Nuovo teorema dei $2n$ momenti e sua espressione sintetica.

Memoria di LUIGI SOBRERO ⁽¹⁾ (a Roma).

Sunto. - *La determinazione degli sforzi in una travatura reticolare iperstatica con aste mutuamente incastrate agli estremi, viene di solito affrontata ricorrendo al « teorema dei quattro momenti »: il quale, com'è ben noto, collega fra loro i momenti di estremità di due aste consecutive e gli spostamenti dei nodi di quelle aste. Momenti e spostamenti non interessano in egual misura, poichè soltanto i primi intervengono nella verifica di stabilità della travatura. Atteso dunque che gli spostamenti figurano nel problema come incognite ausiliarie, ci siam proposti di eliminarli addirittura nello studio della travatura, sostituendo al teorema dei quattro momenti, una nuova relazione la quale interessi i soli momenti di estremità. Di questa nuova relazione abbiamo dato una facile interpretazione geometrica, atta a semplificarne l'uso. Al testo fa seguito un esempio di applicazione ad un problema concreto.*

§ 1. Scopo della trattazione. — Si consideri un generico sistema reticolare, a vincoli esterni staticamente determinabili o meno, formato con aste rettilinee mutuamente incastrate nei punti nodali e caricato nel modo più generico (e cioè tanto ai nodi come alle aste). Per lo studio di un sistema reticolare di questo tipo occorre, in via generica:

introdurre come incognite *gli spostamenti* (sia orizzontali che verticali) dei singoli nodi ed *i momenti* di estremità delle singole aste;

applicare ad ogni coppia di aste concorrenti ad un medesimo nodo il teorema dei quattro momenti (nella sua espressione più completa che tien conto degli spostamenti nodali), così da ottenere una serie di equazioni le quali colleghino gli spostamenti nodali coi momenti di estremità;

ed infine eliminare fra queste equazioni gli spostamenti, così da ottenere un secondo gruppo di equazioni fra i soli momenti di estremità.

Dette equazioni, unitamente a quelle che risultano dalle condizioni statiche di equilibrio dei nodi e delle aste, consentono di ricavare i momenti terminali delle aste e quindi tutte le altre sollecitazioni interne del sistema.

Il procedimento indicato, al quale salvo poche varianti si attengono i

⁽¹⁾ La presente ricerca fu presentata nella mia tesi di laurea alla R. Scuola d'Ingegneria di Roma, nel Novembre 1931.

trattatisti ⁽¹⁾, si semplifica notevolmente quando le particolari condizioni del carico (simmetria od antisimmetria) e la particolare forma della struttura (simmetria rispetto ad uno o più assi) forniscano « a priori » relazioni di eguaglianza fra alcuni dei momenti terminali. Resta però indiscutibile che il procedimento è di solito assai laborioso; ed ancor più lo diventa quando vengano a mancare le suindicate ipotesi semplificative.

In considerazione di ciò appare utile un metodo il quale, senza imporre limitazione alcuna alla forma delle maglie costituenti la travatura, al numero di lati delle maglie, ed alle condizioni di carico, direttamente permetta di scrivere quelle equazioni *fra i soli momenti terminali* che nel procedimento generale dianzi esposto vengono ottenute con la eliminazione degli spostamenti. A ciò tendono appunto le considerazioni dei seguenti paragrafi.

Vogliamo anche osservare che, mentre nello studio delle travature reticolari, si tien conto, in genere, delle sole deformazioni dovute ai momenti flettenti, il nostro metodo tien conto anche delle deformazioni dovute agli sforzi di taglio. Che tali deformazioni abbiano qualche influenza sui risultati apparirà dall'esempio esposto a fine della Memoria.

§ 2. **Richiamo ad alcune formule di deformazione.** — Principalmente allo scopo di introdurre le notazioni ci si consentirà di richiamare alcune formule, di cui dovremo in seguito far uso, relative alle deformazioni indotte, da carichi direttamente applicati, in una trave appoggiata agli estremi. Nello studio di tale deformazione terremo conto non solo dell'azione dei momenti flettenti ma anche di quella (solitamente trascurata) degli sforzi taglienti e longitudinali.

Una trave A_1A_2 , appoggiata agli estremi (v. fig. 1) si trovi sottoposta:

a due momenti di estremità μ_1 e μ_2 (che assumeremo positivi se capaci di indurre *trazione* nelle fibre *superiori* della trave);

Fig. 1

ad un gruppo di carichi P , direttamente applicati con arbitraria intensità e direzione.

⁽¹⁾ Vedere ad es. le trattazioni svolte intorno alla « trave Vierendeel » dai sigg. CIAPPI, GIANNELLI e REICH (Vierendeelträger mit parallelen Gurtungen).

Si vogliono determinare le rotazioni γ_1 e γ_2 delle sezioni estreme della trave nelle condizioni di carico ora stabilite. Tali rotazioni si intenderanno positive se concordi col senso già stabilito come positivo pei momenti μ_1 e μ_2 .

Osserviamo allo scopo che il principio di sovrapposizione degli effetti ci autorizza a considerare la deformazione della trave, nelle condizioni di carico proposte, come somma di due deformazioni parziali: quella indotta dai soli momenti μ_1 e μ_2 di estremità, e quella indotta dai carichi P . Se pertanto indichiamo con γ_1' e γ_2' le rotazioni che si avrebbero nelle sezioni estreme quando agissero i soli momenti μ_1 e μ_2 , e con γ_1'' e γ_2'' le rotazioni che si avrebbero quando agissero i soli carichi P , risulterà

$$(1) \quad \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_1' + \gamma_1'' \\ \gamma_2 = \gamma_2' + \gamma_2'' \end{cases}$$

Cominciamo col valutare le rotazioni γ_1' e γ_2' . Allo scopo è conveniente l'applicazione del teorema di CASTIGLIANO, il quale consente, com'è ben noto, di tener conto, in modo completo, delle deformazioni indotte dagli sforzi di flessione, pressione e taglio sollecitanti la trave. Indichiamo:

con M il momento flettente della trave in una sezione generica S di ascissa x rispetto all'estremo A_1 : (momento che si assumerà, al solito, positivo se di tal verso da produrre *trazione* nelle fibre superiori della trave);

con N lo sforzo longitudinale agente sulla sezione S : (sforzo che si assumerà positivo se di *compressione*);

con T lo sforzo tagliante che agisce sulla sezione S : (sforzo che si assumerà come positivo se tenderà a sollevare la sezione S rispetto alle sezioni di ascissa immediatamente inferiore);

con l la distanza fra gli appoggi;

con Ω l'area e

con I il momento d'inerzia della sezione della trave;

con E e G i moduli di elasticità per la compressione e per il taglio;

con κ il coefficiente di forma per il taglio.

È allora ben noto che il lavoro interno di deformazione L della trave si esprime mediante la formula:

$$(2) \quad L = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{\kappa T^2}{G\Omega} \right) dx.$$

Nell'ipotesi che nella trave agiscano i soli momenti terminali, il momento M varia con legge lineare fra i valori estremi μ_1 e μ_2 , lo sforzo longitudinale N

è dovunque nullo e lo sforzo tagliante T è costante ed eguale alla reazione dell'appoggio A_2 . Si ha cioè

$$M = \frac{(l-x)\mu_1 + x\mu_2}{l} \quad N = 0 \quad T = \frac{\mu_2 - \mu_1}{l}$$

le quali consentono, insieme con la (2), di ricavare il lavoro interno di deformazione in funzione dei momenti μ_1 e μ_2 .

Derivando questa espressione di L rispetto a μ_1 si ottiene (teorema di CASTIGLIANO) la rotazione γ_1' :

$$\gamma_1' = \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = \int_0^l \left(\frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial \mu_1} + \frac{\kappa}{G\Omega} T \frac{\partial T}{\partial \mu_1} \right) dx.$$

Posto per semplicità $\frac{l}{EI} = \Phi$ (peso elastico della trave) ed $\frac{EI}{G\Omega} \kappa = \rho^2$ (dove ρ ha le dimensioni di una lunghezza) si ricava, a calcoli eseguiti:

$$\gamma_1' = \frac{\Phi}{6} \left(2\mu_1 + \mu_2 + 6 \left[\frac{\rho}{l} \right]^2 [\mu_1 - \mu_2] \right)$$

e analogamente

$$\gamma_2' = \frac{\Phi}{6} \left(2\mu_2 + \mu_1 + 6 \left[\frac{\rho}{l} \right]^2 [\mu_2 - \mu_1] \right)$$

le quali possono anche scriversi:

$$\begin{cases} \gamma_1' = \frac{\Phi}{2} (a\mu_1 + b\mu_2) \\ \gamma_2' = \frac{\Phi}{2} (a\mu_2 + b\mu_1) \end{cases} \quad \left(a = \frac{2}{3} + 2 \left[\frac{\rho}{l} \right]^2; \quad b = \frac{1}{3} - 2 \left[\frac{\rho}{l} \right]^2 \right).$$

Queste formule mettono in evidenza che le rotazioni γ_1' e γ_2' , a parte il fattore $\frac{\Phi}{2}$, possono intendersi come medie ponderate (con pesi a e b dipendenti esclusivamente dalle dimensioni e dal materiale di cui è formata la trave) dei due momenti terminali. Se si prescinde dalle forze di taglio (e cioè si pone $\rho/l = 0$) i pesi a e b valgono rispettivamente $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$.

Quando la trave è sottoposta, oltrechè ai momenti terminali μ_1 e μ_2 anche ai carichi P , le rotazioni γ_1 e γ_2 delle sezioni estreme risulteranno

espresse, per le formule (1), da:

$$(3) \quad \begin{cases} \gamma_1 = \frac{\Phi}{2} (a\mu_1 + b\mu_2) + \gamma_1'' \\ \gamma_2 = \frac{\Phi}{2} (a\mu_2 + b\mu_1) + \gamma_2'' \end{cases}$$

dove γ_1'' e γ_2'' , ricordiamo, sono le rotazioni che si produrrebbero nelle sezioni estreme quando agissero sulla trave i soli carichi P . A noi non interessa esplicitare le espressioni di γ_1'' a γ_2'' in funzione dell'entità e della posizione dei carichi P . Solo vogliamo mettere in evidenza (col WINKLER) una notevole interpretazione meccanica di γ_1'' e γ_2'' . Supponiamo che la trave sia sottoposta, oltrechè ai carichi P , a due momenti di estremità $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ scelti in maniera che risultino nulle le rotazioni γ_1 e γ_2 delle sezioni estreme (cosicchè la trave, agli effetti statici possa ritenersi come incastrata agli estremi). Risulterà allora dalle formule ultime scritte

$$\begin{cases} \frac{\Phi}{2} (a\bar{\mu}_1 + b\bar{\mu}_2) + \gamma_1'' = 0 \\ \frac{\Phi}{2} (a\bar{\mu}_2 + b\bar{\mu}_1) + \gamma_2'' = 0 \end{cases}$$

ossia

$$(4) \quad \begin{cases} \gamma_1'' = -\frac{\Phi}{2} (a\bar{\mu}_1 + b\bar{\mu}_2) \\ \gamma_2'' = -\frac{\Phi}{2} (a\bar{\mu}_2 + b\bar{\mu}_1) \end{cases}$$

la quale stabilisce una relazione semplice fra le rotazioni indotte dai carichi P sopra una trave *semplicemente* appoggiata agli estremi ed i momenti virtuali (*d'incastro*) $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ che i medesimi carichi P produrrebbero sulla trave supposta incastrata agli estremi. Introducendo le espressioni (4) nelle formule (3):

$$(5) \quad \begin{cases} \gamma_1 = \frac{\Phi}{2} (a\mu_1 + b\mu_2) - \frac{\Phi}{2} (a\bar{\mu}_1 + b\bar{\mu}_2) \\ \gamma_2 = \frac{\Phi}{2} (a\mu_2 + b\mu_1) - \frac{\Phi}{2} (a\bar{\mu}_2 + b\bar{\mu}_1) \end{cases}$$

le quali rispondono al problema propostoci al principio del paragrafo.

§ 3. Teorema dei quattro momenti (con riguardo alle deformazioni di flessione e taglio). — Di una travatura reticolare scarica, di forma qualunque,

si prendano in considerazione due aste rettilinee A_1A_2 e A_2A_3 mutuamente incastrate all'estremità comune A_2 (v. fig. 2). Caricata la travatura, le aste considerate si deformeranno ed i punti nodali si trasferiranno rispettivamente in A'_1 , A'_2 ed A'_3 . Il teorema dei quattro momenti (che noi dedurremo nella

Fig. 2

sua forma più completa che tien conto sia delle deformazioni indotte dai momenti flettenti come di quelle indotte dagli sforzi taglienti) stabilisce una relazione semplice fra gli spostamenti dei nodi A_1 , A_2 , A_3 ed i momenti di estremità delle due aste A_1A_2 e A_2A_3 .

Indichiamo:

con Φ_{12} e Φ_{23} (ovvero, quando lo richieda la simmetria delle formule, con Φ_{21} e Φ_{32}) i pesi elastici delle aste A_1A_2 e A_2A_3 ;

con a_{12} e a_{23} , b_{12} e b_{23} i coefficienti a e b (v. § precedente) relativi alle due aste;

con α_2 l'angolo in A_2 formato fra le due aste a travatura scarica;

con α'_2 l'angolo fra le congiungenti (rettilinee) $A'_1A'_2$ ed $A'_2A'_3$ a deformazione avvenuta;

con $\Delta\alpha_2$ l'angolo $\alpha'_2 - \alpha_2$, e cioè l'aumento (in radianti) dell'angolo formato fra la congiungente i punti A_1 e A_2 e la congiungente i punti A_2 e A_3 per effetto della deformazione della travatura.

Diciamo ancora:

μ_{12} , μ_{21} ; μ_{23} , μ_{32} i momenti generati dal carico nelle sezioni terminali delle aste A_{12} e A_{23} . Detti momenti verranno assunti come positivi quando produrranno *trazione* nelle fibre delle aste A_1A_2 e A_2A_3 esterne all'angolo α_2 ;

$\bar{\mu}_{12}$, $\bar{\mu}_{21}$; $\bar{\mu}_{23}$, $\bar{\mu}_{32}$ i momenti d'incastro relativi alle aste A_{12} , A_{23} ed ai carichi rispettivamente applicati a tali aste;

γ_{12} e γ_{21} le rotazioni estreme dell'asta A_1A_2 rispetto alla congiungente

le sezioni estreme (tali rotazioni verranno assunte come positive se concordi coi sensi positivi di μ_{12} e μ_{21});

γ_{23} e γ_{32} le rotazioni analoghe relative all'asta A_2A_3 .

Supponendo che le aste A_1A_2 e A_2A_3 siano perfettamente incastrate fra loro nel punto nodale comune, risulta facilmente (v. fig. 2):

$$\alpha_2 = \alpha_2' + \gamma_{21} + \gamma_{23}$$

da cui

$$\alpha_2' - \alpha_2 = -(\gamma_{21} + \gamma_{23})$$

ossia

$$\Delta\alpha_2 = -(\gamma_{21} + \gamma_{23}).$$

Sostituendo a γ_{21} e γ_{23} le espressioni determinate per tali grandezze nel precedente paragrafo si perviene alla relazione:

$$(6) \quad \Delta\alpha_2 = -\frac{\Phi_{12}}{2}(a_{21}\mu_{21} + b_{12}\mu_{12}) - \frac{\Phi_{12}}{2}(a_{21}\bar{\mu}_{21} + b_{12}\bar{\mu}_{12}) + \\ -\frac{\Phi_{23}}{2}(a_{23}\mu_{23} + b_{32}\mu_{32}) + \frac{\Phi_{23}}{2}(a_{23}\bar{\mu}_{23} + b_{32}\bar{\mu}_{32}).$$

La relazione scritta costituisce l'espressione richiesta del teorema dei quattro momenti.

§ 4. Una relazione di geometria differenziale. — Nel piano cartesiano xy si abbia un poligono di n lati. Assegnato un certo senso positivo di percorrenza al contorno del poligono e numerati i vertici del medesimo a partire da uno qualunque, diciamo:

$y_1, y_2, \dots, y_n$ le ordinate dei vertici successivi;

$l_{12}, l_{23}, \dots, l_{n, n+1}$ le lunghezze dei lati rispettivamente compresi fra i vertici 1 e 2, 2 e 3, ..., n ed 1;

$\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{n, n+1}$ gli angoli compresi fra la direzione positiva dell'asse delle x e le direzioni positive dei lati $l_{12}, l_{23}, \dots, l_{n, n+1}$.

Poichè la somma delle proiezioni (prese col debito segno) dei singoli lati del poligono sull'asse x vale zero, potremo scrivere:

$$\sum_{i=1}^n l_{i, i+1} \cos \alpha_{i, i+1} = 0.$$

Immaginiamo ora che il poligono subisca una deformazione infinitesima, la quale non alteri la lunghezza dei lati, ma incrementi gli angoli $\alpha_{12}, \dots, \alpha_{n, n+1}$ prima definiti di certe quantità infinitesime $d\alpha_{12}, \dots, d\alpha_{n, n+1}$. Poichè la somma delle proiezioni dei lati del poligono sull'asse x continua, anche a deforma-

zione avvenuta, a mantenersi eguale a zero, dovrà risultare:

$$d \sum_{i=1}^n l_{i, i+1} \cos \alpha_{i, i+1} = 0$$

ossia

$$\sum_{i=1}^n l_{i, i+1} \operatorname{sen} \alpha_{i, i+1} \cdot d\alpha_{i, i+1} = 0$$

relazione alla quale devono necessariamente soddisfare, nelle ipotesi suindicate, gli incrementi angolari $d\alpha_{i, i+1}$.

Osserviamo che il generico prodotto $l_{i, i+1} \operatorname{sen} \alpha_{i, i+1}$ rappresenta la proiezione sull'asse y del lato $l_{i, i+1}$ del poligono, o, se si vuole, la differenza $y_{i+1} - y_i$ fra le ordinate estreme del medesimo lato. Cosicchè la relazione differenziale soprascritta può anche mettersi nella forma:

$$\sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i) d\alpha_{i, i+1} = 0$$

o, se si vuole,

$$\sum_{i=1}^n y_{i+1} d\alpha_{i, i+1} - \sum_{i=1}^n y_i d\alpha_{i, i+1} = 0.$$

Delle due sommatorie la prima può anche scriversi, mediante una formale sostituzione di indici: $\sum_{i=2}^{n+1} y_i d\alpha_{i-1, i}$, o, se si vuole, $\sum_{i=1}^n y_i d\alpha_{i-1, i}$ purchè si venga di porre $d\alpha_{01} = d\alpha_{n, n+1}$. Con ciò risulta

$$\sum_{i=1}^n y_i d\alpha_{i-1, i} - \sum_{i=1}^n y_i d\alpha_{i, i+1} = 0$$

ossia

$$\sum_{i=1}^n y_i (d\alpha_{i-1, i} - d\alpha_{i, i+1}) = 0$$

o anche

$$\sum_{i=1}^n y_i d(\alpha_{i-1, i} - \alpha_{i, i+1}) = 0.$$

La differenza $d(\alpha_{i-1, i} - \alpha_{i, i+1})$ rappresenta (a parte il segno) l'incremento che subisce, per effetto della deformazione del poligono, l'angolo compreso fra i due lati (orientati) $l_{i-1, i}$ ed $l_{i, i+1}$. Indicato pertanto questo incremento con $d\alpha_i$:

$$d\alpha_i = d(\alpha_{i, i+1} - \alpha_{i-1, i})$$

la formula precedente si scriverà

$$\sum y_i d\alpha_i = 0$$

la quale potrà ritenersi valida anche per deformazioni finite purchè sufficientemente piccole (p. es. per le deformazioni elastiche). In considerazione

di ciò la scriveremo nella forma:

$$(7) \quad \sum y_i \Delta \alpha_i = 0.$$

È appena necessario osservare che la (7) sussiste qualunque sia, nel piano del poligono la scelta degli assi coordinati. Se, in particolare, si fa tendere l'asse x verso la retta all'infinito la (7) diventa equivalente a

$$\sum \Delta \alpha_i = 0$$

di ovvia interpretazione geometrica.

§ 5. **Espressione generale del teorema dei 2n momenti.** — Si abbia una generica travatura reticolare, formata con tante aste rettilinee mutuamente incastrate nei punti nodali; e si consideri di questa travatura, una generica maglia, (e cioè un qualunque poligono chiuso, formato con aste della tra-

Fig. 3

vatura ⁽¹⁾). Assegnati ai lati della maglia un certo senso di percorrenza, e numerati ordinatamente i vertici, si dicano (v. fig. 3):

$V_1, \dots, V_n$ i punti nodali;

$y_1, \dots, y_n$ le ordinate dei punti nodali rispetto ad un qualunque sistema di assi coordinati di riferimento;

$S_{i,i-1}$ ed $S_{i,i+1}$ due sezioni praticate in immediata prossimità del vertice V_i sulle due aste $V_{i-1}V_i$ e V_iV_{i+1} concorrenti nel nodo. Si converrà

⁽¹⁾ Da notare che detto poligono potrebbe esser fornito di aste diagonali, ciò che tuttavia non invaliderebbe le nostre considerazioni.

inoltre di intendere con $S_{n, n+1}$ ed $S_{1,0}$ le sezioni dell'asta $V_{n,1}$ praticata in immediata prossimità dei vertici V_n e V_1 .

Seguendo le notazioni già indicate nel § 3 diciamo ancora:

$\Phi_{12}, \dots, \Phi_{n, n+1}$ i pesi elastici delle singole aste della maglia (colla solita convenzione di poter scrivere Φ_{21} , in luogo di Φ_{12} quando lo richieda la simmetria delle formule);

$a_{12}, \dots, a_{n, n+1}$; $b_{12}, \dots, b_{n, n+1}$; le costanti a e b relative alle singole aste;

$\mu_{i, i-1}$ e $\mu_{i, i+1}$ i momenti flettenti delle aste della travatura nelle sezioni S di indici corrispondenti;

$\bar{\mu}_{i, i-1}$ e $\bar{\mu}_{i, i+1}$ i momenti d'incastro delle singole aste nelle condizioni di carico alle quali esse si trovano sottoposte.

I momenti μ e $\bar{\mu}$ verranno assunti positivi se capaci di generare trazione nelle fibre *esterne* di ogni singola asta della maglia.

Per azione del carico la travatura si deforma e si modifica l'angolo formato fra la congiungente i punti nodali V_{i-1} e V_i e la congiungente i punti nodali V_i e V_{i+1} .

L'incremento $\Delta\alpha_i$ subito da un generico di tali angoli (quello corrispondente al vertice V_i) potrà esprimersi in funzione dei momenti μ e $\bar{\mu}$ relativi alle aste concorrenti in V_i mediante applicazione del teorema dei quattro momenti. Si ricava difatti dalla formula (6):

$$(8) \quad \Delta\alpha_i = -\frac{\Phi_{i-1,i}}{2}(a_{i,i-1}\mu_{i,i-1} + b_{i-1,i}\mu_{i-1,i}) + \frac{\Phi_{i-1,i}}{2}(a_{i,i-1}\bar{\mu}_{i,i-1} + b_{i-1,i}\bar{\mu}_{i-1,i}) + \\ -\frac{\Phi_{i,i+1}}{2}(a_{i,i+1}\mu_{i,i+1} + b_{i+1,i}\mu_{i+1,i}) + \frac{\Phi_{i,i+1}}{2}(a_{i,i+1}\bar{\mu}_{i,i+1} + b_{i+1,i}\bar{\mu}_{i+1,i}).$$

AmMESSO che nella deformazione della travatura le distanze fra i punti nodali non subiscano variazione apprezzabile di lunghezza (e che cioè siano trascurabili le deformazioni dovute agli sforzi longitudinali rispetto a quelle complessivamente dovute ai momenti flettenti ed agli sforzi taglienti) le deformazioni angolari $\Delta\alpha_i$ dovranno soddisfare alla relazione

$$\sum_{i=1}^n y_i \Delta\alpha_i = 0.$$

Tenendo conto della (8) si ottiene (dopo aver eliminato in tutta l'equazione il fattore $-\frac{1}{2}$):

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n y_i \{ \Phi_{i-1,i}(a_{i,i-1}\mu_{i,i-1} + b_{i-1,i}\mu_{i-1,i}) - \Phi_{i-1,i}(a_{i,i-1}\bar{\mu}_{i,i-1} + b_{i-1,i}\bar{\mu}_{i-1,i}) + \\ + \Phi_{i,i+1}(a_{i,i+1}\mu_{i,i+1} + b_{i+1,i}\mu_{i+1,i}) - \Phi_{i,i+1}(a_{i,i+1}\bar{\mu}_{i,i+1} + b_{i+1,i}\bar{\mu}_{i+1,i}) \} = 0$$

la quale collega i momenti di estremità delle aste della maglia con la forma geometrica della medesima.

La relazione scritta costituisce l'espressione più generale del teorema dei 2n momenti. In essa non compare più traccia degli spostamenti nodali.

§ 6. **Interpretazione meccanica del teorema.** — Attesa la complessità della formula (9) ci siamo preoccupati di semplificarne, almeno formalmente, l'espressione.

Allo scopo abbiamo presi in considerazione, nella formula detta, i termini contenenti un generico momento terminale, del tipo $\mu_{i, i+1}$. La somma di questi termini vale:

$$\begin{aligned} & \mu_{i, i+1}(\Phi_{i, i+1}a_{i, i+1}y_i + \Phi_{i, i+1}b_{i, i+1}y_{i+1}) \\ \text{ovvero} \\ (10) \quad & \mu_{i, i+1}\Phi_{i, i+1}(a_{i, i+1}y_i + b_{i, i+1}y_{i+1}). \end{aligned}$$

L'espressione fra parentesi è la media ponderale delle due ordinate y_i ed y_{i+1} , prese rispettivamente coi pesi $a_{i, i+1}$ e $b_{i, i+1}$, e rappresenta l'ordinata $y_{i, i+1}$ di un punto $P_{i, i+1}$ (v. fig. 3) che divide l'asta V_iV_{i+1} in due parti che danno fra loro come i numeri $b_{i, i+1}$ ed $a_{i, i+1}$. Note che siano le dimensioni longitudinali e trasversali delle singole aste (e quindi le grandezze $a_{i, i+1}$ e $b_{i, i+1}$) si possono subito determinare su di esse i punti $P_{i, i+1}$ e quindi le ordinate $y_{i, i+1}$. Introducendo le quali nell'espressione (9) si ottiene

$$\mu_{i, i+1}\Phi_{i, i+1}y_{i, i+1}.$$

Seguendo procedimento analogo si possono isolare dall'equazione (9) i termini contenenti un generico momento terminale del tipo $\mu_{i+1, i}$. La somma di questi termini vale

$$\mu_{i+1, i}\Phi_{i+1, i}y_{i+1, i}$$

dove $y_{i+1, i}$ è l'ordinata del punto $P_{i+1, i}$ (v. fig. 3) che divide l'asta V_iV_{i+1} in due parti proporzionali ai numeri $a_{i, i+1}$ e $b_{i, i+1}$. Allo stesso modo si procederà infine sui termini dell'equazione (9) contenenti momenti di incastro del tipo $\bar{\mu}_{i, i+1}$ o del tipo $\bar{\mu}_{i+1, i}$. Con ciò l'equazione (9) assume in definitiva l'aspetto:

$$\sum_{i=1}^n (\mu_{i, i+1}\Phi_{i, i+1}y_{i, i+1} + \mu_{i+1, i}\Phi_{i+1, i}y_{i+1, i} - \bar{\mu}_{i, i+1}\Phi_{i, i+1}y_{i, i+1} - \bar{\mu}_{i+1, i}\Phi_{i+1, i}y_{i+1, i}) = 0.$$

Indicati brevemente: con $q_{i, i+1}$ il prodotto fra il generico momento $\mu_{i, i+1}$ ed il peso elastico $\Phi_{i, i+1}$ dell'asta cui è applicato tale momento; con $q_{i+1, i}$, $\bar{q}_{i, i+1}$, $\bar{q}_{i+1, i}$ i prodotti analoghi di evidente significato, l'ultima relazione può

ancora mettersi nella forma

$$\sum_{i=1}^n (q_{i, i+1} y_{i, i+1} + q_{i+1, i} y_{i+1, i} - \bar{q}_{i, i+1} y_{i, i+1} - \bar{q}_{i+1, i} y_{i+1, i}) = 0$$

ovvero nell'altra equivalente

$$\sum_{i=1}^n (q_{i, i+1} y_{i, i+1} + q_{i+1, i} y_{i+1, i}) = \sum_{i=1}^n (\bar{q}_{i, i+1} y_{i, i+1} + \bar{q}_{i+1, i} y_{i+1, i}).$$

La somma che compare a primo membro rappresenta il momento statico S , rispetto all'asse x , delle *masse fittizie* $q_{i, i+1}$ e $q_{i+1, i}$, supposte rispettivamente concentrate nei punti $P_{i, i+1}$ e $P_{i+1, i}$ (che denomineremo *punti fittizi*). La somma a secondo membro rappresenta il momento statico $\bar{S}$ delle masse $\bar{q}_{i, i+1}$ e $\bar{q}_{i+1, i}$ applicate nei medesimi punti fittizi. Talchè si potrà scrivere brevemente:

$$S = \bar{S}.$$

Relazione cui si può dare l'enunciato seguente:

Il momento statico, rispetto ad un asse qualunque, delle masse fittizie dei momenti di estremità, concentrate nei relativi punti fittizi, risulta eguale al momento statico, rispetto al medesimo asse, delle masse fittizie dei momenti d'incastro concentrate anch'esse nei rispettivi punti fittizi.

Tenuto poi conto che la scelta dell'asse di riferimento è assolutamente arbitraria potremo addirittura affermare che:

le masse fittizie dei momenti di estremità (concentrate nei rispettivi punti fittizi) costituiscono un insieme equivalente a quello delle masse fittizie dei momenti d'incastro (anch'esse concentrate nei rispettivi punti fittizi).

Dove due sistemi di masse si diranno equivalenti quando avranno momento statico eguale rispetto ad una qualsiasi retta del piano.

Se la travatura è caricata solamente ai nodi si annulla i momenti d'incastro $\bar{\mu}$ ed il momento $\bar{S}$. Risulta allora:

$$S = 0$$

e cioè *il sistema delle masse fittizie dei momenti di estremità risulta equivalente a zero* (e cioè ha momento nullo rispetto a una qualsiasi retta del piano). Osserviamo ancora che il teorema generale può mettersi nella forma: *le masse fittizie dei momenti di estremità e le masse fittizie dei momenti d'incastro devono avere eguale somma ed eguale baricentro.*

OSSERVAZIONE. — Da notare che per l'equivalenza (nel senso prima stabilito) di due sistemi di masse, basta che questi abbiano egual momento statico rispetto a *tre* rette del piano non concorrenti in un punto. Per ogni

maglia della travatura si possono pertanto ricavare *tre* (e non più di tante) relazioni indipendenti fra le masse fittizie q e $\bar{q}$, e cioè fra i momenti μ e $\bar{\mu}$.

§ 7. **Come si applichi il teorema alla risoluzione dei telai iperstatici.** — Ci chiediamo anzitutto: è sufficiente l'applicazione del teorema dei $2n$ momenti (insieme con quella delle equazioni dell'equilibrio) per la risoluzione di una travatura reticolare? Se la travatura è isostatica nei riguardi dei vincoli esterni, la risposta è certo affermativa. Osserviamo difatti che un telaio generico presenta tre incognite iperstatiche (interne) per ogni maglia. E poichè per ogni maglia noi possiamo scrivere, in applicazione al nostro teorema, appunto tre equazioni indipendenti, le incognite iperstatiche eguagliano, in numero, le equazioni di elasticità e risultano perfettamente determinabili.

Non è più così se il sistema presenta anche qualche incognita iperstatica vincolare; ma si osserverà che se i vincoli esterni sono costituiti da incastri, si possono ancora usare, per la ricerca delle sollecitazioni, i teoremi dei $2n$ momenti. Basterà allo scopo liberare il sistema dagli incastri, riunendo fra di loro tutte le estremità delle aste prima vincolate mediante una trave ausiliaria *rigida*, a forma di poligonale aperta e fissata al suolo ad una sua estremità. Con ciò, mentre non vengono alterate le condizioni statiche del sistema, si riesce a rendere isostatici i vincoli esterni senza complicare minimamente il problema. Osserviamo difatti che a tali aste ausiliarie rigide, e cioè di peso elastico nullo, competono in ogni caso masse fittizie nulle. Le loro sollecitazioni non compaiono affatto nell'espressione del teorema dei $2n$ momenti.

§ 8. **Precisazione circa la posizione delle masse fittizie.** — Le masse fittizie $q = \Phi\mu$ e $\bar{q} = \Phi\bar{\mu}$ si devono supporre concentrate in punti $P_{i,i+1}$ e $P_{i+1,i}$ i quali dividano l'asta generica $V_i V_{i+1}$ in due parti che stiano fra loro come i numeri

$$b_{i,i+1} \quad \text{ed} \quad a_{i,i+1}$$

ovvero come

$$a_{i,i+1} \quad \text{e} \quad b_{i,i+1}.$$

La distanza d dei punti $P_{i,i+1}$ e $P_{i+1,i}$ dei rispettivi estremi dell'asta starà alla lunghezza $l_{i,i+1}$ dell'asta medesima nel rapporto

$$b_{i,i+1}:1.$$

Risulterà dunque, tenendo conto dell'espressione del coefficiente $b_{i,i+1}$ (v. § 2)

$$d = \frac{l_{i,i+1}}{3} - 2 \left(\frac{\rho_{i,i+1}}{l_{i,i+1}} \right)^2 l_{i,i+1}$$

o anche

$$d = \frac{l_{i,i+1}}{3} - 2 \frac{\rho_{i,i+1}}{l_{i,i+1}} \rho_{i,i+1}.$$

I punti $P_{i,i+1}$ e $P_{i+1,i}$ si trovano dunque compresi nei terzi estremi dell'asta, ad una distanza Δ dalle estremità del terzo medio che vale:

$$\Delta = 2 \frac{\rho_{i,i+1}}{l_{i,i+1}} \rho_{i,i+1}.$$

Se le forze di taglio risultassero di effetto trascurabile (e cioè ρ fosse molto piccolo riguardo ad l) si potrebbe porre

$$d = \frac{l_{i,i+1}}{3}.$$

Nel qual caso i punti fittizi cadrebbero nelle estremità del terzo medio dell'asta.

§ 9. Esempio di applicazione del teorema. — Unicamente allo scopo di mostrare l'applicazione del nostro teorema ad un esempio concreto, ci proponiamo di studiare il portale iperstatico schematizzato nella fig. 4.

Fig. 4

Supposto il carico verticale e simmetrico risulteranno eguali e dello stesso segno (e cioè inducenti ambedue trazione od ambedue compressione nelle fibre esterne del portale) i momenti che agiscono sopra sezioni simmetriche rispetto alla verticale di messeria. Diciamo pertanto:

μ_1 il momento di base dei montanti;

μ_2 il momento di sommità dei medesimi.

I momenti di estremità della traversa valgono naturalmente anch'essi μ_2 . Diciamo ancora:

h l'altezza del portale;

Φ_h e Φ_l i pesi elastici dei montanti e della traversa;

Δ_h il valore di Δ (v. § prec.) relativo al montante.

Determinati i punti fittizi e concentrate in essi le masse fittizie, si esprima che le masse fittizie dei momenti di estremità devono aver momento nullo rispetto alla traversa superiore. Si otterrà:

$$\Phi_h \mu_2 \left(\frac{h}{3} - \Delta_h \right) + \Phi_h \mu_2 \left(\frac{2}{3} h + \Delta_h \right) = 0$$

da cui

$$(11) \quad \mu_1 = -\frac{1}{2} \frac{1 - \frac{3\Delta_h}{h}}{1 + \frac{3\Delta_h}{2h}} \mu_2.$$

Esprimendo poi che la somma delle masse fittizie q deve essere eguale alla somma delle masse fittizie $\bar{q}$ si avrà:

$$(12) \quad \Phi_h(\mu_1 + \mu_2) + \Phi_l \mu_2 = \Phi_l \bar{\mu}_2.$$

Dalla (11) e dalla (12):

$$\mu_2 \left[1 + \frac{\Phi_h}{\Phi_l} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{3\Delta_h}{h}}{1 + \frac{3\Delta_h}{2h}} \right) \right] = \bar{\mu}_2.$$

Attesa la piccolezza del rapporto $\frac{\Delta_h}{h}$ si potrà, nella formula precedente, sostituire alla frazione $\frac{1 - 3\Delta_h/\Delta}{1 + 3\Delta_h/2\Delta}$ i primi due termini del suo sviluppo in serie. Con che, posto $\frac{\Phi_h}{\Phi_l} = \varphi$ si ottiene:

$$\mu_2 = \frac{\bar{\mu}_2}{1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4} \frac{\Delta_h}{h} \right) \varphi}.$$

Se si trascura la deformazione dovuta al taglio (e cioè si pone $\Delta_h = 0$) si cade nella formula (ben nota):

$$\mu_2 = \frac{\bar{\mu}_2}{1 + \frac{1}{2} \varphi}.$$