Terzo problema al contorno per una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui (*) (**).

MAURIZIO CHICCO (Genova)

Summary. – *The solvability of the boundary value problem $Lu = f$ a.e. in Ω, $u \in H^2(\Omega)$, $\partial u/\partial\beta + \mu u = 0$ on $\partial\Omega$ is studied, where L is a linear second order elliptic partial differential operator in non-divergence form with discontinuous coefficients, and β is a vector field which forms with the normal axe to $\partial\Omega$ an angle smaller than $\pi/2$.*

1. – Introduzione.

Il presente lavoro è un'estensione di [6] e [7]. In [7] si studiava la risolubilità del problema al contorno

$$(1)\qquad \begin{cases} Lu = f & \text{q.o. in } \Omega\,, \\ u \in H^2(\Omega)\,, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial \beta} + \mu u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

ove l'operatore ellittico

$$(2)\qquad L = -\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

era supposto dotato di coefficienti a_{ij} continui in $\bar{\Omega}$ (essendo Ω un aperto limitato di R^m).

In [6] invece si considerava il problema di Dirichlet $Lu = f$ q.o. in Ω, $u \in H^2(\Omega)$, $u = \varphi$ su $\partial\Omega$, supponendo i coefficienti a_{ij} dell'operatore L soddisfacenti l'ipotesi (3) (vedi il successivo paragrafo 2). Tale ipotesi è certamente soddisfatta se i coefficienti a_{ij} sono funzioni continue in $\bar{\Omega}$, ma lo è pure in altri casi, ad esempio se $a_{ij} \in H^{1,m}(\Omega)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ oppure se i coefficienti a_{ij} soddisfano ad un'ipotesi « di Cordes » (vedi ad esempio [9], [19]).

Nel presente lavoro si considera il problema al contorno (1) supponendo che i coefficienti a_{ij} di L soddisfino all'ipotesi (3) e siano inoltre continui sulla frontiera

(*) Entrata in Redazione il 6 febbraio 1976.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del « Centro di Studio per la Matematica e la Fisica Teorica » del C.N.R., Genova.

di Ω. Come caso particolare in cui risulti inoltre $a_{ij} \in H^{1,m}(\Omega)$ $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ si ottiene l'appartenenza ad $L_{qm/(m-q)}(\Omega)$ (per $q < m$) delle derivate prime della soluzione di (1), generalizzando così un risultato di C. MIRANDA [15] (vedi paragrafo 7).

2. – Notazioni e ipotesi.

Nel seguito si sottointenderanno le ipotesi qui elencate. Sia Ω un sottoinsieme aperto e limitato di R^m, dotato di frontiera $\partial\Omega$ rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^2. Ci limitiamo a considerare per semplicità soltanto il caso $m \geqslant 3$ perchè per $m = 2$ i risultati sono noti: si veda ad esempio [18].

Sia $p \geqslant 1$; siano $H^{1,p}(\Omega)$, $H^{2,p}(\Omega)$ gli spazi ottenuti completando $C^2(\bar{\Omega})$ secondo le norme

$$\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m} \|u_{x_i}\|_{L_p(\Omega)} ;$$

$$\|u\|_{H^{2,p}(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{m} \|u_{x_i x_j}\|_{L_p(\Omega)} .$$

Scriveremo per brevità $H^1(\Omega)$ in luogo di $H^{1,2}(\Omega)$ e $H^2(\Omega)$ in luogo di $H^{2,2}(\Omega)$. Sia $N = (N_1, N_2, \dots, N_m)$ il versore della normale esterna a $\partial\Omega$; siano β_i $(i = 1, 2, \dots, m)$, μ funzioni di classe $C^1(R^m)$ tali che

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i^2 = 1 \quad \text{su } \partial\Omega , \qquad \sum_{i=1}^{m} \beta_i N_i > 0 \quad \text{su } \partial\Omega .$$

Sia V il sottospazio lineare di $H^2(\Omega)$ così definito:

$$V = \text{completamento in } H^2(\Omega) \text{ di } \{v \in C^2(\bar{\Omega}) \colon \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_{x_i} + \mu v = 0 \text{ su } \partial\Omega\} .$$

Sia poi $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \dots, m)$,

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} t_i t_j \geqslant \nu_0 |t|^2$$

q.o. in Ω e per ogni $t \in R^m$, con ν_0 costante positiva, $b_i \in L_m(\Omega)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, $c \in L_q(\Omega)$ con $q = 2$ se $m = 3$, $q > 2$ se $m = 4$, $q = m/2$ se $m \geqslant 5$. Sia L l'operatore definito dalla (2), sia L_0 l'operatore L ove si ponga $c = 0$:

$$L_0 = -\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Se ν è un numero positivo, indichiamo con $A(\nu)$ la classe di matrici quadrate $m \times m$

così definite:

$$A(\nu) = \{((\alpha_{ij})) : \alpha_{ij} \in H^{1,m}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega),\ \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \text{ per } i, j = 1, 2, \ldots, m,$$
$$\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} t_i t_j \geqslant \nu |t|^2 \text{ q.o. in } \Omega \text{ e } \forall t \in R^m\} .$$

Sia G la classe delle funzioni appartenenti ad $L_\infty(\Omega)$ ed essenzialmente positive:

$$G = \{g \in L_\infty(\Omega) : \operatorname{ess}_\Omega \inf g > 0\} .$$

Si dirà infine che i coefficienti a_{ij} di L soddisfano all'ipotesi (3) se

$$\inf_{\nu>0} \nu^{-2} \left\{ \inf_{g\in G} \inf_{((\alpha_{ij}))\in A(\nu)} \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{m} (\alpha_{ij} - g a_{ji})^2 \right\} < 1 . \tag{3}$$

3. – Osservazioni sull'ipotesi (3).

Seguendo un'osservazione di GIAQUINTA (vedi [12]) l'ipotesi (3) si può esprimere in modo equivalente come segue.

PROPOSIZIONE 1. – *I coefficienti a_{ij} dell'operatore L soddisfano alla condizione* (3) *se e solo se esistono una costante $\nu > 0$ e una matrice $((\alpha_{ij})) \in A(\nu)$ tali che risulti*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{m} (\alpha_{ij} - \gamma a_{ij})^2 < \nu^2 \tag{3'}$$

essendo

$$\gamma(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij}(x) a_{ij}(x) \left[\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^2(x) \right]^{-1} .$$

DIMOSTRAZIONE. – (3) $\Rightarrow$ (3'). Per ipotesi esistono $\nu > 0$, $((\alpha_{ij})) \in A(\nu)$, $g \in G$ tali che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{m} (\alpha_{ij} - g a_{ij})^2 < \nu^2 . \tag{4}$$

Per ogni fissato $x \in \Omega$, la funzione

$$t \to f(t) = \sum_{i,j=1}^{m} (\alpha_{ij} - t a_{ij})^2$$

ammette minimo assoluto per $t = \gamma$, quindi dalla (4) segue la (3'). Dimostriamo che

$(3') \Rightarrow (3)$. Per note proprietà delle forme quadratiche, la funzione

$$x \to \gamma(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij}(x) a_{ij}(x) \left[\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^2(x) \right]^{-1}$$

appartiene a G, quindi dalla $(3')$ segue la (3).

Osserviamo ancora che la proprietà (3) ha carattere locale.

PROPOSIZIONE 2. – *Supponiamo che per ogni punto $x \in \bar{\Omega}$ esista un intorno aperto $U(x)$ tale che, scelti opportunamente $\nu > 0$, $g \in G$, $((\alpha_{ij})) \in A(\nu)$, risulti*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega \cap U(x)} \sum_{i,j=1}^{m} (\alpha_{ij} - g a_{ij})^2 < \nu^2 .$$

Allora i coefficienti a_{ij} soddisfano la condizione (3).

Omettiamo per brevità la dimostrazione, la quale si può agevolmente ottenere per partizione dell'unità.

4. – Un risultato relativo al problema di Dirichlet.

Vogliamo in questo paragrafo provare la proposizione seguente che estende e completa il teorema 1 di [6].

TEOREMA 3. – *Oltre alle ipotesi indicate nel paragrafo 2, supponiamo che L soddisfi alla condizione* (3). *Allora esistono due costanti positive λ_0 e K_1, dipendenti dai coefficienti di L, da m e da Ω, tali che risulti*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_1 \|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)}$$

uniformemente per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e per ogni $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Prima di provare il teorema, premettiamo un Lemma.

LEMMA 4. – *Nelle ipotesi del teorema precedente, esiste una costante λ_0 dipendente dai coefficienti di L, da m e da Ω, tali che per ogni $\lambda \geqslant \lambda_0$ e per ogni $f \in L_2(\Omega)$ il problema al contorno*

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f \quad \text{q.o. in } \Omega, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione; inoltre se $f \leqslant 0$ q.o. in Ω risulta $u \leqslant 0$ q.o. in Ω.

DIMOSTRAZIONE. – Basta estendere opportunamente i risultati di [6] come segue.

i) Esistono $g \in G$, $\lambda^* > 0$ tali che il problema al contorno

$$\begin{cases} gLu + \lambda u = f & \text{q.o. in} \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione u per ogni $f \in L_2(\Omega)$ e per ogni $\lambda \geqslant \lambda^*$. Inoltre se $f \leqslant 0$ q.o. in Ω ne segue $u \leqslant 0$ q.o. in Ω.

La prima affermazione è contenuta nel lemma 3 di [6]. La seconda si prova osservando che, per lo stesso lemma 3 di [6], risulta

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_2 \|L^{(k)}u + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} \qquad (k = 1,2, \ldots) \tag{5}$$

per ogni $\lambda \geqslant \lambda^*$ e per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, ove $L^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sono operatori, a coefficienti regolari, approssimanti gL, e K_2 è una costante indipendente da k. Per la regolarità dei coefficienti di $L^{(k)}$, tale operatore si può scrivere anche in forma variazionale e si possono applicare ad esso i risultati di [4]. Allora per la (5) se ne deduce che se $L^{(k)}u + \lambda u \leqslant 0$ q.o. in Ω (con $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $\lambda \geqslant \lambda^*$) ne segue $u \leqslant 0$ q.o. in Ω. Pertanto sussiste la conclusione i) (che è la stessa del lemma 3 di [6]).

ii) Sia $g \in G$ scelta in modo che valga la affermazione i). Allora tra tutti gli autovalori dell'operatore $-gL$ ce ne è uno, sia λ_1, di massima parte reale.

Inoltre λ_1 è reale ed è l'estremo inferiore dei numeri reali λ tali che: $(gL + \lambda I)u \leqslant 0$ q.o. in Ω, $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, implica $u \leqslant 0$ q.o. in Ω. Questa proposizione si prova esattamente come il lemma 4 di [6], usando la proposizione i).

iii) Possiamo ora provare il lemma, seguendo la dimostrazione del teorema 1 di [6]. Definiti g e λ_1 come nelle proposizioni precedenti, sia $\lambda_0 > \lambda_1(\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} g)^{-1}$; facciamo vedere che se $f \in L_2(\Omega)$ e $\lambda \geqslant \lambda_0$ il problema al contorno

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{q.o. in } \Omega, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione. Osserviamo intanto che tale problema è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} gLu + g\lambda u = gf & \text{q.o. in } \Omega, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\,. \end{cases} \tag{6}$$

Fissato $\lambda \geqslant \lambda_0$, l'operatore $L + \lambda I$ soddisfa alle stesse ipotesi di L, quindi si può ad esso applicare la precedente proposizione ii). Pertanto esiste un autovalore $\lambda_1(\lambda)$ reale che ha massima parte reale tra tutti gli autovalori di $-g(L + \lambda I)$. Basterà allora provare che $\lambda_1(\lambda)<0$, perchè in tal caso 0 non è autovalore di $-g(L+\lambda I)$ e il problema (6) ha una ed una sola soluzione. Per provare che $\lambda_1(\lambda)<0$, si ragiona per assurdo come in [6]. Scelto $\hat{\lambda}$ in modo che $\lambda_1<\hat{\lambda}\leqslant\lambda_0 g\leqslant\lambda g$ q.o. in Ω (ciò è possibile per la definizione di λ_0), per noti teoremi (vedi [13]) esiste un'autofunzione $w_1\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, non negativa in Ω, di $-g(L+\lambda I)$:

$$gLw_1+g\lambda w_1+\lambda_1(\lambda)\,w_1=0 \qquad \text{q.o. in } \Omega.$$

Ne segue, per la scelta di $\hat{\lambda}$:

$$gLw_1+\hat{\lambda}w_1=-\lambda_1(\lambda)\,w_1+(\hat{\lambda}-g\lambda)\,w_1\leqslant 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega.$$

Essendo $\hat{\lambda}>\lambda_1$, per la proposizione ii) ne seguirebbe $w_1\leqslant 0$ q.o. in Ω, assurdo. Pertanto $\lambda_1(\lambda)<0$ e il problema (6) ammette una ed una sola soluzione per ogni $f\in L_2(\Omega)$ e per ogni $\lambda\geqslant\lambda_0$. Ciò completa la dimostrazione del lemma.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3. Dal lemma precedente segue subito, per ogni $\lambda\geqslant\lambda_0$, l'esistenza di una costante $K=K(\lambda)$, dipendente da λ oltre che da m, Ω e dai coefficienti di L, tale che

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}\leqslant K(\lambda)\,\|Lu+\lambda u\|_{L_2(\Omega)} \tag{7}$$

per ogni $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ e per ogni $\lambda\geqslant\lambda_0$. Il teorema sarà evidentemente provato non appena si dimostri che

$$\sup\{K(\lambda):\lambda\geqslant\lambda_0\}<+\infty\,. \tag{8}$$

A tale scopo si può intanto scrivere

$$\frac{\|u\|_{H^2(\Omega)}}{\|Lu+\lambda u\|_{L_2(\Omega)}}=\frac{\|u\|_{H^2(\Omega)}}{\|-\Delta u+\lambda u\|_{L_2(\Omega)}}\cdot\frac{\|-\Delta u+\lambda u\|_{L_2(\Omega)}}{\|Lu+\lambda u\|_{L_2(\Omega)}}\,. \tag{9}$$

Per noti teoremi (vedi ad esempio [14]) esiste una costante K_3 dipendente solo da m, Ω tale che

$$\|u\|_{H_2(\Omega)}\leqslant K_3\,\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)} \tag{10}$$

per ogni $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$; inoltre

$$\|-\Delta u+\lambda u\|_{L_2(\Omega)}^2=\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}^2+\lambda^2\|u\|_{L_2(\Omega)}^2-2\lambda\int_\Omega u\Delta u\,dx=$$

$$=\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}^2+\lambda^2\|u\|_{L_2(\Omega)}^2+2\lambda\|u_x\|_{L_2(\Omega)}^2\geqslant\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e per ogni $\lambda \geqslant 0$. Di qui e dalla (10) segue

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_3 \|-\Delta u + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} \tag{11}$$

per gli stessi valori di u e λ. Poniamo

$$f(\lambda, u) = \begin{cases} 0, \text{ se } u = 0\,; \\ \dfrac{\|-\Delta u + \lambda u\|_{L_2(\Omega)}}{\|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)}}, \qquad \text{se } u \neq 0\,. \end{cases} \tag{12}$$

A causa della (7) la funzione $f(\lambda, u)$ è ben definita per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e per ogni $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Fissato $u \neq 0$, $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, maggioriamo la funzione $f(\lambda, u)$ al variare di $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Si osservi intanto che

$$\begin{aligned} \frac{\|-\Delta u + \lambda u\|_{L_2(\Omega)}}{\|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)}} &\leqslant \frac{\lambda \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}}{\lambda \|u\|_{L_2(\Omega)} - \|Lu\|_{L_2(\Omega)}} \leqslant \\ &\leqslant \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)} + \|Lu\|_{L_2(\Omega)} + 1 \qquad \text{per ogni } \lambda \geqslant \lambda(u) = \frac{\|Lu\| \, \|Lu\|_{L_2(\Omega)} + 1}{\|u\|_{L_2(\Omega)}}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Quindi basta maggiorare $f(\lambda, u)$ al variare di λ trà λ_0 e $\lambda(u)$. Ma la funzione $\lambda \to f(\lambda, u)$ (con u fissato) è continua e quindi limitata nell'intervallo compatto $[\lambda_0, \lambda(u)]$.

Tenendo conto anche della (13), ciò prova che per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ esiste una costante positiva $K(u)$ tale che

$$f(\lambda, u) \leqslant K(u) \tag{14}$$

per ogni $\lambda \geqslant \lambda_0$. Allora dalle (9), (11), (14) si deduce che per ogni fissato $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, risulta

$$\sup \left\{ \frac{\|u\|_{H^2(\Omega)}}{\|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)}} : \lambda \geqslant \lambda_0 \right\} < +\infty\,. \tag{15}$$

Applicando il principio di uniforme limitatezza (vedi ad esempio [10] teorema 11 pag. 52) si ottiene l'esistenza di una costante K_4, indipendente da u e da λ, tale che

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_4 \|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)}$$

uniformemente per ogni $\lambda \geqslant \lambda_0$ e per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$: ciò prova il teorema.

5. – Risultati principali.

TEOREMA 5. – *Oltre alle ipotesi elencate nel paragrafo 2, supponiamo che i coefficienti a_{ij} soddisfino alla condizione* (3) *e che sia possibile definirli in un intorno di $\partial\Omega$*

(eventualmente modificandoli su un insieme di misura nulla) in modo che

$$a_{ij}(x_0) = \lim_{\Omega \ni x \to x_0} a_{ij}(x)\ , \ \forall x_0 \in \partial\Omega\ , \ \forall i, j = 1, 2, \dots, m\ . \tag{16}$$

Allora esiste una costante λ^*, dipendente dai coefficienti di L, da m e da Ω, tale che se $\lambda \geqslant \lambda^*$ il problema al contorno

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{q.o. in } \Omega, \\ u \in V \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione per ogni $f \in L_2(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. – Per la supposta regolarità di $\partial\Omega$, esiste un numero positivo d tale che se $x \in \Omega$, $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < d$, esiste uno ed uno solo punto $y = y(x)$ tale che $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(x, y(x))$.

Possiamo allora

$$\alpha_{ij}(x) = a_{ij}(y(x)) \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m) \tag{17}$$

per ogni $x \in \Omega$ con $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < d$. Le funzioni α_{ij} sono così univocamente determinate in un intorno di $\partial\Omega$ e sono ivi continue per la ipotesi (16). Inoltre, sempre per la (16), è

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0} [\alpha_{ij}(x) - a_{ij}(x)] = 0 \tag{18}$$

per ogni $x_0 \in \partial\Omega$. Prolunghiamo la definizione dei coefficienti α_{ij} a tutto $\bar{\Omega}$ in modo che risultino ivi continui e tali che $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ e $\sum\limits_{j,i=1}^{m} \alpha_{ij} t_i t_j \geqslant \nu_0 |t|^2$ per ogni $t \in R^m$.

Per i risultati di [7] esistono costanti positive $\hat{\lambda}$, K_5 (dipendenti da m, μ, Ω, β_i e dai coefficienti α_{ij}, b_i, c) tali che

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \left\| K_5 - \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i u_{x_i} + (c + \lambda) u \right\|_{L_2(\Omega)} \tag{19}$$

per ogni $u \in V$ e per ogni $\lambda \geqslant \hat{\lambda}$. Siano Ω', Ω'' aperti tali che $\bar{\Omega}' \subset \Omega'' \subset \bar{\Omega}'' \subset \Omega$, e sia ψ una funzione di classe $C^\infty(R^m)$ tale che $\psi = 1$ in $\Omega \setminus \Omega''$, $\psi = 0$ in Ω', sicchè $\psi u \in V$ se $u \in V$. Pertanto dalla (19) segue

$$\|\psi u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_5' \left\| \left(- \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c + \lambda \right) (\psi u) \right\|_{L_2(\Omega)} \tag{20}$$

per ogni $u \in V$ e per ogni $\lambda \geqslant \hat{\lambda}$. Tenendo conto della (18) si ha che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta > 0$ tale che se $\Omega \setminus \Omega' \subset \{x \in \Omega \colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$ risulta

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{m} (\alpha_{ij} - a_{ij}) u_{x_i x_j} \right\|_{L_2(\Omega \setminus \Omega')} \leqslant \varepsilon \|u\|_{H^2(\Omega \setminus \Omega')} \tag{21}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega)$. Allora dalle (20), (21), essendo $\psi = 0$ in Ω' si ha

$$\|\psi u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_5 \|(L + \lambda I)\, \psi u\|_{L_2(\Omega)} + \varepsilon K_5 \|\psi u\|_{H^2(\Omega)} \tag{22}$$

purchè $\Omega \setminus \Omega' \subset \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$. Scelto $\varepsilon = (2K_5)^{-1}$, dalla (22) si ottiene

$$\|\psi u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant 2K_5 \|(L + \lambda I)\, \psi u\|_{L_2(\Omega)} \tag{23}$$

e di qui con facili calcoli:

$$\|u\|_{H^2(\Omega \setminus \Omega'')} \leqslant 2K_5 \|(L + \lambda I)\, u\|_{L_2(\Omega)} + K(\psi)\,[\|u\|_{L_2(\Omega)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)}]\,, \tag{24}$$

per ogni $u \in V$ e per ogni $\lambda \geqslant \hat{\lambda}$. Sia ora $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\varphi = 1$ in Ω''. Essendo ovviamente $\varphi u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, si può applicare il teorema 3 ottenendo l'esistenza di due costanti K_6 e λ_0, dipendenti dai coefficienti di L, da m e da Ω, tali che

$$\|\varphi u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_6 \|(L + \lambda I)\, \varphi u\|_{L_2(\Omega)} \tag{25}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega)$ e per ogni $\lambda \geqslant \lambda_0$. Di qui si ottiene, analogamente alla (24):

$$\|u\|_{H^2(\Omega'')} \leqslant K_6 \|(L + \lambda I)\, u\|_{L_2(\Omega)} + K(\varphi)\,[\|u\|_{L_2(\Omega)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)}] \tag{26}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega)$ e per ogni $\lambda \geqslant \lambda_0$. Dalle (24), (26) si deduce

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_7 [\|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}] \tag{27}$$

per ogni $u \in V$ e per ogni $\lambda \geqslant \max\{\lambda_0, \hat{\lambda}\}$, essendo $K_7 = \max\{2K_5, K_6, K(\psi), K(\varphi)\}$. Usando la ben nota disuguaglianza (vedi ad esempio [11] pag. 122)

$$\|u_x\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \eta \|u\|_{H^2(\Omega)} + K(\eta) \|u\|_{L_2(\Omega)}\,,$$

dalla (27) si passa alla

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_8 [\|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}] \tag{28}$$

valida ancora per ogni $u \in V$ e per ogni $\lambda \geqslant \max\{\lambda_0, \hat{\lambda}\}$, con K_8 dipendente da K_7, φ, ψ. Dalla (28) si ottiene, per gli stessi valori di λ e u:

$$\begin{aligned}\lambda \|u\|_{L_2(\Omega)} = \|\lambda u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} + \|Lu\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} + K_8 K_9 [\|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}]\,,\end{aligned}$$

ove K_9 è una costante dipendente dai coefficienti di L, da m e da Ω. Scelto $\lambda \geqslant \lambda^* = \{2K_8K_9, \lambda_0, \hat{\lambda}\}$ ne segue

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \left(1 + \frac{1}{K_8K_9}\right) \|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} \tag{29}$$

e infine dalle (28), (29)

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_{10} \|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} \tag{30}$$

valida per ogni $u \in V$ e per ogni $\lambda \geqslant \lambda^*$, essendo K_{10} una costante dipendente da K_8, K_9 e quindi dai coefficienti di L, da m e da Ω. Dalla (30) con procedimenti standard (vedi ad esempio [7]) si ottiene esistenza ed unicità per il problema al contorno

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{q.o. in } \Omega, \\ u \in V \end{cases} \tag{31}$$

per ogni $f \in L_2(\Omega)$, non appena sia $\lambda \geqslant \lambda^*$.

COROLLARIO 6. – *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, e collo stesso significato di* λ^*, *se* $\lambda \geqslant \lambda^*$, $\mu \geqslant 0$ *su* $\partial\Omega$ (*essendo* μ *la funzione che compare nella definizione dello spazio* V), $f \in L_2(\Omega)$, $f \leqslant 0$ *q.o. in* Ω, *allora la soluzione* u *del problema* (31) *é* $\leqslant 0$ *q.o. in* Ω.

DIMOSTRAZIONE. – Costruiamo una successione di operatori ellittici approssimanti L nel modo seguente. Sia θ una funzione tale che $\theta \in C_0^\infty(R^m)$, $\theta(x) = 0$ per $|x| \geqslant 1$, $\int_{R^m} \theta(x)\,dx = 1$.

Prolunghiamo la definizione dei coefficienti di L fuori di Ω in modo che $a_{ij} \in C_0(R^m \setminus \Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$ in R^m, $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\,t_i t_j \geqslant \nu_0 |t|^2$ per ogni $t \in R^m$ e per ogni $x \in R^m \setminus \Omega$; inoltre sia $b_i(x) = c(x) = 0$ per ogni $x \in R^m \setminus \Omega$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$.

Per ogni numero naturale k e per ogni $x \in R^m$ poniamo

$$a_{ij}^{(k)}(x) = k^m \int_{R^m} \theta(mx - my)\, a_{ij}(y)\,dy \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m) \tag{32}$$

ed analogamente definiamo $b_i^{(k)}$, $c^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ a partire dai coefficienti b_i, c. Sia poi

$$L^{(k)} = -\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_i} + c^{(k)}\,.$$

I coefficienti di $L^{(k)}$ sono di classe $C^\infty(R^m)$ e soddisfano ancora, in Ω, alla condizione (3) (vedi [6]). Si può allora applicare il teorema 5 a ciascuno degli operatori $L^{(k)}$. Anzi, rileggendo accuratamente la dimostrazione del teorema 5 e tenendo pure presente la dimostrazione del lemma 3 di [6], si vede che le costanti K_{10} e λ^* fornite dal teorema 5 per ciascuno degli operatori $L^{(k)}$ si possono scegliere indipendenti da k. (Lasciamo al lettore la cura di provare con precisione questo fatto).

Ne segue allora che se $f \in L_2(\Omega)$ i problemi al contorno

$$\begin{cases} L^{(k)}u_k + \lambda u_k = f & \text{q.o. in } \Omega, \\ u_k \in V & (k = 1, 2, \dots) \end{cases} \tag{33}$$

hanno una ed una sola soluzione u_k purchè $\lambda \geqslant \lambda^*$ (λ^* indipendente da k), e inoltre

$$\|u_k\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_{10} \|f\|_{L_2(\Omega)} \qquad (k = 1, 2, \dots) \tag{34}$$

sempre con K_{10} indipendente da k. Dalla (34) segue (vedi ad esempio [6], ...) l'esistenza di una successione estratta dalla $\{u_k\}_{k \in N}$ che converge q.o. in Ω ad u, soluzione del problema (31). La nostra tesi sarà dunque provata non appena si faccia vedere che, per ogni $k \in N$, la soluzione del problema al contorno (33) è $\leqslant 0$ q.o. in Ω, se $f \leqslant 0$ q.o. in Ω.

Intanto per i risultati di [7] (corollario 2) ciò è certamente vero purchè sia $\lambda > -\min\limits_{\Omega} c^{(k)}$. Più in generale si ha, per noti teoremi (vedi ad esempio il lemma 4 di [6] e la bibliografia ivi citata), che $u_k \leqslant 0$ q.o. in Ω purchè $f \leqslant 0$ q.o. in Ω e λ sia maggiore dell'autovalore reale di $-L^{(k)}$ avente massima parte reale. A causa della risolubilità dei problemi (33), gli autovalori reali dell'operatore $-L^{(k)}$ sono tutti minori di λ^*, pertanto se $\lambda \geqslant \lambda^*$, $f \leqslant 0$ q.o. in Ω, se segue appunto $u_k \leqslant 0$ q.o. in Ω (per $k = 1, 2, \dots$).

OSSERVAZIONE. – Sarebbe interessante provare il risultato precedente senza l'ipotesi che $\mu \geqslant 0$ su $\partial\Omega$.

6. – Casi particolari.

Se i coefficienti a_{ij} di L soddisfano ipotesi più restrittive della (3) (come già per il problema di Dirichlet: vedi [3], [5], [15], [19], ...) si può provare esistenza ed unicità della soluzione del problema (31) anche per $\beta = 0$ purchè $\operatorname{ess\,inf}\limits_{\Omega} c > 0$ e $\mu \geqslant 0$ su $\partial\Omega$. Occorre premettere un lemma.

LEMMA 7. – *Oltre alle ipotesi elencate nel paragrafo 2, supponiamo che i coefficienti dell'operatore L soddisfino alle condizioni seguenti:*

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0} a_{ij}(x) = a_{ij}(x_0) \quad \textit{per ogni } x_0 \in \partial\Omega \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)\,,$$

b_i, $c \in L_\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. *Sia inoltre* $u \in V$ *oppure* $u \in H^2(\Omega) \cap \overset{0}{H}_1(\Omega)$, $f \in L_\infty(\Omega)$, $Lu = f$ *q.o. in* Ω.

Allora per ogni p reale, $p \geqslant 2$, esiste un intorno (aperto) U di $\partial\Omega$ tale che $u \in H^{2,p}(\Omega \cap U)$.

DIMOSTRAZIONE. – Basta provare quanto segue:

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{per ogni } u \in V \text{ oppure } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \text{ se esiste un intorno aperto } U_1 \\ \text{di } \partial\Omega \text{ tale che } u \in H^{2,q}(\Omega \cap U_1), \text{ allora esiste un intorno aperto } U_2 \text{ di } \partial\Omega \\ \text{tale che} \\ \qquad u \in H^{2,qm/(m-q)}(\Omega \cap U_2) \quad \text{se } 0 < q < m; \\ \qquad u \in H^{2,p}(\Omega \cap U_2) \quad \text{per ogni } p \geqslant 2 \text{ se } q \geqslant m. \end{array}\right.$$

Infatti, se è vera l'affermazione precedente, poichè per ipotesi $u \in H^{2,2}(\Omega)$, ponendo nella (35) $q = 2$ e $U_1 = R^m$ abbiamo che $u \in H^{2,2m/(m-2)}(\Omega \cap U_2)$. Poi ponendo nella (35) $q = 2m/(m-2)$ con U_2 al posto di U_1, si trova l'esistenza di un intorno aperto U_3 di $\partial\Omega$ tale che

$$\left\{\begin{array}{ll} u \in H^{2,2m/(m-4)}(\Omega \cap U_3) & \text{se } 2m/(m-2) < m; \\ u \in H^{2,p}(\Omega \cap U_3) & \text{per ogni } p \geqslant 2 \text{ se } 2m/(m-2) \geqslant m. \end{array}\right.$$

Così procedendo, dopo un numero finito di passi (esattamente tanti quanti la parte intera di $(m+1)/2$) si perviene ad un intorno U di $\partial\Omega$ tale appunto che $u \in H^{2,p}(\Omega \cap U)$ per ogni $p \geqslant 2$. Non resta quindi che provare l'affermazione (35).

A tale scopo si considerino le funzioni $\alpha_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ definite all'inizio della dimostrazione del teorema 5. Supposto ad esempio $0 < q < m$, sia $q^* = qm/(m-q)$, $u \in V$ oppure $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ed esista un intorno aperto U_1 di $\partial\Omega$ tale che $u \in H^{2,q}(\Omega \cap U_1)$. Per i risultati di [1] esiste una costante K_{11}, dipendente da m, q, Ω e dai coefficienti α_{ij}, b_i, c, tale che

$$(36)\qquad \|u\|_{H^{2,q^*}(\Omega)} \leqslant K_{11}\left[\left\| -\sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b_i u_{x_i} + cu \right\|_{L_{q^*}(\Omega)} + \|u\|_{L_{q^*}(\Omega)}\right].$$

Per le proprietà dei coefficienti α_{ij} (vedasi la (18)), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in \Omega$, $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta$ risulta

$$(37)\qquad \sum_{i,j=1}^m |a_{ij}(x) - \alpha_{ij}(x)| < \varepsilon .$$

Inoltre δ sia scelto in modo che $\{x \in \Omega: \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leqslant \delta\} \subset U_1$.

Sia ψ una funzione di classe $C_0^\infty(R^m)$ tale che $\psi(x) = 1$ in un intorno aperto di $\partial\Omega$ e $\psi(x) = 0$ se $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geqslant \delta$. Allora è chiaro che $\psi u \in V$ se $u \in V$, mentre $\psi u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ se $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, e inoltre $\psi u \in H^{2,q}(\Omega)$.

Dalla (37), scegliendo opportunamente ε e quindi δ, si può fare in modo che

$$\Big\| \sum_{i,j=1}^{m} (a_{ij} - \alpha_{ij})(\psi u)_{x_i x_j} \Big\|_{L_{q^*}(\Omega)} \leq (2K_{11})^{-1} \|\psi u\|_{H^{2,q^*}(\Omega)} . \tag{38}$$

Allora dalle (36), (38) si deduce

$$\|\psi u\|_{H^{2,q^*}(\Omega)} \leq 2K_{11} [\|L(\psi u)\|_{L_{q^*}(\Omega)} + \|\psi u\|_{L_{q^*}(\Omega)}] . \tag{3.9}$$

Essendo $\psi = 1$ in un intorno di $\partial\Omega$, la (39) equivale alla tesi della (35), pur di provare che il 2° membro della (39) è finito. Intanto osserviamo che $\|\psi u\|_{L_{q^*}(\Omega)} < +\infty$, essendo $\psi u \in H^{2,q}(\Omega)$ e tenendo presenti i ben noti teoremi di immersione di Sobolev.

Inoltre si ha, quasi ovunque in Ω:

$$L(\psi u) = \ldots = \psi f + \sum_{i=1}^{m} \Big(2 \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \psi_{x_j}\Big) u_{x_i} + \sum_{i=1}^{m} \Big(b_i \psi_{x_i} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \psi_{x_i x_j}\Big) u \tag{40}$$

ove $f \in L_\infty(\Omega)$ per ipotesi, u_{x_i}, $u \in L_{q^*}(\Omega \cap U_1)$ per i già citati teoremi di immersione di Sobolev (si veda ad esempio [11] pag. 120). I coefficienti di tali funzioni nell'ultimo membro della (40) sono tutti in $L_\infty(\Omega \cap U_1)$, per cui si può concludere che $\|L(\psi u)\|_{L_{q^*}(\Omega)} < +\infty$. Ciò esaurisce la dimostrazione del lemma nel caso $q < m$. Il caso $q \geq m$ si tratta analogamente e può essere lasciato al lettore (basta scrivere p al posto di q^*, con p reale qualunque, ed applicare diversamente i teoremi di immersione di Sobolev).

TEOREMA 8. – *Supponiamo che i coefficienti di L soddisfino alle stesse ipotesi che nel teorema 5 e inoltre ad una (almeno) delle tre seguenti:*

i) $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$;

ii) $a_{ij} \in H^{1,m}(\Omega)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$

iii) $\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ii}\Big)^2 \Big(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^2\Big)^{-1} > m - 1$

(*ciascuna delle quali implica la* (3)). *Sia inoltre* $\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c > 0$, $\mu \geq 0$ *su* $\partial\Omega$. *Allora il problema al contorno*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{q.o. in } \Omega, \\ u \in V \end{cases} \tag{41}$$

ammette una ed una sola soluzione per ogni $f \in L_2(\Omega)$.

Infine se $f \leq 0$ *q.o. in* Ω *ne segue* $u \leq 0$ *q.o. in* Ω.

DIMOSTRAZIONE. – Osserviamo innanzitutto che se vale l'ipotesi i) la tesi è nota perchè è contenuta nei risultati di [7]. Limitiamoci dunque a supporre la validità di ii) oppure di iii); supponiamo altresì in un primo tempo che sia b_i, $c \in L_\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$.

Poichè l'immersione di V in $L_2(\Omega)$ è compatta, e tenendo presente il teorema 5, si può applicare al problema al contorno (41) la teoria di Riesz-Fredholm, sicchè basta provare l'unicità della soluzione per ottenerne l'esistenza. Sia dunque $Lu = 0$ q.o. in Ω, $u \in V$, $u \in \dot{V}$; facciamo vedere che $u = 0$ q.o. in Ω.

Intanto, sia che valga la (ii) sia che valga la (iii), sappiamo che la soluzione u dell'equazione $Lu = 0$ q.o. in Ω è hölderiana in Ω ed assume i punti di estremo superiore essenziale soltanto su $\partial\Omega$ (vedi [15], [17], [8], [9], ...). Per il lemma 7 esiste un intorno aperto U di $\partial\Omega$ tale che $u \in H^{2,p}(\Omega \cap U)$ per ogni $p \geqslant 2$; per i teoremi di immersione di Sobolev ciò implica che u (eventualmente modificata su un insieme di misura nulla) è hölderiana con le derivate prime in $\overline{U \cap \Omega}$.

Pertanto i punti di estremo superiore essenziale di u sono punti di massimo assoluto. Per noti teoremi (vedi ad esempio [6], ...) risulta $\sum_{i=1}^{m} \beta_i(x_0) u_{x_i}(x_0) > 0$ in ogni punto di massimo $x_0 \in \partial\Omega$, se u non è costante in Ω. Essendo $\mu \geqslant 0$ su $\partial\Omega$ ed $u \in \dot{V}$, si ottiene facilmente, come in [7], che $u \leqslant 0$ in Ω. Potendosi ripetere tutto per la funzione $-u$, si conclude che $u = 0$ in Ω, come si voleva.

Dobbiamo ora sbarazzarci dell'ipotesi provvisoria che b_i, $c \in L_\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Si procede di nuovo come in [7], corollario 2: darò soltanto un cenno di dimostrazione. Posto, per ogni k naturale:

$$b_i^{(k)}(x) = \begin{cases} k & \text{se } b_1(x) \geqslant k\,, \\ b_i(x) & \text{se } |b_i(x)| \leqslant k, \\ -k & \text{se } b_i(x) \leqslant -k\,, \end{cases}$$

$$c^{(k)}(x) = \begin{cases} k & \text{se } c(x) \geqslant k\,, \\ c(x) & \text{se } |c(x)| \leqslant k\,, \\ -k & \text{se } c(x) \leqslant -k\,, \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}^{(k)} = -\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_i} + c^{(k)}$$

risulta

$$\lim_{k \to +\infty} \sup \left\{ \|\mathfrak{L}^{(k)} w - Lw\|_{L_2(\Omega)} \colon \|w\|_{H^2(\Omega)} \leqslant 1 \right\} = 0\,. \tag{42}$$

Per la (42) gli autovalori degli operatori $\{\mathfrak{L}^{(k)}\}_{k \in N}$ convergono, per $k \to +\infty$, ai corrispondenti autovalori di L. D'altra parte, poichè $b_i^{(k)}$, $c^{(k)} \in L_\infty(\Omega)$ (per ogni $k \in N$), per quanto già provato gli autovalori reali di $\mathfrak{L}^{(k)}$ sono tutti $\geqslant \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c$ (per $k = 1$, $2, \dots$). Quindi gli autovalori reali di L sono anch'essi $\geqslant \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c$, 0 non è un autovalore di L e il problema (41) ha una ed una sola soluzione.

Non resta che provare che se $f \in L_2(\Omega)$, $f \leqslant 0$ q.o. in Ω, $u \in V$, $Lu = f$ q.o. in Ω allora risulta $u \leqslant 0$ q.o. in Ω.

Sia $f_k = \max(-k, f)$ e siano u_k le soluzioni dei problemi al contorno

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{L}^{(k)} u_k = f_k & \text{q.o. in } \Omega, \\ u_k \in V & (k = 1, 2, \ldots). \end{array}\right. \tag{43}$$

Per i risultati già citati di [9], [17], ... e per il lemma 7, essendo $f_k \in L_\infty(\Omega)$, le funzioni u_k sono hölderiane in $\bar{\Omega}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ripetendo esattamente il ragionamento fatto in precedenza si trova che è pure $u_k \leqslant 0$ in Ω $(k = 1, 2, \ldots)$. D'altra parte dalle (42), (43) e dal fatto che $\lim_{k \to +\infty} \|f - f_k\|_{L_2(\Omega)} = 0$ si deduce che

$$\lim_{k \to +\infty} \|u - u_k\|_{L_2(\Omega)} = 0 \,,$$

quindi, poichè un'estratta da $\{u_k\}_{k \in N}$ converge q.o. in Ω, si ottiene $u \leqslant 0$ q.o. in Ω, come si voleva.

COROLLARIO 9. – *Nel teorema precedente le condizioni* i), ii), iii) *possono essere sostituite dalla seguente: per ogni $x \in \Omega$ esiste un intorno $U(x)$ tale che $a_{ij} \in C^0(U(x))$ oppure $a_{ij} \in H^{1,m}(U(x))$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ oppure*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{U(x)} \left(\sum_{i=1}^m a_{ii} \right)^2 \cdot \left(\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^2 \right)^{-1} > m - 1 \,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Si può rifare quella del teorema 8, poichè le presenti ipotesi, espresse in forma locale, assicurano ugualmente l'hölderianità della soluzione e la validità del principio di massimo.

7. – Maggiorazione delle derivate prime.

In questo paragrafo, estendendo i risultati di [15], proveremo che, in opportune ipotesi sui coefficienti dell'operatore L e sul termine noto f, la soluzione u del problema al contorno (41) ammette derivate prime di potenza $qm/(m-q)$ sommabile in Ω (ove $2 \leqslant q < m$).

TEOREMA 10. – *Oltre alle ipotesi elencate nel paragrafo 2, supponiamo che $a_{ij} \in H^{1,m}(\Omega)$, $\lim_{\Omega \ni x \to x_0} a_{ij}(x) = a_{ij}(x_0)$ per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Sia poi $2 \leqslant q < m$, $f \in L_q(\Omega)$, $c \in L_s(\Omega)$ con $s = m/2$ se $2 \leqslant q < m/2$, $s > m/2$ se $q = m/2$, $s = q$ se $m/2 < q < m$. Sia u (una) soluzione del problema al contorno*

$$\left\{\begin{array}{ll} Lu = f & \textit{q.o. in } \Omega, \\ u \in V \,. \end{array}\right. \tag{44}$$

Allora esiste una costante K_{12} *dipendente da* m, q, Ω *e dai coefficienti di* L *tale che risulti*

$$\|u_x\|_{L_{qm/(m-q)}(\Omega)} \leq K_{12}[\|f\|_{L_q(\Omega)} + \|u\|_{L_1(\Omega)}] . \tag{45}$$

DIMOSTRAZIONE. – È simile a quella del teorema 5, alla quale rimandiamo per la definizione dei coefficienti α_{ij}, degli insiemi Ω', Ω'' e delle funzioni ψ, φ. Per i risultati di [1] esistono due costanti positive $\hat{\lambda}$, K_{13} tali che per ogni $\lambda \geq \hat{\lambda}$ e per ogni $w \in V \cap \cap C^2(\bar{\Omega})$ risulti

$$\|\psi w\|_{H^{2,q}(\Omega)} \leq K_{13} \left\| \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij}(\psi w)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(\psi w)_{x_i} + (c+\lambda)\, \psi w \right\|_{L_q(\Omega)} . \tag{46}$$

Analogamente alla (21) si ha che, per la (18), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che se $\Omega \setminus \Omega' \subset \{x \in \Omega \colon \text{dist}\,(x, \partial\Omega) < \delta\}$ risulti

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{m} (\alpha_{ij} - a_{ij})\, w_{x_i x_j} \right\|_{L_q(\Omega \setminus \Omega')} \leq \varepsilon \|w\|_{H^{2,q}(\Omega \setminus \Omega')} \tag{47}$$

per ogni $w \in C^2(\bar{\Omega})$. Allora dalle (46), (47) segue, essendo $\psi = 0$ in Ω':

$$\|\psi w\|_{H^{2,q}(\Omega)} \leq K_{13} \|(L + \lambda I)\, \psi w\|_{L_q(\Omega)} + \varepsilon K_{13} \|\psi w\|_{H^{2,q}(\Omega)} \tag{48}$$

purchè $\Omega \setminus \Omega' \subset \{x \in \Omega \colon \text{dist}\,(x, \partial\Omega) < \delta\}$. Dalla (48), procedendo come nella dimostrazione del teorema 5 si ottiene

$$\|w\|_{H^{2,q}(\Omega \setminus \Omega'')} \leq 2K_{13} \|(L + \lambda I)\, w\|_{L_q(\Omega)} + K(\psi)\, [\|w\|_{L_q(\Omega)} + \|w_x\|_{L_q(\Omega)}] , \tag{49}$$

valida per ogni $\lambda \geq \hat{\lambda}$ e per ogni $w \in V \cap C^2(\bar{\Omega})$.

Sia ora $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\varphi = 1$ in Ω''. Allora è $\varphi w \in H_0^1(\Omega)$ per ogni $w \in C^2(\bar{\Omega})$; pertanto dai risultati di [15] (teorema 1.5) si ottiene

$$\|\varphi w\|_{H^2(\Omega)} + \|(\varphi w)_x\|_{L_{qm/(m-q)}(\Omega)} \leq K_{14}[\|L(\varphi w)\|_{L_q(\Omega)} + \|\varphi w\|_{L_q(\Omega)}] \tag{50}$$

da cui con facili calcoli

$$\|w_x\|_{L_{qm/(m-q)}(\Omega'')} + \|w\|_{H^2(\Omega'')} \leq K_{14} \|Lw\|_{L_q(\Omega)} + K(\varphi)\, [\|w_x\|_{L_q(\Omega)} + \|w\|_{L_q(\Omega)}] \tag{51}$$

valida per ogni $w \in C^2(\bar{\Omega})$, ove la costante K_{14} dipende dai coefficienti di L, da m, da q e da Ω e $K(\varphi)$ anche da φ (e quindi da Ω). Fissiamo ora $\lambda = \hat{\lambda}$ nella (49), da cui si ottiene così

$$\|w\|_{H^{2,q}(\Omega \setminus \Omega'')} \leq 2K_{13} \|Lw\|_{L_q(\Omega)} + K'(\varphi)\, \{\|w\|_{L_q(\Omega)} + \|w_x\|_{L_q(\Omega)}\} \tag{52}$$

ove la costante $K'(\psi)$ ora dipende anche da λ e quindi sempre dai coefficienti di L, da m, q e da Ω. Tenendo presenti i teoremi di immersione di Sobolev ne segue

(53) $$\|w\|_{H^2(\Omega\setminus\Omega'')} + \|w_x\|_{L_{qm/(m-q)}(\Omega\setminus\Omega'')} \leq K_{15}[\|Lw\|_{L_q(\Omega)} + \|w_x\|_{L_q(\Omega)} + \|w\|_{L_q(\Omega)}]$$

ove la costante K_{15} dipende sempre dai coefficienti di L, da m, q e da Ω. Allora dalle (51), (53) si ottiene

(54) $$\|w\|_{H^2(\Omega)} + \|w_x\|_{L_{qm/(m-q)}(\Omega)} \leq K_{16}[\|Lw\|_{L_q(\Omega)} + \|w_x\|_{L_q(\Omega)} + \|w\|_{L_q(\Omega)}] .$$

La disuguaglianza

(55) $$\|v\|_{L_p(\Omega)} \leq \eta\|v\|_{L_{p_2}(\Omega)} + K(\eta, p, p_1, p_2)\|v\|_{L_{p_1}(\Omega)}$$

valida per ogni $\eta > 0$ e per ogni p, p_1, p_2 con $p_1 \leq p < p_2$ (vedi [11] pag. 115), ove si ponga $v = w_x$, $p_1 = 2$, $q = p$, $p_2 = qm/(m-q)$, $\eta = (2K_{16})^{-1}$, permette di passare dalla (54) alla

(56) $$\|w\|_{H^2(\Omega)} + \|w_x\|_{L_{qm/(m-q)}(\Omega)} \leq K_{17}[\|Lw\|_{L_q(\Omega)} + \|w_x\|_{L_2(\Omega)} + \|w\|_{L_q(\Omega)}] .$$

Utilizziamo ora le altre ben note disuguaglianze

(57) $$\begin{cases} \|v_x\|_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon\|v\|_{H^2(\Omega)} + K(\varepsilon)\|v\|_{L_2(\Omega)}; \\ \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq (\text{mis}\,\Omega)^{\frac{1}{2}-1/q}\|v\|_{L_q(\Omega)} \end{cases}$$

(vedi ad esempio [11]) per passare dalla (56) alla

(58) $$\|w\|_{H^2(\Omega)} + \|w_x\|_{L_{qm/(m-q)}(\Omega)} \leq K_{18}[\|Lw\|_{L_q(\Omega)} + \|w\|_{L_q(\Omega)}]$$

ove ancora K_{18} è una costante dipendente solo da m, q, Ω e dai coefficienti di L, mentre w è una qualunque funzione di $V \cap C^2(\bar{\Omega})$.

Cerchiamo ora di far figurare $\|w\|_{L_1(\Omega)}$ in luogo di $\|w\|_{L_q(\Omega)}$ al secondo membro della (58).

Intanto dalla (58) segue facilmente

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} + \|w_x\|_{L_{qm/(m-q)}(\Omega)} + \|w\|_{H^{1,q}(\Omega)} \leq K_{19}[\|Lw\|_{L_q(\Omega)} + \|w\|_{L_q(\Omega)}] ;$$

di qui e dai teoremi di immersione di Sobolev si ottiene

(59) $$\|w\|_{H^2(\Omega)} + \|w\|_{H^{1,qm/(m-q)}(\Omega)} \leq K_{19}[\|Lw\|_{L_q(\Omega)} + \|w\|_{L_q(\Omega)}] .$$

Utilizziamo ora nuovamente la disuguaglianza (55) ove si ponga $v = w$, $p_1 = 1$, $p = q$, $p_2 = qm/(m-q)$, $\eta = (2K_{19})^{-1}$; si ottiene così, tenuto conto della (59):

(60) $$\|w\|_{H^2(\Omega)} + \|w\|_{H^{1,qm/(m-q)}(\Omega)} \leq K_{20}[\|Lw\|_{L_q(\Omega)} + \|w\|_{L_1(\Omega)}] .$$

La (60) implica la tesi del teorema non appena si provi che essa è valida per le funzioni di V oltre che per quelle di $V \cap C^2(\bar{\Omega})$. A tale scopo si procede in modo simile a quanto fatto in [15]. Sia $\lambda \in R$ scelto in modo che il problema al contorno

$$\text{(61)} \qquad \begin{cases} Lw + \lambda w = g & \text{q.o. in } \Omega, \\ w \in V \end{cases}$$

abbia una ed una sola soluzione per ogni $g \in L_2(\Omega)$ (basta prendere λ abbastanza grande per il teorema 5). Sia u soluzione del problema al contorno (44).

Osserviamo che u appartiene allora ad $L_q(\Omega)$: infatti è $u \in L_q(D)$ per ogni compatto D contenuto in Ω per i risultati di [17] (corollario 5.2). Inoltre, in modo perfettamente analogo a quello del lemma 7, si dimostra che esiste un intorno aperto U di $\partial\Omega$ tale che $u \in H^{2,q}(\Omega \cap U)$ e quindi $u \in L_q(\Omega \cap U)$.

Ciò prova appunto che $u \in L_q(\Omega)$. Si consideri allora il problema al contorno (61) ove si ponga $g = f + \lambda u$, ed insieme ad esso i problemi

$$\text{(62)} \qquad \begin{cases} L^{(k)} u_k + \lambda u_k = g_k & \text{in } \Omega, \\ u_k \in V & (k = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

essendo $L^{(k)}$ gli operatori definiti nella dimostrazione del corollario 6 ed essendo $\{g_k\}_{k \in N}$ una successione di funzioni di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$ tale che $\lim_{k \to +\infty} \|g_k - g\|_{L_q(\Omega)} = 0$.

Dalla dimostrazione del corollario 6 segue l'esistenza di una costante K_{21}, indipendente da k, tale che

$$\text{(63)} \qquad \|u_k\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_{21} \|g_k\|_{L_q(\Omega)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Poichè gli operatori $L^{(k)}$ hanno i coefficienti regolari e $g_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$, risulta $u_k \in C^2(\bar{\Omega})$, pertanto si può porre $w = u_k$ nella (60) ottenendo

$$\text{(64)} \qquad \|u_k\|_{H^2(\Omega)} + \|u_k\|_{H^{1,qm/(m-q)}(\Omega)} \leqslant K_{20} [\|L^{(k)} u_k\|_{L_q(\Omega)} + \|u_k\|_{L_1(\Omega)}] \, .$$

(Qui si è usato il fatto che la (60) si può riscrivere anche per gli operatori $L^{(k)}$ e la costante K_{20}, come al solito, si può scegliere indipendente da k).

Dalle (63), (64) con procedimenti standard si deduce l'esistenza di una successione estratta da $\{u_k\}_{k \in N}$ che converge debolmente, in $H^2(\Omega)$ e in $H^{1,qm/(m-q)}(\Omega)$, ad una funzione u^*. Una successione di medie convesse delle funzioni u_k converge, per il teorema di Banach-Saks, fortemente in $H^2(\Omega)$ e quasi ovunque in Ω colle derivate 1ᵉ e 2ᵉ, alla funzione u^*, la quale, come si può facilmente verificare, soddisfa al problema (61). Poichè anche la funzione u è soluzione del problema (61) per il quale la soluzione è unica, ne segue $u^* = u$.

Passando al minimo limite nella (64) e ricordando la definizione di g, g_k si conclude

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{H^{1,qm/(m-q)}(\Omega)} \leqslant K_{20} [\|f\|_{L_q(\Omega)} + \|u\|_{L_1(\Omega)}] \, .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON - A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I,* Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), pp. 623-727.

[2] M. CHICCO, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale,* Boll. U.M.I., (3), **22** (1967), pp. 368-372.

[3] M. CHICCO, *Equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes con termini di ordine inferiore,* Ann. Mat. Pura Appl., (4), **85** (1970), pp. 347-356.

[4] M. CHICCO, *Principio di massimo generalizzato e valutazione del primo autovalore per problemi ellittici del secondo ordine di tipo variazionale,* Ann. Mat. Pura Appl., (4), **87** (1970), pp. 1-10.

[5] M. CHICCO, *Solvability of the Dirichlet problem in $H^{2,p}(\Omega)$ for a class of linear second order elliptic partial differential equations,* Boll. U. M.I., (4), **4** (1971), pp. 374-387.

[6] M. CHICCO, *Dirichlet problem for a class of linear second order elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients,* Ann. Mat. Pura Appl., (4), **92** (1972), pp. 13-23.

[7] M. CHICCO, *Third boundary value problem in $H^{2,p}(\Omega)$ for a class of linear second order elliptic partial differential equations,* Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste, **4** (1972), pp. 86-94.

[8] M. CHICCO, *Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes,* Ann. Mat. Pura Appl., (4), **100** (1974), pp. 239-258.

[9] H. O. CORDES, *Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations,* Proc. Symp. Pure Math., **4** (1961), pp. 157-166.

[10] N. DUNFORD - J. T. SCHWARTZ, *Linear operators,* Interscience, New York (1958).

[11] E. GAGLIARDO, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili,* Ricerche Mat., **7** (1958), pp. 102-137.

[12] M. GIAQUINTA, *Equazioni ellittiche di ordine 2m di tipo Cordes,* Boll. U.M.I., (4), **4** (1971), pp. 251-257.

[13] M. G. KREIN - M. A. RUTMAN, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space,* American Math. Soc. Transl., (1), **10** (1962), pp. 199-235.

[14] O. A. LADYZHENSKAYA - N. N. URAL'TSEVA, *Linear and quasilinear elliptic equations,* Academic Press, New York (1968).

[15] C. MIRANDA, *Sulle equazioni ellittiche di tipo non variazionale a coefficienti discontinui,* Ann. Mat. Pura Appl., (4), **63** (1963), pp. 353-386.

[16] M. H. PROTTER - H. F. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations,* Prentice Hall, Englewood Cliffs (1968).

[17] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **15** (1965), pp. 189-258.

[18] G. TALENTI, *Problemi di derivata obliqua per equazioni ellittiche in due variabili,* Boll. U.M.I., (3), **22** (1967), pp. 505-526.

[19] G. TALENTI, *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili,* Ann. Mat. Pura Appl., (4), **69** (1965), pp. 285-304.