Sur l'ordre de planéité des espaces plongés.

Par M. St. Golab (Cracovie).

La géométrie euclidienne occupe, parmi les autres géométries, une place tellement spéciale que beaucoup de définitions et de théoremes élémentaires propres à la géométrie euclidienne ou bien ne peuvent être généralisés du tout aux autres géométries ou bien, si c'est possible, alors pas toujours dans une voie directe. Voici l'exemple. Soit X_m un espace à m dimensions plongé dans l'espace euclidien à n dimensions E_n. En « hérissant » X_m on obtient un espace à connexion affine A_m. La connexion forcée (*) dans A_m dépend, en général, du hérissement ([1]). Elle n'en dépend cependant pas si X_m présente, par hasard, une variété totalement géodésique dans E_n; X_m est alors euclidien. On sait bien qu'en attachant à un point quelconque de E_n un système de m vecteurs indépendants, on obtient un seul E_m qui passe par le point donné et contient tous ces vecteurs. On sait aussi qu'il existe toujours des systèmes des coordonnées (x^i) dans E_n relativement auxquels les équations paramétriques de chaque E_m revêtent la forme

$$x^i = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^i t^k + \alpha_0^i \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{1}$$

où les α sont des constantes et t^k des paramètres indépendants.

On dit que l'espace X_n, plongé dans E_n, possède *l'ordre de planéité* r si 1°) X_m se laisse plonger dans un E_r qui à son tour est plongé dans E_n et si 2°) r est le plus petit nombre naturel jouissant de cette propriété $(m \leq r \leq n)$.

Il se pose le problème de savoir si et comment on peut généraliser cette notion aux espaces plongés dans l'espace non-euclidien L_n ([2]) qui est doué

(*) « Induzierte Uebertragung » d'après M. Schouten.

([1]) Cette notion a été introduite par M. H. Weyl, *Zur Infinitesimalgeometrie:* p-*dimensionale Fläche im* n-*dimensionalen Raum*, « Mathem. Zeitschr. », 12 (1922). 154-160, et appelée « Einspannung ». Le terme « hérissement » proposé par M. A. Hoborski correspond mieux, à mon avis, au sens de cette notion.

([2]) Nous désignons, d'après M. Schouten, par L_n l'espace à n dimensions dans lequel on a défini la connexion linéaire non nécessairement symétrique (affine).

exclusivement d'une connexion linéaire générale. Or ce problème est moins simple qu'il ne paraît, bien que l'on ait généralisé la notion des variétés totalement géodésiques aux espaces de ce genre. On dit notamment qu'un X_m plongé dans L_n est géodésique au point (x), si toutes les géodésiques de l'espace L_n qui passent par (x) et sont tangentes à une direction arbitraire de l'espace X_m issue du point (x) appartiennent à X_m [3]. L'espace X_m est appelé totalement géodésique s'il est géodésique en chaque point. La définition suivante: « L'espace X_m plongé dans L_n est dit posséder l'ordre de planéité r s'il existe un X_r qui est plongé dans L_n, est totalement géodésique et contient X_m etc. » ne serait pas pratiquement applicable dejà pour cette raison que, comme on le sait bien, l'hypothèse de l'existence des espaces X_m $(m < n)$ qui sont totalement géodésiques représente, en général, une restriction très avancée en ce qui concerne la nature de l'espace L_n [4]. En postulant même beaucoup moins et notamment que X_r soit géodésique exclusivement aux points de l'espace X_m nous serions aussi amenés à une définition généralisée inutile. Aussi inutile serait la définition postulant l'existence d'un système de coordonnées dans lequel les équations paramétriques de l'espace X_m pourraient être écrites sous la forme paramétrique linéaire (1).

Nous nous proposons d'établir, dans la note présente, une définition généralisant la notion en question et de donner des conditions nécessaires et suffisantes afin que un X_1 ait l'ordre de planéité égale à r.

Définition. — *Nous dirons qu'un espace* $\mathrm{X_m}$ *plongé dans un* $\mathrm{L_n}$ *possède l'ordre de planéité* r, *s'il existe un espace* $\mathrm{X_r}$ *possédant les propriétés suivantes:*

(2)
- 1°) $\mathrm{X_m} \subset \mathrm{X_r} \subset \mathrm{L_n}$ [5].
- 2°) *Tout vecteur contravariant de l'espace* $\mathrm{X_r}$ *dont l'origine se trouve dans* $\mathrm{X_m}$ *ne quitte pas* $\mathrm{X_r}$ *lorsqu'on le déplace parallèlement le long d'une courbe quelconque située dans* $\mathrm{X_m}$.
- 3°) r *est le plus petit nombre naturel jouissant de cette propriété.*

---

(3) Notion introduite par M. Hadamard, *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions*, « Bull. des Sc. Math. », 2-me serie, 25 (1901), 37-40.

(4) Pour $L_n = V_n$ (espace de Riemann) cf. le théorème de M. Schouten, *Ueber die konforme Abbildung* n-*dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung*, « Math. Zeitschr. », 11 (1921), p. 87. Voir aussi le travail de M. Bompiani, *Spazi Riemanniani luoghi di varietà totalmente geodetiche*, « Rend. di Palermo », 48 (1924), 121-134.

(5) $\alpha \subset \beta$ signifie que l'espace α est situé dans l'espace β.

On observe facilement que le nombre r ainsi défini existe toujours et est parfaitement déterminé (dans le cas le plus général on aura $r = n$). Le cas $r = m$ revient à ce que X_m soit totalement géodésique dans L_n (6).

THÉORÈME. — *Soit* $X_1 = C$ *une courbe régulière située dans un* L_n. *Désignons par* $\underset{1}{k}, \underset{2}{k}, \dots, \underset{p}{k}$ $(p \leq n-1)$ *ses courbures affines au sens de* HLAVATY (7). *Nous affirmons que l'ordre* r *de planéité de cette courbe est égale à* $p+1$ *où* p *est le nombre ordinal de la dernière courbure c.-à.-d.*

$$r = p + 1. \tag{3}$$

DÉMONSTRATION. — Remarquons d'abord que $r = 1$ exprime que notre courbe est géodésique, ce qui revient dans la suite à ce que $p = 0$. Nous pouvons donc, dans la suite, exclure de nos considérations le cas $p = 0$.

Supposons maintenant que s soit l'arc affine de la curbe C (8) et que

$$\left\{\begin{array}{l}\text{les courbures } \underset{j}{k} \text{ pour } j = 1, \dots, p \text{ sont bien déterminées;}\\ \text{la courbure } \underset{p+1}{k} \text{ n'existe pas.}\end{array}\right. \tag{4}$$

Si

$$x^i = x^i(s) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{5}$$

sont des équations paramétriques de la courbe C, nous posons (d'après HLAVATY)

$$\left\{\begin{array}{ll}\underset{1}{l^i} = \dfrac{dx^i}{ds} & (i = 1, \dots, n)\\ \underset{j}{l^i} = D \underset{j-1}{l^i} & (j = 2, \dots, p+1),\end{array}\right. \tag{6}$$

où D est le symbole de la dérivation covariante par rapport au paramètre s, c.-à.-d. on a

$$Dv^i = \frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{kj} v^k \frac{dx^j}{ds} \tag{7}$$

où les Γ^i_{kj} sont des paramètres de la connexion linéaire. En vertu de (4) les vecteurs

$$\underset{1}{\mathbf{l}}, \underset{2}{\mathbf{l}}, \dots, \underset{p}{\mathbf{l}}, \underset{p+1}{\mathbf{l}} \tag{8}$$

(6) Pour $L_n = V_n$ cf. E. BOMPIANI, l. c., (4), § 3. Voir aussi H. A. HAYDEN, *Sub-Spaces of a space with torsion*, « Proc. Lond. Math. Soc. », 34, Ser. 2 (1932), 27-50. Cf. en particulier 4, 1 (Definition of hyperplane), property B.

(7) V. HLAVATY, *Proprietà differenziali delle curve in un spazio a connessione lineare generale*, « Rend. di Palermo », 53 (1929), 365-388, § 11.

(8) V. HLAVATY, l. c., (7), § 10.

présentent en chaque point de la courbe C un système de vecteurs linéairement indépendants. Soit P un point arbitraire de C. Nous définirons d'une manière parfaitement déterminée un espace $X_p{}^*$ contenant le point P. Nous considérons à cet effet la totalité des vecteurs issus de P qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs

$$\underset{2}{\mathbf{l}}, \ldots, \underset{p+1}{\mathbf{l}} \tag{9}$$

et nous envisageons en plus l'ensemble-somme de toutes les géodésiques issues du point P et tangentes à un de ces vecteurs. Nous obtiendrons ainsi un espace que nous désignerons par $X_p{}^*$. En subordonnant à chaque point P de la courbe C l'espace ainsi défini $X_p{}^*$ nous obtiendrons $\infty^1 X_p{}^*$ qui forment un espace X_{p+1}. Cet espace X_{p+1} contiendera la courbe C. Soit donné, dans l'espace X_{p+1}, un vecteur arbitraire $\mathbf{v}$ dont l'origine se trouve dans C. Déplaçons-le parallèlement le long de C. Nous affirmons qu'au bout de ce déplacement il continuera à appartenir à X_{p+1}. Nous devons à cet effet établir l'existence de $p+1$ fonctions

$$\overset{j}{a}(s) \qquad (j=1, 2, \ldots, p+1) \tag{10}$$

pour lesquelles on ait

$$v^i(s) = \sum_{j=1}^{p+1} \overset{j}{a}(s)\underset{j}{l}{}^i(s) \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{11}$$

Il suffit de prouver l'existence des fonctions $\overset{j}{a}(s)$ vérifiant la relation

$$Dv^i = \sum_{j=1}^{p+1} D(\overset{j}{a}\underset{j}{l}{}^i) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{12}$$

quelles que soient les valeurs initiales $\overset{j}{a}(s_0)$. Mais on a d'après la définition

$$Dv^i(s) \equiv 0; \tag{13}$$

l'équation (12) prend donc la forme

$$\sum_{j=1}^{p+1}\left(\frac{d\overset{j}{a}}{ds}\underset{j}{\mathbf{l}} + \overset{j}{a}D\underset{j}{\mathbf{l}}\right) = 0 \ (^9). \tag{14}$$

Mais en vertu des relations

$$\left\{\begin{aligned} D\underset{j}{\mathbf{l}} &= \underset{j+1}{\mathbf{l}} \qquad\qquad (j=1, \ldots, p) \\ D\underset{p+1}{\mathbf{l}} &= \sum_{j=1}^{p} \underset{p+1-j}{k}\ \underset{j}{\mathbf{l}} \quad (^{10}) \end{aligned}\right. \tag{15}$$

[9] A cause de la simplicité, on a supprimé l'indice contravariant i.
[10] V. Hlavaty, l. c., (7), les formules (45).

l'équation (14) obtient la forme

$$\sum_{j=1}^{p+1}\left\{\frac{d\overset{j}{a}}{ds}+\overset{j-1}{a}+\overset{p+1}{a}\underset{p+1-j}{k}\right\}\underset{j}{\mathbf{l}}=0 \tag{16}$$
$$(\overset{0}{a}=0,\ \underset{0}{k}=0).$$

Les vecteurs (8) étant linéairement indépendants, l'équation (16) donne le système d'équations

$$\frac{d\overset{j}{a}}{ds}+\overset{j-1}{a}+\underset{p+1-j}{k}\overset{p+1}{a}=0 \qquad (j=1,2,\dots,p+1). \tag{17}$$

C'est un système de $p+1$ équations différentielles linéaires et homogènes du premier ordre à $p+1$ fonction inconnues (10). Il admet une solution unique quelque soient les valeurs initiales, ce qui prouve la relation (11). Ainsi nous avons démontré que l'ordre r de planéité de la courbe C satisfait à l'inégalité

$$r\leq p+1. \tag{18}$$

Avant de démontrer que $r=p+1$, nous démontrerons le suivant

Lemme. — Supposons qu'il existe un espace X_r vérifiant, par rapport à la courbe C ($C=X_1$, $m=1$) les conditions désignées par 1°) et 2°) dans (2). Nous affirmons qu'il existe alors un $q(\leq r)$ pour lequel on a

$$\underset{q}{k} \text{ n'existe pas } (^{11}). \tag{19}$$

Démonstration. — Observons d'abord que le vecteur tangent $\frac{dx^i}{ds}$ appartient à l'espace X_r. Construisons dans l'espace X_r, le long de la courbe C, un système local de réference composé de r vecteurs indépendants

$$\underset{1}{\mathbf{e}},\dots,\underset{r}{\mathbf{e}} \tag{20}$$

en posant

$$\underset{1}{e}{}^i=\frac{dx^i}{ds} \tag{21}$$

et en choisissant arbitrairement les autres vecteurs $\underset{2}{\mathbf{e}},\dots,\underset{r}{\mathbf{e}}$ dans X_r. Il découle de nos hypothèses que le système d'équations

$$\sum_{j=1}^{r}\left\{\frac{d\overset{j}{b}}{ds}\underset{j}{\mathbf{e}}+\overset{j}{b}D\underset{j}{\mathbf{e}}\right\}=0 \tag{22}$$

---

[11] Dans le cas particulier où $L_n=V_n$ et la courbe C est située dans un espace totalement géodésique V_r, le résultat de ce théorème a été énoncé par M. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann*, « Mém. des Sc. Math. », fasc. 9, Paris (1925), p. 40. Il n'est pas cependant clair à quoi se rapporte la phrase que l'on y trouve « La réciproque de ce théorème est vraie ».

possède une solution quelles que soient les valeurs initiales $\overset{j}{b}(s_0)$. En choisissant, en chaque point de la courbe C, un système de vecteurs

$$\underset{r+1}{\mathbf{e}}, \dots, \underset{n}{\mathbf{e}} \tag{23}$$

qui complété par le système (20) forme un système de vecteurs indépendants dans L_n, nous pouvons écrire

$$D\underset{j}{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{n} \overset{i}{\underset{j}{c}}\, \underset{i}{\mathbf{e}} \qquad (j = 1, \dots, r). \tag{24}$$

Les équations (22) prennent donc la forme

$$\sum_{j=1}^{r} \left\{ \frac{d\overset{j}{b}}{ds} + \sum_{k=1}^{r} \overset{k}{b}\, \overset{j}{\underset{k}{c}} \right\} \underset{j}{\mathbf{e}} + \sum_{j=r+1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{r} \overset{k}{b}\, \overset{j}{\underset{k}{c}} \right\} \underset{j}{\mathbf{e}} = 0. \tag{25}$$

En vertu de l'indépendance linéaire des vecteurs du système (20)+(23) nous avons en particulier

$$\sum_{k=1}^{r} \overset{k}{b}\, \overset{j}{\underset{k}{c}} = 0 \quad \text{pour} \quad j = r+1, \dots, n. \tag{26}$$

Les relations (26) étant vérifiées quelles que soient les valeurs initiales $\overset{j}{b}(s_0)$ nous obtenons

$$\overset{j}{\underset{k}{c}} = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, r;\; j = r+1, \dots, n, \tag{27}$$

ce qui donne au lieu de (24) une relation plus précise

$$D\underset{j}{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{r} \overset{i}{\underset{j}{c}}\, \underset{i}{\mathbf{e}} \qquad (j = 1, \dots, r). \tag{28}$$

De là, par les dérivations covariantes succesives, nous parvenons aux équations

$$D^t\underset{j}{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{r} \overset{ti}{\underset{j}{\omega}}\, \underset{i}{\mathbf{e}} \qquad [D^{t+1} = D(D^t)] \qquad \begin{bmatrix} t = 1, 2, \dots \\ j = 1, \dots, r \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Examinons en particulier ce que deviendront les équations (29) lorsqu'on posera $j = 1$, $t = 1, \dots, r$. Comme $\underset{1}{\mathbf{e}} = \underset{1}{\mathbf{l}}$ on a donc

$$D^t\underset{1}{\mathbf{e}} = \underset{t+1}{\mathbf{l}} \qquad (t = 1, \dots, r-1). \tag{30}$$

Envisageons le système d'équations vectorielles

$$\begin{cases} \underset{1}{\mathbf{l}} = \underset{1}{\mathbf{e}} \\ \underset{t+1}{\mathbf{l}} = \sum\limits_{i=1}^{r} \overset{ti}{\underset{1}{\omega}}\, \underset{i}{\mathbf{e}} \end{cases} \qquad (t = 1, \dots, r-1). \tag{31}$$

Un des deux cas suivants se presente: ou bien les vecteurs figurant dans les premiers membres de ce systeme sont linéairement dépendants et alors $\underset{q}{k}$ n'existe pas pour un $q < r$ [12], ou bien ils sont indépendants et dans ce cas le système (31) peut être résolu en $\underset{i}{\mathbf{e}}$:

$$\underset{i}{\mathbf{e}} = \sum_{j=1}^{r} \overset{j}{\underset{i}{\Omega}} \underset{j}{\mathbf{l}} \qquad (i = 1, \dots, r). \tag{32}$$

Cela étant, il s'ensuit des relations (28), (30) et (32) que

$$D\underset{r}{\mathbf{l}} = \sum_{j=1}^{r} \overset{j}{\alpha} \underset{j}{\mathbf{l}}. \tag{33}$$

Le vecteur $D\underset{r}{\mathbf{l}}$ est donc égal à une combinaison linéaire des vecteurs $\underset{1}{\mathbf{l}}, \dots, \underset{r}{\mathbf{l}}$ d'où il résulte (19). Notre lemme est ainsi démontré.

Revenons maintenant à l'inégalité (18). Si l'on avait $r < p + 1$, alors le lemme précedent nous donnerait une incompatibilité avec les relations (4). La relation (3) a donc lieu c. q. f. d.

Nous envisagerons le cas $m > 1$ dans une note ultérieure.

([12]) V. Hlavaty, l. c., ([7]).