Onde di discontinuità ed equazioni costitutive nei corpi elastici isotropi sottoposti a deformazioni finite (*) (**).

TOMMASO RUGGERI (Bologna)

Summary. – *We consider an elastic isotropic material with finite deformations. The existence of a double wave (therefore exceptional because the field equations are in the conservative form) for all the deformations and the discontinuity propagation direction is required. This because in the linear theory there exists a double wave, furthermore, because in many non-linear theories of Mathematical physics there exists at least one exceptional wave (this wave doesn't produce shocks). This request implies conditions for the response function in the constitutive equations. Furthermore, under these assumptions, we can determine explicitly all the possible propagation speeds. Therefore we can find theorems generalizing (in the case of the imposed conditions) those ones obtained by Truesdell and Green for the principal waves (whose unit normal has the direction of the eigenvectors of the deformation matrix). In the last part of this work we examine the case of a hyperelastic material and we determine some classes of possible thermodynamic potentials.*

1. – Premesse generali.

Consideriamo un corpo β tridimensionale elastico, omogeneo ed isotropo identificato con una regione dello spazio euclideo.

Il moto del corpo è descritto da una funzione che dà la posizione al tempo t del generico punto materiale che aveva la posizione $\boldsymbol{X}$ nella configurazìone di riferimento:

$$\boldsymbol{x} \equiv \chi(\boldsymbol{X}, t)\,.$$

Le equazioni del moto sono, nel caso in esame, [1] (eq. 205,2):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{t} + \varrho \boldsymbol{b} = \varrho \ddot{\boldsymbol{x}} \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{t}$ è il tensore degli sforzi di Cauchy, ϱ è la densità nello stato attuale e $\boldsymbol{b}$ caratterizza le forze esterne di volume.

Alle (1) per un materiale elastico isotropo si associano le seguenti equazioni costitutive:

$$\boldsymbol{t} = f_0 \mathscr{I} + f_1 \boldsymbol{B} + f_2 \boldsymbol{B}^2 \tag{2}$$

(*) Entrata in Redazione il 18 febbraio 1976.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei contratti del C.N.R. - Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica.

dove $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$ è il tensore sinistro di Cauchy-Green, $\boldsymbol{F} = \nabla_{\boldsymbol{X}}\chi(\boldsymbol{X}, t)$ è il gradiente di deformazione ed f_0, f_1 ed f_2 sono funzioni risposta che dipendono dagli invarianti principali di $\boldsymbol{B}$: J_1, J_2, J_3.

La Teoria delle onde di discontinuità relativa al sistema (1)-(2) è stata studiata da molti Autori, si rimanda per dettagliate bibliografie alle monografie [2] e [3].

C. TRUESDELL nel 1961 ha fornito per la prima volta uno studio sistematico e generale della teoria della propagazione per un materiale elastico qualsiasi. Nella sua nota [4], fra i vari risultati, mostra tra l'altro la possibilità di propagazione nella direzione degli autovettori della matrice $\boldsymbol{B}$ e calcola esplicitamente, nel caso di un materiale isotropo, le velocità di propagazione delle onde principali (onde la cui normale ha la medesima direzione di uno degli autovettori di $\boldsymbol{B}$) e ne deduce importanti teoremi.

Successivamente W. A. GREEN [5] ricava la legge di evoluzione delle onde principali, mettendo in risalto che l'onda trasversale evolve con discontinuità costante mentre l'onda longitudinale (sempre per onde piane) può generare un'onda d'urto dopo il cosidetto tempo critico.

Per mettere in evidenza lo scopo del presente lavoro è opportuno richiamare qualche questione generale di teoria della propagazione nei sistemi iperbolici quasi-lineari (¹).

Prendiamo in esame il seguente sistema quasi-lineare di equazioni alle derivate parziali del primo ordine:

$$\boldsymbol{U}_t + A^i(\boldsymbol{U})\,\boldsymbol{U}_{X_i} = 0 \tag{3}$$

dove $\boldsymbol{U}$ è un vettore colonna a M componenti ed A^i sono matrici $M \times M$ funzioni del campo.

Supponiamo che $\boldsymbol{U} \in C^1$ a tratti ovvero che il campo $\boldsymbol{U}$ è continuo mentre le sue derivate prime sono continue da una parte e dall'altra di una superficie regolare di equazione cartesiana $\varphi(\boldsymbol{X}, t) = 0$, presentando delle discontinuità attraverso essa.

In queste condizioni si dirà che si è generata un'onda di discontinuità e si identificherà l'onda con il suo fronte d'onda.

Sia $\boldsymbol{U}^0 \in C^2$ una soluzione assegnata di (3). Per $\varphi < 0$, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_0$, mentre per $\varphi > 0$, facendo uno sviluppo limitato per $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}^0$ si ha:

$$\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}^0 = \varphi\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{O}(\varphi^2)\,. \tag{4}$$

Pertanto si ha:

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=-0} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}^0}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=-0} \qquad ; \qquad \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=+0} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}^0}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=+0} + \boldsymbol{\pi}\,.$$

(¹) Questi risultati sono tratti dalla monografia di G. BOILLAT [6]. Nel caso unidimensionale vedi anche [7] e [8].

Prendendo la differenza ambo i membri, dopo aver tenuto conto che $\boldsymbol{U}^0$ è di classe C^2 si ottiene che $\boldsymbol{\pi} = \delta \boldsymbol{U}$ dove con δ si è indicato:

$$\delta = \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=+0} - \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=-0}.$$

Se si indica con $\lambda = -\varphi_t \diagdown |\nabla\varphi|$ la velocità normale di propagazione e con $\boldsymbol{N} = \nabla\varphi \diagdown |\nabla\varphi|$ la normale alla superficie d'onda e si fà il seguente cambio di variabili: $(\boldsymbol{X}, t) \Leftrightarrow (\boldsymbol{\xi}, \varphi)$ si ottiene da (3) prendendo i salti il seguente sistema omogeneo:

$$(A_N - \lambda_0 \mathscr{I})\boldsymbol{\pi} = 0 \tag{5}$$

dove $A_N = A^i N_i$.

Le velocità di propagazione sono gli autovalori di A_N (calcolati sulla superficie d'onda $\varphi = 0$) mentre le discontinuità sono gli autovettori.

Per ricavare la legge di evoluzione delle discontinuità basta sostituire la (4) nella (3) e tenere conto che $\boldsymbol{\pi}$ evolve lungo le linee caratteristiche, si ottiene così un'equazione differenziale alle derivate ordinarie per $\boldsymbol{\pi}$ la cui integrazione fornisce $\boldsymbol{\pi}$ in funzione del tempo valutato lungo i raggi caratteristici.

Nel caso di propagazione in uno stato $\boldsymbol{U}^0$ costante l'equazione si integra e si ottiene:

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\boldsymbol{\pi}_*}{\theta\Phi} \tag{6}$$

dove $\boldsymbol{\pi}_*$ è la discontinuità iniziale che è un vettore parallelo all'autovettore destro $\boldsymbol{d}$ di A_N, θ^2 è il determinante Jacobiano: $\theta = \sqrt{\det\|\partial X_i/\partial X_j^0\|}$, mentre con Φ si è indicato:

$$\Phi = 1 + |\nabla\varphi| \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{U}}\right)_0 \cdot \boldsymbol{\pi}_* \int_0^t \frac{d\tau}{\theta(\tau)}. \tag{7}$$

Si comprende pertanto che se il prodotto scalare $(\partial\lambda/\partial\boldsymbol{U})_0 \cdot \boldsymbol{\pi}_* < 0$, esisterà un tempo critico per cui $\Phi = 0$ e quindi $\boldsymbol{\pi} \to \infty$, inoltre in tali condizioni si genera un'onda d'urto (il campo medesimo presenta discontinuità attraverso la superficie d'urto), in altre parole $\boldsymbol{U}$ cessa di essere continua lipschitzianamente.

La causa del verificarsi del tempo critico è dovuta al fatto che λ dipende dal campo in quanto il sistema è non lineare. Se fosse lineare $\Phi = 1$ e tranne il caso caustico in cui $\theta = 0$ (le linee caratteristiche convergono in qualche punto), $\boldsymbol{\pi}$ si mantiene limitata.

Può però accadere che anche nei sistemi quasi-lineari si abbia che il prodotto scalare: $\delta\lambda = \nabla_{\boldsymbol{U}}\lambda \cdot \delta\boldsymbol{U} \propto \nabla_{\boldsymbol{U}}\lambda \cdot \boldsymbol{d} = 0$ ([2]). Le onde che godono di questa proprietà vengono dette *eccezionali* da LAX [7] e da BOILLAT [6], [9].

([2]) Nel caso di radici λ multiple la condizione deve verificarsi per tutti gli autovettori destri $\boldsymbol{d}$ corrispondenti a λ.

Esiste a questo proposito il seguente importante Teorema dovuto a BOILLAT [10]:

« *Le onde multiple di un sistema iperbolico conservativo sono eccezionali* ».

È interessante notare che in molte equazioni della Fisico-Matematica vi è almeno un'onda eccezionale (la magneto-fluidodinamica [6], l'elettromagnetismo non lineare [11], [12] ecc.) e molte volte il motivo dell'eccezionalità è dovuto alla presenza di onde multiple (l'esempio più noto è quello dell'onda materiale in fluidodinamica).

Pertanto, quando si ha un sistema con equazioni costitutive di tipo generale come le nostre (2), la richiesta di esistenza di qualche onda eccezionale può essere fruttuosa per dare informazioni sulle equazioni costitutive, in accordo ad un principio di semplicità fisica e soprattutto sfruttando un principio di analogie con le altre teorie non-lineari della Fisica Matematica.

Lo scopo del presente lavoro consiste sostanzialmente nel richiedere l'esistenza di un'onda doppia (che risulterà eccezionale in quanto le equazioni di campo sono sotto forma conservativa); precisamente la richiesta si farà per quell'onda che poi se si linearizza il sistema coincide con l'onda doppia trasversale.

Questa imposizione sarà fatta per ogni possibile deformazione e per ogni possibile normale alla superficie d'onda.

Si perviene a dei vincoli differenziali per le funzioni risposta che si riescono ad integrare.

Inoltre, tale richiesta semplifica notevolmente i calcoli e si riescono così a determinare tutte le possibili velocità di propagazione esplicitamente, qualunque sia la normale alla superficie d'onda e pertanto si generalizzano (nei limiti dei vincoli richiesti) alcuni risultati di TRUESDELL [4], ritrovando questi ultimi nel caso di onde principali.

Nell'ultima parte del lavoro si specializzano i risultati al caso di un materiale iperelastico, determinando così alcune classi di possibili potenziali termodinamici. Quest'ultimo caso estende, in parte, un precedente lavoro [13].

2. – Equazioni per le discontinuità.

Si supponga che il vettore sposamento $s_r = x_r - X_r \in C^2$ a tratti.

Indichiamo con:

$\Sigma(\boldsymbol{X}, t)$	la superficie di discontinuità espressa tramite le coordinate iniziali;
$\sigma(\boldsymbol{x}, t) = \Sigma\{\boldsymbol{\chi}^{-1}(\boldsymbol{X}, t), t\}$	la superficie espressa tramite le coordinate attuali;
$\lambda = -\dfrac{\partial \Sigma}{\partial t} / \lvert\nabla_{\boldsymbol{X}} \Sigma\rvert$	la velocità normale di propagazione;
$u_n = -\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} / \lvert\Sigma_x \sigma\rvert$	la velocità di spostamento;

$U = u_n - \dfrac{d\boldsymbol{s}}{dt}\cdot\boldsymbol{n}$ la velocità locale di propagazione;

$\boldsymbol{N} = \nabla_{\mathbf{X}}\Sigma/|\nabla_{\mathbf{X}}\Sigma|$ normale alla superficie espressa tramite le coordinate iniziali;

$\boldsymbol{n} = \nabla_x\sigma/|\nabla_x\sigma|$ versore normale alla superficie espresso tramite le coordinate attuali.

Indichiamo inoltre con $\boldsymbol{\pi}$ il vettore discontinuità:

$$\boldsymbol{\pi} = \left[\frac{\partial^2\boldsymbol{s}}{\partial\sigma^2}\right] = \left(\frac{\partial^2\boldsymbol{s}}{\partial\sigma^2}\right)_{\sigma=+0} - \left(\frac{\partial^2\boldsymbol{s}}{\partial\sigma^2}\right)_{\sigma=-0} = \delta^2\boldsymbol{s}\,.$$

Si ottiene allora da (1) il seguente sistema omogeneo a cui devono soddisfare le discontinuità (vedi [4], [5]):

$$(\boldsymbol{Q} - \varrho U^2\mathscr{I})\boldsymbol{\pi} = 0 \tag{8}$$

con

$$Q_{pr} = 2S_{pqrs}B_{ts}n_q n_t\,, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} S_{pqrs} = \partial t_{pq}/\partial B_{rs} &= \tfrac{1}{2}f_1(\delta_{pr}\delta_{qs} + \delta_{ps}\delta_{qr}) + \tfrac{1}{2}f_2\{B_{pt}(\delta_{tr}\delta_{qs} + \delta_{ts}\delta_{qr}) + \\ &B_{tq}(\delta_{pr}\delta_{ts} + \delta_{ps}\delta_{tr})\} + \delta_{pq}(\partial f_0/\partial B_{rs}) + B_{pt}B_{tq}(\partial f_2/\partial B_{rs}) + B_{pq}(\partial f_1/\partial B_{rs}) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{B}} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial J_1} + J_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial J_2}\right)\mathscr{I} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial J_2}\boldsymbol{B} + J_3\frac{\partial f_\alpha}{\partial J_3}\boldsymbol{B}^{-1}\,. \tag{11}$$

Identifichiamo adesso il sistema di riferimento con il sistema di assi che sono direzioni unite della matrice $\boldsymbol{B}$ i cui vettori basi ortonormali li indichiamo con $\{\boldsymbol{e}_i\}$.
L'espressione che assume allora $\boldsymbol{B}$ è la seguente:

$$\boldsymbol{B} = \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha^2\boldsymbol{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{e}_\alpha\,, \qquad B_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha^2\delta_{\alpha i}\delta_{\alpha k}\,. \tag{12}$$

3. – Onde principali.

Consideriamo le onde che hanno normale $\boldsymbol{n}$ parallela ad uno degli assi di versori $\boldsymbol{e}_i$ (onde principali) ad es. $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1 \equiv (1, 0, 0)$, allora da (8), (9), (10), (11) si trova subito:

$$\varrho U_{11}^2 = 2v_1^2\left\{f_1 + 2v_1^2 f_2 + \sum_{\Gamma=0}^{2}(v_1^2)^\Gamma D_1 f_\Gamma\right\} \qquad \text{(onda longitudinale)} \tag{13}$$

---

(3) Sono ben noti i seguenti legami: $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{n}\,|\nabla_x\sigma|/|\nabla_{\mathbf{X}}\Sigma|$, $\lambda^2/U^2 = (\nabla_x\sigma)^2/(\nabla_{\mathbf{X}}\Sigma)^2$.

(14) $$\varrho U_{12}^2 = v_1^2\{f_1 + (v_1^2 + v_2^2)f_2\} \qquad \text{(onda trasversale)}$$

(15) $$\varrho U_{13}^2 = v_1^2\{f_1 + (v_1^2 + v_3^2)f_2\} \qquad \text{(onda trasversale)}$$

dove

(16) $$D_r = \frac{\partial}{\partial v_r^2} = \frac{\partial}{\partial J_1} + J_1\frac{\partial}{\partial J_2} - v_r^2\frac{\partial}{\partial J_2} + \frac{J_3}{v_r^2}\frac{\partial}{\partial J_3}\,.$$

Tenuto conto di (2) le velocità di propagazione possono anche scriversi nella forma espressiva dovuta ad ERICKSEN (vedi [2]):

(17) $$\varrho U_{11}^2 = 2v_1^2\frac{\partial t_1}{\partial v_1^2}\,,$$

(18) $$\varrho U_{12}^2 = v_1^2\frac{t_1 - t_2}{v_1^2 - v_2^2}\,,$$

(19) $$\varrho U_{13}^2 = v_1^2\frac{t_1 - t_3}{v_1^2 - v_3^2}\,.$$

TRUESDELL fa notare che le velocità delle onde trasversali sono le stesse se e solo se $(v_2^2 - v_3^2)f_2 = 0$; pertanto se si vuole che quest'onda sua doppia quale che sia la deformazione è necessario e sufficiente che sia $f_2 = 0$.

Pertanto d'ora innanzi supporemo che la funzione risposta $f_2 = 0$, in queste ipotesi segue che:

(20) $$\boldsymbol{t} = f_0\boldsymbol{\mathscr{I}} + f_1\boldsymbol{B}\,; \qquad t_r = f_0 + f_1 v_r^2\,.$$

La richiesta che f_2 sia nulla garantisce solo che le onde principali trasversali sono doppie. Esaminiamo pertanto il caso generale con $\boldsymbol{n}$ generico.

4. – Richiesta di un'onda doppia nel caso generale.

Se sostituiamo (12) in (9) e (10) dopo aver messo $f_2 = 0$ si ottiene dopo qualche calcolo:

(21) $$Q_{pr} = f_1\Big(\delta_{pr}\sum_{\gamma=1}^{3} n_\gamma^2 v_\gamma^2 + n_p n_r v_p^2\Big) + 2n_p n_r v_r^2\{D_r f_0 + v_p^2 D_r f_1\}$$

poniamo:

(22) $$G_{pr} = Q_{pr} - f_1\delta_{pr}\sum_{\gamma=1}^{3} n_\gamma^2 v_\gamma^2\,; \qquad \Omega = \varrho U^2 - f_1\sum_{\gamma=1}^{3} n_\gamma^2 v_\gamma^2\,.$$

Con le posizioni (22) il sistema omogeneo (8) assume la forma:

(23) $$(\boldsymbol{G} - \Omega\boldsymbol{\mathscr{I}})\boldsymbol{\pi} = 0$$

(24) $$G_{pr} = n_p n_r\{f_1 v_p^2 + 2v_r^2(D_r f_0 + v_p^2 D_r f_1)\}\,.$$

È immediato verificare che gli invarianti di $\boldsymbol{G}$ valgono:

$$\mathrm{I}_G = 2\sum_{r=1}^{3} n_r^2 v_r^2(\tfrac{1}{2}f_1 + D_r f_0 + v_r^2 D_r f_1) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_G = {} & 2n_2^2 n_3^2\{f_1(v_2^2 D_2 f_0 - v_3^2 D_3 f_0) + 2v_2^2 v_3^2(D_2 f_0 D_3 f_1 - D_3 f_0 D_2 f_1)\} + \\ & + 2n_1^2 n_3^2\{f_1(v_3^2 D_3 f_0 - v_1^2 D_1 f_0) + 2v_1^2 v_3^2(D_3 f_0 D_1 f_1 - D_1 f_0 D_3 f_1)\} + \\ & + 2n_1^2 n_2^2\{f_1(v_1^2 D_1 f_0 - v_2^2 D_2 f_0) + 2v_1^2 v_2^2(D_1 f_0 D_2 f_1 - D_2 f_0 D_1 f_1)\}\end{aligned} \tag{26}$$

$$\mathrm{III}_G = 0\,. \tag{27}$$

Da (27) segue subito che esiste l'onda di velocità:

$$\varrho U_{II}^2 = f_1 \sum_{r=1}^{3} n_r^2 v_r^2 \tag{28}$$

L'onda data da (28) coincide, per $f_2 = 0$, con (14) e (15) quando $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1$. Si noti però che l'onda non è più, per $\boldsymbol{n}$ generico, trasversale.

Per quanto detto nell'introduzione richiediamo che quest'onda sia doppia, ciò equivale a richiedere che II_G sia nullo quale che sia $\boldsymbol{n}$ e ciò comporta:

$$\begin{cases} f_1(v_2^2 D_2 f_0 - v_3^2 D_3 f_0) + 2v_2^2 v_3^2(D_2 f_0 D_3 f_1 - D_3 f_0 D_2 f_1) = 0 \\ f_1(v_3^2 D_3 f_0 - v_1^2 D_1 f_0) + 2v_1^2 v_3^2(D_3 f_0 D_1 f_1 - D_1 f_0 D_3 f_1) = 0 \\ f_1(v_2^1 D_1 f_0 - v_2^2 D_2 f_0) + 2v_1^2 v_2^2(D_1 f_0 D_2 f_1 - D_2 f_0 D_1 f_1) = 0\,. \end{cases} \tag{29}$$

Sommando membro a membro le (29) si ottiene:

$$\begin{aligned} & v_2^2 v_3^2(D_2 f_0 D_3 f_1 - D_3 f_0 D_2 f_1) + v_1^2 v_3^2(D_3 f_0 D_1 f_1 - D_1 f_0 D_3 f_1) + \\ & \qquad + v_1^2 v_2^2(D_1 f_0 D_2 f_1 - D_2 f_0 D_1 f_1) = 0\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Indichiamo con $\mathbf{D}$ l'operatore gradiente di componenti:

$$\mathbf{D} \equiv (D_1, D_2, D_3) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial v_r^2}\right). \tag{31}$$

Con la posizione (31) la (30) assume l'aspetto vettoriale:

$$\mathbf{D}J_3 \cdot \mathbf{D}f_0 \times \mathbf{D}f_1 = 0 \tag{32}$$

da cui se si esclude per il momento che $\mathbf{D}f_1$ sia parallelo a $\mathbf{D}J_3$, si ha:

$$\mathbf{D}f_0 = a\mathbf{D}f_1 + b\mathbf{D}J_3\,. \tag{33}$$

Sostituendo la (33) in (29) si ottiene che a e b devono essere tali che:

$$
(34) \qquad \begin{cases} (af_1 - 2bJ_3)(v_2^2 D_2 f_1 - v_3^2 D_3 f_1) = 0 \\ (af_1 - 2bJ_3)(v_3^2 D_3 f_1 - v_1^2 D_1 f_1) = 0 \\ (af_1 - 2bJ_3)(v_1^2 D_1 f_1 - v_2^2 D_2 f_1) = 0 \end{cases}
$$

avendo per ora escluso la possibilità che $\mathbf{D}f_1$ sia parallelo a $\mathbf{D}J_3$ il che equivale a dire che f_1 non è funzione di J_3, si ha necessariamente: $af_1 = 2bJ_3$; sostituendo in (33) otteniamo:

$$
D_r f_0 \propto \frac{D_r f_1}{f_1} + \frac{1}{2}\,\frac{D_r J_3}{J_3}\,.
$$

Indicando con $D = \det F$; $D^2 = J_3$, l'espressione di sopra comporta:

$$
(35) \qquad f_0 \equiv H(Df_1)
$$

dove H è una funzione arbitraria del prodotto della funzione risposta f_1 per il determinante Jacobiano D.

Esaminiamo adesso il caso che f_1 sia funzione di J_3; in queste condizioni la (29) fornisce o che anche f_0 è una funzione di J_3 (ma questa eventualità è contenuta nella (36)) oppure [4]:

$$
(36) \qquad f_1 = \frac{\mu}{D}
$$

con f_0 arbitraria e μ una costante.

In queste condizioni, tenendo presente (22) e (25) si determina subito la rimanente velocità:

$$
(37) \qquad \varrho U_I^2 = 2\sum_{r=1}^{3} n_r^2 v_r^2 (f_1 + D_r f_0 + v_r^2 D_r f_1)
$$

che per $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1$ si riduce all'onda principale longitudinale determinata da TRUESDELL (con $f_2 = 0$).

Riepilogando si può affermare che esiste il teorema:

TEOREMA I. – « *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un'onda di discontinuità doppia e pertanto eccezionale* (*onda che nel caso di onde principali è trasversale*) *quale che sia la deformazione del continuo e quale che sia la normale alla superficie*

([4]) Questa eventualità rientra come caso particolare ($\nu = 0$) di un materiale del tipo « Hadamard » (vedi [14]): $f_0 \equiv f_0(J_1, J_2, J_3)$; $f_1 = (-\nu J_1 + \mu)/D$; $f_2 = \nu/D$.

d'onda è che siano verificate le seguenti condizioni: $f_2 = 0$ *e inoltre*: *o* $f_0 \equiv H(Df_1)$ *oppure* $Df_1 = \mu$. *Le velocità di propagazione sono allora*:

$$\varrho U_I^2 = 2\sum_{r=1}^{3} n_r^2 v_r^2 (f_1 + D_r f_0 + v_r^2 D_r f_1)$$

$$\varrho U_{II}^2 = f_1 \, \boldsymbol{B} n \cdot n \qquad (\textit{onda doppia eccezionale})\,.»$$

Notiamo che la matrice $\boldsymbol{G}$, in corrispondenza ai casi (35) e (36) assume rispettivamente la forma:

$$G_{pr} = (K + v_p^2) n_p n_r (f_1 + 2v_r^2 D_r f_1) \qquad (K = H' D) \tag{38}$$

$$G_{pr} = 2v_r^2 n_p n_r D_r f_0\,.$$

Osserviamo che da (20) le velocità di propagazione possono anche scriversi:

$$\varrho U_I^2 = 2\sum_{r=1}^{3} n_r^2 v_r^2 \frac{\partial t_r}{\partial v_r^2} = 2\sum_{r=1}^{3} n_r^2 \frac{\partial t_r}{\partial \ln v_r^2} \tag{39}$$

$$\varrho U_{II}^2 \Big/ \sum_{r=1}^{3} n_r^2 v_r^2 = \frac{t_1 - t_2}{v_1^2 - v_2^2} = \frac{t_1 - t_3}{v_1^2 - v_3^2} = \frac{t_2 - t_3}{v_2^2 - v_3^2} = f_1 \tag{40}$$

che estendono, nel caso $f_2 = 0$, le formule di Ericksen.

5. – Legge di evoluzione.

Proviamo innanzitutto il seguente teorema:

TEOREMA II. – « *L'onda doppia è un'onda parallela* ».

Ricordiamo che un'onda si dice parallela se la velocità radiale $\boldsymbol{\Lambda}$ (vettore velocità tangente alle linee caratteristiche) ha la medesima direzione di $\boldsymbol{N}$. Essendo:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \lambda \boldsymbol{N} + \frac{\partial \lambda}{\partial \boldsymbol{N}} - \left(\boldsymbol{N} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \boldsymbol{N}}\right)\boldsymbol{N}; \qquad \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{N} = \lambda$$

è condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'onda sia parallela, che la velocità normale di propaagzione λ non dipenda da $\boldsymbol{N}$.

Siccome interessa la velocità normale di propagazione è conveniente, anche per il seguito, ricavare questa espressione.

Dal legame che intercorre fra $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{n}$ e poi fra λ ed U si ottiene subito:

$$\lambda^2 \sum_{r=1}^{3} n_r^2 v_r^2 = U^2; \qquad N_r^2 = n_r^2 v_r^2 \frac{\lambda^2}{U^2}$$

e pertanto si ricavano le seguenti velocità normali di propagazione:

$$\varrho_* \lambda_{II}^2 = \sqrt{J_3} f_1 , \tag{41}$$

$$\varrho_* \lambda_I^2 = 2\sqrt{J_3} \sum_{r=1}^{3} N_r^2 (f_1 + D_r f_0 + v_r^2 D_r f_1) = 2\sqrt{J_3} \sum_{r=1}^{3} N_r^2 \frac{\partial t_r}{\partial v_r^2} . \tag{42}$$

Dall'espressione (41) resta provato il teorema II.

Inoltre in questo caso il determinante Jacobiano θ^2 che interviene nella legge di evoluzione delle discontinuità (6), assume l'espressione significativa [6]:

$$\theta^2 = \lambda K_0 t^2 - 2\lambda \Omega_0 t + 1 \tag{43}$$

dove K_0 ed Ω_0 sono rispettivamente le curvature totale e media della superficie d'onda all'istante iniziale. Nel caso di un'onda sferica la (43) si riduce ad $\theta = r/r_0$, mentre per un'onda cilindrica si ha $\theta^2 = r/r_0$.

Proviamo adesso, in accordo con il teorema di G. Boillat (menzionato nell'introduzione) che l'onda doppia è eccezionale.

Siccome nel caso in esame le λ sono funzioni delle v_r^2 la condizione di eccezionalità consiste nel provare che

$$\delta\lambda = \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial \lambda}{\partial v_r^2} \delta v_r^2 = 0$$

occorre pertanto ricavare le discontinuità delle derivate degli autovalori di $\boldsymbol{B}$.

Indichiamo con $\boldsymbol{\alpha}$ la matrice di elementi $\|s_{i,k}\|$: $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{\mathscr{I}}$ siccome $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$ si ottiene:

$$\delta \boldsymbol{B} = \delta \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{F}^T$$

ma

$$\delta \boldsymbol{F} = \delta\boldsymbol{\alpha} \propto \boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{N} \propto \boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{n}$$

da cui:

$$\delta \boldsymbol{B} \propto \boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{B}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{\pi} . \tag{44}$$

D'altra parte

$$\boldsymbol{B} = \sum_{r=1}^{3} v_r^2 \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r$$

segue:

$$\delta \boldsymbol{B} = \sum_{r=1}^{3} \delta v_r^2 \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r + \sum_{r=1}^{3} v_r^2 \boldsymbol{e}_r \otimes \delta \boldsymbol{e}_r + \sum_{r=1}^{3} v_r^2 \delta \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r$$

ed essendo $\boldsymbol{e}_i \cdot \delta \boldsymbol{e}_i = 0$, si ottiene subito:

$$\boldsymbol{e}_k \cdot \delta \boldsymbol{B} \boldsymbol{e}_k = \delta v_k^2 . \tag{45}$$

Dal confronto di (44) e (45) si ha in definitiva:

$$\delta v_k^2 \propto 2\pi_k n_k v_k^2 . \tag{46}$$

Nel caso dell'autovalore U_{II} segue da (23) e (38, 1) che l'autovettore $\boldsymbol{\pi}$ corrispondente è tale che:

$$\sum_{r=1}^{3} \pi_r n_r (f_1 + 2v_r^2 D_r f_1) = 0 \tag{47}$$

Da (47) si vede che l'onda doppia in generale non è trasversale e lo diventa solo per l'onda principale oppure (per $\boldsymbol{n}$ generico) solo se f_1 e quindi f_0 sono funzioni solo di D. Quest'ultimo rientra come caso particolare di un materiale tipo « Green » (vedi [14]): $f_0 \equiv f_0(D)$; $f_1 \equiv f_1(D)$; $f_2 \equiv f_2(D)$.

Derivando rispetto a v_j^2 l'espressione (41) si ha:

$$\frac{2\varrho_* \lambda_{II}}{D} \frac{\partial \lambda_{II}}{\partial v_j^2} = D_j f_1 + \frac{f_1}{2v_j^2}$$

e pertanto tenendo conto di (47) si ottiene:

$$\frac{2\varrho_* \lambda_{II}}{D} \delta\lambda_{II} = \sum_{r=1}^{3} \pi_r n_r (f_1 + 2v_r^2 D_r f_1) \equiv 0$$

in accordo con quanto detto nell'introduzione ([5]). Ne segue che la legge di evoluzione è $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_*/\theta$ con θ dato da (43).

Ovviamente nel caso di un'onda piana ($K_0 = \Omega_0 = 0$) $\theta = 1$ e si ottiene $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_*$ generalizzando così (nei limiti dei vincoli imposti) il risultato di GREEN [5].

Riassumendo si ha:

TEOREMA III. – « *L'onda doppia parallela è eccezionale ed evolve con legge* $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_*/\theta$ ».

L'onda di molteplicità 1 non essendo eccezionale produrrà in generale un'onda d'urto. Nel caso di onde piane da (7) si ottiene il tempo critico:

$$t_{\text{crit.}} = -\frac{1}{\sum_{r=1}^{3} \left(\dfrac{\partial \lambda_I}{\partial v_r^2}\right)_0 (\delta v_r^2)_*} \tag{48}$$

dove $(\delta v_r^2)_* \propto 2\pi_r^* n_r v_r^2$ è la discontinuità iniziale delle derivate degli autovalori di $\boldsymbol{B}$.

([5]) Si noti che se invece del verificarsi il caso (35), si verificasse la condizione (36), da (41) si avrebbe:

$$\varrho\lambda_{II}^2 = \mu$$

e pertanto essendo la velocità costante la condizione di eccezionalità è automaticamente soddisfatta.

Nel caso di U_I si ha da (23) e (38, 1) che l'autovettore corrispondente $\pi_r \propto (k + v_r^2) n_r$.

Si nota che l'onda non è longitudinale a meno che non sia un'onda principale [6].

Da (42) otteniamo:

$$\frac{\partial \lambda_I}{\partial v_j^2} = \frac{D}{\varrho_* \lambda_I} \Big\{ D_j f_1 (N_j^2 + 1) + \frac{f_1}{2v_j^2} + \frac{1}{2v_j^2} \sum_{k=1}^{3} N_k^2 (D_k f_0 + v_k^2 D_k f_1) + \\ + \sum_{k=1}^{3} N_k^2 (D_k D_j f_0 + v_k^2 D_k D_j f_1) \Big\}$$

e pertanto si hanno tutti gli elementi per calcolare il tempo critico.

Riepilogando si ha:

TEOREMA IV. – « *L'onda di velocità λ_I evolve con legge del tipo $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_* / (\theta \Phi)$ e in generale genera un'onda d'urto dopo il tempo critico dato dalla* (48) ».

6. – Corpo soggetto a pressione idrostatica.

Supponiamo adesso che il corpo sia soggetto a pressione idrostatica, ovvero che $\boldsymbol{t} = -p\mathscr{I}$ e che $v_i^2 = v^2$, $\forall i = 1, 2, 3$. Le onde in questo caso sono tutte principali e si ha: $J_1 = 3v^2$, $J_2 = 3v^4$, $J_3 = v^6$, segue:

$$d_1 + 2v^2 d_2 + v^4 d_3 = \frac{1}{3} \frac{d}{dv^2}$$

dove $\mathbf{d}$ è l'operatore gradiente: $\mathbf{d} \equiv (\partial/\partial J_1, \partial/\partial J_2, \partial/\partial J_3)$.

La velocità longitudinale che adesso indichiamo con $U_\parallel$ e quella trasversale $U_\perp$ assumono la forma:

$$U_\parallel^2 = \frac{4}{3} \frac{v^5}{\varrho_*} f_1 + \frac{dp}{d\varrho},$$

$$U_\perp^2 = \frac{v^5}{\varrho_*} f_1 .$$

Le velocità, ovviamente sono un caso particolare di quelle determinate da Truesdell ($f_2 \neq 0$), ma la relazione universale rimane la medesima:

$$U_\parallel^2 = \frac{4}{3} U_\perp^2 + \frac{dp}{d\varrho} .$$

---

[6] Nel caso (36) si ha invece $\boldsymbol{\pi} \propto \boldsymbol{n}$ e l'onda è sempre longitudinale.

7. – Stabilità del continuo e realità delle velocità di propagazione.

Per quanto riguarda la stabilità, nel senso di uno stato stabile è ben noto che essa è legata alla realità delle velocità di propagazione, come anche di recente è stato fatto notare (per i materiali iperelastici) da G. FICHERA [15] e da C. CATTANEO [16] che hanno dato nuove dimostrazioni del Teorema di Hadamard.

Data la forma generale che si è trovato per le velocità di propagazione siamo in grado di fare vedere che, il criterio per riconoscere se le velocità sono reali dato da TRUESDELL nel caso di onde principali, rimane valido (nei limiti dei vincoli richiesti) anche per un'onda qualsiasi. Infatti dalle espressioni (39) e (40) segue il teorema:

TEOREMA V. – « *In un materiale elastico isotropo il quadrato della velocità di propagazione dell'onda di molteplicità* 1 *è positivo se e solo se ciascuna tensione principale è una funzione crescente dei corrispondenti autovalori della deformazione. Il quadrato della velocità di propagazione dell'onda doppia eccezionale è positivo se e solo se la più grande principale tensione avviene sempre nella direzione del più grande autovalore di deformazione* ».

8. – Materiale iperelastico.

Nel caso che il continuo sia iperelastico è ben noto che le funzioni risposta f_0, f_1 e f_2 si possono esprimere mediante le derivate della funzione potenziale termodinamico $W(I_1, I_2, D)$ (7):

$$f_0 = W_D; \qquad f_1 = \frac{1}{D}\left(W_{I_1} + W_{I_2} + \frac{J_1}{2} W_{I_2}\right); \qquad f_2 = -\frac{1}{2D} W_{I_2},$$

dove W_{I_1}, W_{I_2} e W_D sono le derivate parziali di W rispetto a I_1, I_2 e D.

Vediamo adesso come si traducono i vincoli del Teorema I in questo caso.

Si vede subito che dovendo essere $f_2 = 0$ dovrà risultare che W non deve dipendere dal secondo invariante I_2.

La condizione (35) si traduce:

$$W_D \equiv G(W_{I_1}) \tag{49}$$

mentre la condizione alternativa (36) diventa semplicemente:

$$W_{I_1} = \mu . \tag{50}$$

---

(7) I_1 e I_2 sono gli invarianti primo e secondo del tensore di deformazione di Cauchy.

Notiamo subito che entrambe le condizioni portano necessariamente al vincolo che il determinante Hessiano di W pensato come funzione di I_1 e di D deve essere identicamente nullo:

$$W_{I_1 I_1} W_{DD} - (W_{I_1 D})^2 = 0 . \tag{51}$$

La (51) ci dice che le superficie $W = W(I_1, D)$ nello spazio rappresentativo I_1, D, W sono tutte e sole quelle sviluppabili ovvero sono coni o rette tangenti a curve sghembe.

La soluzione di (50) è:

$$W = \mu I_1 + H(D) \tag{52}$$

e ci fornisce il potenziale di TOLOTTI [17].

La (49) si può integrare nella maniera seguente:

posto $W_{I_1} = \omega$, segue $W_D = G(\omega)$ e quindi:

$$W = \omega I_1 + G(\omega) D + L(\omega) \tag{53}$$

con ω definita implicitamente da

$$I_1 + G'(\omega) D + L'(\omega) = 0 \tag{54}$$

dove l'apice indica in questo caso la derivata rispetto ad ω.

Assegnate ad arbitrio le funzioni $G(\omega)$ ed $L(\omega)$ da (54) si ricava $\omega \equiv \omega(I_1, D)$ che sostituita in (53) fornisce il potenziale.

Riepilogando si può affermare che esiste il teorema:

TEOREMA VI. – « *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista per un materiale iperelastico un'onda doppia (e quindi eccezionale) per ogni possibile deformazione e per ogni possibile normale alla superficie d'onda e che il potenziale termodinamico non dipenda dal secondo invariante della deformazione e W pensato come funzione di I_1 e D abbia determinante Hessiano identicamente nullo*; *ovvero sia o della forma determinata da Tolotti oppure della forma* (53) *con ω fornita da* (54) ».

Il risultato trovato generalizza al caso tridimensionale un precedente lavoro [13]. In quest'ultimo, limitandosi al caso unidimensionale, si sono trovate classi di potenziali termodinamici ancora più ampie di (53) in quanto si è richiesto l'esistenza di un'onda eccezionale senza che fosse necessariamente doppia.

Tenendo presente le espressioni di f_0 e f_1 si ha da (20):

$$t_r = \frac{2}{D} v_r^2 D_r W . \tag{55}$$

Indicando con Δ_i gli allungamenti principali: $\Delta_i = v_i - 1$; $-1 < \Delta_i < \infty$, si ottiene:

$$\frac{\partial t_r}{\partial v_r^2} = \frac{1}{2D}\frac{\partial^2 W}{\partial \Delta_r^2}$$

ne segue che le velocità locali di propagazione assumono la forma:

$$\varrho U_I^2 = \sum_{r=1}^{3} n_r^2 v_r^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \Delta_r^2} \tag{56}$$

$$\varrho U_{II}^2 = W_{I_1} \boldsymbol{B} n \cdot n \tag{57}$$

mentre le corrispondenti velocità normali di propagazione valgono:

$$\begin{cases} \varrho_* \lambda_I^2 = \displaystyle\sum_{r=1}^{3} N_r^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \Delta_r^2}, \\ \varrho_* \lambda_{II}^2 = W_{I_1}. \end{cases} \tag{58}$$

Derivando la (54), una volta rispetto ad I_1 e poi rispetto a D, si ha:

$$\omega_{I_1} = -\frac{1}{G''D + L''}; \qquad \omega_D = -\frac{G'}{G''D + L''}. \tag{59}$$

La prima delle (58) può scriversi esplicitamente:

$$\varrho_* \lambda_I^2 = \sum_{r=1}^{3} N_r^2 \left\{ W_{I_1} + 2DW_{I_1D} + v_r^2 W_{I_1I_1} + \frac{D^2}{v_r^2} W_{DD} \right\}$$

e tenendo conto di (59) si ottiene:

$$\begin{cases} \varrho_* \lambda_I^2 = \varrho_* \lambda_{II}^2 - \displaystyle\sum_{r=1}^{3} N_r^2 v_r^2 \frac{(DG' + v_r^2)^2}{G''D + L''}, \\ \varrho_* \lambda_{II}^2 = \omega. \end{cases} \tag{60}$$

Da (60) segue:

TEOREMA VII. – « *Condizione sufficiente affinchè le velocità di propagazione siano reali, per un materiale iperelastico avente un potenziale della classe* (53), *e che sia* $\omega > 0$, $G''D + L'' < 0$ ».

9. – Condizione di accettabilità matematica per i potenziali.

È ben noto che affinchè una funzione W sia un effettivo potenziale termodinamico deve soddisfare le seguenti condizioni [18]:

a) per ogni spostamento non rigido a partire dalla configurazione di riferimento risulti che $W > 0$;

b) in una trazione uniforme (compressione) il coefficiente lineare di dilatazione è positivo (negativo);

c) in una estensione semplice di un cilindro lo sforzo su una sezione trasversale è una funzione crescente dell'allungamento per unità di lunghezza;

d) nel problema menzionato in *c*) l'allungamento longitudinale cresce più rapidamente della corrispondente tensione;

e) W tende ad infinito se e solo se una delle v_i^2 tende a zero oppure tende ad infinito.

Esiste a questo proposito il seguente Teorema dovuto a G. GRIOLI [18]:

«*Una condizione sufficiente affinchè le richieste a*), *b*), *c*) *siano soddisfatte in una regione tridimensionale* V' *contenuta in* V *e contenente* $\boldsymbol{O}$ *è che per ogni punto di* V' *la forma quadratica*

$$A = \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial^2 W}{\partial \Delta_i\, \partial \Delta_k} \xi_i \xi_k$$

sia definita positiva».

Dove $\boldsymbol{O}$ è un punto dello spazio rappresentativo Δ_1, Δ_2, Δ_3 di coordinate $(0, 0, 0)$ (stato naturale), e V è la regione tridimensionale dello spazio rappresentativo definito dalle limitazioni: $-1 < \Delta_i < \infty$ $(i = 1, 2, 3)$.

È interessante notare che se il teorema sopra menzionato è soddisfatto la velocità data dalla prima delle (58) è reale in V' senza che lo sia necessariamente la velocità dell'onda doppia.

10. – Un esempio di un possibile potenziale termodinamico.

Costruiamo adesso come esempio un potenziale appartenente alla classe (53).

Richiediamo che nello stato naturale: $I_1 = 0$, $D = 1$, $\Delta_i = 0$, $v_i^2 = 1$, siano verificate le seguenti condizioni:

(61) $$\left(\frac{\partial W}{\partial \Delta_i}\right)_0 = \omega^0 + G^0 = 0\,,$$

(62) $$W^0 = G^0 + L^0 = 0\,,$$

(63) $$(\varrho_* \lambda_I^2)^0 = \omega^0 - \frac{(1 + G'^0)^2}{G''^0 + L''^0} = \gamma + 2\mu\,,$$

(64) $$(\varrho^* \lambda_{II}^2)^0 = \omega^0 = \mu\,.$$

Avendo indicato con ^{0} lo stato naturale e con γ e μ le classiche costanti di Lamè: $\mu > 0$; $3\gamma + 2\mu > 0$.

A titolo di esempio prendiamo le seguenti funzioni $G(\omega)$ ed $L(\omega)$:

$$L = m = \text{costante}\,; \qquad G = -\tfrac{1}{2}a\omega^2 + c\omega + d$$

dove a, c, m e d sono costanti da determinarsi tramite le condizioni (61)-(64).

Da (54) si ottiene subito:

$$\omega = \frac{1}{a}\left(\frac{I_1}{D} + c\right)$$

e allora da (61)-(64) si ha:

$$a = 1/(\gamma + \mu)\,; \qquad c = \mu/(\gamma + \mu)\,; \qquad m = \mu\,; \qquad d = -\frac{a}{2}\mu^2 - \mu$$

ne segue il potenziale:

$$W = \frac{\gamma + \mu}{2}\frac{I_I^2}{D} + \mu I_1 - \mu(D - 1)$$

che ammette le velocità di propagazione:

$$\varrho_* \lambda_{II}^2 = (\gamma + \mu)\frac{I_1}{D} + \mu\,, \qquad \text{(onda doppia eccezionale)}$$

$$\varrho_* \lambda_I^2 = \mu + (\gamma + \mu)\left\{\frac{I_1}{D} + \sum_{r=1}^{3} N_r^2 v_r^2 (v_r^2 - I_1)^2\right\}.$$

Ringraziamenti. – Desidero ringraziare il Prof. C. Truesdell per le sue preziose osservazioni ed indicazioni bibliografiche.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. TRUESDELL - R. A. TOUPIN, *The classical field theories*, in Handbuch der Physik, vol. **3/1**, Berlin - Heidelberg - New York, Springer-Verlag (1960).

[2] P. J. CHEN, *Growth and decay of waves in solids*, in *Mechanics of solids III*, Handbuch der Physik, vol. **6**a/**3**, pp. 303-402, Berlin - Heidelberg - New York, Springer-Verlag (1973).

C. TRUESDELL - W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, in Handbuch der Physik, vol. **3/3**, Berlin - Heidelberg - New York, Springer-Verlag (1966).

[3] T. MANACORDA, *Contributi italiani allo studio della propagazione ondosa nei mezzi elastici*, in «Elasticità finita», Quaderni del C.N.R., Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica, pp. 1-13, Pisa (1974).

[4] C. TRUESDELL, *General and exact theory of waves in finite elastic strain*, Arch. Rational Mech. Anal., **8** (1961), pp. 263-296.

[5] W. A. GREEN, *The growth of plane discontinuities propagating into a homogeneous deformed elastic material*, Arch. Rational Mech. Anal., **16** (1964), pp. 79-88.

[6] G. BOILLAT, *La propagation des ondes*, Gauthier-Villars (1965).

[7] P. D. LAX, *Contribution to the theory of partial differential equations*, Princeton University Press (1954).

[8] A. JEFFREY, *The development of jump discontinuities in non-linear systems of equations in two independent variables*, Arch. Rational Mech. Anal., **14** (1963), pp. 27-37.
A. JEFFREY - T. TANIUTI, *Non-linear wave propagation*, Academic Press, New York (1964).

[9] G. BOILLAT, *Covariant disturbances and exceptional waves*, J. Math. Phys., **14** (1973), pp. 973-976.

[10] G. BOILLAT, *Chocs caractèristiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, **274** A (1972), pp. 1081-1121.

[11] G. BOILLAT, *Lagrangians non-linear electrodynamics and equations of motion*, J. Math. Phys., **11** (1970), pp. 941-950.

[12] T. RUGGERI, *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche di discontinuità in mezzi non lineari*, Rend. Ist. Lombardo cl. Sc. Mat. Nat., **107** A (1973), pp. 283-297.

[13] G. BOILLAT - T. RUGGERI, *Su alcune classi di potenziali termodinamici come conseguenza dell'esistenza di particolari onde di discontinuità nella meccanica dei continui con deformazioni finite*, Rend. Sem. Mat. Padova, **51** (1974), pp. 293-304.

[14] P. CURRIE - M. HAYES, *Longitudinal and transverse waves in finite elastic strain. Hadamard and Green materials*, J. Inst. Maths. Applics, **5** (1969), pp. 140-161.

[15] G. FICHERA, *Sulle propagazioni di onde in un mezzo elastico*, volume dedicato a N. I. Muskhelishvili (1971).

[16] C. CATTANEO, *Waves and stability*, Journal of elasticity, **2** (1972), pp. 91-99.

[17] C. TOLOTTI, *Deformazioni elastiche finite: onde ordinarie di discontinuità e casi tipici di solidi elastici isotropi*, Rend. Mat. Appl., (5), **4** (1943), pp. 34-59.

[18] G. GRIOLI, *On the thermodynamic potential for continuums with reversible transformation, some possible types*, Meccanica, **1** (1966), pp. 15-20.