n_k} \cdot \frac{1}{2} \log n_k \cdot \{\,1 + o(1)\,\} \\ &= \frac{u^2}{2n_k}\{\,1 + o(1)\,\}.\end{aligned}$$

Si deduce che

$$\begin{aligned}
\psi_h(u) &\geqq \frac{K}{n_h V_h^2} \exp\left\{ \frac{u^2}{n_h} - \frac{u^2}{2n_h}(1+o(1)) \right\} \\
&> \frac{K n_h \log^2 n_h}{u^4} \exp\left\{ \frac{u^2}{2n_h}(1+o(1)) \right\} \\
&> \frac{K}{(2+\delta)^2 n_h} \exp\left\{ \frac{u^2}{2n_h}(1+o(1)) \right\} \\
&> \exp\left\{ \frac{2+\delta}{2} \log n_h (1+o(1)) - \log n_h \right\} \\
&> \exp\left(\frac{\delta}{3} \log n_h \right), \quad \text{per} \quad h \geqq h(\delta) \\
&= n_h^{\delta/3}.
\end{aligned}$$

6. **Il tratto ridotto.** - Ci proponiamo di enunciare qui esplicitamente delle condizioni che impegnino una successione $\{ I_h^* \}$ di tratti I_h^* (situati al centro dei tratti I_h) che siano *ridotti*, nel senso che la loro ampiezza risulti $o(n_h)$: sussistono in proposito i teoremi seguenti.

Tratto I_h^* *di ampiezza* $2n_h / \log^\sigma n_h$ $(\sigma > 0)$.

TEOREMA III. - *La serie di potenze* $\Sigma a_n z^n$ *abbia raggio di convergenza 1. Il punto 1 è critico se è possibile determinare le successioni* $\{ n_h \}$ *e* $\{ \gamma_h \}$ *e due numeri reali* $\theta > 0$, $\sigma > 0$ *tali che*

$$\text{(6.1)} \qquad \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \qquad \{ \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) \}^{1/n_h} \to 1, \quad per \quad h \to \infty$$

e inoltre: 1°) *il numero* v_h^* *delle variazioni di segno (ordinarie) dell'allineamento*

$$\text{(6.2)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} & \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}), \qquad m \in I_h^* \\ (I_h^*) & n_h - n_h/\log^\sigma n_h \leqq m \leqq n_h + n_h/\log^\sigma n_h \end{array} \right.$$

non superi $n_h / \log^{1+2\sigma} n_h$;

2°) *le componenti* $\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})$ *corrispondenti alle parti laterali del tratto* I_h

$$\text{(6.3)} \qquad (1-\theta) n_h \leqq m < n_h - n_h/\log^\sigma n_h, \qquad n_h + n_h/\log^\sigma n_h \leqq m < (1+\theta) n_h$$

siano maggiorate nel modo seguente

$$\text{(6.4)} \qquad |\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})| < \exp\left(\frac{n_h}{2\log^{2\sigma} n_h} \right) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}).$$

Tratto I_h^* *di ampiezza* $2n_h^\sigma$, $(1/2 < \sigma < 1)$.

TEOREMA IV. - *La serie di potenze* $\Sigma a_n z^n$ *abbia raggio di convergenza 1. Il punto 1 è critico se è possibile determinare le successioni* $\{ n_h \}$ *e* $\{ \gamma_h \}$ *e due numeri reali* $\theta > 0$, $1/2 < \sigma < 1$ *tali che sussistano le* (6.1) *e inoltre:* 1°) *il numero* v_h^* *delle variazioni di segno (ordinarie) dell'allineamento*

$$\text{(6.5)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} & \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}), \qquad m \in I_h^* \\ (I_h^*) & n_h - n_h^\sigma \leqq m \leqq n_h + n_h^\sigma \end{array} \right.$$

non superi $n_h^{2\sigma-1} / \log n_h$;

2°) *le componenti* $\mathrm{Re}\,(a_m e^{-i\gamma_h})$ *corrispondenti alle parti laterali del tratto* I_h

$$(6.6) \qquad (1-\theta)n_h \leq m < n_h - n_h^{\sigma}, \qquad n_h + n_h^{\sigma} < m \leqq (1+\theta)n_h$$

siano maggiorate nel modo seguente:

$$(6.7) \qquad |\,\mathrm{Re}\,(a_m e^{-i\gamma_h})\,| < \exp\,(n_h^{2\sigma-1}/2)\,\mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}).$$

I teoremi III e IV si ottengono come corollarî del seguente Teor. V assumendo in questo teorema $0 < \theta \leqq 1/3$ e, rispettivamente,

$$V_h = n_h/(\log n_h)^{1+2\sigma}, \qquad V_h = n_h^{2\sigma-1}/\log n_h;$$

in ciascuno dei due casi è $V_h/n_h \to 0$, e una semplice verifica mostra che tutte le condizioni del Teor. V sono soddisfatte.

Teorema V. - *La serie di potenze* $\Sigma\, a_n z^n$ *abbia raggio di convergenza 1. Il punto 1 è critico se è possibile determinare le successioni* $\{n_h\}$, $\{\gamma_h\}$, $\{V_h\}$, *e il numero reale* $0 < \theta \leqq 1/3$ *tale che risulti*

$$(6.8) \qquad (e^8+1)\log n_h \leqq V_h = o(n_h/\log n_h)$$

$$(6.1) \qquad \mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \qquad \{\mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}\}^{1/n_h} \to 1 \quad per \quad h \to +\infty$$

e inoltre: 1°) *il numero* v_h^* *delle variazioni di segno (ordinarie) dell'allineamento*

$$(6.9) \qquad \begin{cases} \mathrm{Re}\,(a_m e^{-i\gamma_h}), & m \in I_h^* \\ (I_h^*) \quad n_h - \sqrt{V_h n_h \log n_h} \leqq m \leqq n_h + \sqrt{V_h n_h \log n_h} \end{cases}$$

non superi V_h;

2°) *le componenti* $\mathrm{Re}\,(a_m e^{-i\gamma_h})$ *corrispondenti alle parti laterali del tratto* I_h

$$(6.10) \quad (1-\theta)n_h \leqq m < n_h - \sqrt{V_h n_h \log n_h}, \quad n_h + \sqrt{V_h n_h \log n_h} < m \leqq (1+\theta)n_h$$

siano maggiorate nel modo seguente

$$(6.11) \qquad |\,\mathrm{Re}\,(a_m e^{-i\gamma_h})\,| < \exp\left(\frac{1}{2} V_h \log n_h\right) \cdot \mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}).$$

Questo Teor. V verrà dimostrato al n. 13 come conseguenza del Teor. II.

7. Criterî sufficienti per le serie di potenze non prolungabili. - I teoremi II, III, IV, e V (n. 5 e 6), resi indipendenti dalle orientazioni γ_h di aggiustamento, cioè da $\arg a_n$, forniscono condizioni sufficienti affinchè ogni punto $|z| = 1$ risulti critico: qui ci limitiamo a enunciarle andando dalle forme particolari a quella generale.

Teorema VI. - *La serie di potenze* $\Sigma\, a_n z^n$ *abbia il raggio di convergenza 1. Ogni punto della circonferenza* $|z| = 1$ *è critico se è possibile determinare*

(III*) *la successione* $\{n_h\}$ *crescente e due numeri reali* $\theta > 0$, $\sigma > 0$ *tali che* $|a_{n_h}|^{1/n_h} \to 1$ *e inoltre:* 1°) *il numero* v_h^* *dei coefficienti*

$$a_m \neq 0, \qquad n_h - n_h/\log^{\sigma} n_h \leqq m \leqq n_h + n_h/\log^{\sigma} n_h$$

risulti $\nu_h^* \leqq n_h / \log^{1+2\sigma} n_h$;

2°) $$\begin{cases} | a_m | \leqq \exp\left(\dfrac{n_h}{2 \log^{2\sigma} n_h}\right) | a_{n_k} | \\ (1-\theta) n_h \leqq m < n_h - n_h/\log^\sigma n_h, \qquad n_h + n_h/\log^\sigma n_h < m \leqq (1+\theta) n_h \end{cases}$$

oppure, in luogo di (III*) una delle seguenti (IV*), (V*), (II*) ([5]).

(IV*) *la successione* $\{n_h\}$ *crescente e due numeri reali* $\theta > 0$, $1/2 < \sigma < 1$ *tali che* $|a_{n_k}|^{1/n_k} \to 1$ *e inoltre:* 1°) *il numero* ν_h^* *dei coefficienti*

$$a_m \neq 0, \qquad n_h - n_h{}^\sigma \leqq m \leqq n_h + n_h{}^\sigma$$

risulti $\nu_h^* \leqq n_h{}^{2\sigma-1} / \log n_h$;

2°) $$\begin{cases} | a_m | \leqq \exp(n_h{}^{2\sigma-1}/2) \, | a_{n_k} | \\ (1-\theta) n_h \leqq m < n - n^\sigma, \qquad n + n^\sigma < m \leqq (1+\theta) n_h . \end{cases}$$

(V*) *le successioni* $\{n_h\}$ *(crescente) e* $\{V_h\}$, *e il numero reale* $\theta > 0$ *tali che* $|a_{n_k}|^{1/n_k} \to 1$,

$$(e^8 + 1) \log n_h \leqq V_h = o(n_h / \log n_h)$$

e inoltre: 1°) *il numero* ν_h^* *dei coefficienti*

$$a_m \neq 0, \qquad n_h - \sqrt{V_h n_h \log n_h} \leqq m \leqq n + \sqrt{V_h n_h \log n_h}$$

risulti $\nu_h^* \leqq V_h$;

2°) $$\begin{cases} | a_m | < \exp\left(\dfrac{1}{2} V_h \log n_h\right) | a_{n_k} | \\ (1-\theta) n_h \leqq m < n_h - \sqrt{V_h n_h \log n_h}, \qquad n_h + \sqrt{V_h n_h \log n_h} < m \leqq (1+\theta) n_h . \end{cases}$$

(II*) *due successioni* $\{n_h\}$ *(crescente) e* $\{V_h\}$ *di interi e due numeri reali e positivi* θ e K *tali che*

$$|a_{n_k}|^{1/n_k} \to 1, \qquad V_h/n_h \to 0$$

e posto:

$$\psi_h^*(u) = \frac{K}{n_h V_h{}^2} \exp\left\{ \frac{u^2}{n_h} - \Phi(u, \; V_h) \right\} | a_{n_k} |$$

($\Phi(u, v)$ *è la funzione ausiliaria* (4.1)) *il numero* $\nu(\psi_h^*)$ *dei coefficienti* a_m *per i quali*

$$| a_m | > \psi_h^*(u), \qquad m = n_h \pm u, \qquad (u = 1, \; 2, \ldots, \; [\theta n_h])$$

risulti

$$\nu(\psi_h^*) \leqq V_h .$$

e quando $\overline{\lim}\, V_h = V_0$ *finito, risulti* $\nu(\psi_h^*) \leqq V_0 - 1$.

([5]) Queste condizioni vengono indicate (III*), (IV*), ecc. perchè corollari dei Teor. III, IV, ecc.

Osservazione. - Nell'ordine di idee della condizione (V*) è noto il seguente teorema dovuto a F. Lösch [6].

« $\Sigma a_n z^n$ non è prolungabile fuori del cerchio di convergenza $|z| = 1$ se è possibile determinare una successione crescente $\{n_h\}$, un numero positivo K (abbastanza grande) e una successione monotona non decrescente $\varphi(n)$, a elementi positivi, per le quali siano verificate tutte le seguenti condizioni

$$\varphi(2n) = O(\varphi(n)), \qquad \varphi(n) = o(n/\log n)$$

$$|a_n| < n^{K\varphi(n)}, \quad (n = 1, 2, 3, ...), \qquad |a_{n_h}| > n_h^{-K\varphi(n_h)}, \quad (h = 1, 2, 3, ...)$$

$a_m = 0$ per $m \neq n_h$ e

$$n_h - \sqrt{n_h \log n_h \cdot \varphi(n_h)} \leq m \leq n_h + \sqrt{n_h \log n_h \cdot \varphi(n_h)} \qquad (h = 1, 2, 3, ...) \text{ ».}$$

Questo teorema non consente coefficienti a_m diversi da zero nei tratti ridotti I_h^* e pertanto può raggiungere risultati più favorevoli per ciò che riguarda l'ampiezza relativa del tratto ridotto stesso in confronto della condizione (V^*) la quale consente invece coefficienti a_m non nulli, purchè non siano troppo numerosi.

8. **Alcuni lemmi noti.** - Ricordiamo in questo n. alcuni lemmi che ci servono per dimostrare il Teor. II.

Lemma 1 [7]. - Sia $0 < \theta < 1$,

$$c_{n,m} = \frac{n!\,n!}{m!\,(n-m)!}, \qquad I_h \equiv (1-\theta)n_h \leq m \leq (1+\theta)n_h$$

$$S_h(\theta) = \sum_{m \in I_h} c_{n_h, m} \cdot a_n, \quad \text{(somma di Fabry).}$$

Se $\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{1/n} = 1$, $\overline{\lim_{h \to \infty}} |S_h(\theta)|^{1/n_h} \geq 1$ allora 1 è punto critico per la serie di potenze $\Sigma a_n z^n$.

Lemma 2. - $\Sigma a_n z^n$ abbia raggio di convergenza 1 e sia regolare nel punto 1; $g(z)$ sia una funzione intera tale che, per ogni $\delta > 0$, è $|g(z)| < Ke^{\delta|z|}$ per $K \geq K_0(\delta)$ e $|z| \geq R(\delta)$; allora $\sum_0^\infty a_n g(n) z^n$ converge per $|z| < 1$ ed è regolare nel punto 1.

Lemma 3. - Se $\{\rho_m\}$ $(m = 1, 2, 3, ...)$ è una successione crescente di numeri reali e positivi e se $m/\rho_m \to 0$ allora il prodotto infinito

$$g(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\rho_m^2}\right) \tag{8.1}$$

converge e rappresenta una funzione intera $g(z)$ che verifica l'ipotesi del Lemma 2.

---

[6] Vedi F. Lösch, « Math. Zeitschrift », *32* (1930), pp. 415-421.

[7] Vedi E. Landau, loc. cit. in [1], pp. 77-80 ove si trovano i lemmi 1, 2, 3.

Definizione della funzione intera $g(z)$. Veniamo a scegliere la successione $\{\rho_m\}$.

Siano m_1, m_2, ... m_{v_h} i valori interi dell'indice m del tratto $I_h \equiv (1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h$ tali che a_m presenta una ψ-variazione con quelli che precedono; allora poniamo

$$\rho_s = m_s - 1/2, \qquad (s = 1, 2, \dots, v_h) \tag{8.2}$$

$$P_h(z) = \prod_{s=1}^{v_h}\left(1 - \frac{z^2}{\rho_s^2}\right) \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned} g(z) &= P_1(z)P_2(z)\dots P_h(z)\dots \\ &= A_h(z)\cdot P_h(z)\cdot B_h(z). \end{aligned} \tag{8.4}$$

Denotiamo con p_h e q_h gli indici iniziale e finale di I_h, cioè

$$p_h - 1 < (1-\theta)n_h \leqq p_h, \qquad q_h \leqq (1+\theta)n_h < q_h + 1. \tag{8.5}$$

Diradamento della successione $\{n_h\}$. È evidente che, se le ipotesi del Teor. II sono verificate per una successione $\{n_h\}$ a maggior ragione lo saranno per una successione parziale di questa; pertanto non si limita la generalità del teorema col supporre $n_{h+1} > 12n_h$ e quindi $q_{h-1} < p_h < q_h < p_{h+1}$ (poichè $0 < \theta \leqq 1/3$): anzi possiamo supporre di più:

$$n_h/n_{h+1} \to 0, \qquad n_h^2/(v_h n_{h+1}) \to 0, \qquad h/\log n_h \to 0. \tag{8.5}$$

Inoltre, dall'ipotesi $v_h/n_h \to 0$ segue

$$(v_1 + v_2 + \dots + v_{h-1})/n_h \to 0. \tag{8.6}$$

poichè questo rapporto non supera

$$\frac{n_{h-1} + v_{h-1}}{n_h} = \frac{n_{h-1}}{n_h}\left(1 + \frac{v_{h-1}}{n_{h-1}}\right) \to 0.$$

Consideriamo il caso in cui $\{v_h\}$ non sia limitata e sia $\lim v_h = +\infty$; allora il diradamento si può eseguire anche nell'intento di ottenere la successione $\{v_h\}$ crescente e inoltre tale che

$$(v_1 + v_2 + \dots + v_{h-1})/v_h \to 0. \tag{8.7}$$

Quando invece sia $\varliminf v_h = v_0$ finito, è possibile il diradamento in guisa da avere $v_h = v_0$ (costante); allora non è possibile soddisfare alla (8.7), ma è sempre soddisfatta la seguente disuguaglianza

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{h-1} < hv_h. \tag{8.8}$$

Osserviamo infine che le relazioni $v_h/n_h \to 0$, $n_h > 12n_{h-1}$ portano come conseguenza

$$\begin{aligned} v_1 + \dots + v_h &\leqq v_1 + \dots + v_{h_0} + \varepsilon(n_{h_0+1} + \dots + n_h) \qquad (h_0 = h_0(\varepsilon)) \\ &\leqq v_1 + \dots + v_{h_0} + \varepsilon\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{12^s}\right) \cdot n_h \\ &\leqq 2\varepsilon n_h \end{aligned}$$

per h abbastanza grande, e quindi

$$v_1 + \dots + v_h = o(n_h).$$

Gli zeri $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m, \dots$ di $g(z)$ costituiscono una successione $\{\rho_m\}$ tale che $m/\rho_m \to 0$ ed è soddisfatta la condizione del Lemma 3. Infatti se $(1-\theta)n_h \leqq \rho_m \leqq (1+\theta)n_h$, risulta

(8.9) $$m \leqq v_1 + \dots + v_h = o(n_h) = o((1-\theta)n_h) = o(\rho_m).$$

(8.10) Lemma 4. - $|g(n_h)|^{1/n_h} \to 1$ *per* $h \to +\infty$.

Dimostrazione ([8]). Nel caso che $g(z)$ abbia al più un numero finito di zeri ρ_m, cioè sia un polinomio, l'affermazione del lemma è evidente.

Sia $\{\rho_m\}$ un'effettiva successione e quindi $m/\rho_m \to 0$, allora, per il Lemma 3 vale il Lemma 2 ed è $|g(n_h)| < Ke^{\delta n_h}$, per h abbastanza grande, e quindi $|g(n_h)|^{1/n_h} < K^{1/n_h}e^{\delta}$ e, per l'arbitrarietà di δ

(8.11) $$\overline{\lim_{h\to+\infty}} |g(n_h)|^{1/n_h} \leqq 1.$$

Pertanto basterà dimostrare che

(8.12) $$\underline{\lim}_{h\to+\infty} |g(n_h)|^{1/n_h} \geqq 1.$$

Cerchiamo un valore minorante per ciascuno dei tre fattori

$$|g(n_h)| = |A_h(n_h)| \cdot |P_h(n_h)| \cdot |B_h(n_h)|;$$

perverremo al risultato che ognuno di essi ha il minimo limite $\geqq 1$.

1.) $$|A_h(n_h)| = \prod_{\rho}\left(\left(\frac{n_h}{\rho}\right)^2 - 1\right) \qquad (\rho \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{h-1})$$

e, poichè $\rho \leqq (1+\theta)\, n_{h-1} \leqq 4n_{h-1}/3 \leqq n_h/9$, risulta ogni fattore > 1 e quindi

(8.13) $$|A_h(n_h)| > 1, \qquad \underline{\lim}\, |A_h(n_h)|^{1/n_h} \geqq 1.$$

2.) $$\begin{aligned} |B_h(n_h)| &= \prod_{\rho}\left(1 - \left(\frac{n_h}{\rho}\right)^2\right), \qquad (\rho \in I_{h+1} \cup I_{h+2} \cup \dots) \\ &\geqq \prod_{u \geqq p_{h+1}} \left(1 - \frac{n_h^2}{u^2}\right) \end{aligned}$$

([8]) La dimostrazione di questo lemma è contenuta sostanzialmente in E. Landau, loc. cit. ([1]), p. 82: qui la riportiamo per comodità del lettore.

(essendo $1 - a > 1/(1+2a)$ per $0 < a < 1/2$)

$$\begin{aligned} &\geqq \prod_{u \geqq p_{h+1}} \left(1 + \frac{2n_h^2}{u^2}\right)^{-1} \\ &\geqq \exp\left(-2n_h^2 \sum_{u=p_{h+1}}^{\infty} \frac{1}{u^2}\right) \\ &\geqq \exp\left(-2n_h^2/(p_{h+1}-1)\right) \\ &\geqq \exp\left(-n_h \cdot 2n_h/(p_{h+1}-1)\right) \end{aligned}$$

(dalla prima delle (8.5), $n_h/n_{h+1} \to 0$ segue $2n_h/(p_{h+1}-1) \to 0$)

$$\geqq \exp(-\varepsilon_h n_h).$$

Pertanto

$$\varliminf |B_h(n_h)|^{1/n_h} \geqq \lim \exp(-\varepsilon_h) = 1. \tag{8.14}$$

3.) $$|P_h(n_h)| = \prod_\rho \left| \left(\frac{n_h}{\rho}\right)^2 - 1 \right|, \qquad (\rho \in I_h)$$

$$\begin{aligned} &\geqq \prod_\rho \frac{n_h + \rho}{\rho} \cdot \frac{|n_h - \rho|}{\rho} \geqq \prod \frac{|n_h - \rho|}{\rho} \\ &\geqq \prod_\rho \frac{|n_h - \rho|}{2n_h} \geqq \prod_{\rho' \leqq n_h} \frac{n_h - \rho'}{2n_h} \cdot \prod_{\rho'' \geqq n_h} \frac{\rho'' - n_h}{2n_h} \end{aligned}$$

Se v' e v'' sono rispettivamente il numero dei numeri $\rho' \leqq n_h$ e dei numeri $\rho'' \geqq n_h$ abbiamo

$$\prod_{\rho'} \geqq \frac{1}{(2n_h)^{v'}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2v'-1}{2} \geqq \frac{v'!}{2v'(2n_h)^{v'}},$$

$$\prod_{\rho''} \geqq \frac{v''}{2v''(2n_h)^{v''}},$$

e ricordando che $v_h = v' + v''$, $v_h/n_h \to 0$, $v_h'/n_h \to 0$, $v_h''/n_h \to 0$ abbiamo (scriviamo v in luogo di v_h)

$$\begin{aligned} |P_h(n_h)| &\geqq \frac{v'!\,v''!}{4v'v''(2n_h)^v} \geqq \frac{v'!\,v''!}{v^2(2n_h)^v} \\ &\geqq \frac{v'^{v'} v''^{v''} e^{-v}}{v^2(2n_h)^v} \end{aligned}$$

$$|P_h(n_h)|^{1/n_h} \geqq v^{-2/n_h} \cdot e^{-v/n_h} \left(\frac{v'}{2n_h}\right)^{v'/n_h} \cdot \left(\frac{v''}{2n_h}\right)^{v''/n_h} \to 1$$

$$\varliminf |P_h(n_h)|^{1/n_h} \geqq 1. \tag{8.15}$$

Dalle (8.13), (8.14), (8.15) segue la (8.12) e quindi l'asserto.

Lemma 5. - Se $u < n/2$ risulta

$$c_{n,m} = c_{n,n\pm u} = \frac{n!\,n!}{(n-u)!\,(n+u)!} < \frac{\exp(-u^2/n)}{\sqrt{1-u^2/n^2}}.$$

Questo lemma si ottiene mediante l'applicazione della formula di Stirling; esso si trova in una nostra precedente piccola nota [9].

9. **Un nuovo Lemma.** - Veniamo a stabilire il seguente

Lemma principale. - *Sia* $m = n_h \pm u$; $u = 1, 2, \ldots, [\theta n_h]$ *e* $g(z)$ *la funzione intera*

$$g(z) = \prod_\rho \left(1 - \frac{z^2}{\rho^2}\right) \tag{9.1}$$

dove ρ *descrive la successione crescente (eventualmente finita) dei numeri* $m_s - \frac{1}{2}$ $(s = 1, 2, \ldots, v_h)$, $(h = 1, 2, \ldots)$ *definita in* (8.2).

Se i seguenti rapporti

$$(v_1 + v_2 + \ldots + v_{h-1})/v_h \tag{9.2}$$

$$v_h/n_h, \qquad n_{h-1}/n_h, \qquad n_h/n_{h+1}, \qquad n_h^2/(v_h n_{h+1}) \tag{9.3}$$

sono tutti abbastanza piccoli, allora

$$|\,g(m)/g(n_h)\,| \leqq v_h^2 \cdot \exp \Phi(u, v_h) \tag{9.4}$$

dove $\Phi(u, v)$ *è la funzione ausiliaria definita in* (4.1) *(vedi n. 4).*

Complemento. - Se il rapporto (9.2) non può essere assunto abbastanza piccolo, allora, in sua vece, basta che siano abbastanza piccoli i rapporti

$$(v_1 + v_2 + \ldots + v_{h-1})/n_h, \qquad h/\log n_h \tag{9.5}$$

e che inoltre sussista la disuguaglianza

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{h-1} < h v_h, \tag{9.6}$$

allora sussiste ancora la (9.4), con la sola eccezione che, quando si verificano simultaneamente le limitazioni

$$n_h < m, \qquad v_h = v_0 < u, \qquad K n_h/\log n_h < u \leqq \theta n_h, \tag{9.7}$$

in luogo della (9.4) si ha

$$|\,g(m)/g(n_h)\,| \leqq v_0^2 \exp \Phi(u, v_0 + 1). \tag{9.4*}$$

---

[9] Vedi G. Ricci, loc. cit. in [3].

OSSERVAZIONE. - Riprendiamo le considerazioni svolte al n. 8 sul diradamento della successione $\{ n_k \}$: si vede che, dopo il diradamento, i rapporti (9.2), (9.3) e (9.5) (che vennero già considerati in (8.7), (8.5), (8.6)) sono abbastanza piccoli per h abbastanza grande: inoltre, nel caso $\underline{\lim}\, v_h = v_0$ finito, il diradamento porta la (8.8) che è la (9.6)

Con questo lemma veniamo a maggiorare il rapporto $|g(m)/g(n_h)|$ con elementi attinenti esclusivamente al tratto I_h; la presenza degli altri tratti I_l $(l \neq h)$ è soltanto impegnata a rendere piccoli i rapporti considerati: in particolare (9.2) impegna i tratti I_l $(l < h)$ mentre dei tratti I_l, con $l > h$, si considera soltanto I_{h+1}.

Partiamo dalla (8 4); abbiamo

$$
\tag{9.8}
\begin{aligned}
\left|\frac{g(m)}{g(n_h)}\right| &= \left|\frac{A_h(m)}{A_h(n_h)}\right| \cdot \left|\frac{P_h(m)}{P_h(n_h)}\right| \cdot \left|\frac{B_h(m)}{B_h(n_h)}\right| \\
&= \Pi_A \cdot \Pi_P \cdot \Pi_B
\end{aligned}
$$

e veniamo a maggiorare separatamente i tre prodotti Π_A, Π_B, Π_P.

Denoteremo genericamente con ε_h', ε_h'', ε_h''', ... dei numeri che, in dipendenza della piccolezza dei rapporti (9.2), (9.3), (9.5), possono essere assunti piccoli quanto si vuole.

Maggiorazione di Π_A

$$
\Pi_A = \prod_\rho \frac{m^2 - \rho^2}{n_h^2 - \rho^2} = \prod_\rho \frac{(n_h \pm u)^2 - \rho^2}{n_h^2 - \rho^2}, \quad (\rho \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{h-1}).
$$

Per $m = n_h - u < n_h$ ogni fattore è < 1 e pertanto risulta $\Pi_A < 1$; sia $m = n_h + u > n_h$ e allora, essendo $\rho \leqq q_{h-1} \leqq n_{h-1}(1 + \theta)$ e $v_1 + v_2 + \dots + v_{h-1}$ il numero dei numeri ρ, abbiamo

$$
\begin{aligned}
\Pi_A &= \prod_\rho \left(1 + \frac{2n_h u + u^2}{n_h^2 - \rho^2}\right) \\
&\leqq \exp \left\{ u(2n_h + u) \cdot \sum_\rho \frac{1}{n_h^2 - \rho^2} \right\} \\
&\leqq \exp \left\{ \frac{u(2n_h + u)}{n_h^2 - q_{h-1}^2} \bar{v}_{h-1} \right\},
\end{aligned}
$$

dove si è posto $\bar{v}_{h-1} = v_1 + v_2 + \dots + v_{h-1}$; essendo $q_{h-1} \leqq n_{h-1}(1 + \theta) \leqq \leqq 4n_{h-1}/3 < n_h/9$, abbiamo

$$
\Pi_A \leqq \exp\left(\frac{81(2 + \theta)}{80 n_h} u \bar{v}_{h-1}\right) \leqq \exp \frac{19 u \bar{v}_{h-1}}{8 n_h}.
$$

Sia $u \leqq v_h$; allora è

$$
\tag{9.9}
\Pi_A \leqq \exp\left(u \cdot \frac{19 \bar{v}_{h-1}}{8 n_h}\right) \leqq \exp(\varepsilon_h' u).
$$

Sia $v_h < u$; allora è

$$\Pi_A \leqq \exp\left(v_h \cdot \frac{19u\bar{v}_{h-1}}{8n_h v_h}\right)$$

e poichè $u \leqq \theta n_h \leqq n_h/3$ e $\bar{v}_{h-1}/v_h$ è abbastanza piccolo ricaviamo

$$\Pi_A \leqq \exp(\varepsilon_h'' v_h). \tag{9.10}$$

Supponiamo che, essendo $\{v_h\}$ limitata, non sia possibile ottenere il rapporto $\bar{v}_{h-1}/v_h$ abbastanza piccolo; allora la scelta di $v_h = v_0$ (costante) conduce alla (9.6), cioè $\bar{v}_{h-1} < hv_h$ e possiamo scrivere

$$\Pi_A \leqq \exp\left(v_h \cdot \frac{19}{8}\frac{u}{n_h} \cdot h\right);$$

distinguiamo due sottocasi:

$$1^{\circ})\quad v_h < u \leqq Kn_h/\log n_h \qquad (K \text{ costante})$$

e allora (per la seconda delle (9.5))

$$\Pi_A \leqq \exp\left(v_h \cdot \frac{19}{8} \cdot \frac{K}{\log n_h} \cdot h\right) = \exp(\varepsilon_h''' v_h) \tag{9.11}$$

$$2^{\circ})\quad v_h < u, \qquad Kn_h/\log n_h < u \leqq \theta n_h$$

e allora è

$$\Pi_A \leqq \exp\left(v_h \cdot \frac{19}{8} \cdot \frac{u}{n_h} \cdot h\right) \leqq \exp\left(v_h \cdot \frac{19}{24}h\right);$$

questo è il caso più difficile: la piccolezza di $h/\log n_h$ ci dà (v_0 è indipendente da h)

$$v_h \cdot \frac{19}{24}h = v_0 \cdot \frac{19}{24}h = o(\log n_h) = o\left(\log\frac{u}{v_0}\right) = \varepsilon^{\mathrm{IV}} \log\frac{u}{v_0};$$

quindi in definitiva

$$\Pi_A \leqq \exp(\varepsilon^{\mathrm{IV}} \log(u/v_h)). \tag{9.12}$$

Maggiorazione di Π_B.

$$\Pi_B = \prod_\rho \frac{\rho^2 - m^2}{\rho^2 - n_h^2} = \prod_\rho \frac{\rho^2 - (n_h \pm u)^2}{\rho^2 - n_h^2}, \quad (\rho \in I_{h+1} \cup I_{h+2} \cup \ldots).$$

Per $m = n_h + u > n_h$ ogni fattore è < 1 e risulta $\Pi_B < 1$; sia $m = n_h - u < n_h$ e allora, essendo $\rho = p_{h+1} + s \geqq (1-\theta) n_{h+1} + s$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\Pi_B &= \prod_\rho \left(1 + \frac{u(2n_h - u)}{\rho^2 - n_h^2}\right) \leqq \exp \Sigma \frac{u(2n_h - u)}{\rho^2 - n_h^2} \\
&\leqq \exp\left(2un_h \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(p_{h+1} + s)^2 - n_h^2}\right) \\
&\leqq \exp\left(2u \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{y^2 - 1}\right), \qquad \left(y_0 = \frac{p_{h+1} - 1}{n_h}\right) \\
&= \exp\left\{2u\left(-\frac{1}{2}\log\frac{1 - 1/y_0}{1 + 1/y_0}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{2u\left(\frac{n_h}{p_{h+1} - 1} + \frac{n_h^3}{3(p_{h+1} - 1)^3} + \ldots\right)\right\}
\end{aligned}$$

e poichè $p_{h+1} \geqq 2n_{h+1}/3$ e n_h/n_{h+1} è abbastanza piccolo risulta

$$\Pi_B \leqq \exp(4un_h/n_{h+1}) \leqq \exp(\varepsilon_h^{\mathrm{v}} u). \tag{9.13}$$

Per $v_h \leqq u$ possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned}
\Pi_B &\leqq \exp\left(v_h \cdot \frac{4un_h}{v_h \cdot n_{h+1}}\right) \leqq \exp\left(v_h \cdot \frac{4(1+\theta)n_h^2}{v_h \cdot n_{h+1}}\right) \\
&\leqq \exp(\varepsilon_h^{\mathrm{vi}} \cdot v_h).
\end{aligned} \tag{9.14}$$

10. **Maggiorazione di Π_P.** - Ci proponiamo di maggiorare Π_P mediante un'espressione dipendente da h e u, essendo $m = n_h \pm u$

Consideriamo la funzione

$$\lambda(x) = \left|\frac{m^2 - x^2}{n^2 - x^2}\right| \qquad \begin{pmatrix} n > 0,\ 0 < \theta < 1/3,\ m \neq n \\ (1-\theta)n \leqq m \leqq (1+\theta)n \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

della variabile reale x definita nell'intervallo

$$(1-\theta)n \leqq x \leqq (1+\theta)n$$

e distinguiamo i due casi

$$1^{\circ})\quad m = n + u > n, \qquad 2^{\circ})\quad m = n - u < n;$$

essa si annulla per $x = m$, ha un punto di infinito in $x = n$ ed è, per ogni $x \neq m$, n, sempre positiva; si riconosce subito elementarmente che il suo andamento è quello illustrato schematicamente dalle due seguenti figure.

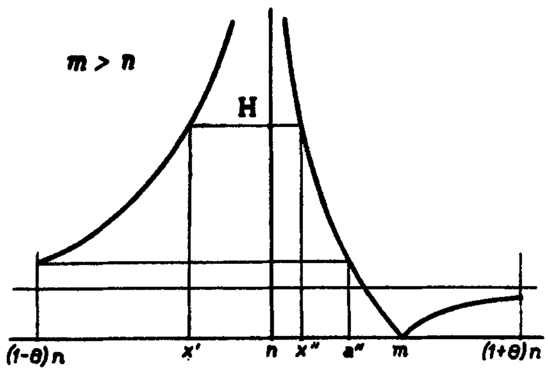

Fig. 1.

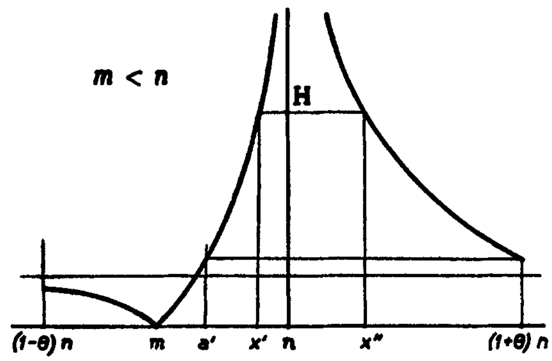

Fig. 2.

1° Caso. - $m = n + u = n(1+\mu) > n$.

Calcoliamo l'ascissa $a'' = n(1+\alpha'')$ del punto interno all'intervallo (n, m) nel quale $\lambda(n(1+\alpha'')) = \lambda(n(1-\theta))$. Ricordiamo che $0 < \mu \leqq \theta \leq 1/3$ e poniamo:

$$\theta_1 = 2\theta - \theta^2, \qquad \mu_1 = 2\mu + \mu^2, \qquad \mu_2 = \mu_1\theta_1/(\mu_1 + 2\theta_1)$$

allora un calcolo elementare fornisce

$$\alpha'' = \frac{1}{2}\mu_2 - \frac{1}{8}\mu_2^2 + \frac{1}{16}\mu_2^3 - \dots$$

e poichè $\mu_2 < 1/4$ ricaviamo $\alpha'' < \mu_2/2$ da cui facilmente $\alpha'' < 7\mu/12$. Inoltre

$$\alpha'' \backsim \mu/2, \quad \text{per} \quad \mu \to 0_+.$$

Sia $H > \lambda(n(1-\theta))$; determiniamo i due punti x' e x''

$$x' = (1-\xi')n < n < x'' = (1+\xi'')n$$

nei quali è $\lambda(x') = \lambda(x'') = H$. Mediante calcoli elementari ricaviamo le due espressioni

$$\xi' = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_1}{H-1} + \frac{1}{8}\left(\frac{\mu_1}{H-1}\right)^2 + \dots$$

$$\xi'' = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_1}{H+1} - \frac{1}{8}\left(\frac{\mu_1}{H+1}\right)^2 + \dots$$

delle quali la prima è valida se $H \geqq 2$. Da queste ricaviamo che

$$\xi' + \xi'' \backsim (2\mu + \mu^2)/H, \text{ per } \mu \text{ fisso e } H \to +\infty$$

$$\xi' + \xi'' \backsim 2H\mu/(H^2 - 1), \text{ per } H \text{ fisso e } \mu \to 0_+.$$

$$\xi' - \xi'' = \frac{\mu_1}{H^2 - 1} + \frac{\mu_1^2}{4} \cdot \frac{H^2 + 1}{(H^2 - 1)^2} + \dots$$

e quindi

$$\xi' - \xi'' \backsim \frac{\mu_1}{H^2}\left(1 + \frac{\mu_1}{4}\right), \text{ per } \mu \text{ fisso e } H \to +\infty$$

$$\xi' - \xi'' \backsim 2\mu/(H^2 - 1), \text{ per } H \text{ fisso e } \mu \to 0_+.$$

2° CASO. - $m = n - u = n(1-\mu) > n$.

Calcoli perfettamente analoghi si possono eseguire anche in questo 2° caso: l'ascissa $\alpha' = n(1-\alpha')$ del punto interno all'intervallo (m, n) nel quale $\lambda(n(1-\alpha')) = \lambda(n(1+\theta))$ ci dànno, con

$$\theta_1 = 2\theta + \theta^2, \qquad \mu_1 = 2\mu - \mu^2, \qquad \mu_2 = \mu_1\theta_1/(\mu_1 + 2\theta_1)$$
$$\alpha' = \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{8}\mu_2^2 + \frac{1}{16}\mu_2^3 + \dots$$

e poichè $\mu_2 \leq 0'204\dots$ si ricava, ricorrendo alla serie geometrica a partire dal secondo termine in poi $\alpha' < 2\mu_2/3$ e quindi $\alpha' < 2\mu/3$. Inoltre

$$\alpha' \sim \mu/2, \quad \text{per} \quad \mu \to 0_+.$$

Sia $H \geqq 2$, $H \geqq \lambda((1+\theta)n)$; determiniamo i due punti x' e x'' pei quali $\lambda(x') = \lambda(x'') = H$

$$x' = (1-\xi')n < n < x'' = (1+\xi'')n$$

Mediante calcoli elementari ricaviamo

$$\xi' = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_1}{H+1} + \frac{1}{8}\left(\frac{\mu_1}{H+1}\right)^2 + \dots$$
$$\xi'' = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_1}{H-1} - \frac{1}{8}\left(\frac{\mu_1}{H-1}\right)^2 + \dots.$$

Da queste ricaviamo che

$$\xi' + \xi'' \sim (2\mu - \mu^2)/H, \text{ per } \mu \text{ fisso e } H \to +\infty$$
$$\xi' + \xi'' \sim 2\mu H/(H^2 - 1), \text{ per } H \text{ fisso e } \mu \to 0_+$$
$$\xi'' - \xi' \sim \frac{\mu_1}{H^2}\left(1 - \frac{\mu_1}{4}\right), \text{ per } \mu \text{ fisso e } H \to +\infty$$
$$\xi'' - \xi' \sim 2\mu/(H^2 - 1), \text{ per } H \text{ fisso e } \mu \to 0_+.$$

Consideriamo il fattore generico di Π_P che è

$$\lambda(\rho) = \left|\frac{m^2 - \rho^2}{n^2 - \rho^2}\right|, \tag{10.2}$$

e diciamo v_h' e v_h'' rispettivamente il numero degli zeri ρ' e ρ'' della trascendente $g(z)$ che appartengono ai due intervalli

$$(1-\theta)n_h < \rho' < n_h, \qquad n_h < \rho'' < (1+\theta)n_h. \tag{10.3}$$

Dall'andamento di $\lambda(x)$ si deduce che Π_P aumenta se in luogo di ρ si considera un valore ρ_*' con $\rho' < \rho_*' < n_h$ e lo stesso dicasi per un ρ_*'' con $n_h < \rho_*'' < \rho''$; pertanto, *fissati* v_h' *e* v_h'', il massimo di Π_P si realizza assumendo i punti ρ' e ρ'' il più possibile vicini al valore n_h e quindi con

$$\begin{cases} \rho' = n_h - 1/2,\ n_h - 3/2, \dots,\ n_h - v_h' + 1/2, \\ \rho'' = n_h + 1/2,\ n_h + 3/2, \dots,\ n_h + v_h'' - 1/2. \end{cases} \tag{10.4}$$

Adesso pensiamo di far variare v_h' e v_h'', vincolati dalla relazione $v_h' + v_h'' = v_h = o(n_h)$; poichè

$$\bar{\rho}' = \mathrm{Min}\, \rho' = n_h - v_h' + 1/2, \qquad \bar{\rho}'' = \mathrm{Max}\, \rho'' = n_h + v_h'' - 1/2$$

i punti ρ sono distribuiti su un intervallo di ampiezza

$$\bar{\rho}'' - \bar{\rho}' = v_h' + v_h'' - 1 \tag{10.5}$$

e, tenuto presente l'andamento di $\lambda(x)$ e il segno della differenza $\xi' - \xi''$ fra i due valori ξ' e ξ'' individuati come sopra (e cioè: $\lambda(n(1-\xi')) = \lambda(n(1+\xi'')) = H$) è evidente che sono condizioni necessarie per il massimo di Π_P le disuguaglianze seguenti:

$$v_h'' \leqq v_h', \qquad v'' \leqq 7(m - n_h)/12, \quad \text{per} \quad n_h < m \tag{10.6}$$

$$v_h' \leqq v_h'', \qquad v' \leqq 2(n_h - m)/3, \quad \text{per} \quad m < n_h. \tag{10.7}$$

Infatti, per $n_h < m$ si tenga conto del valore α'' che è stato maggiorato nel 1° caso, allora si ottiene

$$v_h'' \leqq \alpha'' n_h < (7\mu/12) \cdot n_h = 7(m - n_h)/12$$

e analogamente pel 2° caso.

Per conseguire il massimo di Π_P sono anche necessarie e sufficienti le disuguaglianze seguenti

$$\lambda(\bar{\rho}' - 1) \leqq \lambda(\bar{\rho}''), \qquad \lambda(\bar{\rho}') \geqq \lambda(\bar{\rho}'' + 1) \tag{10.8}$$

che sono da soddisfare quando si pensi di dovere ripartire $v = v' + v''$ nella somma dei due addendi v' e v'' che conducano a quel massimo.

Dopo aver considerato il fattore generico di Π_P e alcune semplici condizioni necessarie pel massimo, veniamo a maggiorare Π_P distinguendo, come al solito, i due casi.

1° Caso. - $n_h < m = n_h + u \leqq (1 + \theta) n_h$

$$\Pi_P = \prod_{\rho} \frac{(n_h + u)^2 - \rho^2}{|\, n_h^2 - \rho^2 \,|} = \prod_{\rho'} \cdot \prod_{\rho''}.$$

Per semplicità di scrittura scriveremo n, v, v', v'' ecc. in luogo di n_h, v_h, v_h', v_h'' ecc.

$$\prod_{\rho'} = \prod_{\rho'} \frac{n + u + \rho'}{n + \rho'} \cdot \prod_{\rho'} \frac{n + u - \rho'}{n - \rho'} = \prod_{\rho'}^{(1)} \cdot \prod_{\rho'}^{(2)};$$

$$\prod_{\rho''} = \prod_{\rho''} \frac{n + u + \rho''}{n + \rho''} \cdot \prod_{\rho''} \frac{n + u - \rho''}{\rho'' - n} = \prod_{\rho''}^{(1)} \cdot \prod_{\rho''}^{(2)}.$$

Cominciamo a valutare $\Pi^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
\Pi^{(1)}_{\rho'} \cdot \Pi^{(1)}_{\rho''} &= \Pi_{\rho} \frac{n+u+\rho}{n+\rho} = \Pi_{\rho}\left(1+\frac{u}{n+\rho}\right) \\
&\leqq \Pi_{\rho} \exp\frac{u}{n+\rho} = \exp\left(u\cdot\Sigma_{\rho}\frac{1}{n+\rho}\right) \\
&\leqq \exp\left(u\int_{n-v'-1}^{n+v''-1}\frac{dt}{t}\right) = \exp\left(u\log\frac{n+v''-1}{n-v'-1}\right) \\
&\leqq \exp\left\{u\log\left(1+\frac{v}{n-v'-1}\right)\right\} \\
&\leqq \exp\left\{\frac{uv}{n}\left(1+O\left(\frac{v}{n}\right)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

In ogni caso si può scrivere

$$(10.9)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\Pi^{(1)}_{\rho'} \cdot \Pi^{(1)}_{\rho''} \leqq \exp(\varepsilon_h \cdot u) \qquad \text{per} \quad u \leqq v, \\
&\Pi^{(1)}_{\rho'} \cdot \Pi^{(1)}_{\rho''} \leqq \exp((\theta+\varepsilon_h)v) \quad \text{per} \quad v \leqq u.
\end{aligned}\right.$$

dove, in base all'ipotesi, ε_h è abbastanza piccolo.

Veniamo alla maggiorazione di $\Pi^{(2)}$ più complicata di quella di $\Pi^{(1)}$

$$\begin{aligned}
\Pi^{(2)}_{\rho'} &= \frac{(u+1/2)(u+3/2)\ldots(u+v'-1/2)}{(1/2)(1+1/2)(2+1/2)\ldots(v'-1/2)} \\
&< 2\frac{(u+1)(u+2)\ldots(u+v')}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(v'-1)} = 2v'\binom{u+v'}{v'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{(2)}_{\rho''} &= \frac{(u-1/2)(u-3/2)\ldots(u-v''+1/2)}{(1/2)\cdot(1+1/2)\ldots(v''-1/2)} \\
&< 2\frac{u(u-1)\ldots(u-v''+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(v''-1)} = 2v''\binom{u}{v''},
\end{aligned}$$

$$(10.10)\qquad \begin{aligned}
\Pi^{(2)}_{\rho'} \cdot \Pi^{(2)}_{\rho''} &< 4v'v''\binom{u+v'}{v'}\binom{u}{v''} \\
&< 4v'v''\frac{(u+v')!}{(u-v'')!\,v'!\,v''!} = 4v'v''U_1.
\end{aligned}$$

Applichiamo la formula di STIRLING

$$(10.11)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\log(n!) = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} + \sigma_n \\
&0 < \sigma_n < 1/12n, \quad \sigma_n \backsim 1/(12n) \quad \text{per} \quad n \to +\infty
\end{aligned}\right.$$

per maggiorare l'espressione

$$U_1 = \frac{(u + v')!}{(u - v'')!\, v'!\, v''!}$$

e teniamo presenti le (10.6) cioè $v = v' + v''$, $v'' \leqq v'$, $v'' < 7u/12$.

Possiamo anche supporre $1 \leqq v''$, poichè per $v'' = 0$ risulta $U_1 = \binom{u+v}{u}$ e le maggiorazioni che seguono si semplificano e sussiste ancora il risultato finale (10.16).

Tenendo conto di (10.11) e semplificando otteniamo:

$$\begin{aligned} \log U_1 &= (u + v') \log (u + v') + \frac{1}{2} \log (u + v') \\ &\quad - (u - v'') \log (u - v'') - \frac{1}{2} \log (u - v'') \\ &\quad - v' \log v' - \frac{1}{2} \log v' - v'' \log v'' - \frac{1}{2} \log v'' \\ &\quad + A(u,\ v',\ v'') \end{aligned} \tag{10.12}$$

dove

$$A = A(u,\ v',\ v'') = -\log 2\pi + \sigma_{u+v'} - \sigma_{u-v''} - \sigma_{v'} - \sigma_{v''}.$$

Poichè $\log 2\pi = 1{\cdot}8378\ldots$, $u + v' \geqq 2$, $\sigma_{u+v'} \leqq \sigma_2 = 0{\cdot}0413\ldots$ abbiamo $A < -1{\cdot}79$.

A questo punto conviene distinguere i due sottocasi $v'' \leqq v' < u$, $v'' < u \leqq v'$.

1.1) Sia $n < m$, $v'' \leqq v' < u$. Poniamo $\tau' = v'/u$, $\tau'' = v''/u$ e allora

$$\begin{aligned} &\log (u + v') = \log u + \log (1 + \tau') \\ &\log (u - v'') = \log u + \log (1 - \tau''), \qquad (\tau'' < 7/12) \\ &(u + v') \log (u + v') = u \log u + v' \log u + u(1 + \tau') \log (1 + \tau') \\ &(u - v'') \log (u - v'') = u \log u - v'' \log u + u(1 - \tau'') \log (1 - \tau'') \\ &v' \log v' + v'' \log v'' + \frac{1}{2} (\log v' + \log v'') = \log (v'^{v'+1/2} \cdot v''^{v''+1/2}) \\ &\qquad\qquad \geqq \log \left(\left(\frac{v}{2} \right)^{v+1} \right) \\ &\qquad\qquad = v \log v - \log 2 \cdot v + \log v - \log 2. \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori in (10.12) otteniamo

$$\begin{aligned} \log U_1 = (v' + v'') \log u + \overline{U}_1 \cdot u - v \log v + v \cdot \log 2 \\ - \log v + F \end{aligned}$$

dove abbiamo posto provvisoriamente

$$\begin{aligned}\overline{U}_1 &= (1+\tau')\log(1+\tau') - (1-\tau'')\log(1-\tau'') \\ &< (1+\tau')\tau' + (1-\tau'')\left(\tau'' + \frac{\tau''^2}{2} + \frac{\tau''^3}{3} + \ldots\right) \\ &< \tau' + \tau'^2 + \tau'' - \frac{\tau''^2}{2} - \frac{\tau''^3}{6} - \ldots \\ &< \tau' + \tau'' + \tau'^2\end{aligned}$$

e quindi

$$u\,\overline{U}_1 < v' + v'' + v'^2/u < v + v' \leqq 2v;$$

e dove

$$\begin{aligned}K = A + \log(1+\tau') - \log(1-\tau'') &\leqq A + \log 2 + \log\frac{12}{5} \\ &< -1{\cdot}79 + 1{\cdot}57 < -0{\cdot}22.\end{aligned}$$

Ne segue

$$\log U_1 < v\,\{\log(u/v) + 2{\cdot}7\} - \log v. \tag{10.13}$$

1.2) Sia $n < m$, $v'' < u \leqq v'$. Poniamo $\tau'' = v''/u$, $\omega = u/v'$ $(0 < \omega \leqq 1)$ e allora

$$\log(u+v') = \log v' + \log(1+\omega)$$

$$\begin{aligned}(u+v')\log(u+v') = u\log v' + v'\log v' + u\log(1+\omega) \\ + v'\log(1+\omega)\end{aligned}$$

e pertanto

$$\begin{aligned}\log U_1 &= u\log v' + v'\log v' + u\log(1+\omega) + v'\log(1+\omega) \\ &\quad + \frac{1}{2}\log v' + \frac{1}{2}\log(1+\omega) \\ &\quad - u\log u + v''\log u - u(1-\tau'')\log(1-\tau'') \\ &\quad - \frac{1}{2}\log u - \frac{1}{2}\log(1-\tau'') \\ &\quad - \left(v' + \frac{1}{2}\right)\log v' - \left(v'' + \frac{1}{2}\right)\log v'' + A \\ &\leqq u\log(v'/u) + u\,\overline{U}_1 - \frac{1}{2}\log(uv'') + H,\end{aligned} \tag{10.14}$$

dove abbiamo posto provvisoriamente

$$\bar{U}_1 = \left(1 + \frac{v'}{u}\right)\log(1+\omega) + \frac{v''}{u}(\log u - \log v'')$$
$$- (1-\tau'')\log(1-\tau'')$$
$$H = A + \frac{1}{2}\log(1+\omega) - \frac{1}{2}\log(1-\tau'').$$

Adesso ricordiamo che $A < -1{,}79$, $\log(1+\omega) \leqq \log 2$, $-\log(1-\tau'') \leqq \leqq \log(12/5)$ e quindi

$$H < -1{\cdot}79 + 0{,}79 = -1.$$

Osserviamo ancora che

$$\left(1 + \frac{v'}{u}\right)\log(1+\omega) = \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)\log(1+\omega) \leqq 2\log 2 \quad (\text{per } \omega = 1),$$

$$+ \frac{v''}{u}(\log u - \log v'') - (1-\tau'')\log(1-\tau'') =$$

$$= -\tau''\log\tau'' - (1-\tau'')\log(1-\tau'') \leqq \log 2 \quad (\text{per } \tau'' = 1/2)$$

e risulta $\bar{U}_1 \leqq 3\log 2 < 2{\cdot}1$; pertanto

$$\log U_1 < u\{\log(v'/u) + 2{\cdot}1\} - \log u. \tag{10.15}$$

Occorre adesso prendere in considerazione i due casi $v \leqq u$, $u \leqq v$ in luogo dei due $v'' \leqq v' < u$, $v'' < u \leqq v'$ per andare in conformità della definizione di $\Phi(u, v)$ (vedi n. 4).

Se $v \leqq u$ vale la (10.13); se $u \leqq v'$ vale la (10.15); ci rimane quindi da considerare il caso intermedio

$$v' < u < v = v' + v'' < 19u/12,$$

per il quale vale la (10.13) per ricavarne una disuguaglianza del tipo della (10.15). Si tratta di calcolare un valore opportuno della costante C in guisa da avere

$$u\log(v/u) + Cu - v\log(u/v) - 2{\cdot}7\,v > 0$$

quando $1 \leqq \xi = v/u \leqq 19/12$, cioè:

$$\psi(\xi) = (1+\xi)\log\xi - 2{\cdot}7\xi + C > 0, \quad \text{per} \quad 1 \leqq \xi \leqq 19/12.$$

Osserviamo che $\psi'(\xi) = -1{\cdot}7 + \log\xi + 1/\xi < 0$, $\psi''(\xi) = (\xi - 1)/\xi^2 \geqq 0$ e quindi Min $\psi(\xi)$ si ottiene per $\xi = 19/12$ ed è $\log(19/12) = 0{\cdot}4595\ldots$; il semplice calcolo ci dice che $\psi(\xi) > 0$ per $C = 3{\cdot}1$.

Per ciò che riguarda l'espressione di U_1 otteniamo in definitiva

$$\log U_1 \leqq \begin{cases} u\,\{\log(v/u) + 2'1\}, & (1 \leqq u \leqq v) \\ v\,\{\log(u/v) + 3'1\}, & (1 \leqq v \leqq u). \end{cases} \tag{10.16}$$

Nel caso in cui sia $v'' = 0$ risulta $v = v'$ e

$$U_1 = \binom{u+v}{u};$$

si calcola immediatamente, con la formula di Stirling, nei due casi $1 \leqq u \leqq v$, $1 \leqq v \leqq u$

$$\log U_1 \leqq \begin{cases} u\,\{\log(v/u) + (1 + \log 2)\} - \dfrac{1}{2}\log(uv) \\ v\,\{\log(u/v) + (1 + \log 2)\} - \dfrac{1}{2}\log(uv) \end{cases}$$

e la (10.16) vale ancora.

2° Caso. - $(1-\theta)n_h \leqq m = n_h - u < n$.

Seguiamo il procedimento analogo a quello del 1° caso.

$$\Pi_P = \prod_\rho \frac{\rho^2 - (n_h - u)^2}{|\,n_h^2 - \rho^2\,|} = \prod_{\rho'} \cdot \prod_{\rho''}$$

$$\prod_{\rho'} = \prod_{\rho'} \frac{\rho' + n - u}{\rho' + n} \cdot \prod_{\rho'} \frac{\rho' - n + u}{n - \rho'} = \prod_{\rho'}{}^{(1)} \cdot \prod_{\rho'}{}^{(2)}$$

$$\prod_{\rho''} = \prod_{\rho''} \frac{\rho'' + n - u}{\rho'' + n} \cdot \prod_{\rho''} \frac{\rho'' - n + u}{\rho'' - n} = \prod_{\rho''}{}^{(1)} \cdot \prod_{\rho''}{}^{(2)}.$$

Valutazione di $\Pi^{(1)}$

$$\prod_{\rho'}{}^{(1)} \cdot \prod_{\rho''}{}^{(1)} = \prod_\rho \frac{\rho + n - u}{\rho + n} = \prod_\rho \left(1 - \frac{u}{\rho + n}\right) < 1.$$

Veniamo alla maggiorazione di $\Pi^{(2)}$

$$\prod_{\rho'}{}^{(2)} = \frac{(u + 1/2)(u + 3/2)\dots(u + v'' - 1/2)}{(1/2)(1 + 1/2)\dots(v'' - 1/2)}$$

$$< 2v''\binom{u + v''}{v''},$$

$$\prod_{\rho''}{}^{(2)} = \frac{(u - 1/2)(u - 3/2)\dots(u - v' + 1/2)}{(1/2)\cdot(1 + 1/2)\dots(v' - 1/2)}$$

$$< 2v'\binom{u}{v'},$$

$$\prod_{\rho'}{}^{(2)} \cdot \prod_{\rho''}{}^{(2)} < 4v'v'' \cdot U_2,$$

dove

$$U_2 = \frac{(u + v'')\,!}{(u - v')\,!\; v'\,!\; v''\,!}, \qquad (v = v' + v'',\ v' \leqq v'',\ v' < 2u/3).$$

La maggiorazione di $\log U_2$ si ottiene mediante una disuguaglianza analoga alla (10.16) che, contenendo v, è simmetrica in v' e v''; la sola modificazione riguarda i valori numerici ivi contenuti. Infatti, alla limitazione $v'' < 7u/12$ considerata nel primo caso dobbiamo sostituire qui l' altra $v' < 2u/3$ e pertanto nei calcoli già eseguiti e nei quali comparivano le tre frazioni 7/12, 12/5, 19/12, dobbiamo sostituire le tre seguenti 2/3, 3, 5/3; pertanto i calcoli numerici sono qui modificati come segue:

$$K \leqq A + \log 2 + \log 3 < -1^{\cdot}796 + 1^{\cdot}792 < -0^{\cdot}004 < 0$$

$$H \leqq A + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 3 < -1^{\cdot}79 + 0^{\cdot}90 \leqq -0.89 < 0$$

$$\psi(\xi) = (1 + \xi)\log\xi - 2^{\cdot}7\xi + C > 0, \qquad (1 \leqq \xi \leqq 5/3)$$

$$C > 2^{\cdot}7 \cdot \frac{5}{3} - \frac{8}{3}\log\frac{5}{3} = 4^{\cdot}5 - 1^{\cdot}36 \ldots = 3^{\cdot}13 \ldots.$$

Si perviene alle disuguaglianze

$$(10.17) \qquad \log U_2 \leqq \begin{cases} u\,\{\log(v/u) + 2^{\cdot}1\}, & (1 \leqq u \leqq v) \\ v\,\{\log(u/v) + 3^{\cdot}14\}, & (1 \leqq v \leqq u). \end{cases}$$

In ogni caso è $4v'v'' \leqq 4(v/2)^2 = v^2$ e quindi

$$\Pi^{(2)}_{\rho} = \Pi^{(2)}_{\rho'} \cdot \Pi^{(2)}_{\rho''} \leqq v^2 \exp\begin{cases} u\,\{\log(v/u) + 3^{\cdot}2\} \\ v\,\{\log(u/v) + 3^{\cdot}2\} \end{cases}$$

$$\Pi_P = \Pi^{(1)}_{\rho} \cdot \Pi^{(2)}_{\rho} \leqq v^2 \exp\begin{cases} u\,\{\log(v/u) + 3^{\cdot}2 + \varepsilon_h\} \\ v\,\{\log(u/v) + 3^{\cdot}2 + \theta + \varepsilon_h\} \end{cases}$$

e in ogni caso, scrivendo v_h in luogo di v

$$(10.18) \qquad \Pi_P \leqq v_h^2 \exp\begin{cases} u\,\{\log(v_h/u) + 3^{\cdot}7 + \varepsilon_h\} \\ v_h\,\{\log(u/v_h) + 3^{\cdot}7 + \varepsilon_h\}. \end{cases}$$

11. **Dimostrazione del lemma principale.** - Partendo dalla (9.8)

$$|\, g(m)/g(n_h) \,| = \Pi_A \cdot \Pi_P \cdot \Pi_B$$

ci varremo delle maggiorazioni stabilite ai n. 9 e 10: abbiamo

$$|\, g(m)/g(n_h) \,| \leqq \begin{cases} \Pi_P \cdot \Pi_B, & \text{per } m < n_h \\ \Pi_A \cdot \Pi_P, & \text{per } m > n_h \end{cases}$$

e, in ogni caso, per $(v_1 + \dots + v_{h-1})/v_h$ abbastanza piccolo, quando $u \leqq v_h$ (vedi (9.9), (9.13), (10.18))

$$\begin{aligned} | g(m)/g(n_h) | &\leqq v_h^2 \exp \{ u(\log (v_h/u) + 3{\cdot}7 + \varepsilon_h + \varepsilon_h' + \varepsilon_h^{\text{IV}}) \} \\ &\leqq v_h^2 \exp \{ u(\log (v_h/u) + 4) \} \\ &\leqq v_h^2 \exp \Phi(u, v_h), \end{aligned}$$

e, quando $v_h \leqq u$ (vedi (9.10), (9.14), (10.18))

$$\begin{aligned} | g(m)/g(n_h) | &\leqq v_h^2 \exp \{ v_h(\log (u/v_h) + 3{\cdot}7 + \varepsilon_h + \varepsilon_h'' + \varepsilon_h^{\text{VI}}) \} \\ &\leqq v_h^2 \exp \{ v_h(\log (v_h/u) + 4) \} \\ &\leqq v_h^2 \exp \Phi(u, v_h) \end{aligned}$$

e il lemma principale risulta dimostrato (vedi (9.4)).

Quando non si possa realizzare $(v_1 + \dots + v_{h-1})/v_h$ abbastanza piccolo, siamo nel caso complementare del lemma: la conclusione (9.4) si raggiunge proprio nello stesso modo nei seguenti casi

$$\begin{array}{lll} u \leqq v_h & \text{(vedi la (9.9))}, & \\ v_h < u, & m < n_h, & \text{(poichè } \Pi_A < 1), \\ v_h < u, & m > n_h, & v_h \leqq u \leqq K n_h / \log n_h \quad \text{(vedi la (9.11))}. \end{array}$$

Rimane da considerare il caso in cui simultaneamente si ha v_h *limitato* e

$$v_h = v_0 < u, \qquad m > n_h, \qquad K n_h/\log n_h < u \leqq \theta n_h :$$

allora è applicabile la (9.12) e risulta

$$\begin{aligned} | g(m)/g(n_h) | \leqq v_0^2 \exp \{ & v_0 \log (u/v_0) + \varepsilon^{\text{IV}} \log (u/v_0) \\ & + 3{\cdot}7 + \varepsilon_h + \varepsilon_h^{\text{VI}} \}. \end{aligned}$$

Ma, per la (4.2) del n. 4 abbiamo

$$\begin{aligned} & v_0 \log (u/v_0) + \varepsilon^{\text{IV}} \log (u/v_0) + 4 \leqq \\ & \leqq \Phi(u, v_0) + v_0 \log (u/(v_0 + 1)) < \Phi(u, v_0 + 1) - 3 \\ & < \Phi(u, v_0 + 1) \end{aligned}$$

e quindi

$$| g(m)/g(n_h) | < v_0^2 \exp \Phi(u, v_0 + 1)$$

e il Lemma principale risulta dimostrato anche in questo caso complementare (vedi la (9.4)*).

12. **Dimostrazione del Teor. II.** - Consideriamo la serie di potenze (vedi Lemma 2, n. 8)

$$F(z) = \sum_0^\infty a_n g(n) z^n \tag{12.1}$$

e la relativa somma di Fabry (vedi Lemma 1, n. 8) proiettata lungo l'orientazione γ_h

(12.2)
$$S_h(\theta,\ \gamma_h) = \sum_{m \in I_h} c_{n_h, m} \operatorname{Re}(a_m g(m) e^{-i\gamma_h})$$

e poichè $g(m)$ è reale si può scrivere

$$S_h(\theta,\ \gamma_h) = g(n_h) \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) + \sum_{\substack{m \in I_h \\ m \neq n_h}} c_{n_h, m} g(m) \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})$$

Adesso fissiamo l'attenzione sulla grandezza dei moduli $|\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})|$ in relazione alla funzione $\psi_h(u)$ condizionatrice delle ψ-variazioni di segno definita in (5.5): i termini della somma estesa al campo $(m \in I_h,\ m \neq n_h)$ si distinguono nelle due categorie $(m = n_h \pm u)$:

$$1^{\circ})\quad |\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})| > \psi_h(u), \qquad 2^{\circ})\quad |\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})| \leqq \psi_h(u)$$

e le eventuali ψ-variazioni, in numero di v_h, vengono presentate da coefficienti a_m che si trovano nella prima categoria ed eventualmente da a_{n_h}; per il modo come è stata definita la funzione $g(z)$ (vedi n. 8) con gli zeri $\rho_s = m_s - 1/2$ definiti in (8.1), tutte le componenti reali $g(m) \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})$, con $m = n_h$ e m della prima categoria, hanno lo stesso segno, poichè $g(z)$ cambia segno in $m_s - 1/2$. I valori di m della seconda categoria sono al più $[2\theta n_h] + 1 - v_h \leqq 2\theta n_h$.

Denotiamo con Σ_1 e Σ_2 le somme estese ai termini rispettivamente della prima e della seconda categoria; allora:

$$\begin{aligned} S_h(\theta,\ \gamma_h) &= g(n_h) \left\{ \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) + \sum_{\substack{m \in I_h \\ m \neq n_h}} c_{n_h, m} \frac{g(m)}{g(n_h)} \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) \right\} \\ &= g(n_h) \{ \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) + \Sigma_1 + \Sigma_2 \} \end{aligned}$$

e passando ai moduli

$$\begin{aligned} |S_h(\theta,\ \gamma_h)| &= |g(n_h)| \cdot |\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) + \Sigma_1 + \Sigma_2| \\ &\geqq |g(n_h)| \{ |\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) + \Sigma_1| - |\Sigma_2| \} \end{aligned}$$

e per l'osservazione sui segni

(12.3)
$$|S_h(\theta,\ \gamma_h)| \geqq |g(n_h)| \cdot \{ \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) - |\Sigma_2| \}.$$

Veniamo a maggiorare $|\Sigma_2|$; tenendo conto che in ogni suo termine $|\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})| \leqq \psi_h(u)$ abbiamo:

$$\begin{aligned} |\Sigma_2| &\leqq \sum_{\substack{m \in I_h \\ m \neq n_h}} \left| c_{n_h, m} \cdot \frac{g(m)}{g(n_h)} \cdot \psi_h(|m - n_h|) \right| \\ &\leqq \sum_{\cdots} c_{n_h, m} \left| \frac{g(m)}{g(n_h)} \right| \cdot \psi_h(u). \end{aligned}$$

Per il Lemma 5 e il Lemma principale, tenendo conto che $u \leqq \theta n_h \leqq n_h/3$ e quindi che $\sqrt{1 - u^2/n_h^2} > \sqrt{8/9} > 1/2$, il termine generale non supera

$$2 \exp(-u^2/n_h) \cdot v_h^2 \exp \Phi(u, v_h) \cdot$$
$$\cdot \frac{K}{n_h V_h^2} \exp\{u^2/n_h - \Phi(u, V_h)\} \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) =$$
$$= \frac{2Kv_h^2}{n_h V_h^2} \exp\{\Phi(u, v_h) - \Phi(u, V_h)\} \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})$$

(ed essendo $v_h \leqq V_h$, $\Phi(u, v_h) \leqq \Phi(u, V_h)$)

$$\leqq (2K/n_h) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}).$$

Pertanto risulta, tenendo conto che $2[\theta n_h] + 1$ è il numero dei termini di Σ_2

$$|\Sigma_2| \leq (2[\theta n_h] + 1)(2K/n_h) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})$$
$$\leqq 4K(\theta n_h + 1)/n_h \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}).$$

Adesso se impiccoliamo θ, le ipotesi sono soddisfatte a maggior ragione; assumiamolo in guisa da ottenere $4K\theta < 1/3$; allora per h abbastanza grande è

$$|\Sigma_2| < \frac{1}{2} \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}). \tag{12.4}$$

Dalle (12.3) e (12.4) ricaviamo per $h \geqq h_0$

$$|S_h(\theta, \gamma_h)| \geqq \frac{1}{2} |g(n_h)| \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}).$$

Per il Lemma 4 e l'ipotesi (5.2) abbiamo

$$|g(n_h)|^{1/n_h} \to 1, \qquad \{\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \to 1$$

e pertanto

$$\varliminf |S_h(\theta, \gamma_h)|^{1/n_h} \geqq 1,$$

e, pel Lemma 1, il punto 1 è critico per la serie $F(z)$: in forza del Lemma 2 il punto 1 è critico anche per $\Sigma a_n z^n$.

Il Teor. II risulta così dimostrato.

13. **Dimostrazione del Teor. V.** - Questo Teorema discende come corollario del Teor. II. Poniamo

$$\tau_h = \sqrt{V_h \log n_h / n_h}\,; \tag{13.1}$$

risulta $\tau_h n_h = \sqrt{V_h n_h \log n_h}$, $V_h/(\tau_h n_h) \to 0$. Consideriamo la seguente funzione ausiliaria

$$\Psi_h(u) = \begin{cases} 0, & \text{per } \ 0 < u \leqq \tau_h n_h \\ \exp\left(\frac{1}{2} V_h \log n_h\right) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}), & \\ & \text{per } \ \tau_h n_h < u \leqq [\theta n]. \end{cases} \tag{13.2}$$

Nelle ipotesi (6.9) e (6.11) del Teor. V, riguardanti il numero delle variazioni v_h^* nel tratto I_h^* e la maggiorazione del modulo $|\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})|$, è evidente che

$$v_h(\Psi_h) = v_h^*$$

dove $v_h(\Psi_h)$ è il numero delle Ψ_h-variazioni su tutto I_h. Per appoggiarci al Teor. II è sufficiente mostrare che

$$\Psi_h(u) \leqq \psi_h(u), \tag{13.3}$$

dove $\psi_h(u)$ è la funzione definita in (5.5); infatti, se questa disuguaglianza valesse, sarebbe

$$V_h \to +\infty, \qquad v_h(\psi_h) \leqq v_h(\Psi_h) = v^* \leqq V_h \tag{13.4}$$

e, per il Teor. II, il punto 1 sarebbe singolare.

Per dimostrare la (13.3) osserviamo che essa vale evidentemente per $0 < u \leqq \tau_h n_h$, poichè per questi valori è $\Psi(u) = 0$, e basta dimostrarla per $\tau_h n_h < u \leqq [\theta n_h]$. In questa ipotesi, essendo $V_h/(\tau_h n_h) \to 0$, per h abbastanza grande è

$$\Phi(u,\ V_h) = V_h \{\log (u/V_h) + 4\}$$

e quindi risulta

$$\psi_h(u) = \exp\left\{\frac{u^2}{n_h}(1 - \lambda_h(u))\right\} \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}), \tag{13.5}$$

dove

$$\lambda_h(u) = \frac{V_h n_h}{u^2}\left\{\log \frac{u}{V_h} + 4\right\} + \frac{n_h \log (n_h V_h^2/K)}{u^2}\ .$$

La derivata di questa funzione è

$$\lambda_h'(u) = -\frac{n_h}{u^3}\left\{ V_h\left(2 \log \frac{u}{V_h} + 7\right) + 2 \log (n_h V_h^2/K)\right\}$$

ed è negativa, pertanto il massimo di $\lambda_h(u)$ viene assunto all'estremo sinistro dell'intervallo ed è

$$\lambda_h(u) \leqq \lambda_h(\tau_h n_h) = \frac{1}{\log n_h}\left\{\log \sqrt{\frac{n_h \log n_h}{V_h}} + 4 + \frac{\log (n_h V_h^2/K)}{V_h}\right\}$$

$$\leqq \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{2}\log\log n_h - \frac{1}{2}\log V_h + 4 + \frac{\log(\dots)}{V_h}\right\} \cdot \frac{1}{\log n_h}\,.$$

Si tratta di verificare che le (6.8) portano come conseguenza il segno negativo dell'espressione entro la parentesi $\{\dots\}$. Infatti, poichè $V_h \to +\infty$ risulta $\log(V_h^2/K)/V_h \to 0$ e quindi basta che sia

$$\log V_h > \log\log n_h + 8 + \frac{\log n_h}{V_h} + o(1);$$

ponendo $V_h = c_h \log n_h$, questa condizione assume la forma

$$\log c_h > 8 + 1/c_h + o(1)$$

che porta necessariamente $c_h > 1$; per $c_h = c$ costante basta che sia

$$\log c \geqq 8 - \log(1 - 1/c)$$

da cui $\log(c-1) \geqq 8$, $c \geqq e^8 + 1$.

Dunque, quando sono soddisfatte le (6.8) risulta $\lambda_h(u) \leqq 1/2$ e quindi, per la (13.5) abbiamo (nell'intervallo $\tau_h n_h \leqq u \leqq [\theta n_h]$)

$$\begin{aligned}\psi_h(u) &\geqq \exp\{u^2/(2n_h)\}\,\mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\\ &\geqq \exp\left(\frac{1}{2} V_h \log n_h\right) \cdot \mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\\ &\geqq \Psi_h(u).\end{aligned}$$

Valgono le (13.3) e (13.4), pertanto il Teorema V risulta dimostrato.