Graphische Rechentafeln (Nomogramme) für die Berechnung der ganzen rationalen Funktion.

VON ALEXANDER FISCHER (in Prag).

Uebersicht. — *Es wird, unter Heranziehung der einfachsten Hilfsmittel der Nomographie, die Bildung der ganzen rationalen Funktion sowohl im reellen als auch im komplexen Bereich auf nomographisch-graphischem Weg gezeigt.*

In den bekannteren Lehrbüchern der praktischen Analysis werden zur zeichnerischen Bildung der ganzen rationalen Funktion die Verfahren von I. A. v. SEGNER und E. LILL, allenfalls die Verallgemeinerung und Ausdehnung des letzteren auf des komplexe Gebiet durch C. RUNGE behandelt. In einer vor einiger Zeit erschienenen Arbeit gibt ferner H. BEHMANN (1) (*) eine Vereinfachung des v. SEGNERschen Verfahrens. Ich möchte nun im folgenden eine wohl noch einfachere, auf nomographischer Grundlage beruhende Behandlungsweise der ganzen rationalen Funktion

$$(I) \quad y_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

mitteilen, die den Vorzug hat, auch auf die komplexe Funktion

$$(I'') \quad w_n = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

(mit komplexem Argument und komplexen Koeffizienten) ausgedehnt werden zu können. Sie geht von der, sowohl dem v. SEGNER — bzw. BEHMANN —, als auch dem LILLschen Verfahren gemeinsamen Zerlegung der Gleichung (I) in die Gleichungskette

$$(II') \quad y_{v+1} = y_v x + a_{v+1}$$

($v = 0, 1, \dots, n-1$, $y_0 \equiv a_0$) aus.

$\alpha)$ *Reelles Gebiet:* Hier wird die einfache Gestalt von (II') benutzt, um durch abwechselnde Anwendung der übereinandergelagerten Tafeln für die beiden, schon in jedem einführenden Lehrbuch der Nomographie ausführlich

(*) Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf den Schriftennachweis am Ende der Arbeit.

behandelten, einfachsten « kanonischen Formen »

- (a) $f_1(x_1) + f_2(x_2) = f_3(x_3)$
 (b) $f_1(x_1) = f_2(x_2)f_3(x_3)$

die Gleichung (I') in Form eines einzigen ununterbrochenen Linienzuges zu bilden. Abb. 1 zeigt die zu beachtende Vorzeichenwahl bei der Verquickung

Abb. 1

beider Formen. Die Abb. 2, die das BEISPIEL

$$y_2 = x^2 + 2x - 3$$

für $x = 2$ zeigt, dürfte durch Angabe der Schritte wohl sofort verständlich werden.

SCHRITT 1: Bildung von $a_0 (\equiv y_0)$ auf der rechten Leiter.

SCHRITT 2: Bildung von $-a_0x$ auf der linken Leiter (Verwendung von (b)).

SCHRITT 3: Bildung von y_1 auf der rechten Leiter gemäss $-a_0x + y_1 = a_1$ (Verwendung von (a)).

SCHRITT 4: Bildung von $--y_1x$ auf der linken Leiter (Verwendung von (b)).

SCHRITT 5: Bildung von y_2 auf der rechten Leiter gemäss $-y_1x + y_2 = a_2$ (Verwendung von (a)).

Die linke Leiter dient also bloss als « Zapfenlinie », trägt daher keine Leiter. Führt man das in Abb. 2 dargestellte Nomogramm auf durchsichtigem Papier oder Zellhorn aus und bringt für verschiedene Werte von x die entsprechenden y -Werte über die zugehörigen x -Werte (Millimeterpapier als Grundblatt!), so kann die so entstehende verzerrte y -Kurve ohneweiteres z. B. zur zeichnerischen Lösung der Gleichung $y_n \equiv 0$ verwendet werden.

β) *Komplexes Gebiet*: Da die Bildung von (I') aus (II') rein formaler Natur ist, gilt sie insbesondere auch für komplexes Argument und ebensolche

Koeffizienten. Es sei

$$\left. \begin{aligned} w_{\nu+1} &= u_{\nu+1} + iv_{\nu+1} \\ z &= \xi + i\eta \\ a_{\nu+1} &= \alpha_{\nu+1} + i\beta_{\nu+1} \end{aligned} \right\} \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad \begin{aligned} u_0 &\equiv \alpha_0, \\ v_0 &\equiv \beta_0. \end{aligned}$$

Beispiel : $y_2 = x^2 + 2x - 3$ für $x=2$: $y_2=5$

Abb. 2

Dann ergibt die zu (II') analoge Gleichungskette

$$(II'') \quad w_{\nu+1} = u_{\nu+1} + iv_{\nu+1} = (u_{\nu} + iv_{\nu})(\xi + i\eta) + \alpha_{\nu+1} + i\beta_{\nu+1}$$

das Gleichungskettenpaar

$$(u) \quad u_{\nu+1} = u_{\nu}\xi - v_{\nu}\eta + \alpha_{\nu+1}$$

$$(v) \quad v_{\nu+1} = v_{\nu}\xi + u_{\nu}\eta + \beta_{\nu+1}.$$

Dies ist behufs nomographischer Verwertung folgendermassen zu schreiben:

$$\begin{aligned} -u_{\nu}\xi + u_{\nu+1} &= \zeta_1 = -v_{\nu}\eta + \alpha_{\nu+1}, \\ -v_{\nu}\xi + v_{\nu+1} &= \zeta_2 = u_{\nu}\eta + \beta_{\nu+1}. \end{aligned}$$

Hierin sind ζ_1 und ζ_2 Zapfenwerte auf den bezüglichen Zapfenlinien.

Bei der *Bildung von u_{v+1}* ist so vorzugehen: (s. Abb. 3a)

SCHRITT 1: Bildung von $-v_v\eta$ auf der linken Leiter (Verwendung von (b)).

SCHRITT 2: Bildung von ζ_1 gemäss: $\zeta_1 = -v_v\eta + \alpha_{v+1}$ auf der Zapfenlinie ζ_1 (Verwendung von (a)).

Abb. 3

SCHRITT 3: Bildung von $-u_v\xi$ auf der linken Leiter (Verwendung von (b)).

SCHRITT 4: Bildung von u_{v+1} unter Benutzung von ζ_1 auf der rechten Leiter (Verwendung von (a)).

Ganz analog ist v_{v+1} zu bilden (Abb. 3b). Hierbei ist jedoch die zu benutzende η -Leiter zu « verziffern », d. h., um die Grösse $u_v\eta$ sinnentsprechend zu bilden, sind positive und negative Werte der früheren η -Leiter zu vertauschen. Zu diesem Behufe sind die beiden η -Leitern mit den Zeigern (u) bzw. (v), also $\eta_{(u)}$ und $\eta_{(v)}$ versehen worden.

Wie leicht ersichtlich, kann die Bildung von u_{v+1} und v_{v+1} , also schliesslich von w_n , in *einer* Tafel erfolgen, da die ξ und $\eta_{(u)}$ -Leitern zusammenfallen, daher auf dem einen Ufer der waagrechten Mittelleiter Platz finden, während deren zweites die $\eta_{(v)}$ -Leiter trägt. Wie ersichtlich, ist auch hier die linke Leiter bloss Zapfenlinie.

Abb. 4 zeigt das *Beispiel*:

$$w_1 = (2 + i)z + 3 + 2i$$

für $z = 1 + 2i$. Es ergibt sich: $w_1 = 3 + 7i$.

Anmerkungen: 1) Der Gedanke, die Nomographie mit dem gewöhnlichen « Graphischen Rechnen » zu koppeln, ist im vorliegenden Fall nicht neu. Vgl. hierzu (5), S. 254 und 286 (Verfahren von FARID BOULAD). Wie ich in einigen Arbeiten (2), (3), (4) zeigen konnte, ist diese auf nomographischer

Grundlage beruhende Weiterbildung des gewöhnlichen « Graphischen Rechnens », die ich mit dem Namen « Nomographisch-graphisches Rechnen » belegt habe und für die sich übrigens insbesondere in den technischen Wissenschaften verschiedene Sonderfälle vorfinden, eine sehr wesentliche Erwei-

Beispiel: $w_1 = (2+i)z + (3+2i)$ für $z = 1+2i$: $w_1 = 3+7i$

Abb. 4

terung der Nomographie. Es ist daher in diesem Sinne die von M. D'OCAGNE (6) vorgeschlagene Einteilung der geometrischen und mechanischen Rechenverfahren durch einen, zwischen Punkt 4 (Calcul nomographique) und 5 (Calcul nomomécanique) einzuschaltenden weiteren Punkt « Calcul nomographographique » zu vervollständigen.

2) Wie nur kurz erwähnt sei, kann das Vorstehende ohne wesentliche Schwierigkeiten auch für kompliziertere derartige Fälle, ferner z. B. zur Summenbildung unendlicher Reihen auf nomographisch-graphischem Wege herangezogen werden, worauf aber nicht weiter eingegangen sei.

SCHRIFTTUM

- 1 - H. BEHMANN, *Zur graphischen Behandlung der ganzen rationalen Funktion*. « Z. f. angewandte Math. u. Mechanik », 11 (1931), H. 6, S. 463.
 - 2 - A. FISCHER, *Ueber eine Anwendung des nomographisch-graphischen Rechnens auf eine Aufgabe aus der technischen Schwingungslehre*. « HDI-Mitteilungen des Hauptvereines deutscher Ingenieure in der Tschechoslowakischen Rep. », 1932, H. 14.
 - 3 - A. FISCHER, *Graphische Ermittlung der Scheinleistungsdauerlinie*. (Zuschrift zur gleichnamigen Arbeit von H. KUNZE). « Elektrotechnik u. Maschinenbau », 1932, H. 45.
 - 4 - A. FISCHER, *Ueber das allgemeine « Integralrelief » zur nomographisch-graphischen Lösung von Randwertaufgaben gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung - das reelle Gegenstück zum « Sinus- und Tangensrelief in der Elektrotechnik »*, von FRITZ EMDE, « HDI-Mitt. », 1933, H. 1/2.
 - 5 - M. D'OCAGNE, *Calcul graphique et Nomographie*, 3^e éd., Paris, 1924.
 - 6 - M. D'OCAGNE, *Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*, 3^e éd., Paris, 1928.
-