Su un problema non lineare con una condizione di evoluzione sulla frontiera (*) (**).

ALESSANDRO TORELLI (Pavia)

Summary. – *We prove an existence and uniqueness theorem for a nonlinear problem of evolution related to fluid flow through porous media.*

1. – Introduzione.

In [6] (cfr. anche [5]) si è osservato che lo studio di un problema a frontiera libera connesso con il moto *non stazionario* di filtrazione di un fluido incomprimibile attraverso una diga rettangolare di materiale poroso omogeneo può essere ricondotto (utilizzando una trasformazione ispirata a quella introdotta da C. Baiocchi nel caso *stazionario*, cfr. [1] e [2]) al seguente problema non lineare, a frontiera fissa, con una condizione di evoluzione sulla frontiera:

PROBLEMA 1.1. – *Si cerca una funzione $w(x, y, t)$ definita in Q a valori reali tale che (Δ essendo, qui e nel seguito, inteso nelle sole variabili x e y):*

$$\Delta w \in H(w) \qquad \text{in } Q \ (H = \text{« funzione » di Heaviside}), \tag{1.1}$$

$$w = g \qquad \text{su } \Gamma_d \times]0, T[, \tag{1.2}$$

$$D_t w_y + w_{xx} = 0 \qquad \text{su } \Gamma_n \times]0, T[, \tag{1.3}$$

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y); \tag{1.4}$$

dove (a, b e T essendo numeri positivi):

$$D = \{(x, y): 0 < x < a,\ 0 < y < b\}, \tag{1.5}$$

$$Q = D \times]0, T[, \tag{1.6}$$

$$\Gamma_n = \{(x, y): 0 < x < a,\ y = 0\}, \tag{1.7}$$

$$\Gamma_d = \partial D - \Gamma_n, \tag{1.8}$$

e inoltre g e w_0 sono funzioni assegnate definite rispettivamente in $\Gamma_d \times]0, T[$ e D.

(*) Entrata in Redazione il 5 novembre 1975.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale di Analisi Funzionale ed Applicazioni del C.N.R. e del Laboratorio di Analisi Numerica del C.N.R. di Pavia.

Scopo del presente lavoro è lo studio del problema 1.1. Più precisamente nel seguito verrà trattata una forma più generale del problema 1.1 (cfr. il problema 2.1 più avanti) perchè ciò ci darà la possibilità di studiare il comportamento di processi di filtrazione più generali (cfr. [7]). La risoluzione del problema 1.1 ci permette (almeno formalmente) di ricostruire completamente il fenomeno fisico di filtrazione di partenza e dunque il problema 1.1 (e le sue generalizzazioni) può considerarsi una formulazione debole del suddetto problema fisico (1) (per maggiori dettagli cfr. ancora [5], [6] e [7]).

Nel presente lavoro, dopo aver riformulato in maniera precisa e più generale il problema 1.1, se ne prova l'equivalenza con un nuovo problema (di evoluzione) su $\Gamma_n\times]0, T[$, in cui interviene un operatore pseudo-differenziale, non lineare e dipendente dal tempo. Per tale nuovo problema si dimostra poi un teorema di esistenza e unicità della soluzione.

Il contenuto del presente lavoro è già stato anticipato nella nota ai Comptes Rendus Acad. Sci. [5].

2. – Formulazione precisa del problema.

Si ponga (2)

$$H^1_\Delta(D) = \{v \in H^1(D) : \Delta v \in L^2(D)\}\,, \tag{2.1}$$

con la norma del grafico. Consideriamo inoltre gli operatori di traccia, che denoteremo con γ_0 e γ_1, definiti fra gli spazi:

$$\gamma_0 : H^1(D) \to H^{\frac12}(\Gamma_n)\,, \tag{2.2}$$

$$\gamma_1 : H^1_\Delta(D) \to \big(H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n)\big)'\,, \tag{2.3}$$

che associano a $v \in H^1(D)$ (risp. $H^1_\Delta(D)$), la traccia di v su Γ_n (risp. la traccia di $D_\nu v$ su Γ_n). Tali operatori hanno effettivamente senso fra tali spazi e sono lineari e continui (cfr. [4], cap. I).

---

(1) Si rimanda a [7] per una collocazione precisa e dettagliata del presente lavoro nel contesto più generale delle ricerche sui problemi a frontiera libera connessi con il moto di un fluido attraverso un materiale poroso e su altri problemi a frontiera libera di natura analoga.

(2) Per gli spazi funzionali impiegati nel presente lavoro e le loro principali proprietà, rimandiamo a [4]. Ricordiamo solamente che (m ed r essendo interi positivi con r dispari e O aperto di $\mathbb{R}^m$) gli spazi $H^{r/2}_{00}(O)$, che nel presente lavoro hanno un ruolo essenziale, sono stati introdotti in [4], cap. I, § 11, ponendo $H^{r/2}_{00}(O) = [H^r_0(O), L^2(O)]_{\frac12}$, cioè lo spazio $H^{r/2}_{00}(O)$ puó essere definito come lo spazio interpolato d'ordine $\frac12$ compreso fra $H^r_0(O)$ e $L^2(O)$; un'altra caratterizzazione degli spazi $H^{r/2}_{00}(O)$, in un certo senso conseguente della precedente, è la seguente: $u \in H^{r/2}_{00}(O)$ se e solo se il prolungamento a zero di u a tutto R^m appartiene a $H^{r/2}(R^m)$.

Siano inoltre F, g, α, q assegnate funzioni del tipo:

$$F \in L^\infty(0, T; L^2(D)), \qquad g \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_d)), \tag{2.4}$$

$$\alpha \in L^2(0, T; H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_n)), \qquad q \in H^{-1}(\Gamma_n), \tag{2.5}$$

dove $\varepsilon < \frac{1}{2}$ è un numero reale positivo a nostra disposizione. Si ponga (ciò ha senso per quasi tutti i valori di $t \in]0, T[$):

$$K(t) = \{v \in H^1(D) : v = g(t) \quad su\ \Gamma_d\}. \tag{2.6}$$

Consideriamo allora il seguente problema che è una riformulazione precisa e più generale del problema 1.1 (e in cui la (2.9) traduce, in forma variazionale, la (1.1) opportunamente modificata, cfr. la (2.18) più avanti):

PROBLEMA 2.1. – *Si cerca una funzione w tale che:*

$$w \in L^2(0, T; H^1_\Delta(D)), \tag{2.7}$$

$$w(t) \in K(t) \qquad (\text{q.o. } in\ t), \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\int_D \operatorname{grad} w(t) \cdot \operatorname{grad}(v - w(t))\, dx\, dy + \int_D [v^+ - w(t)^+]\, dx\, dy + \\ + \langle \gamma_1 w(t), \gamma_0(v - w(t)) \rangle \geq \int_D F(t) \cdot (v - w(t))\, dx\, dy, \qquad \forall v \in K(t),\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$D_t \gamma_1 w + D_{xx} \gamma_0 w = \alpha \qquad su\ \Gamma_n \times]0, T[, \tag{2.10}$$

$$(\gamma_1 w)(0) = q, \tag{2.11}$$

dove nella (2.9) (*e nel seguito del presente lavoro*) *il gradiente è da intendersi nelle sole variabili x e y, $v^+ = (|v| + v)/2$ e infine la dualità è da intendersi fra $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n)$ e il suo duale. Inoltre la* (2.9) *è da intendersi a meno di un insieme eccezionale di* $]0, T[$ *di misura nulla, tale insieme essendo indipendente dalla «test function» v.*

È necessario dare senso alle relazioni (2.10) e (2.11). Si ha intanto (grazie alla (2.7)) che $\gamma_0 w \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))$ e dunque, ricordando che l'operatore D_{xx} è lineare e continuo fra $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$ e $(H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$ (cfr. la proposizione 12.1 cap. I di [4]), si ha che:

$$D_{xx} \gamma_0 w \in L^2\big(0, T; (H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'\big) \subset \mathcal{D}'\big(0, T; (H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'\big), \tag{2.12}$$

cioè $D_{xx} \gamma_0 w$ può essere interpretata come una distribuzione su $]0, T[$ a valori in $(H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$. Si ha ancora (dato che $(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))' \subset (H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$ con immersione continua) grazie alla (2.7) che:

$$\gamma_1 w \in L^2\big(0, T; (H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))'\big) \subset \mathcal{D}'\big(0, T; (H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'\big). \tag{2.13}$$

È dunque lecito (cfr. anche la prima (2.5)) intendere la (2.10) nel senso delle distribuzioni a valori in $(H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$. La prima delle (2.5), la (2.10) e la (2.12) ci dicono inoltre che:

$$D_t \gamma_1 w \in L^2\big(0, T; (H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'\big). \tag{2.14}$$

Si ponga:

$$X = \big[(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))',\ (H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'\big]_{\frac{1}{2}}; \tag{2.15}$$

si ha allora che (cfr. i teoremi 6.2 ed 11.7, cap. I di [4]):

$$X = \big[[H^2_0(\Gamma_n), L^2(\Gamma_n)]_{\frac{3}{4}},\ [H^2_0(\Gamma_n), L^2(\Gamma_n)]_{\frac{1}{4}}\big]'_{\frac{1}{2}}$$

o anche applicando il teorema 6.1 cap. I di [4] si ottiene:

$$X = [H^2_0(\Gamma_n), L^2(\Gamma_n)]'_{\frac{1}{2}} = (H^1_0(\Gamma_n))'$$

e dunque

$$X = H^{-1}(\Gamma_n). \tag{2.16}$$

Utilizzando le (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16) (cfr. [4], teorema 3.1, cap. I) si ha dunque

$$\gamma_1 w \in C^0([0, T]; H^{-1}(\Gamma_n)), \tag{2.17}$$

cioè $\gamma_1 w$ è (quasi ovunque uguale a) una funzione continua di $[0, T]$ a valori in $H^{-1}(\Gamma_n)$. La condizione (2.11) ha dunque senso.

La (2.9) può inoltre essere interpretata esplicitamente nel seguente modo:

$$\Delta w + F \in H(w) \quad \text{in } D. \tag{2.18}$$

Osserviamo infine che la funzione q rappresenta (dal punto di vista dell'osservatore w) lo stato del sistema nell'istante iniziale. Facciamo presente inoltre che, in luogo della (2.11), non si poteva imporre il valore di w per $t = 0$ (tale condizione sarebbe stata, in un certo senso, più naturale), in quanto non siamo nelle condizioni di regolarità (cfr. la (2.7)) per potere procedere in tale modo e inoltre in quanto la condizione di evoluzione compare solo su $\Gamma_n \times]0, T[$. Invece alla condizione (2.11) si può dare senso (come abbiamo sopra verificato).

3. – Alcuni risultati preliminari.

a) Assegnati $p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_d)$, $L \in L^2(D)$ e $k \in (H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$, sia λ la soluzione del seguente problema (il gradiente nelle sole variabili x e y):

$$\lambda \in K_p = \{v \in H^1(D) : v = p \ \text{su } \Gamma_d\}, \tag{3.1}$$

$$(3.2)\qquad \int_D \operatorname{grad}\lambda\cdot\operatorname{grad}(v-\lambda)\,dx\,dy+\int_D (v^+-\lambda^+)\,dx\,dy+\langle k,\gamma_0(v-\lambda)\rangle\geqslant$$
$$\geqslant\int_D L(v-\lambda)\,dx\,dy\,,\qquad \forall v\in K_p,$$

la dualità essendo fra $H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n)$ e il duale. Come è noto (cfr. ad es. [3]) il problema (3.1), (3.2) ammette una ed una sola soluzione. Denoteremo con G_{pL} l'operatore che associa a k la soluzione λ di (3.1) e (3.2); G_{pL} opera dunque fra gli spazi (cfr. anche l'oss. 3.1 più avanti):

$$(3.3)\qquad G_{pL}\colon \big(H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n)\big)'\to H^1_\Delta(D)\,.$$

OSSERVAZIONE 3.1. – La condizione (3.2) può essere così tradotta in forma esplicita (H = « funzione » di Heaviside):

$$(3.4)\qquad \Delta\lambda+L\in H(\lambda)\quad in\ D,\qquad \gamma_1\lambda=k\quad su\ \Gamma_n\,.$$

Analogamente, sempre assegnati $p\in H^{\frac12}(\Gamma_d)$ e $L\in L^2(D)$, sia:

$$(3.5)\qquad M_{pL}\colon \big(H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n)\big)'\to H^1_\Delta(D)\,,$$

l'operatore che associa a $k\in\big(H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n)\big)'$, la funzione $\xi=M_{pL}k$ soddisfacente alle condizioni:

$$(3.6)\qquad \xi\in K_p\,,$$

$$(3.7)\qquad \int_D \operatorname{grad}\xi\cdot\operatorname{grad}v\,dx\,dy+\langle k,\gamma_0 v\rangle=\int_D Lv\,dx\,dy\,,\qquad \forall v\in K_0\,,$$

dove (ovviamente):

$$(3.8)\qquad K_0=\{v\in H^1(D)\colon v=0\ \ su\ \ \Gamma_d\}\,.$$

OSSERVAZIONE 3.2. – La (3.7) può essere così riscritta:

$$(3.9)\qquad \Delta\xi+L=0\quad in\ D,\qquad \gamma_1\xi=k\quad su\ \Gamma_n:$$

Si ponga ancora $\big(p\in H^{\frac12}(\Gamma_d),\ L\in L^2(D)\big)$:

$$(3.10)\qquad N_{pL}=G_{pL}-M_{pL}\,.$$

L'operatore N_{pL} (analogamente agli altri) opera gli spazi:

$$(3.11)\qquad N_{pL}\colon \big(H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n)\big)'\to H^1_\Delta(D)\,.$$

Valgono allora i seguenti lemmi:

LEMMA 3.1. – $\forall k \in (H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$ *si ha che* (*posto* $N_{pL}k = z$):

$$z \in K_0 , \tag{3.12}$$

$$\int_D \operatorname{grad} z \cdot \operatorname{grad}(v - z)\, dx\, dy + \int_D [(v + M_{pL}k)^+ - (G_{pL}k)^+]\, dx\, dy \geq 0 , \qquad \forall v \in K_0 : \tag{3.13}$$

DIMOSTRAZIONE. – La (3.12) è una ovvia conseguenza della (3.10). Si ponga ora $\lambda = G_{pL}k$, $\xi = M_{pL}k$. Se $v \in K_0$ si ha che $v + \xi \in K_p$ e dunque (cfr. la (3.2)):

$$\begin{aligned}\int_D \operatorname{grad} \lambda \cdot \operatorname{grad}(v + \xi - \lambda)\, dx\, dy + \int_D [(v + \xi)^+ - \lambda^+]\, dx\, dy + \langle k, \gamma_0(v + \xi - \lambda)\rangle \geq \\ \geq \int_D L(v + \xi - \lambda)\, dx\, dy , \qquad \forall v \in K_0 .\end{aligned} \tag{3.14}$$

Si ha inoltre che per la (3.7) (dato che se $v \in K_0$, allora $-v - \xi + \lambda \in K_0$):

$$\begin{aligned}\int_D \operatorname{grad} \xi \operatorname{grad}(-v - \xi + \lambda)\, dx\, dy + \langle k, \gamma_0(-v - \xi + \lambda)\rangle = \\ = \int_D L(-v - \xi + \lambda)\, dx\, dy , \qquad \forall v \in K_0 ,\end{aligned} \tag{3.15}$$

e dunque sommando membro a membro le (3.14) e (3.15):

$$\int_D \operatorname{grad}(\lambda - \xi) \operatorname{grad}(v - \lambda + \xi)\, dx\, dy + \int_D \big[((v + \xi)^+ - \lambda^+)\big]\, dx\, dy \geq 0 , \qquad \forall v \in K_0 ,$$

da cui l'asserto.

LEMMA 3.2. – *Esiste una costante* $c > 0$, *tale che* $\forall p_1, p_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_d)$, $\forall L_1, L_2 \in L^2(D)$ *e* $\forall k_1, k_2 \in (H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$ si ha:

$$\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^1(D)} \geq c \|z_1 - z_2\|^2_{H^1(D)} , \tag{3.16}$$

in cui si è posto:

$$\xi^i = M_{p_iL_i}k_i , \qquad z_i = N_{p_iL_i}k_i \qquad (i = 1, 2). \tag{3.17}$$

DIMOSTRAZIONE. – Utilizzando il lemma 3.1 (con le notazioni (3.17)) si ha:

$$\int_D \operatorname{grad} z_1 \operatorname{grad}(z_2 - z_1)\, dx\, dy + \int_D [(z_2 + \xi_1)^+ - (z_1 + \xi_1)^+]\, dx\, dy \geq 0 ,$$

$$\int_D \operatorname{grad} z_2 \operatorname{grad}(z_1 - z_2)\, dx\, dy + \int_D [(z_1 + \xi_2)^+ - (z_2 + \xi_2)^+]\, dx\, dy \geq 0 ,$$

da cui sommando membro a membro ed osservando che $a^+ - b^+ \leqslant (a-b)^+$ si ha:

$$-\int_D [\operatorname{grad}(z_1 - z_2)]^2 \, dx\, dy + \int_D [(\xi_1 - \xi_2)^+ + (\xi_2 - \xi_1)^+] \, dx\, dy \geqslant 0 ,$$

cioè anche, dato che $z_1 - z_2 \in K_0$ e dato che $a^+ + (-a)^+ = |a|$, l'asserto.

LEMMA 3.3. – *Esiste una costante $c_1 > 0$, indipendente da p e L, tale che*:

$$\|k\|_{(H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n))'} \geqslant c_1 \|G_{pL}k - G_{pL}\omega\|_{H^1(D)} , \qquad \forall k \in (H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n))' \tag{3.18}$$

dove ω è lo zero ***di*** $(H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n))'$.

DIMOSTRAZIONE. – Si ponga $\lambda = G_{pL}k$ e $\lambda_0 = G_{pL}\omega$. Si ha allora:

$$\int_D \operatorname{grad} \lambda \operatorname{grad}(\lambda_0 - \lambda) \, dx\, dy + \int_D [\lambda_0^+ - \lambda^+] \, dx\, dy + \langle k, \gamma_0(\lambda_0 - \lambda)\rangle \geqslant \int_D L(\lambda_0 - \lambda) \, dx\, dy ,$$

$$\int_D \operatorname{grad} \lambda_0 \operatorname{grad}(\lambda - \lambda_0) \, dx\, dy + \int_D [\lambda^+ - \lambda_0^+] \, dx\, dy \geqslant \int_D L(\lambda - \lambda_0) \, dx\, dy ,$$

da cui sommando membro a membro e tenendo presente che $\lambda - \lambda_0 \in K_0$:

$$\langle k, \gamma_0(\lambda_0 - \lambda)\rangle \geqslant \int_D (\operatorname{grad}(\lambda - \lambda_0))^2 \, dx\, dy \geqslant c' \|\lambda - \lambda_0\|^2_{H^1(D)}$$

e dunque

$$\|k\|_{(H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n))'} \cdot \|\gamma_0(\lambda_0 - \lambda)\|_{H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n)} \geqslant c' \|\lambda - \lambda_0\|^2_{H^1(D)} .$$

Tenendo presente che l'operatore γ_0 è lineare e continuo fra K_0 e $H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n)$ si ha l'asserto.

LEMMA 3.4. – $\forall p \in H^{\frac12}(\Gamma_d)$, $\forall L \in L^2(D)$, $\forall k_1$ *e* $k_2 \in (H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n))'$ *si ha che*:

$$\int_D (G_{pL}k_1 - G_{pL}k_2) \cdot \Delta(G_{pL}k_1 - G_{pL}k_2) \, dx\, dy \geqslant 0 .$$

DIMOSTRAZIONE. – Si ponga $\lambda_i = G_{pL}k_i$ $(i = 1, 2)$. Si avrà allora:

$$\int_D \operatorname{grad} \lambda_1 \operatorname{grad}(\lambda_2 - \lambda_1) \, dx\, dy + \int_D (\lambda_2^+ - \lambda_1^+) \, dx\, dy + \langle k_1, \gamma_0(\lambda_2 - \lambda_1)\rangle \geqslant \int_D L(\lambda_2 - \lambda_1) \, dx\, dy ,$$

$$\int_D \operatorname{grad} \lambda_2 \operatorname{grad}(\lambda_1 - \lambda_2) \, dx\, dy + \int_D (\lambda_1^+ - \lambda_2^+) \, dx\, dy + \langle k_2, \gamma_0(\lambda_1 - \lambda_2)\rangle \geqslant \int_D L(\lambda_1 - \lambda_2) \, dx\, dy ,$$

da cui sommando membro a membro

$$-\int_D |\operatorname{grad}(\lambda_1 - \lambda_2)|^2 \, dx\, dy - \langle k_1 - k_2, \gamma_0(\lambda_1 - \lambda_2)\rangle \geqslant 0$$

e dunque, osservando che $\gamma_1(\lambda_1 - \lambda_2) = k_1 - k_2$, si ha l'asserto.

LEMMA 3.5. – *Se* p_m (risp. L_m, k_m) *è una successione di elementi di* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_d)$ (risp. $L^2(D)$, $(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$) *tale che*:

$$(3.19)\quad p_m \to p \quad \text{in } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_d)\,, \qquad L_m \to L \quad \text{in } L^2(D)\,, \qquad k_m \to k \quad \text{in } (H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))'\,,$$

allora

$$(3.20)\qquad G_{p_m L_m} k_m \to G_{pL} k \quad \text{in } H^1(D)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Si ponga $\xi_m = M_{p_m L_m} k_m$, $\xi = M_{pL} k$, $\lambda_m = G_{p_m L_m} k_m$, $\lambda = G_{pL} k$. Grazie al lemma 3.2 e alla (3.10) si ha:

$$(3.21)\qquad \|\xi_m - \xi\|_{L^1(D)} \geqslant c \|(\lambda_m - \lambda) - (\xi_m - \xi)\|^2_{H^1(D)}\,.$$

La (3.19) ci dice inoltre che $\xi_m \to \xi$ in $H^1(D)$ e dunque, grazie alla (3.21), $\lambda_m \to \lambda$ in $H^1(D)$ (cioè l'asserto).

b) Siano F e g le funzioni introdotte in (2.4). Si ponga allora, per semplicità,

$$(3.22)\qquad G(t) = G_{g(t)F(t)}\,.$$

Vale allora il:

LEMMA 3.6. – *Se* $k(t) \in L^2(0, T; (H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))')$, *allora*:

i) *la funzione*

$$(3.23)\qquad t \to G(t)\,k(t) - G(t)\,\omega$$

è misurabile in $]0, T[$ *a valori in* $H^1_\Delta(D)$ *e appartiene a* $L^2(0, T; H^1_\Delta(D))$.

ii) *la funzione*

$$(3.24)\qquad t \to G(t)\,\omega$$

è misurabile in $]0, T[$ *a valori in* $H^{1+\varepsilon}(D)$ *e appartiene a* $L^2(0, T; H^{1+\varepsilon}(D))$.

DIMOSTRAZIONE. – Verifichiamo prima di tutto la misurabilità a valori in $H^1(D)$ della funzione (3.23). Osserviamo che essendo $k(t)$ (risp. $g(t)$, $F(t)$) misurabile a valori in $(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$ (risp. $H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_d)$, $L^2(D)$), allora esiste una successione $k_m(t)$ (risp. $g_m(t)$, $F_m(t)$) di funzioni misurabili a numero finito di valori in $(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$ (risp. $H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_d)$, $L^2(D)$) tale che:

$$(3.25)\qquad k_m(t) \to k(t) \quad \text{in } (H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))' \quad (\text{q.o. in } t),$$

$$(3.26)\qquad g_m(t) \to g(t) \quad \text{in } H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_d) \quad (\text{q.o. in } t),$$

$$(3.27)\qquad F_m(t) \to F(t) \quad \text{in } L^2(D) \quad (\text{q.o. in } t).$$

Se poniamo (per semplicità):

$$G_m(t) = G_{g_m(t)F_m(t)}\,, \tag{3.28}$$

avremo allora che la funzione $t \to G_m(t)\,k_m(t) - G_m(t)\,\omega$ è misurabile a numero finito di valori in $H^1(D)$ e che (cfr. il lemma 3.5 e le (3.25), (3.26) e (3.27)):

$$G_m(t)\,k_m(t) - G_m(t)\,\omega \to G(t)\,k(t) - G(t)\,\omega \qquad in\ H^1(D)$$

quasi dappertutto nell'intervallo $]0, T[$. Si ha dunque che la funzione (3.23) è misurabile a valori in $H^1(D)$. Inoltre si verifica subito che la funzione (3.23) appartiene a $L^2(0, T; H^1(D))$ grazie al lemma 3.3. Per completare la verifica della parte i), basta dimostrare che (per ogni $k(t) \in L^2(0, T; (H^{\frac12}_{00}(\Gamma_n))')$ si ha che $\Delta G(t)\,k(t)$ è misurabile a valori in $L^2(D)$ e appartiene a $L^2(0, T; L^2(D))$. A tale scopo osserviamo che (con un procedimento analogo a quello condotto sopra) si ha che $G(t)\,\omega \in L^2(0, T; H^1(D))$ e dunque $G(t)\,k(t) \in L^2(0, T; H^1(D))$. Sia ora $\varphi \in \mathfrak{D}(Q)$. Avremo allora ponendo $v = G(t)\,k(t) + \varphi(t)$ nella (3.2):

$$\int_D \operatorname{grad}(G(t)\,k(t)) \cdot \operatorname{grad}\varphi(t)\,dx\,dy + \int_D \big[(G(t)\,k(t) + \varphi(t))^+ - (G(t)\,k(t))^+\big]\,dx\,dy \geq$$
$$\geq \int_D F(t)\,\varphi(t)\,dx\,dy\,, \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(Q), \qquad (\text{q.o. } in\ t),$$

che (grazie al fatto che $G(t)\,k(t) \in L^2(0, T; H^1(D))$) diventa, integrando su $]0, T[$:

$$\int_Q \operatorname{grad} G(t)\,k(t)\,\operatorname{grad}\varphi(t)\,dx\,dy\,dt + \int_Q \big[(G(t)\,k(t) + \varphi(t))^+ - (G(t)\,k(t))^+\big]\,dx\,dy\,dt \geq$$
$$\geq \int_Q F(t)\cdot\varphi(t)\,dx\,dy\,dt\,, \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(Q)\,,$$

il che vuol dire che:

$$0 \leq \Delta G(t)\,k(t) + F(t) \leq 1 \tag{3.29}$$

e dunque (grazie alla prima (2.4)) $\Delta G(t)\,k(t) \in L^2(Q)$. La parte i) è così completamente verificata.

Dimostriamo ora la parte ii) del lemma. Si ponga

$$P(t) = \Delta G(t)\,\omega \in L^2(Q) \tag{3.30}$$

e sia $P_m(t)$ una successione di funzioni misurabili a numero finito di valori in $L^2(D)$ tali che:

$$P_m(t) \to P(t) \qquad in\ L^2(D) \qquad (\text{q.o. } in\ t). \tag{3.31}$$

Sia inoltre $h_m(t)$ la soluzione del seguente problema (dove $g_m(t)$ verifica la (3.26)):

$$\Delta h_m(t) = P_m(t) \quad in \ D\,, \qquad h_m(t) = g_m(t) \quad su \ \Gamma_d\,, \qquad \gamma_1 h_m(t) = 0 \quad su \ \Gamma_n\,.$$

Si ha che (fissato t) $h_m(t) \in H^{1+\varepsilon}(D)$ (verifica ovvia con un procedimento di riflessione rispetto all'asse x) e che $h_m(t)$ è misurabile a numero finito di valori in $H^{1+\varepsilon}(D)$. Si ha inoltre che (in quanto valgono le (3.26) e (3.31)):

$$h_m(t) \to G(t)\,\omega \qquad in \ H^{1+\varepsilon}(D) \qquad (\text{q.o. } in \ t). \tag{3.32}$$

$G(t)\,\omega$ è dunque misurabile a valori in $H^{1+\varepsilon}(D)$. Il fatto che $g(t) \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_d)$ ci permette di provare completamente la parte ii).

4. – Riduzione a un problema non lineare su Γ_n.

a) Sia V una varietà lineare di $L^2(\Gamma_n)$. Porremo allora:

$$\hat{V} = \{v \in V : \int_0^a v(x)\,dx = 0\}\,. \tag{4.1}$$

Ad esempio denoteremo che $\hat{H}^1(\Gamma_n)$ il sottospazio di $H^1(\Gamma_n)$ costituito dalle funzioni di $H^1(\Gamma_n)$ a media nulla. Si ha allora che (l'immersione essendo continua e densa):

$$\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n) \subset \hat{L}^2(\Gamma_n)\,. \tag{4.2}$$

Se identifichiamo $\hat{L}^2(\Gamma_n)$ al suo duale (tale identificazione è evidentemente compatibile con la usuale identificazione di $L^2(\Gamma_n)$ con il suo duale), avremo che $\hat{L}^2(\Gamma_n)$ si può identificare ad una varietà lineare di $(\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'$. Avremo cioè (tutte le immersioni essendo continue):

$$\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n) \subset \hat{L}^2(\Gamma_n) \subset (\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'\,. \tag{4.3}$$

Osserviamo inoltre che $(\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'$ si può identificare con un sottospazio di $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$, più precisamente (la dualità essendo fra $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$ e $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$):

$$(\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))' = \{v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_n) : \langle v, c\rangle = 0, \ \forall c \in \mathbf{R}\}\,. \tag{4.4}$$

b) È di ovvia verifica il seguente:

LEMMA 4.1. – *L'operatore differenziale D_x è un isomorfismo algebrico fra gli spazi:*

$$D_x : \mathfrak{D}(\Gamma_n) \to \hat{\mathfrak{D}}(\Gamma_n)\,. \tag{4.5}$$

Vale inoltre il:

LEMMA 4.2. – *L'operatore D_x è un isomorfismo algebrico e topologico fra gli spazi*:

$$D_x\colon \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n) \to \big(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n)\big)' , \tag{4.6}$$

$$D_x\colon \hat{L}^2(\Gamma_n) \to H^{-1}(\Gamma_n) , \tag{4.7}$$

$$D_x\colon \big(\hat{H}(^{\frac{1}{2}}\Gamma_n)\big)' \to H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_n) . \tag{4.8}$$

DIMOSTRAZIONE. – L'isomorfismo (4.7) è immediato. Tenendo presente che D_x è un isomorfismo e topologico fra gli spazi:

$$D_x\colon \hat{H}^1(\Gamma_n) \to L^2(\Gamma_n) . \tag{4.9}$$

Si ha allora, per interpolazione (cfr. le (4.7) e (4.9)), che D_x è un isomorfismo algebrico e topologico fra gli spazi:

$$D_x\colon [\hat{H}^1(\Gamma_n), \hat{L}^2(\Gamma_n)]_{\frac{1}{2}} \to [L^2(\Gamma_n), H^{-1}(\Gamma_n)]_{\frac{1}{2}} . \tag{4.10}$$

Il primo spazio che compare nella (4.10) (cfr. [4], cap. I, teor. 13.3) coincide con $\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$; il secondo coincide con $\big(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n)\big)'$. La (4.10) ci dà dunque la (4.6). Osserviamo inoltre che D_x è un isomorfismo algebrico e topologico fra gli spazi:

$$D_x\colon H^{\frac{3}{2}}_0(\Gamma_n) \to \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n) . \tag{4.11}$$

Per dualità si ha infine la (4.8).

DEFINIZIONE 4.1. – *Indicheremo rispettivamente con* ϱ, ϱ_1, ϱ_2 *gli operatori inversi degli operatori* (4.6), (4.7) e (4.8).

Avremo allora (ovviamente) che, grazie anche alla (4.4),

$$\varrho \subset \varrho_1 \subset \varrho_2 , \tag{4.12}$$

cioè ϱ_1 è un estensione di ϱ e ϱ_2 è un estensione di ϱ_1.

c) Sia ora π l'operatore che associa ad ogni funzionale T lineare e continuo su $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$ (ciò vuol dire che $T \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$), la sua restrizione πT a $\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$. È allora ovvio che πT è un funzionale lineare e continuo su $\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$. È allora ovvio che πT è un funzionale lineare e continuo su $\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$, cioè a dire π è definito e lineare fra gli spazi:

$$\pi\colon H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_n) \to \big(\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)\big)' . \tag{4.13}$$

Se inoltre indichiamo con $\|\ \|_*$ (risp. $\|\ \|_*^{\wedge}$) la norma in $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$ (risp. $\big(\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)\big)'$), si verifica facilmente che $\|\pi T\|_*^{\wedge} \leq \|T\|_*$ e dunque:

$$\pi \in \mathfrak{L}\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_n), (\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'\right). \tag{4.14}$$

Consideriamo inoltre l'operatore definito (per quasi tutti i $t \in]0, T[$) fra gli spazi:

$$A(t): \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n) \to (\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))' \tag{4.15}$$

e che associa ad ogni $h \in \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$, l'elemento di $(\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'$ dato da (ω essendo lo zero di $(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$):

$$A(t)h = \pi D_x \gamma_0 \big(G(t) D_x h - G(t)\omega\big). \tag{4.16}$$

È facile verificare che $A(t)$ opera effettivamente fra gli spazi indicati in (4.15). Si ha inoltre (per il lemma 3.6 e il fatto che tutti gli operatori che intervengono, salvo $G(t)$, sono lineari e continui) che A opera fra gli spazi seguenti:

$$A: L^2(0, T; \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)) \to L^2\left(0, T; (\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'\right). \tag{4.17}$$

Si ponga (la funzione q e l'operatore ϱ essendo stati introdotti, rispettivamente, nella (2.5) e nella definizione 4.1):

$$V_0 = \varrho_1 q. \tag{4.18}$$

Si ha allora ovviamente che

$$V_0 \in \hat{L}^2(\Gamma_n). \tag{4.19}$$

Si ponga ancora (per la definizione di ϱ_2, cfr. la definizione 4.1):

$$f(t) = \varrho_2 \alpha(t) - \pi D_x \gamma_0 G(t)\omega. \tag{4.20}$$

Grazie alla (2.5) e al lemma 3.6 si ha allora che:

$$f \in L^2\left(0, T; (\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'\right). \tag{4.21}$$

Consideriamo ora il:

TEOREMA 4.1. – i) *Sia w una soluzione del problema 2.1 Se si pone*:

$$V(t) = \varrho \gamma_1 w(t), \tag{4.22}$$

si ha allora che:

$$V \in L^2(0, T; \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)), \tag{4.23}$$

$$D_t V + AV = f \quad \left(\textit{nel senso di } \mathcal{D}'(0, T; (\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))')\right):, \tag{4.24}$$

$$V(0) = V_0. \tag{4.25}$$

ii) *Sia viceversa V verificante* (4.23), (4.24) *e* (4.25). *Se si pone*:

$$w(t) = G(t) D_x V(t) , \tag{4.26}$$

allora w è soluzione del problema 2.1.

OSSERVAZIONE 4.1. – Notiamo che la (4.25) ha senso in quanto (cfr. le (4.17), (4.21), (4.23) e (4.24)) si ha che:

$$D_t V \in L^2\big(0, T; (\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'\big) \tag{4.27}$$

e dunque $V(t)$ è (quasi ovunque uguale a) una funzione continua di $]0, T[$ a valori in:

$$\big[\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n), (\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'\big]_{\frac{1}{2}} = \hat{L}^2(\Gamma_n) ,$$

cioè a dire:

$$V \in C^0([0, T]; \hat{L}^2(\Gamma_n)) . \tag{4.28}$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.1. – Sia w una soluzione del problema 2.1. Avremo, prima di tutto, che la (4.23) è conseguenza della definizione (4.22) di V e del fatto che ϱ e γ_1 sono operatori lineari e continui. Si ha inoltre che (grazie alle definizioni di ϱ e ϱ_2):

$$\gamma_1 w(t) = D_x \varrho \gamma_1 w(t) = D_x V(t) , \tag{4.29}$$

$$\alpha(t) = D_x \varrho_2 \alpha(t) ; \tag{4.30}$$

grazie al fatto che la (2.9) è verificata a meno di un insieme di misura nulla di $]0, T[$ indipendente dalla « test function » v, si ha inoltre che:

$$w(t) = G(t) \gamma_1 w(t) = G(t) D_x V(t) . \tag{4.31}$$

La (2.10) può dunque essere così riscritta (nel senso di $\mathcal{D}'\big(0, T; (H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'\big)$:

$$D_t D_x V(t) + D_{xx} \gamma_0 G(t) D_x V(t) = D_x \varrho_2 \alpha(t)$$

o anche:

$$D_x[D_t V(t) + D_x \gamma_0 G(t) D_x V(t) - \varrho_2 \alpha(t)] = 0 . \tag{4.32}$$

Ricordiamo che si ha, per definizione,

$$\mathcal{D}'\big(0, T; (H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'\big) = \mathcal{L}\big(\mathcal{D}(]0, T[), (H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'\big) .$$

Sia ora $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma_n)$. La applicazione che associa ad ogni $k \in (H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$, il numero $\langle k, \varphi \rangle$ (la dualità essendo fra $\mathcal{D}'(\Gamma_n)$ e $\mathcal{D}(\Gamma_n)$) è lineare e continua. La (4.32) implica allora la seguente relazione $(\forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Gamma_n))$:

$$\langle D_x(D_t V(t) + D_x\gamma_0 G(t) D_x V(t) - \varrho_2\alpha(t)), \varphi\rangle = 0 \,, \tag{4.33}$$

l'uguaglianza essendo intesa nel senso di $\mathfrak{D}'(]0, T[)$ e la dualità fra $\mathfrak{D}'(\Gamma_n)$ e $\mathfrak{D}(\Gamma_n)$. Si ha allora che, grazie al lemma 4.1,

$$\langle D_t V(t) + D_x\gamma_0 G(t) D_x V(t) - \varrho_2\alpha(t), \psi\rangle = 0 \,, \quad \forall\psi \in \hat{\mathfrak{D}}(\Gamma_n) \,, \tag{4.34}$$

o anche:

$$\langle D_t V(t), \psi\rangle + \langle D_x\gamma_0(G(t) D_x V(t) - G(t)\omega), \psi\rangle = \langle \varrho_2\alpha(t) - D_x\gamma_0 G(t)\omega, \ \psi\rangle \,, \ \forall\psi \in \hat{\mathfrak{D}}(\Gamma_n)$$

o anche (grazie alle (4.16) e (4.20) e al fatto che $\hat{\mathfrak{D}}(\Gamma_n) \subset \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$):

$$\langle D_t V(t), \psi\rangle + \langle A(t) V(t), \psi\rangle = \langle f(t), \psi\rangle \,, \quad \forall\psi \in \hat{\mathfrak{D}}(\Gamma_n). \tag{4.35}$$

Osserviamo che (cfr. le (4.17), (4.21) e (4.22)) che $D_t V + AV - f$ appartiene allo spazio

$$\mathfrak{D}'\big(0, T; (\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'\big) = \mathfrak{L}\big(\mathfrak{D}(]0, T[; (\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'\big) \,,$$

cioè a dire è un'applicazione lineare e continua che associa ad ogni funzione di $\mathfrak{D}(]0, T[)$ un funzionale lineare e continuo su $\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$. Dato che $\hat{\mathfrak{D}}(\Gamma_n)$ è denso in $\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$, la (4.35) ci dice che $D_t V + AV - f$ è una distribuzione a valori in $(\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'$ identicamente nulla: vale dunque la (4.24). Verifichiamo infine la (4.25). Se w è soluzione del problema 2.1 si ha che (cfr. la (2.17)) $\gamma_1 w \in C^0([0, T], H^{-1}(\Gamma_n))$. Avremo inoltre che (cfr. la (4.12) e il fatto che $\varrho_1 \in \mathfrak{L}(H^{-1}(\Gamma_n), \hat{L}^2(\Gamma_n))$):

$$V = \varrho\gamma_1 w = \varrho_1\gamma_1 w \in C^0([0, T], \hat{L}^2(\Gamma_n))$$

e dunque $V(0) = \varrho_1[(\gamma_1 w)(0)] = V_0$.

Abbiamo così verificato che se $w(t)$ è soluzione del problema 2.1, allora $V(t)$ (data dalla (4.22)) verifica il problema (4.23), (4.24) e (4.25). Il viceversa, cioè la parte ii) del teorema, si verifica in modo analogo invertendo l'ordine della dimostrazione.

5. – Esistenza e unicità della soluzione del problema 2.1.

a) Vale il:

LEMMA 5.1. – *Per quasi tutti i $t \in]0, T[$, per tutti gli $h_1, h_2 \in \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$, vale la relazione*:

$$\langle A(t)h_1 - A(t)h_2, h_1 - h_2\rangle = \int\limits_D [\operatorname{grad}(\lambda_1 - \lambda_2)]^2\, dx\, dy + \int\limits_D (\lambda_1 - \lambda_2)\cdot\Delta(\lambda_1 - \lambda_2)\, dx\, dy \tag{5.1}$$

a dualità essendo fra $\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$ *e il duale e avendo posto*:

$$\lambda^i = G(t)\, D_x h_i\,, \qquad (i = 1, 2). \tag{5.2}$$

DIMOSTRAZIONE. – Si ha che (tenendo presenti le (4.16) e (5.2)):

$$\begin{aligned}\langle A(t)\,h_1 - A(t)\,h_2,\, h_1 - h_2\rangle &= \langle \pi D_x \gamma_0(\lambda_1 - \lambda_2),\, h_1 - h_2\rangle = \\ &= \langle D_x\gamma_0(\lambda_1 - \lambda_2),\, h_1 - h_2\rangle \qquad (\textit{dualità fra } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n) \textit{ e il duale}) \\ &= -\langle \gamma_0(\lambda_1 - \lambda_2),\, D_x(h_1 - h_2)\rangle \qquad (\textit{dualità fra } H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n) \textit{ e il duale}) \\ &= -\langle \gamma_0(\lambda_1 - \lambda_2),\, \gamma_1(\lambda_1 - \lambda_2)\rangle \qquad \big(\textit{dato che } \gamma_1 G(t)\,k = k, \forall k \in (H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))'\big) \\ &= \int_D [\operatorname{grad}(\lambda_1 - \lambda_2)]^2\, dx\, dy + \int_D (\lambda_1 - \lambda_2)\cdot \Delta(\lambda_1 - \lambda_2)\, dx\, dy\,.\end{aligned}$$

Immediata conseguenza dei lemmi 3.4 e 5.1 è poi il seguente:

COROLLARIO 5.1. – *Per quasi tutti i* $t \in]0, T[$, *l'operatore* $A(t)$ *è strettamente monotono, cioè a dire*:

$$\langle A(t)\,h_1 - A(t)\,h_2,\, h_1 - h_2\rangle > 0\,, \qquad \forall h_1, h_2 \in \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n),\ h_1 \neq h_2\,. \tag{5.3}$$

Vale poi anche il seguente

COROLLARIO 5.2. – *Esiste* $c > 0$, *indipendente da* t, *tale che*:

$$\langle A(t)\,h, h\rangle \geqslant c\,\|G(t)\,D_x h - G(t)\,\omega\|^2_{H^1(D)}\,, \qquad \forall h \in \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n). \tag{5.4}$$

DIMOSTRAZIONE. – Basta osservare che:

$$\langle A(t)\,h, h\rangle = \langle A(t)\,h - A(t)\,\omega,\, h - \omega\rangle\,;$$

i lemmi 3.4 e 5.1 ci danno poi l'asserto.

b) Vediamo qualche ulteriore proprietà dell'operatore A. Si ha prima di tutto, grazie al lemma 3.5 e al fatto che gli operatori che intervengono nella definizione di $A(t)$ (fuorchè $G(t)$) sono lineari e continui, che:

LEMMA 5.2. – *Per quasi tutti i* $t \in]0, T[$, *l'operatore* $A(t)$ *è hemicontinuo, cioè a dire* $\forall v_1, v_2, v_3 \in \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$ *l'applicazione*

$$\lambda \to \langle A(t)(v_1 + \lambda v_2),\, v_3\rangle \tag{5.5}$$

è continua da $\boldsymbol{R}$ *in* $\boldsymbol{R}$.

Analogamente, a partire dal lemma 3.3, si dimostra facilmente il:

LEMMA 5.3. – *L'operatore $A(t)$ è (uniformemente in t) limitato, cioè a dire esiste una costante $c > 0$ (indipendente da t) tale che:*

$$\|A(t)h\|_{(\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n))'} \leqslant c\|h\|_{\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)}, \qquad \forall h \in \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n). \tag{5.6}$$

Vale ancora il seguente risultato che esprime una specie di coercività uniforme in t:

LEMMA 5.4. – *Esistono due costanti c_1 e c_2 positive e indipendenti da t, tali che:*

$$\langle A(t)h, h\rangle \geqslant c_1\|h\|^2_{\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)} - c_2, \qquad \forall h \in \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n). \tag{5.7}$$

DIMOSTRAZIONE. – Grazie alle (2.4) e (3.29), al variare di k in $(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_n))'$ si ha che $\Delta(G(t)\ k(t))$ appartiene a un limitato di $L^2(D)$ indipendente da k e t. Conseguenza del corollario 5.2 è allora che esistono due costanti positive c_1' e c_2 (positive e indipendenti da t) tali che:

$$\langle A(t)h, h\rangle \geqslant c_1'\|G(t)D_xh - G(t)\omega\|^2_{H^1_\Delta(D)} - c_2, \qquad \forall h \in \hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n).$$

Se osserviamo che $\varrho\gamma_1(G(t)D_xh - G(t)\omega) = h$ e che l'applicazione $\varrho\gamma_1$ è lineare e continua fra $H^1_\Delta(D)$ e $\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$, si ha l'asserto.

c) A tale punto si è verificato (cfr. il corollario 5.1 e i lemmi 5.2, 5.3 e 5.4) che l'operatore $A(t)$ è monotono, hemicontinuo, limitato e coercivo (uniformemente in t). Sotto tali ipotesi, applicando un ben noto risultato (3), si ha allora il:

TEOREMA 5.1. – *Sotto le ipotesi* (4.19) *e* (4.21), *il problema* (4.23), (4.24) *e* (4.25) *ammette una ed una sola soluzione.*

Conseguenza dei teoremi 4.1 e 5.1 è poi il seguente teorema finale:

TEOREMA 5.2. – *Sotto le ipotesi* (2.4) *e* (2.5), *il problema* 2.1 *ammette una ed una sola soluzione.*

---

(3) Si può, ad esempio, utilizzare il teorema 1.2 cap. II e la nota (1) p. 164 di [3], adattandone in modo ovvio la dimostrazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. BAIOCCHI, *Su un problema a frontiera libera connesso a questioni di idraulica*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **92** (1972), pp. 107-127.

[2] C. BAIOCCHI, *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media*, International Congress of Mathematicians, Vancouver (21-29 agosto 1974).

[3] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de resolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier-Villars, Paris (1969).

[4] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. I, Dunod, Paris (1968).

[5] A. TORELLI, *Un problème à frontière libre d'évolution en hydraulique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sez. A, **280** (1975), pp. 353-356.

[6] A. TORELLI, *Su un problema a frontiera libera di evoluzione*, Boll. U.M.I., (4) **11** (1975), pp. 559-570.

[7] A. TORELLI, in corso di stampa su Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.