Sur l'existence des solutions convergentes des systèmes d'équations différentielles non linéaires.

C. Avramescu (Craiova) (*)

Résumé. - *On considére le problème de l'existence des solutions des équations différentielles ordinaires, définies pour $t \geq 0$ et ayant limite à l'infini.*

Dans ce travail nous allons considérer quelques problèmes concernant l'existence des solutions convergentes sur le demiaxe $R_+ = \{t \geq 0\}$ (c'est-à-dire, des solutions ayant limites au $+\infty$), pour des systèmes de la forme,

$$x' = f(t, x), \tag{E}$$

ou,

$$x' = A(t) \cdot x + f(t, x), \tag{E'}$$

où $A(t)$ est une matrice du type $n \times n$, dont les élèments sont des fonctions continues sur R_+, et $f(t, x)$ est un vecteur à n composantes réelles, continu dans $R_+ \times D^{(n)}$, où,

$$D^{(n)} = \{ x;\ x \in R^n,\ \|x\| \leq \rho \},$$

R^n étant l'espace euclidien n-dimensionel. ($\|\cdot\|$ signifie partout la norme de R^n).

Récemment, R. Conti [26], a donnée une classification des divers problèmes aux limites considérés jusqu'à présent; dans cette classification, nos résultats sont contenus dans le problème III.

Dans ce problème il s'agit de trouver des solutions appartenant à une certaine variété linéaire de fonctions continues.

Dans la première partie de ce travail, nous allons démontrer un théorème d'existence pour le système (E), en utilisant la méthode de la linéarisation. La seconde partie est dédiée aux systèmes (E'). Les résultats contenus dans les théorèmes 2 et 3 sont obtenus en suivant la méthode développée par Massera et Schäffer [3], [4], sous la forme donnée par Corduneanu [5], et Hartman et Onuchic [6]. Le résultat contenu dans le théorème 2 est comparable avec le résultat obtenu par Bridgland Jr. [1], [2].

Enfin, dans la troisième partie, en utilisant la méthode de la comparaison, nous allons établir quelques théorèmes d'existence des solutions convergentes pour l'équation (E).

(*) Entrata in Redazione il 20 marzo 1968.

0.1. Il faut tout d'abord préciser les notations. $C_C^{(n)} = C_C(R_+, R^n)$ sera l'espace des fonctions continues sur R_+, à valeurs dans l'espace euclidien n-dimensional R^n, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de R_+ • $C_C^{(n)}$ est un espace topologique localement convexe et métrisable, fait qui permet l'utilisation des suites dénombrables (pour les détails on renvoie le lecteur au livre de Bourbaki [7]). Par $C_M^{(n)} = C_M(R_+, R^n)$ nous noterons l'espace des fonctions continues et bornées sur R_+, à valeurs dans R^n, et par $C_l^{(n)} = C_l(R_+, R^n)$ l'espace des fonctions continues sur $R+$ ayant la limite à ∞, la topologie étant définie par la norme

$$|x| = \sup_{t \in R+} \|x(t)\|. \tag{0.1}$$

Évidemment, $C_M^{(n)}$ et $C_l^{(n)}$ sont des espaces de Banach, et $C_l^{(n)}$ est un sous-espace de $C_M^{(n)}$. La topologie de $C_M^{(n)}$ est celle de la convergence uniforme sur R_+. Nous allons considérer aussi les espaces $C_g = C_g(R_+, R^n)$ des fonctions continues sur R_+ à valeurs dans R^n, telles que

$$\|x(t)\| \leq k \cdot g(t), \tag{0.2}$$

où $g(t)$ est une fonction réele, continue et positive sur R_+, et k une constante non-négative qui dépend de x. Il est aisé de voir que C_g est un espace de Banach avec la norme

$$|x|_g = \sup_{t \geq 0} \frac{\|x(t)\|}{g(t)}. \tag{0.3}$$

Si $g(t) \equiv 1$ alors $C_g = C_M^{(n)}$; si $g(t) = \exp(-at)$, $a > 0$, C_g est un sous-espace de $C_l^{(n)}$. Pour les détails concernant ces espaces on renvoie le lecteur à la note de C. Corduneanu [8].

Si $A(t) = (a_{ij}(t))$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, on note,

$$\|A(t)\| = \max_{i,j} |a_{ij}(t)|$$

et encore

$$S^{(\ )} = \{x(t);\ x(t) \in C_C^{(n)},\ \|x(t)\| \leq \rho\},\ \rho > 0;$$

nous allons désigner par $\overline{S^{(n)}}$ la fermeture de $\overline{S^{(n)}}$ dans $C_c^{(n)}$. $\overline{S^{(n)}}$ est évidemment un esemble convexe et fermé dans $C_c^{(n)}$.

0.2. – Nous allons démontrer les théorèmes 1, 2, 3 en utilisant le théorème de Schauder-Tychonoff: » *Soit L un espace vectoriel topologique localement convexe et sépararé et K un sous-ensemble convexe de L. Alors, un opérateur*

U, continu dans L, et satisfaisant à la condition $U(K) \subset K_1 \subset K$, où K_1 est un ensemble compact, a, au moins, un élément fixe dans K ».

Pour le théorème 3 l'espace fondamental sera l'espace $C_e^{(n)}$, bien que la solution appartiendra à l'espace $C_l^{(n)}$. Pour les théorèmes 1 et 2 l'espace fondamental sera l'espace $C_l^{(n)}$. Mais, pour appliquer le théorème de SCHAUDER–TYCHONOFF, on a besoin d'un critérium de compacité dans $C_l^{(n)}$.

0.3. - Soit $\{x(t)\}$ une famille de fonctions dans $C_l^{(n)}$; on dit que cette famille est *uniformément convergente* si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe T, qui dépend seulement de ε, tel que

$$\|x(t) - l_X\| < \varepsilon, \text{ pour } t > T(\varepsilon),$$

où,

$$l_X = \lim_{t\to\infty} x(t).$$

LEMME 1. - *La condition nécessaire et suffisante pour que l'esemble $K \subset C_l^{(n)}$ soit compact, est que la famille des fonctions de K soit uniformément bornée, équicontinue sur R_+, et uniformément convergente.*

La démonstration de ce lemme est presque évidente, parce que la correspondence

$$y(s) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } 0 \leq s < 1 \\ l_X & \text{pour } s = 1 \end{cases}$$

où

$$s = \frac{t}{1+t},$$

est un homéomorphisme entre $C_l^{(n)}$ est $C_c([0, 1], R^n)$. La famille $\{y(s)\}$ résulte uniformément bornée et équicontinue sur $[0, 1]$. Le théorème d'ASCOLI (voir [9]) est donc applicable, et l'ensemble $\{y(s)\}$ résulte compact dans $C_c([0, 1], R^n)$. Mais les hypothèses du théorème d'ASCOLI sont nécessaires et suffisantes pour la compacité, ce qui achève la démonstration.

1.1. - Considérons tout d'abord l'équation scalaire:

$$y' = a(t)y + b(t), \tag{1.1}$$

dans laquelle les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont continues sur R_+. Si les fonctions

$$\exp\left\{\int_0^t a(s)ds\right\}; \qquad \int_0^t \exp\left\{\int_J^t a(s)ds\right\} dJ, \tag{1.2}$$

sont bornées sur R_+, nous disons que la fonction $a(t)$ satisfait à la condition (A). Si la fonction

$$\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) \tag{1.3}$$

n'est pas bornée et la fonction

$$\int_t^\infty \exp\left(\int_\tau^t a(s)ds\right)d\tau, \tag{1.4}$$

est bornée, nous disons que la fonction $a(t)$ satisfait à la condition (B). Cette terminologie est due à O. PERRON ([10], [11], [12]), qui a montré que si $a(t)$ satisfait à la condition (A) et $b(t)$ et bornée, alors toutes les solutions de l'équation (1.1) sont bornées et si $a(t)$ satisfait à la condition (B) et $b(t)$ est bornée, alors l'équation (1.1) a une seule solution bornée sur R_+, donnée par la formule

$$y_0(t) = -\int_t^\infty \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right)b(s)ds. \tag{1.5}$$

Si $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \alpha$ et $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = \beta$, alors si $\alpha < 0$ toutes les solutions de l'équation (1.1) sont convergentes à $-\beta/\alpha$, et si $\alpha > 0$ alors la seule solution convergente de (1.1) est $y_0(t)$, qui converge vers β/α. La métode de la linéarisation nous permettra de démontrer un théorème d'existence des solutions convergentes pour des systèmes non-linéaires, en utilisant les résultats de PERRON que nous avons mentionnés.

1.2. - Considérons maintenant l'équation scalaire

$$x' = f(t, x). \tag{1.6}$$

Nous allons énoncer des différentes hypothèses relatives à la fonction $f(t, x)$.

i) la fonction $f(t, x)$ est continue dans $R_+ \times D^{(1)}$

ii) la fonction $\partial f/\partial x$ existe et elle est continue dans $R_+ \times D^{(1}$

iii) la fonction $\lambda(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \partial f(t, x)/\partial x$ est définie et continue dans $D^{(1)}$, et cette limite est uniforme par rapport à x

iv) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t, 0) = \beta < +\infty$

v–A) $\partial f(t, x)/\partial x \leq a(t)$, $t \in R_+$, $x \in D^{(1)}$, où $a(t)$ est une fonction qui satisfait à la condition (A)

v–B) $\partial f(t, x)/\partial x \geq a(t)$, $t \in R_+$, $x \in D^{(1)}$, où $a(t)$ satisfait à la condition (B)

vi–A) $\lambda(x) < 0$, $x \in D^{(1)}$

vi–B) $\lambda(x) > 0$, $x \in D^{(1)}$

vii–A) $M_A(c, d) \leq \rho$ si $a(t)$ satisfait à la condition (A)

vii–B) $M_B(d) \leq \rho$, si $a(t)$ satisfait à la condition (B)

où,

$$d = \sup_{t\geq 0} |f, 0)|$$

$$M_A(c, d) = \sup_{t\geq 0}\left\{ |c|\cdot \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) + d.\int_0^t \exp\left(\int_\tau a(s)ds\right)d\tau\right\}$$

$$M_B(d) = \sup_{t\geq 0}\left\{ d.\left|\int_\infty^t \exp\left(\int_\tau^0 a(s)ds\right)d\tau\right|\right\}.$$

« c » étant un nombre réel.

1.3. – En tenant compte de i) et ii), il en résulte du lemme d'HADAMARD (cf. [13]), que f peut s'écrire:

$$f(t, x) = g(t, x)x + f(t, 0),$$

où,

$$g(t, x) = \int_0^1 \frac{\partial f(t, \tau x)}{\partial x} d\tau$$

Alors, si $f(t, x)$ satisfait aux conditions i), ii), iii), et si $x(t) \in C_l^{(1)}$, il en résulte que,

$$\lim_{t\to\infty} g(t, (t)) = \int_0^1 \lambda(sl)ds \tag{1.7}$$

où,

$$l = \lim_{t\to\infty} x(t),$$

et cette limite est uniforme par rapport à x. De ces observations il est aisé de voir que si $f(t, x)$ satisfait aux conditions i), ii), iii), iv), alors elle est borneè sur $R_+ \times D^{(1)}$.

1.4. LEMME 2. – *Si la fonction $f(t, x)$ satisfait aux conditions* i), ii), iii), iv), v–A), vii–A), viiiA), *alors il existe une seule solution dans $C_l^{(1)}$ de l'équation* (1.6) *satisfaisant à la condition*

$$x(0) = c. \tag{1.8}$$

Si la fonction $f(t, x)$ satisfait aux conditions i), ii), iii), iv), v–B), vi–B), vii–B), *alors l'équation* (1. 6) *admet une seule solution dans $C_l^{(n)}$. dont la condition initiale n'est pas précisable.*

DÉMONSTRATION. – Supposons d'abord que $f(t, x)$ verifie le premier groupe de conditions. Pour tout $x \in S^{(1)}$ nous allons désigner par $y = Hx$ la solution du problème;

$$y' = g(t, x(t))y + f(t, 0), \qquad y(0) = c. \tag{1.9}$$

L'existence et l'unicité de y, aussi que l'appartenence $y \in C_l^{(n)}$, sont des conséquences des faits que nous avons mentionnés plus haut, car toute équation (1.9) est de la forme (1.1), et par conséquence on peut utiliser les résultats de PERRON. Du fait que la solution du problème (1.9) peut s'écrire

$$y(t) = c.\exp\left(\int^{t} g(u, x(u))du\right) + \int^{t} \exp\left(\int_{\tau}^{t} g(s, x(s))ds\right)f(u, 0)du, \tag{1.10}$$

il en résulte que $|y(t)| \leq \rho$, donc

$$HS^{(1)} \subset S^{(1)}. \tag{1.11}$$

Du fait que la fonction $f(t, x(t))$ est bornée sur $R_+ \times S^{(1)}$ il en résulte que les fonctions de l'ensemble $HS^{(1)}$ constituent une famille équicontinue sur R_+. De plus, la relation (1.11) nous montre que les fonctions de l'ensemble $HS^{(1)}$ sont uniformément bornées. La famille $HS^{(1)}$ est aussi uniformément convergente, parce que, d'après (1.9) il résulte

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{\lim\limits_{t\to\infty} f(t, 0)}{\lim\limits_{t\to\infty} g(t, x(t))},$$

et la limite (1.7) est uniforme. Donc la famille $HS^{(1)}$ est compacte dans $C_l^{(1)}$. La continuité de l'opérateur H est presque évidente, en tenant compte du fait que la convergence de $C_l^{(n)}$ est la convergence uniforme sur R_+. Donc l'ensemble $S^{(1)}$ et l'opérateur H satisfont dans $C_l^{(n)}$ aux conditions du théorème de SCHAUDER–TYCHONOFF, ce qui nous permet de conclure l'existence des points fixes pour l'opérateur H. Mais il est évident qu'un tel point fixe est une solution de notre problème, et que cette solution sera unique.

Passons maintenant à la démonstration de la seconde partie du lemme.

Sur le même ensemble S définissons l'opérateur H_1 qui fait correspondre à chaque $x \in S^{(1)}$, l'unique solution convergente de l'équation $y' = g(t, x(t))y + f(t, 0)$. Cette solution se représente sous la forme (1.5). En appliquant encore le théorème de SCHAUDER–TYCHONOFF, il en résulte l'existence d'une solution de l'équation (1.6) dans $C_l^{(n)}$.

Envisageons maintenant le problème de l'unicité de cette solution. Si u et v sont deux solutions convergentes (donc bornées) de l'équation (1.6) alors la fonction bornée $u-v$ satisfait à une équation de la forme $(u-v)' = h(t, u, v) \cdot (u-v)$, h étant une fonction continue, satisfaisant à l'inégalité $h(t, u(t), v(t)) \geq a(t)$, d'où il résulte $u-v \equiv 0$, parce que « 0 » c'est l'unique solution bornée de cet équation. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Il est aisé de voir que si $x(t)$ est une solution convergente de l'équation (1.6), et si $l = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, alors l satisfait à l'équation

$$\int_0^l \lambda(t)dt = \mp \beta$$

où nous prenons si f satisfait au premier groupe de conditions et $+$ si f satisfait au second groupe de conditions. Il résulte aussi que $\lim\ x'(t) = 0$.

1.5. – Passons maintenant à la démonstration d'un théorème général d'existence des solutions convergentes. Considérons le système

$$x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \ i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.12}$$

Soient $a_1(t), \dots, a_n(t)$, n fonctions continues sur R_+. Si $a_i(t)$ satisfait à la condition (A), nous allons désigner cet indice par i_A.

Une signification analogue aura i_B. Nous allons énoncer des différentes hypothéses relatives aux fonctions f_i.

(I) f_i sont des fonctions continues dans $R_+ \times D^{(n)}$

(II) les fonctions $\partial f_i / \partial x_i$ sont définies et continues dans $R_+ \times D^{(n)}$

(III) les fonctions $\lambda_i(x_1, \dots, x_n) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\partial f_i(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$ sont définies et continues dans $R_+ \times D^{(n)}$, et ces limites sont uniformes par rapport à $x_1, \dots, x_n$

(IV) les fonctions $\mu_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lim\limits_{t\to\infty} f_i(t, x_1, \dots, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ sont définies et continues dans $D^{(n)}$, et ces limites sont uniformes par rapport à $x_1, \dots, x_n$

(V) $\dfrac{\partial f_i(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \leq a_i(t)$ si $i = i_A$, et $\dfrac{\partial f_i(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \geq a_i(t)$ si $i = i_B$

(VI) $\lambda_i(x_1, \ldots, x_n) < 0$ si $i = i_A$ et $\lambda_i(x_1, \ldots, x_n) > 0$ si $i = i_B$

(VII) $M_i(c_i, d_i) \leq \rho$ si $i = i_A$ et $M_i(d_i) \leq \rho$ si $i = i_B$,

où,

$$d = \sup_{R_+ \times D^{(n)}} | f_i(t, x_1, \ldots, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) |$$

$$M_i(c_i, d_i) = \sup_{t \geq 0} \left\{ | c_i | \cdot \exp\left(\int_0^t a_i(s) \right) ds + d_i \cdot \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t a_i(s) ds \right) d\tau \right\}$$

$$M_i(d_i) = \sup_{t \geq 0} d_i \cdot \left| \int_\infty \exp\left(\int_t a_i(s) ds \right) d\tau \right| .$$

THÉORÈME 1. – *Dans les hypothèses* (I)–(VII), *il existe une, et seulement une solution convergente du système* (1.12) *satisfaisant aux conditions initiales partielles*

(1.13) $$x_i(0) = c_i \textit{ pour } i = i_A .$$

DÉMONSTRATION. – Définissons sur $S^{(n)}$ un opérateur $y = Hx$ de la manière suivante: pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^{(n)}$ nous allons désigner par $Hx = y$ la fonction définie à l'aide des conditions suivantes:

(1.14) $$y_i' = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), y_i, x_{i+1}'(t), \ldots, x_n(t))$$

$$y_i(0) = c_i \text{ si } i = i_A .$$

Du lemme précédent il en résulte l'existence et l'unicité de Hx, aussi que l'appartenance $Hx \in C^l$. Évidemment, un point fixe pour l'opérateur H, sera une solution de notre problème. Alors nous allons appliquer encore le théorème de SCHAUDER–TYCHONOFF dans $C_l^{(n)}$. La démonstration du théorème est tout à fait analogue à la démonstration du lemme 2, et nous n'insistons point sur elle.

REMARQUE. – Si $x_1, \ldots, x_n$ est une solution du système (1.12) et si $l = \lim_{t \to \infty} x_i(t)$, alors l_i satisfont aux conditions:

$$\int_0^{l_i} \lambda_i(l_1, \ldots, l_{i-1}, t, l_{i+1}, \ldots, l_n) dt = \mp \mu_i(l_1, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots l_n)$$

où nous prenons — ou + selon $i = i_A$ ou $i = i_B$. En même temps $\lim_{t \to \infty} x'(t) = 0$.

2.0. – Nous allons considérer maintenant des systèmes de la forme

$$x' = A(t)x + f(t, x), \tag{2.1}$$

où $A(t)$ est une matrice du type $n \times n$ de fonctions continues sur R_+ et $f(t, x)$ est une application continue de $R_+ \times D^{(n)}$ dans R^n. Nous allons désigner par $X(t)$ la matrice fondamentale du système,

$$X' = A(t)X \tag{2.2}$$

satisfaisant à la condition $X(0) = I$ (la matrice unité $n \times n$).

Nous dirons que la paire $(B, C_l^{(n)})$ (où $B = C_l^{(n)}$ où C_g) est admissible par rapport à la matrice $A(t)$, si, pour tout $f \in B$, l'équation

$$x' = A(t)x + f(t) \tag{2.3}$$

a toutes ses solutions dans $C_l^{(n)}$. Comme toutes les solutions de l'équation (2.3) ont la forme

$$x(t) = X(t)\xi + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds, \tag{2.4}$$

il en résulte que la paire $(B, C_l^{(n)})$ est admissible si et seulement si

$$\lim_{t \to \infty} X(t) = X(\infty)_{<+\infty}, \quad \text{et } TB \subset C_l^{(n)}, \tag{2.5}$$

où,

$$Tf = \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds;$$

c'est-à-dire la paire $(B, C_l^{(n)})$ est admissible par rapport à A si et seulement s'il existe la limite de $X(t)$ et la paire $(B, C_l^{(n)})$ est admissible par rapport à T. (On dit que la paire $(A, C_l^{(n)})$ est admissible par rapport à T si $TB \subset C_l^{(n)}$).

Évidemment, dans les conditions (2.5), l'équation (2.3) admet une solution convergente unique satisfaisant à la condition initiale:

$$x(0) = \xi, \ \xi \in R^n, \tag{2.6}$$

quel que soit ξ. Nous noterons encore

$$L = \sup_{t \geq \infty} \| X(t) \|; \qquad Y(t) = \int_0^t X(t)X^{-1}(s)ds.$$

2.1. – Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. – *Dans les hypotèses suivantes,*

a) $A(t)$ *est bornée sur* R_+

b) $\int_0^t \| X(t)X^{-1}(s) \| \, ds \leq M, \quad M > 0$

c) *il existe* $\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y(\infty) < +\infty$

d) $f(t, x)$ *est définie et continue sur* $R_+ \times D^{(n)}$

e) *la fonction* $\varphi(x) = \lim f(t, x)$ *existe pour tout* $x \in D^{(n)}$, *et cette limite est uniforme par rapport à* x

f) $\| f(t, x) \| \leq r$, pour $(t, x) \in R_+ \times D^{(n)}$, $r > 0$,

le problème (2.1) + (2.6) *admet au moins une solution dans* $C_l^{(n)}$, *dès que* $\| \xi \|$, M, r *sont assez petits.*

DÉMONSTRATION. R. BELLMAN – [14] a montré, en utilisant le lemme de BANACH–STEINHAUS, que les conditions (a) et (b) sont nécessaires et suffisantes pour l'admissibilité de la paire $(C_M^{(n)}, C_M^{(n)})$, par rapport à l'opérateur T, et que, dans ces conditions il existe deux nombres α, β, tels que,

$$\| X(t)X^{-1}(s) \| \leq \beta \exp(-\alpha(t-s)), \qquad \alpha, \beta > 0. \tag{2.7}$$

De l'inégalité (2.7) on tire

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = 0 \tag{2.8}$$

donc la première condition (2.5) est remplie. Soit maintenant $f \in C_l^{(n)}$; on peut supposer que $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, car si cette relation n'a pas lieu, selon l'hypothèse c) on peut remplacer $f(t)$ par $f(t) - \lim_{t\to\infty} f(t)$.

Alors nous aurons:

$$\| Tf \| \leq \int_0^{t_1} \| X(t)X^{-1}(s) \| \cdot \| f(s) \| \, ds + \int_{t_1}^{t} \| X(t)X^{-1}(s) \| \cdot \| f(s) \| \, ds \leq$$

$$\leq \beta \sup_{t\geq 0} \| f(t) \| \cdot \int_0^{t_1} \exp(\alpha(t-s)) ds + \sup_{t_1 \leq s \leq t} \| f(s) \| \cdot \int_0^t \| X(t)X^{-1}(s) \| ds \leq$$

$$\leq \beta \sup_{t\geq 0} \| f(t) \| \cdot [\exp(-\alpha(t-t_1)) - \exp(-\alpha t)] + M \cdot \sup_{t_1 \leq s \leq t} \| f(s) \|,$$

d'où il résulte $Tf \to 0$, donc $Tf \in C_l^{(n)}$. Donc les conditions a), b), c) nous assurent l'admissibilité de la paire $(C_l^{(n)}, C_l^{(n)})$ par rapport à $A(t)$. De plus, il en résulte:

$$\lim_{t\to\infty} Tf = Y(\infty) \cdot \lim_{t\to\infty} f(t) \tag{2.9}$$

D'autre part, si $f \equiv c$ (constante), et si c) *n'a* pas lieu, il en résulte que $Tf \notin C_l^{(n)}$, ce qui, compte tenant du résultat de BELLMAN nous montre que les conditions a), b), c), sont aussi nécessaires pour l'admissibilité de la paire $(C_l^{(n)}, C_l^{(n)})$ par rapport à $A(t)$.

Définissons maintenant sur $S^{(n)}$ l'opérateur $y = Ux$, $x \in S^{(n)}$, où y est la solution du problème:

$$y' = A(t)y + f(t, x(t)); \qquad y(0) = \xi. \tag{2.10}$$

L'existence et l'unicité de y, ainsi que l'appartenance de y à $C_l^{(n)}$, sont des conséquences des faits que nous avons mentionnés plus haut.

Pour conclure avec l'existence d'un point fixe pour l'opérateur U, qui sera évidemment une solution de notre problème, nous allons appliquer encore le théorème de SCHAUDER–TYCHONOFF dans $C_l^{(n)}$.

L'opérateur U peut s'écrire

$$Ux = X(t)\xi + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s, x(s))ds. \tag{2.11}$$

Si nous supposons que

$$L \cdot \|\xi\| + Mr \leq \rho, \tag{2.12}$$

alors il en résulte

$$US^{(n)} \subset S^{(n)}. \tag{2.13}$$

L'inclusion (2.13) nous montre que les fonctions de $US^{(n)}$ sont uniformément bornées sur R_+. De (2.10), a) et f), il en résulte:

$$\| Ux(t) - Ux(t_1) \| = \| \int_{t_1}^t y'(s)ds \| \leq (\sup_{t\geq 0} \| A(t) \| \rho + r) \cdot | t - t_1 |,$$

ce qui nous montre que les fonctions de $US^{(n)}$ sont équicontinues sur R_+. De relation (2.9) il s'ensuit que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = Y(\infty) \cdot \varphi(\lim_{t\to\infty} x(t)), \tag{2.14}$$

ce qui nous montre que la famille $US^{(n)}$ est uniformément convergente, compte tenant de l'hypothèse e). Donc l'ensemble $US^{(n)}$ est compact.

C'est la continuité de l'opèrateur U qui reste a prouver. Il faut montrer que si $x_n \to x$, uniformément sur R_+, alors $Ux_n \to Ux$ aussi uniformément sur R_+. Mais on a, de façon évidente,

$$\| Ux_n - Ux \| \leq \int_0^T \| X(t)X^{-1}(s) \| \cdot \| f(s,\ x(s)) - f(s,\ x_n(s)) \| \, ds + 2r \int_T^t \| X(t)X^{-1}(s) \| \, ds$$

$$\leq 2r \left\{ (\exp(-\alpha(t-T)) - \exp(-\alpha t)) + \int_T^t \| X(t)X^{-1}(s) \| \, ds \right\}, \quad t > T,$$

ce qui nous montre, compte tenat de l'hypothèse (c), la continuité de l'opérateur U. Le théorème se trouve ainsi démontré.

REMARQUE. – D'après (2.14), si $x(t)$ est une solution de l'équation (2.1), on a $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = Y(\infty) \cdot \varphi(\lim\limits_{t\to\infty} x(t))$.

2.2. – Le théorème qui suit est semblable au précédent.

THÉORÈME 3. – *Dans les hypothèses suivantes:*

a) $\int_0^\infty \| X^{-1}(t) \| \cdot g(t) dt < \infty$, *$g(t)$ étant une fonction continue et positive sur R_+*

b) *il existe* $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = X(\infty)$

c) $f(t,\ x(t))$ *est une fonction continue sur* $R_+ \times \bar{S}^{(n)}$

d) $\| f(t,\ x(t)) \| \leq r . g(t)$ *dans* $R_+ \times \bar{S}^{(n)}$, *où* $r > 0$,

le problème (2.1) (2.6) *admet au moins une solution dans* $C_l^{(n)}$, *dès que* $\|\xi\|$, L *et* r *sont assez petits.*

DÉMONSTRATION. – Cette fois on utilisera le théorème de SCHAUDER–TYCHONOFF dans $C_C^{(n)}$, bien que la solution appartiendra à l'espace $C_l^{(n)}$. Nous allons montrer tout d'abord que les conditions (a) et (b) sont nécessaires et suffisantes pour l'admissibilité de la paire $(C_g,\ C_l^{(n)})$ par rapport à la matrice $A(t)$. Il faut montrer que cette paire est admissible par rapport à l'opérateur T. De (a) on tire

$$\int^t \| X(t)X^{-1}(s) \| \, g(s) ds \leq L \int_0^t \| X^{-1}(s) \| \, g(s) ds \overset{\text{déf}}{=} M \tag{2.15}$$

La condition (2.15) est nécessaire et suffisante pour l'admissibilité de la paire $(C_g,\ C_M^{(n)})$ par rapport à T (voir [8]), donc elle est nécessaire pour l'admissibilité de la paire $(C_g,\ C_l^{(n)})$ par rapport au même opérateur. Soit $f \in C_g$; donc $\|f\| \leq k \cdot g(t)$. Nous aurons:

$$\| Tf(t) - Tf(t') \| \leq k \cdot \int_0^t \| X(t) - X(t') \| \cdot \| X^{-1}(s) \| g(s) ds +$$

$$+ k \cdot \int_{t'}^t \| X(t) X^{-1}(s) \| \cdot g(s) ds, \qquad t' \leq t.$$

Mais si $t,\ t' > T(\varepsilon)$, alors $\| X(t) - X(t') \| < \varepsilon$, d'où il résulte

$$\| Tf(t) - Tf(t') \| \leq \varepsilon \int^{\infty} \| X^{-1}(s) \| g(s) ds + L \int_{t'}^t \| X^{-1}(s) \| g(s) ds,\ t > t' > T(\varepsilon)$$

ce qui nous montı que $Tf \subset C_l^{(n)}$. La nécessité de la condition (a) résulte de la manière suivante. Soit la fonction $g(t)$ telle que $\int_0^{\infty} g(t) dt = +\infty$, et soit $G(t) = (g(t),\ \ldots,\ g(t))$. On a $G(t) \in C_g$. Mais l'équation

$$x' = G(t) \tag{2.16}$$

n'a pas des solutions dans $C_l^{(n)}$. La condition (a) n'est pas remplie bien que (b) ait lieu.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Considérons encore l'opérateur U donné par (2.11), défini sur $\bar{S}^{(n)}$. Si nous supposons que (2.12) à lieu, alors il résulte,

$$U\bar{S}^{(n)} \subset S^{(n)} \subset \overline{S^{(n)}}, \tag{2.17}$$

car on a de façon évidente que $f(t,\ x(t)) : \bar{S}^{(n)} \to C_g$. Montrons maintenant la la continuité de U dans $C_c^{(n)}$. Soit $x_n(t) \in S^{(n)}$, tel que $\lim\limits_{t \to \infty} x_n(t) = x(t)$, uniformément sur tout compact de R_+. De l'égalité

$$X(t) X^{-1}(s) = I + \int_s^t A(u) X(u) X^{-1}(s) du,$$

on tire,

$$\| X(t) X^{-1}(s) \| \leq 1 + \int_s^t \| A(u) \| \cdot \| X(u) X^{-1}(s) \| du,$$

d'où en vertu du lemme de GRONWALL il en résulte,

$$\| X(t)X^{-1}(s) \| \leq \exp\left(\int_0^T A(u)du \right), \quad 0 \leq t, \ s \leq T.$$

Alors pour $0 < t < T$ nous aurons

$$\| Ux_n(t) - Ux(t) \| \leq \int^t \| X(t)X^{-1}(s) \| \cdot \| f(t, \ x_n(t) - f(t, \ x(t)) \| ds \leq$$

$$\leq T \cdot \exp\left(\int_0^T \| A(t) \| dt \right) \cdot \| f(t, \ x_n(t) - f(t, \ x(t)) \|,$$

ce qui nous montre la continuité de l'opérateur U dans $C_c^{(n)}$. Pour l'application du théorème de SCHAUDER–TYCHONOFF, il reste a montrer l'existence d'un ensemble compact dans $C_c^{(n)}$, soit S_1, tel que $U\bar{S}^{(n)} \subset S_1 \subset \bar{S}^{(n)}$. Nous allons établir que les fonctions appartenant à $U\bar{S}^{(n)}$ sont uniformément bornées et équicontinues sur tout intervalle fini de R_+. La relation (2.17) nous montre que les fonctions de $U\bar{S}^{(n)}$ sont uniformément bornées sur R_+. On a encore

$$\| Ux(t) - Ux(s) \| \leq \int_s^t \| (Ux(\tau))' \| d\tau \leq \delta \int_s^t \| A(u) \| du + r \int_r^t g(u) du; \ s < t,$$

ce qui nous montre l'équicontinuité des fonctions de $U\bar{S}^{(n)}$. On pourra pendre alors pour S_1 la fermeture de $U\bar{S}^{(n)}$ dans $C_c^{(n)}$, et le théorème est ainsi démontré.

2.4. – En suivant C. CORDUNEANU [8], on peut démontrer un théorème qui assure en même temps l'existence et l'unicité de la solution dans $C_l^{(n)}$.

THÉORÈME 4. – *Admettons les hypothèses suivantes*:

a) *la paire* $(B, \ C_l^{(n)})$ *est admissible par rapport à la matrice* $A(t)$

b) $x(t) \rightarrow f(t, \ x(t))$ *est une application continue sur* $S^{(n)}$, *dont les valeurs appartiennent à* B, *telle que* $\| f(t, \ x(t)) - f(t, \ y(t)) \| \leq r \| x(t) - y(t) \|$, r *étant une constante positive.*

Alors il existe une solution unique $x(t) \in S_c^{(n)} \subset C_l^{(n)}$, *pour le problème* (2.1) (2.6), *dès que* $\| \xi \|$, r *et* $\| f(t, \ 0) \|$ *sont assez petits.*

Pour la démonstration on utilisera le théorème du point fixe de BANACH en choisisant $C_l^{(n)}$ comme espace fondamental. Du théorème 4 on peut obtenir des résultats concrets, compte tenant des conditions d'admissibilité que nous avons établies plus haut. Dans le cas $B = C_l^{(n)}$ on obtient le théoréme de BRIDGLAND [2].

3.0. – Dans cette partie nous allons démontrer quelques théorèmes globales d'existence de solutions convergentes, en utilisant la méthode de le comparaison. Cette méthode a été utilisée dans le problème du prolongement des solutions par R, CONTI [24], et dans la théorie de la stabilité par C. CORDUNEANU [15]. Cette méthode a été utilisée par plusieurs auteurs pour l'étude du comportement des solutions des systèmes différentiels ordinaires (par exemple pour l'étude de l'existence des solutions bornées, dans [16], [17]).

Cette méthode a été utilisée aussi pour la démonstration de l'existence de solutions convergentes par F. BRAUER, [18], [19]. (notre théorème 6 sera une variante d'un théorème de F. BRAUER).

3.1. – Nous allons considérer des systèmes de la forme.

$$x' = f(t, x), \tag{3.1}$$

$f(t, x)$ étant une fonction continue sur $D = R_+ \times \Delta$, à valeurs dans R^n, où $\Delta = \{ x;\ x \in R^n,\ \|x\| < \rho + \infty \}$.

Nous allons supposer que par tout point de D il passe une seule intégrale du système (3,1). L'intégrale qui passe par (t_0, x_0) sera désignée par $x(t;\ t_0, x_0)$.

Considérons l'équation scalaire

$$y' = \omega(t, y), \tag{3.1}$$

où $\omega(t, y)$ est une fonction continue sur R_+, et $y_1 \leq y < y_2 \leq +\infty$.

Nous allons supposer que la condition d'unicité est remplie dans tout point de l'ensemble de définition de ω. Cette équation sera appelée « équation de comparaison », et sa solution qui passe par (t_0, y_0) sera désignée par $y(t;\ t_0, y_0)$.

Soit $V(t, x)$ une fonction réelle, définie sur D, différentiable en tout point de D. Définissons la dérivée $V'(t, x)$ de la fonction $V(t, x)$ par rapport au systéme (3.1) à l'aide de la formule

$$V'(t, x) = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \operatorname{grad} f\right), \tag{3.3}$$

où la parenthèse signifie le produit scalaire. L'idée fondamentale de la méthode de la comparaison est la suivante: on suppose que

$$V'(t, x) \leq \omega(t,\ V(t, x)), \tag{3.4}$$

d'où il résulte d'après le lemme de WAŻEWSKI [20],

$$V(t, x(t;\, t_0, x_0)) \leq y(t;\, t_0, y_0), \tag{3.5}$$

où,

$$y_0 = V(t_0, x_0). \tag{3.6}$$

En admettant des conditions adéquates pour V, l'inégalité (3.5) trasporte les propriétés des solutions de l'équation de comparaison aux solutions de l'équation (3.1).

(Pour les détails concernant cette méthode, on renvoie le lecteur au livre de G. SANSONE et R. CONTI [25], ch. IX).

Dans les applications de nos théorèmes on peut prendre comme d' habitude $V(t, x) = \|x\|$. Alors (3.4) devient,

$$\|f(t, x)\| \leq \omega(t, \|x\|).$$

Comme équation de comparaison peut servir l'équation suivante:

$$y' = \lambda(t) \cdot \varphi(y) \tag{3.7}$$

où $\lambda(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions continues et positives sur R_+. A. WINTNER [21] a montré que dans les conditions suivantes,

$$(\lambda) \qquad \int_0^\infty \lambda(t)dt < +\infty; \quad (\varphi) \quad \int^\infty dy/\varphi(y) = +\infty,$$

toutes les solutions de l'équation (3.7) sont convergentes.

3.2. – Nous donnerons maintenant les définitions des différentes genres de comportament à l'infini, pour les solutions du système (3.1).

(a) on dit que le système (3.1) est *convergent* si $l(t_0, x_0) \overset{\text{déf}}{=} \lim\limits_{t\to\infty} x(t;\, t_0, x_0)$ est définie sur D

(b) on dit que le système convergent (3.1) est *équi-convergent* si pour tout $\varepsilon, \alpha, t_0 > 0$, il existe une fonction $T(t_0, \alpha, \varepsilon)$ tel que $\|x(t;\, t_0, x_0) - l(t_0, x_0)\| < \varepsilon$, dès que $t > T(t_0, \alpha, \varepsilon) + t_0$, $\|x_0\| \leq \alpha$

(c) on dit que le système (3.1) est *équi-uniformément convergent* s'il est équi-convergent et si T ne dépend pas de t_0

(d) on dit que le système (3.1) est *coalescent* s'il est convergent et si $l(0, x_0)$ est une constante.

THÉORÈME 5. – *Si les conditions suivantes sont satisfaites;*

$V_1)$ $V(t, 0) \equiv 0$; $V(t, x) \geq a(\|x\|)$, *où* $a(r)$ *est une fonction continue, non–décroissante et* $a(0) = 0$

$V_2)$ $V\left(t, \int_a^t f(s, x(s))ds\right) \leq \left| \int_a^t V'(s, x(s) - x(a))ds \right|$, $t \geq a$, *pour toute fonction* $x(t)$ *de* $S^{(n)}$

$V_3)$ $| V'(t, x) | \leq \omega(t, V(t, x))$

$\omega_1)$ $\omega(t, y)$ *est une fonction définie pour* $t \geq 0$, $0 \leq y \leq Y_1$, *continue et croissante par rapport à* y *pour chaque* t *fixé, alors,*

1) si *l'équation* (3.2) *est du type* (a) *ou* (b), *le système* (3.1) *est du même type respectivement*

2) *si le système* (3.2) *est du type* (c) *et s'il existe une fonction* $b(r)$, *continue, non–décroissante, avec* $b(0) = 0$, *telle, que*

$V_1')$ $V(t, x) \leq b(\|x\|)$,

alors le système (3.1) *est du type* (c).

DÉMONSTRATION. – De l'hypothèse $V_3)$ il résulte,

$$V'(t, x) \leq \omega(t, V(t, x)),$$

d'où, en appliquant le lemme de WAŻEWSKI, il s'ensuit,

$$V(t, x(t;\, t_0,\, x_0)) \leq y(t;\, t_0,\, y_0), \tag{3.8}$$

où

$$y_0 = V(t_0, x_0). \tag{3.9}$$

De l'hypothèse $V_2)$ et $V_3)$ il s'ensuit,

$$V(t, x(t) - x(a)) = V\left(t, \int_a^t x'(s)ds\right) = V\left(t, \int_a^t f(s, x(s))ds\right) \leq \int_a^t | V'(s, x(s)) | \, ds \leq$$
$$\leq \int_a^t \omega(s, V(s, x(s))ds,$$

d'où, compte tenant de monotonie de la fonction $\omega(t, y)$ par rapport à y, il vient,

$$V(t, x(t) - x(a)) \leq \int_a^t \omega(s, y(s;\ t_0,\ y_0))ds = y(t) - y(a).$$

D'après V_1) l'inégalité precedente nous donne,

$$\| x(t;\ t_0,\ x_0) - x(a;\ t_0,\ x_0) \| \leq a^{-1}(y(t;\ t_0,\ y_0) - y(a;\ t_0,\ y_0)) \tag{3.10}$$

ce qui nous montre que le système (3.1) est convergent, si (3.2) est convergent. De l'inégalité (3.10) on tire,

$$\| x(t;\ t_0,\ x_0) - l(t_0,\ x_0) \| \leq a^{-1}(L(t_0,\ y_0) - y(t;\ t_0,\ y_0)), \tag{3.11}$$

où,

$$L(t,\ y_0) = \lim_{t\to\infty} y(t;\ t_0,\ y_0)$$

Supposons maintenant que le système (3.2) soit équi-convergent. Ce ci signifie que $L(t,\ y_0) - y(t;\ t_0,\ y_0) < \varepsilon$, dès que $t > T(t_0,\ \varepsilon,\ \beta) + t_0$, $\| y_0 \| \leq \beta$. Mais la continuité de la fonction V, et la relation (3.9) nous montre qu'il existe un nombre α tel que $\| x_0 \| \leq \alpha$ implique $\| y_0 \| \leq \beta$, donc β est une fonction continue de α et t_0. Ces considérations, nous montrent que le système (3.2) est équi-convergent. Enfin, si le système (3.2) est équi-uniformément convergent, la condition V_1') nous permet de choisir le nombre β indépendant de t_0. Le théorème se trouve ainsi démontré.

REMARQUE. – Il en résulte que, dans les hypothèses de notre théorème, il existe $\lim_{t\to\infty} V(t,\ x(t;\ t_0,\ x_0))$, et que,

$$a(l(t_0,\ x_0)) \leq \lim_{t\to\infty} V(t,\ x(t;\ t_0,\ x_0)) \leq L(t_0,\ y_0).$$

On peut prendre dans des applications $V(t, x) = \| x \|$, qui satisfait évidemment aux conditions V_1), V_2), et $\omega(t, y) = \lambda(t)\cdot\varphi(y)$. La condition V_3) sera remplie si

$$\| f(t,\ x) \| \leq \lambda(t)\varphi(y). \tag{3. 12}$$

Si nous supposons que les fonctions $\lambda(t)$ et $\varphi(y)$ satisfassent aux conditions (λ) et (φ), alors le système (3.1) est convergent. Si par exemple $\varphi(y) = y$ et (3.12) a lieu, alors le système (3.1) est équi-convergent.

THÉORÈME 6. – *Supposons que* V_1) *et* V_2) ayent lieu, et que

V_4) $V'(t,\ x) \leq 0.$

Alors le système (3.1) *est convergent.*

DÉMONSTRATION. – La fonction $V(t, x(t; t_0, x_0))$ étant monotone et bornée, il existe $\lim_{t\to\infty} V(t, x(t; t_0, x_0))$. Alors les conditions $V_1)$, $V_2)$ assurent l'existence de la limite de $x(t; t_0, x_0)$.

REMARQUE 1. - Il n'est pas possibile d'obtenir le théorème 6 comme un cas particulier du théoréme 5 en prenant $\omega(t, y) = 0$.

REMARQUE. - La condition $V_2)$ s'écrite, dans le cas quand $V_4)$ a lieu sous la forme,

$$V\left(t, \int_a^t f(s, x(s))ds\right) \leq -\int_a^t V'(s, x(s))ds, \ t \geq a.$$

3.4. - Dans le théorème qui suit la condition $V_2)$ ne figure pas.

THÉORÈME 7. - *Soit $V(t, x)$ une fonction continue et différentiable dans D, à valuers dans un intervalle fini ou non J. Soit $\omega(t, y)$ une fonction définie et continue dans $R_+ \times J$, et monotone non-décroissante par rapport à y, quelque soit t fixe. Si les conditions*

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \|f(t, x)\| \leq \omega(t, V(t, x)) \\ V'(t, x) \leq \omega(t, V(t, x)), \end{cases}$$

sont remplies, alors les conclusions du théorème 5 *restent valables.*

DÉMONSTRATION. - L'inégalité (3.8) reste valable dans ce cas; nous aurons donc:

$$\text{(3.13)} \qquad \|x(t; t_0, x_0) - y(a; t_0, x_0)\| \leq \int_a^t \|f(s, x(s; t_0, x_0))\| ds \leq$$

$$\leq \int_a^t \omega(s, V(s, x(s; t_0, x_0)))' ds \leq \int_a^t \omega(s, y(s, t_0, y_0))ds = y(t; t_0, y_0) -$$

$$- y(a; t_0, y_0), \ t > a,$$

d'où il résulte que le système (3.1) est convergent si le système (3.2) est convergent. De (3.13) il en résulte:

$$\| x(t; t_0, x_0) - l(t_0, x_0) \| \leq L(t, y_0) - y(t; t_0, y_0),$$

et la démonstration continue aussi que pour le théoréme 5.

REMARQUE 1. - Nous n'avons pas supposé comme d'habitude, que $V(t, x)$ est une fonction positivement définie, ou même positive.

REMARQUE 2. - Si nous prenons $V(t, x) = \| x \|$, la condition (a) dévient,

a') $\| f(t, x) \| \leq \omega(t, \| x \|)$.

Dans ce cas $J = (y_1, y_2)$, où $y_1 \geq 0$ et $y_2 < +\infty$. Nous avons obtenu ainsi comme un cas particulier du notre théorème 7 le théorème de BRAUER [19].

3.5. - Les théorèmes qui suivent, nous donnent des indications sur la fonction $l(t_0, x_0)$.

THÉORÈME 8. - *Si le système* (3.1) *est équi-convergent et si* $x(t; t_0, x_0)$ *est une fonction continue par rapport à* t_0, x_0, *alors* $l(t_0, x_0)$ *est une fonction continue de* x_0 *pour chaque* t_0. *En plus, si le système* (3.1) *est équi-uniformément convergent, alors* $l(t_0, x_0)$ *est une fonction continue aussi par rapport à* t_0

THÉORÈME 9. - *Si* $f(t, x)$ *est différentiable et le système* (3.1) *est convergent et si le système «aux variations»*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(t, x(t; t_0, x_0))}{\partial x} \cdot z \tag{3.14}$$

est équi-uniformément convergent, alors la fonction $l(t_0, x_0)$ *est dérivable par rapport à* x_0. *Si le système,*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(t, x(t, 0, x_0))}{\partial x} z \tag{3.15}$$

est uniformément coalescent au zéro, alors le système (3.1) *est coalescent.*

La démonstration du théorème 8 résulte immédiatement du fait que la convergence uniforme conserve la continuité.

Les fonctions $\dfrac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$ et $\dfrac{\partial x(t; 0, x_0)}{\partial x_0}$ satisfont aux équations (3.14) et respectivement (3.15). Il est aisé de voir que toutes les conditions assurant l'existence de la dérivée de la fonction $l(t_0, x_0)$ sont remplies. En plus, il est possible d'intervertir la limite avec la dérivée, ce qui nous assure que $\dfrac{\partial l(0, x_0)}{\partial x_0} \equiv 0$, donc le système (3.1) est coalescent.

3.6. - Le théorème qui suit est semblable à un théorème bien conu de HUKUHARA.

On dit que le système (3·1) est *uniformément borné*, si pour tout α et t_0, il existe une fonction $\beta(\alpha)$ de sorte que $\| x(t; t_0, x_0) \| \leq \beta$ dès que $\| x \| \leq \alpha$, $t \geq t_0$.

THÉORÈME 10. - *Si le systeme* (3.1) *est uniformément borné et équiuniformement convergent, alors l'ensemble* $\{x(t;\ t_0,\ x_0)\}$, où $\|x_0\| \leq \alpha < +\infty$, *est compact dans* $C_l^{(n)}$, *quel que soit* α *et* t_0.

La démonstration de ce théorème est immédiate, compte tenant du lemme 1.

3.7. - Nous finirons ce travail avec une observation concernant le cas scalaire, contenu dans le théorème suivant:

THÉORÈME 11. - *Si la fonction* $f(t, x)$ *est différentiable, et si l'équation* (3.1) *est convergente, et si*

$$\int_0^\infty \frac{\partial f(t,\ x(t,\ 0,\ x_0))}{\partial x}\, dt = -\infty \tag{3.18}$$

quelque soit x_0, *alors l'équation* (3.1) *est coalescente*

Pour la démonstration il suffit de voir que (3. 18) représente une condition suffisante pour que l'équation (3.15) soit uniformément coalescente au zéro.

3 8. - Dans la note [22] nous avons considéré le problème d'existence des solutions convergentes pour des équations d'ordre superieur.

Les résultats de PERRON on été utilisés pour les systèmes nonlinéaires par C. CORDUNEANU [23], pour démontrer l'existence des solutions bornées

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. BRIDGLAND jr, *Asymptotic behavior of the solutions cf non homogeneous differential equations*, Proc. Amer Math. Soc. vol. 12(1961).

[2] — —, *Asymptotic behavior of the solutions ob nonlinear differential equations*, Proc. Amer. Math-Soc., vol. 13 (1962).

[3] J. L. MASSERA and J. J. SCHÄFFER, *Linear differential equations and functional analysis*, Ann. of. Math. 67 (1958).

[4] — — and — —, *Linear differential equations and functional analysis*, IV Math Ann., 139 (1960).

[5] C. CORDUNEANU, *Sur certaines systèmes differentiels non-linéaires*, Ann. St. Univ. A. I. Cuza, Iasi, 6, (1960).

[6] PH. HARTMAN and N. ONUCHIC, *On the asymptotic integration of ordinary differential equation*, Pacif. J. Math. 13 (1963).

[7] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*. Paris, 1956.

[8] C. CORDUNEANU, *Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra*, Ann. Math. Pura ed Appl. 67, (1965).

[9] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, ch. IX, X, Paris, 1948, 1949.

[10] O. PERRON, *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen*, Math. Zeitschrift, 32, (1930).

[11] — —, *Über nichthomogene lineare Differentialgleichungen*, Math. Zeit., 15, (1922).

[12] — —, *Über einen Grenzwertsatz*, Math. Zeit, 28, (1928)

[13] I. G. PETROWSKI, *Leçons sur la théorie des équations différentielles ordinaires* (*en russe*), Moscou, 1949.

[14] R. BELLMAN, *On a application of a Banach-Steinhaus theorem of the study of the boundedness of solutions of nonlinear differential and difference equations*, Ann. of Math., vol. 49, (1948).

[15] C. CORDUNEANU, *Sur l'application des inégalités différentielles dans la théorie de la stabilité*, (en russe) Ann. St. Univ. A. I. Cuza, Iasi 1960.

[16] T. YOSHIZAWA, *Liapunov's function and boundedness of solutions*, Funk. Ekvac, 2, (1959).

[17] P. TALPALARU, *Solutions bornées des systèmes différentiels*, Anal. St. Univ. A. I. Cuza, Iasi, (1966).

[18] F. BRAUER, *Global behavior of solutions of ordinary differential equations*, J. Math. Analysis and Appl., 2, 1961.

[19] — —, *Bounds for solutions of ordinary differential equations*, M. R. C. Tech. Summary Rep. 272, Univ. of Wisconsin, 1961.

[20] T. WAZ̊EWSKI, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Pol. Math. 23, (1950).

[21]. A. WINTNER, *An Abelian lemma concerning asymptotic equilibria*, Amer. J. of Math., 68, (1946).

[22] C. AVRAMESCU, *Sur le comportement asymptotique des solutions des équations différentielles ordinaires*, An. St. Univ. A. I. Cuza, Iasi (sous presse)

[23] C. CORDUNEANU, *Sur l'existence des solutions bornées de certains systèmes differentiels*, (en roumain) Studii si Cercetari, Iasi, (1960).

[24] R. CONTI, *Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*, Boll. U. M. I. (3), 11 1956).

[25] G. SANSONE and R. CONTI, *Non-linear differential equations*, *Pergamon Press*, Oxford, 1964.

[26] R. CONTI, *Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations*, Boll. U. M. I. (3), vol. XXII, (1967)