Sulla differenziabilità totale delle funzioni di più variabili reali.

Memoria di FRANCESCO SEVERI (a Roma).

Sunto. - *Sul fondamento delle nozioni (altrove introdotte dall'A.) di tangenti e corde improprie d'un insieme di punti in un punto d'accumulazione, si determinano condizioni necessarie e sufficienti per la differenziabilità o per l'iperdifferenziabilità di una funzione di più variabili in un punto d'accumulazione d'un insieme o all'interno di un dominio in cui essa sia definita. La consueta considerazione delle derivate parziali non esaurisce nè può esaurire la questione. Perciò l'A. deve anzitutto definire l'operazione di derivazione per una funzione di più variabili in modo adeguato alla natura della funzione, la quale esige che non ci si limiti a studiar la derivazione rispetto alle variabili separatamente considerate.*

L'argomento è di quelli studiati e ristudiati fin dagli inizi della revisione critica dell'Analisi ⁽¹⁾. Mi sembra tuttavia che possan ancora trovar posto le considerazioni che seguono, sia perchè esse conducono, in modo elementare, a condizioni necessarie e sufficienti per la differenziabilità o per l'iperdifferenziabilità in un punto P_0 (mentre le condizioni note riguardano la differenziabilità in *quasi tutti* i punti d'un insieme misurabile); sia perchè l'insieme in cui la funzione è data è vincolato dalla sola condizione che P_0 ne sia un punto d'accumulazione (sicchè in P_0 le derivate parziali non posson generalmente considerarsi); sia infine perchè dal presente lavoro risulta una condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità o per l'iperdifferenziabilità in *tutti* i punti di un dominio.

La differenziabilità in P_0 di una funzione $f(P)$ di un punto P variabile in un insieme piano serrato I (mi limito alle funzioni di due variabili, facile presentandosi l'estensione ad $n > 2$ variabili), è intesa nel senso generale di STOLZ, cioè nel senso che esista un'espressione $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, con α, β costanti, tale che:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{1}{P - P_0} [f(P) - f(P_0) - \alpha\Delta x - \beta\Delta y] = 0,$$

⁽¹⁾ Indicazioni bibliografiche aggiornate si leggono nel t. II delle monografie matematiche di Varsavia, *Théorie de l'intégrale*, dovuto a S. SAKS (Varsavia, 1933, pag. 222 e segg.).
Pei rapporti di questa mia Memoria con una recentissima di G. GUARESCHI ved. i nn. 1; 5, Oss.; 16.

per P comunque tendente a P_0 in I ; Δx , Δy denotando le componenti del vettore P_0P .

Intendo invece per *iperdifferenziale* $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ un'espressione tale che:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{1}{QP} [f(P) - f(Q) - \alpha\Delta x - \beta\Delta y] = 0,$$

per P , Q distinti, tendenti comunque a P_0 in I ; Δx , Δy denotando le componenti del vettore QP .

Allo scopo di ottenere le desiderate condizioni, introduco i concetti di *derivate*, *ultraderivate*, *iperderivate direzionali* di $f(P)$ in P_0 . Vi son funzioni elementari che hanno derivate direzionali e non ultraderivate nè iperderivate; funzioni che hanno derivate e ultraderivate e non iperderivate. Quando esistono le ultraderivate, esistono le derivate ed hanno valori uguali nelle stesse direzioni; quando esistono le iperderivate, esistono le ultraderivate e le derivate ed hanno valori uguali nelle stesse direzioni.

Le condizioni cui ho alluso divengon particolarmente significative allorchè si tratta della differenziabilità e dell'iperdifferenziabilità nei punti di un dominio piano I . Poichè si dimostra che le iperderivate, quando esistono in un dominio piano, son necessariamente *continue*, ne deriva che la condizione necessaria e sufficiente (la sufficienza è ovvia!) per l'iperdifferenziabilità all'interno di I è che esistano in ogni punto interno ad I le derivate parziali e sieno continue. Vale naturalmente la proprietà analoga per le funzioni di una variabile. Dal punto di vista geometrico questi fatti s'esprimon così:

Una linea piana di Jordan con tutti i suoi punti semplici ha la tangente continua.

Conformemente alla definizione generale, che ho altrove dato pei punti semplici di una varietà topologica (ved. le citazioni in seguito) un punto P della linea è semplice se esiste in esso una sola tangente e se una retta qualsiasi, con direzione diversa da quella della tangente, vicina a P , incontra la curva attorno a P in un punto al più (esattamente in *un* punto, se P è *interno* alla linea, al più in uno, se P è un *estremo*).

Una superficie di Jordan con tutti i suoi punti semplici ha il piano tangente continuo.

Un punto P della superficie è semplice quando le tangenti giacciono in un piano e una retta vicina a P , non parallela a questo piano, incontra la superficie attorno a P in un punto al più; ecc..

Per ciò che concerne la semplice differenziabilità in un punto P_0 interno ad un dominio piano I , dove sia data $f(P)$, le considerazioni dei nn. 21, 22, 23 mostrano che, a voler tenere nel debito conto la proprietà di $f(P)$ come fun-

zione della coppia (x, y) e non delle variabili prese separatamente, occorre svincolarsi dall'ordinaria nozione di derivate parziali, per le quali bisogna prescrivere modi troppo particolari di variabilità di P verso P_0 .

Sembra che convenga meglio alla natura dell'ente variabile indipendente (che è una coppia di variabili *simultanee*), di assumer come derivate parziali i limiti dei rapporti incrementali

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}, \quad \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}$$

(in cui la y o rispettivamente la x è la stessa nei due termini del numeratore), quando $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ in modo che $\lim P_0P$ sia una semiretta λ , per cui non sia rispettivamente costante x od y ; sempre che, naturalmente, questi limiti esistano finiti e indipendenti da λ .

S'ottengono così le *derivate parziali generalizzate*. Ebbene la loro esistenza in P_0 è *condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità*. Esse dunque estendono, nel modo più appropriato, il concetto di derivata delle funzioni di una variabile, la cui esistenza equivale appunto alla differenziabilità.

La continuità superficiale di f è conseguenza del solo fatto che gl'incrementi parziali generalizzati $f(x, y) - f(x_0, y)$, $f(x, y) - f(x, y_0)$ tendano a zero, per $P \rightarrow P_0$ nelle condizioni precedenti: il che dà una riprova dell'opportunità della loro considerazione.

Una condizione sufficiente, singolarmente espressiva, per la differenziabilità di $f(P)$ in tutti i punti interni ad un dominio piano I , si ottiene supponendo che i limiti $\alpha(x_0, y_0)$, $\beta(x_0, y_0)$ dei predetti rapporti esistano finiti, per P tendente a P_0 *sopra una retta qualunque* uscente da P_0 (nella quale non sia $x = \text{cost.}$ o rispettivamente $y = \text{cost.}$), e siano indipendenti dalla retta medesima, purchè si aggiunga l'ipotesi che le funzioni $\alpha(x_0, y_0)$, $\beta(x_0, y_0)$ si conservino limitate in ogni dominio tutto interno ad I .

Questo risultato ha una certa analogia col bel teorema di RADEMACHER che una $f(P)$, le cui derivate parziali si conservino limitate in un dominio piano, è ivi *quasi* dappertutto differenziabile. Però per esser sicuri che la funzione sia *ovunque* differenziabile bisogna come vedesi passare dai rapporti incrementali parziali ordinari ai rapporti incrementali generalizzati ⁽²⁾.

(²) Alcune delle considerazioni svolte nella presente Memoria son legate (a prescindere dalla forma) ai concetti sviluppati da G. BOULIGAND in un suo interessante libro recente (*Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris, Vuibert, 1932), come indicherò con maggior precisione in seguito. Le nozioni di semitangenti e di corde improprie di un insieme di punti in un punto di accumulazione, che stanno a fondamento del mio lavoro, corrispondono a quelle di *contingente* e di *paratingente* di BOULIGAND. All'egregio geometra è evi-

Tangenti e corde improprie in un punto d'accumulazione d'un insieme.

1. Richiamo anzitutto le nozioni di *tangenti*, *semitangenti*, *corde improprie* di un insieme qualunque I di punti di un S_n (reale), in un punto d'accumulazione O , da me introdotte in precedenti lavori ⁽³⁾.

Una semiretta a di origine O dicesi *semitangente* in O ad I quando essa contiene infiniti punti di I , accumulati attorno ad O , oppure quando, scelto $\varepsilon > 0$ e determinato l'insieme K_ε delle semirette proiettanti da O i punti di I diversi da O , situati nell'intorno di raggio ε , la a è di accumulazione per K_ε qualunque sia ε . Le due alternative posson anche presentarsi insieme. Una *tangente* è una retta contenente una semitangente.

Una retta b per O dicesi una *corda impropria* di I quando essa contiene infiniti punti di I attorno ad O , oppure quando, scelto $\varepsilon > 0$, e considerato l'insieme H_ε delle rette che congiungon coppie di punti di I , diversi tra loro, situati nell'intorno di raggio ε , b è di accumulazione per H_ε , qualunque sia ε . Le due alternative posson presentarsi insieme.

Ho dimostrato che in O vi son sempre semitangenti e corde improprie. Una tangente è una corda impropria; ma non necessariamente viceversa.

dentemente sfuggito che le sue ricerche in proposito sono state iniziate un po' più tardi delle mie: il che ho già avuto occasione di porre in rilievo nella Nota di Cracovia, più sotto citata. (Anche la nozione di *distanza* di due insiemi di punti, esposta al n. 34 del libro di BOULIGAND, trovavasi già in vari lavori miei: « Rendiconti dei Lincei », 1927, p. 476; 1929, p. 918; *Conferenze di geometria algebrica*, Roma, 1927-30, p. 122; *Conferenze sulla topologia* tenute a Buenos Aires, Imprenta de la Universidad, 1930, pag. 28). Ma non gli muovo rimprovero per questo, perchè neppur io riesco a seguire con cura minuziosa la bibliografia e leggo più volentieri una memoria o un libro dopo aver pensato per conto mio all'argomento.

⁽³⁾ Ved. la mia più recente Nota in proposito: *Su alcune questioni di topologia infinitesimale* (« Annales de la Société polonaise de Math. », t. IX, 1930). Ivi si troveranno anche i riferimenti alle ricerche di BOULIGAND. Il GUARESCHI nell'interessante lavoro: *Un concetto di derivazione delle funzioni di più variabili reali*, ecc. (« Memorie della R. Accademia d'Italia », 1934-XII, p. 173) ha dedotto dai concetti che sto per richiamare un'espressiva condizione geometrica per la differenziabilità totale di una funzione di più variabili in un punto. Il teorema del GUARESCHI è ritrovato come corollario alla fine del n. 5 di questa Memoria. Il teorema medesimo ha consentito all'A. di estendere la considerazione delle derivate parziali, in guisa da ottenere enti più generali (ch'egli chiama *derivate perfette*, ved. n. 16 della presente Memoria), i quali esistono e posson introdursi nel calcolo, anche quando non vi sono le derivate parziali ordinarie. Ved. altresì, a proposito del significato geometrico dell'esistenza del differenziale totale, il n. 72 del libro di BOULIGAND.

Inoltre, se l'insieme I è serrato ⁽¹⁾: ogni semitangente può definirsi come il limite per $n \rightarrow \infty$ della semiretta OP_n , ove P_n percorra una conveniente successione di punti di I convergente ad O ; ogni corda impropria è il limite per $n \rightarrow \infty$ della retta P_nQ_n , ove i punti distinti P_n, Q_n percorrano due convenienti successioni convergenti ad O (una delle quali può ridursi al punto fisso O , se la corda è tangente).

2. Converrà qui distinguere le corde dalle *semicorde improprie*, cioè dalle semirette in cui le corde son divise da O . Dimostriamo che:

Data una semicorda impropria, esistono sempre nell'insieme I due successioni P_n, Q_n convergenti ad O , tali che, per ogni n , P_n, Q_n son distinti; ciascuna delle due successioni ha in O una sola semitangente e la semiretta P_nQ_n ha per limite la data semicorda.

Sia invero λ la data semicorda ed l la corda impropria che la contiene. Limitiamo le due successioni a quei punti, d'un intorno abbastanza ristretto di O , tali che le rette A_nB_n (ove le successioni A_n, B_n convergono ad O in guisa che $\lim A_nB_n = l$), formino con l un angolo (acuto) minore d'un angolo prefissato δ . Nessuna delle rette A_nB_n sarà allora parallela ad un dato iperpiano Ω passante per O , ma non per l ; epperò si può su ognuna di esse determinare un verso che abbia per limite il verso di λ quando A_nB_n tende ad l . Coi punti A_n, B_n posson in conseguenza formarsi due nuove successioni A_n', B_n' ponendo nella prima quello dei due punti A_n, B_n che precede l'altro nel verso fissato. In tal modo risulta $\lambda = \lim A_n'B_n'$.

Se la successione A_n' ha in O più di una semitangente, è possibile estrarre da essa una successione parziale A_n'' , che abbia in O una sola semitangente λ_1 . Chiamiamo B_n'' l'omologo di A_n'' nella successione B_n' . Se la successione B_n'' ha in O più di una semitangente, si potrà da essa estrarre una successione parziale Q_n , che abbia in O una sola semitangente λ_2 . Diciamo P_n il punto omologo di Q_n nella successione A_n'' . Allora le successioni P_n, Q_n soddisfanno al teorema enunciato.

3. Le semitangenti λ_1, λ_2 alle successioni P_n, Q_n del n. prec. posson benissimo essere allineate (cioè coincidenti od opposte). Perchè si possan costruire le successioni stesse in modo che λ_1, λ_2 non risultino allineate, basta che due

⁽¹⁾ Cioè contiene tutti i propri punti d'accumulazione. L'ipotesi che I sia serrato diventa superflua, ora e nel seguito, se si ammette che abbia senso l'operazione di formare una ben definita successione togliendo un punto da ciascun insieme di una successione d'insiemi di punti.

delle tangenti alle successioni iniziali A_n , B_n sieno distinte (il che accade sempre che una delle successioni abbia più di una tangente in O).

Può darsi però che, comunque si costruiscano le successioni P_n , Q_n soddisfacenti al teorema del n. 2, esse abbiano di necessità in O la medesima tangente. Questo avviene di certo quando I ha in O una sola tangente.

A noi importa invece di considerare il caso in cui per ogni semicorda λ si posson determinare due successioni P_n , Q_n che abbiano in O tangenti distinte. Definiremo perciò quelli che chiameremo *punti di accumulazione regolare* (rispetto al concetto di semicorda impropria).

Il punto O si chiamerà di accumulazione regolare quando scelta comunque una semitangente x e una semicorda impropria λ di I in O , può determinarsi (almeno) una semitangente y non allineata con x , tale che λ sia ottenibile come *limite* della semiretta PQ per P , Q tendenti ad O sotto le condizioni $\lim OP = x$, $\lim OQ = y$.

Ogni punto O interno ad un dominio piano I è di accumulazione regolare; ed è altresì di accumulazione regolare ogni punto contorno del dominio piano racchiuso da una linea di JORDAN a punti tutti semplici (cfr. col. n. 18). Se invece la linea ha p. es. una cuspide, ivi cade un'accumulazione irregolare del dominio.

Differenziali e derivate direzionali.

4. Mi riferisco alle funzioni di due variabili reali x , y , giacchè facili si presentan le estensioni alle funzioni di n variabili.

Per snellire l'esposizione ulteriore occorre il seguente elementarissimo lemma: « Se

$$(1) \quad z - z_0 = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0),$$

ossia $z = \varphi(M)$, ove M è un punto mobile sul piano xy è l'equazione di un piano non parallelo a z (x , y , z assi cartesiani anche obliqui) e P , Q son due punti del piano xy variabili in un insieme serrato I , che abbia un'accumulazione in P_0 , risulta

$$(2) \quad \lim \frac{\varphi(P) - \varphi(Q)}{QP} = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x \lambda}{\sin xy},$$

ogni volta che P , Q tendano a P_0 in modo che la semiretta QP tenda ad una semicorda impropria λ di I in P_0 ».

S'intende che QP denota il valore assoluto della distanza dei due punti, sicchè la retta QP va orientata positivamente da Q verso P .

Si ha infatti dalla (1):

$$\frac{\varphi(P) - \varphi(Q)}{QP} = \alpha \frac{\Delta x}{QP} + \beta \frac{\Delta y}{QP},$$

ove Δx , Δy son le componenti del vettore QP ; e siccome, denotata con r la semiretta QP sussistono (in valore e segno rispetto ai versi delle rette considerate e al verso positivo delle rotazioni su xy), le:

$$\frac{\Delta x}{QP} = \frac{\sin ry}{\sin xy}, \quad \frac{\Delta y}{QP} = \frac{\sin xr}{\sin xy},$$

passando al limite per P , $Q \rightarrow P_0$ si ottiene la (2).

In particolare, la conclusione vale quando Q è fisso e coincidente con P_0 , sicchè λ è semitangente ad I in P_0 .

5. La *differenziabilità* (si sottintende *totale*) di una funzione reale $f(x, y)$ o $f(P)$, si può intendere da due punti di vista: uno *ristretto* ed uno *lato*.

La $f(P)$ sia data, finita, in un insieme serrato I avente un'accumulazione in P_0 e sia continua in P_0 . Dal punto di vista ristretto si può considerare come *differenziale totale* di $f(P)$ in P_0 un'espressione $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ ($\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$) con α , β costanti, tale che:

$$(3) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{1}{P_0P} [f(P) - f(P_0) - \alpha\Delta x - \beta\Delta y] = 0,$$

quando $P \rightarrow P_0$ in modo che $\lim P_0P$ sia una semitangente determinata, ma qualunque di I in P_0 .

Dal punto di vista lato, che è quello di STOLZ, $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è un differenziale totale di $f(P)$ in P_0 , quando la (3) vale comunque P tenda a P_0 .

Orbene, sussiste il teorema:

Se $f(P)$ è differenziabile in P_0 in senso ristretto, lo è pure nel senso di STOLZ.

Supponiamo che la (3) valga in senso ristretto e indichiamo con $\bar{P}(x, y, z)$, $\bar{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ i punti del diagramma F , di equazione $z = f(P)$, corrispondenti ai punti $P(x, y)$, $P_0(x_0, y_0)$ di I .

Se $P \rightarrow P_0$ in I in modo che $\lim P_0P = \lambda$, la (3) porge senz'altro (n. 4):

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\varphi(P) - \varphi(P_0)}{P_0P}.$$

Pertanto la semiretta $\bar{P}_0\bar{P}$ ha un limite determinato $\bar{\lambda}$, che giace in (1); cioè le tangenti in $\bar{P}_0$ al diagramma F giacciono tutte in un piano, che perciò si dirà il *piano tangente* in P_0 ad F .

Proviamo che l'angolo della semiretta $\bar{P}_0\bar{P}$ col piano (1) ha sempre per limite zero, comunque P tenda a P_0 e ciò anche se la semiretta P_0P e quindi la $\bar{P}_0\bar{P}$ non hanno limite. Questa può, grosso modo, ritenersi conseguenza ovvia dal fatto che il piano (1) contiene tutte le semirette di accumulazione comuni agl'insiemi descritti da P_0P , per $P \rightarrow P_0$.

Volendo precisare si ragionerà così. Se, scelto arbitrariamente piccolo un angolo δ , può sempre determinarsi un $\varepsilon > 0$, tale che nel campo Γ_δ limitato dal cono rotondo (a due falde) di apertura $\frac{\pi}{2} - \delta$, avente per asse la perpendicolare in $\bar{P}_0$ al piano (1), cada un numero *finito* > 0 di semirette proiettanti da $\bar{P}_0$ punti di F , distinti da $\bar{P}_0$, situati nell'intorno di raggio ε di $\bar{P}_0$, impiccolendo ancora ε , si otterrà che nessuna di quelle semirette cada in Γ_δ e pertanto il limite dell'angolo che $\bar{P}_0\bar{P}$ forma con (1) sarà zero. Se dunque questo limite non esiste o non è zero, per δ abbastanza piccolo non c'è alcun ε soddisfacente alla predetta condizione.

Vuol dire che, per δ abbastanza piccolo, l'insieme K_ε delle semirette proiettanti da $\bar{P}_0$ punti di F , distinti da $\bar{P}_0$, situati in Γ_δ e nell'intorno di raggio ε , contiene, qualunque sia ε , infinite semirette. Esiste perciò ⁽⁵⁾ qualche semiretta di Γ_δ , che è di accumulazione per K_ε , qualunque sia ε . Una tal semiretta è semitangente ad F in $\bar{P}_0$ e non giace sul piano (1), contrariamente alla precedente conclusione. È dunque assurdo ammettere che l'angolo formato da $\bar{P}_0\bar{P}$ con (1) non abbia per limite zero.

Ciò premesso, indichiamo con P' la proiezione di P (e di $\bar{P}$) sul piano (1), secondo z . Sussistono allora in valore e segno (comunque scelgasi il verso positivo sul piano $PP_0\bar{P}\bar{P}_0P'$), le relazioni:

$$(4) \quad \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = \frac{\sin \bar{r}r}{\sin z\bar{r}}, \quad \frac{\varphi(P) - \varphi(P_0)}{P_0P} = \frac{\sin r'r}{\sin zr'},$$

ove $r, \bar{r}, r'$ denotano le semirette $P_0P, \bar{P}_0\bar{P}, \bar{P}_0P'$. Dunque:

$$H(P) = \frac{1}{P_0\bar{P}} [f(P) - f(P_0) - \alpha \Delta x - \beta \Delta y] = \frac{\sin \bar{r}r \sin zr' - \sin z\bar{r} \sin r'r}{\sin z\bar{r} \sin zr'},$$

da cui, mercè il legame fra i seni di quattro direzioni orientate di un piano, si trae:

$$H(P) = \frac{\sin \bar{r}r' \sin zr}{\sin z\bar{r} \sin zr'}.$$

⁽⁵⁾ Ved. la mia Nota di Cracovia, n. 4.

Si determini ora un cono Γ_s , come quello sopra definito, che contenga nel suo interno la parallela per $\bar{P}_0$ all'asse z ; e sia θ il minimo angolo formato da z colle generatrici di questo cono ($\theta > 0$), ψ l'angolo > 0 , che z forma con (1). Siccome l'angolo di $\bar{r}$ con (1) tende a zero, per ogni P di un intorno abbastanza ristretto di P_0 varranno le disuguaglianze:

$$|\sin z\bar{r}| \geq \sin \theta, \quad |\sin zr'| \geq \sin \psi,$$

e quindi:

$$|H(P)| \leq \frac{|\sin \bar{r}r' \sin zr|}{\sin \theta \sin \psi}.$$

Tendendo comunque P a P_0 l'angolo acuto $\bar{r}r'$ tende a zero e $\sin zr$ si conserva limitato. Perciò $\lim H(P) = 0$ e $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è differenziale in senso lato.

La conclusione è che differenziabilità in senso stretto ed in senso lato si equivalgono; onde si può parlare semplicemente di differenziabilità.

OSSERVAZIONE. — Se le tangenti al diagramma F in $\bar{P}_0$ giacciono in un piano (1) non parallelo all'asse z , sarà $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ differenziale di f in senso stretto epperò in senso lato.

Viceversa, se $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è differenziale di f in P_0 , è evidente che le tangenti di F in $\bar{P}_0$ giacciono in (1). Onde $f(P)$ è differenziabile in P_0 allora e solo allora che esista qualche piano non parallelo a z , che contenga le tangenti in $\bar{P}_0$ al diagramma F ; e questo è appunto il risultato del GUARESCHI. Il differenziale è unico se in $\bar{P}_0$ c'è un sol piano tangente a F (non parallelo all'asse z); vi è invece in P_0 un fascio lineare di differenziali, se F ammette in $\bar{P}_0$ una sola tangente.

6. Può darsi che l'espressione:

$$(5) \quad H(P, Q) = \frac{1}{QP} [f(P) - f(Q) - \alpha\Delta x - \beta\Delta y],$$

ove P, Q sieno due punti variabili in I e $\Delta x, \Delta y$ rappresentino le componenti del vettore QP , tenda a zero, comunque P, Q tendano a P_0 . Si dirà allora che $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è un iperdifferenziale di $f(P)$ in P_0 .

P. es. quando I è un dominio piano e $f(P)$ ammette in ogni punto P_0 , interno ad I , derivate parziali continue f'_x, f'_y , si riconosce ovviamente che il differenziale totale di f in P_0 è iperdifferenziale. Vedremo nel n. 19 che vale pure la proprietà reciproca.

OSSERVAZIONE. — È evidente che se $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è un differenziale o un iperdifferenziale di $f(P)$ in P_0 , la $f(P)$ è differenziabile o iperdifferenziabile

rispetto a due altri assi cartesiani qualunque x', y' . Basta per passare dall'uno all'altro differenziale esprimere $\Delta x, \Delta y$ per $\Delta x', \Delta y'$.

7. Passiamo a introdurre il concetto *intrinseco* di derivazione per la funzione $f(P)$, finita nell'insieme serrato I , avente in P_0 un'accumulazione. e continua in P_0 .

Denotino P, Q due punti variabili in I . Consideriamo i rapporti incrementali

$$(6) \quad \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0 P},$$

$$(7) \quad \frac{f(P) - f(Q)}{QP},$$

in cui i denominatori si assumon sempre positivi (sicchè le rette $P_0 P, QP$ son rispettivamente orientate da P_0 a P e da Q a P). Se $P \rightarrow P_0$ in modo che $\lim P_0 P = \lambda$, ovvero P, Q tendono a P_0 in modo che $\lim QP = \lambda$; si potranno cercare, se esistono finiti, i limiti dei predetti rapporti.

Quando esiste finito il limite del rapporto (6), questo limite si chiamerà la *derivata direzionale di f secondo la semitangente λ in P_0 all'insieme I* e si designerà con $f'_\lambda(P_0)$. S'intende naturalmente che questo limite dipenda soltanto da λ e non dal modo come P tende a P_0 , sotto la condizione $\lim P_0 P = \lambda$.

Quando esiste finito il limite del rapporto (7), ed è indipendente dal modo come P, Q tendono a P_0 , sotto la condizione $\lim QP = \lambda$, si dirà che il limite stesso è la *iperderivata direzionale di f secondo la semicorda impropria λ in P_0 all'insieme I* e si designerà con $f_\lambda^*(P_0)$. In particolare, quando λ sia semitangente, esistendo $f_\lambda^*(P_0)$ esisterà anche $f'_\lambda(P_0)$ (ma non viceversa) e sarà $f'_\lambda(P_0) = f_\lambda^*(P_0)$.

Se, sempre nell'ipotesi che λ sia una semicorda impropria, esiste finito il limite del rapporto (7), allorchè P, Q tendono a P_0 comunque, compatibilmente colle condizioni che la semiretta QP tenda a λ e le semirette $P_0 P, P_0 Q$ tendano a limiti determinati e *distinti*, ma qualsiasi, quel limite si dirà la *ultraderivata direzionale di f secondo la semicorda impropria λ in P_0 all'insieme I* e s'indicherà con $f_\lambda(P_0)$.

In particolare, quando λ sia una semitangente s'intende che la successione descritta da Q possa esser sostituita dal punto fisso P_0 , nel qual caso $\lim QP = \lim P_0 P$ coincide con λ e $\lim P_0 Q$ è una semiretta qualunque distinta da λ .

È chiaro che, se in P_0 l'insieme I presenta un'accumulazione regolare e se esiste $f_\lambda^*(P_0)$, esiste $f_\lambda(P_0)$ ed è $f_\lambda(P_0) = f_\lambda^*(P_0)$. Quando λ sia una semitangente ed esiste $f'_\lambda(P_0)$, esiste anche $f_\lambda(P_0)$ ed è $f'_\lambda(P_0) = f_\lambda(P_0)$.

Cangiando λ nell'opposta $-\lambda$, se esiste $f_{\lambda}^*(P_0)$ od $f_{\lambda}(P_0)$ esiste pure $f_{-\lambda}^*(P_0)$ ed $f_{-\lambda}(P_0)$, e risulta:

$$f_{\lambda}^*(P_0) = -f_{-\lambda}^*(P_0), \quad f_{\lambda}(P_0) = -f_{-\lambda}(P_0).$$

Se I è un dominio piano e P_0 un punto ad esso interno, le ordinarie derivate parziali coincidono colle derivate direzionali secondo le direzioni positive x, y , mentre le derivate direzionali secondo $-x, -y$ hanno segni contrari.

Si costruiscono facilmente *esempi di funzioni che posseggono derivate direzionali in tutte le direzioni uscenti da un punto, ma non ultraderivate; ed esempi di funzioni che posseggono ultraderivate (e quindi derivate) in tutte le direzioni, ma non iperderivate.*

P. es. la funzione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ove il radicale è positivo) nel punto $x = y = 0$ è derivabile in tutte le direzioni, mentre non è parzialmente derivabile (perchè sull'asse x dà luogo ad una funzione che ha in $x = 0$ la derivata destra uguale ad 1 e la sinistra uguale a -1 ; e analogamente su y) e non esiste alcuna direzione in cui sia ultraderivabile (nè, quindi, iperderivabile); una funzione $z = f(x, y)$, differenziabile in ogni punto interno P_0 di un dominio piano, ma colle derivate parziali non ambedue continue in P_0 , è ultraderivabile in tutte le direzioni (n. 8), ma non iperderivabile (n. 19); una funzione $z = f(x, y)$ colle derivate parziali continue in ogni punto interno P_0 di un dominio piano, è iperderivabile in tutte le direzioni.

Condizione per la differenziabilità.

8. Vale in proposito il teorema seguente:

Sia $f(P)$ una funzione finita di un punto P variabile in un insieme piano serrato I , avente in P_0 un'accumulazione regolare. La $f(P)$ sia continua in P_0 . Allora condizione necessaria e sufficiente perchè $f(P)$ sia differenziabile in P_0 è che esistano ivi le ultraderivate secondo le semitangenti dell'insieme I in P_0 . In tal caso il differenziale di $f(P)$ in P_0 è individuato.

Assumansi come semiassi cartesiani positivi x, y due semitangenti non allineate di I in P_0 . Se $f(P)$ è differenziabile rispetto a due assi distinti da x, y , lo è pure (n. 6, Oss.) rispetto ad x, y . Sia $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ un differenziale di $f(P)$ in P_0 . Dalla relazione (n. 5) $\lim_{P \rightarrow P_0} H(P) = 0$, supposto $\lim_{P \rightarrow P_0} P = \lambda$, si ricava ovviamente, qualunque siano i versi delle componenti di λ sugli assi x, y :

$$(8) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0 P} = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x \lambda}{\sin xy}.$$

Ciò premesso, dicasi μ una semicorda impropria di I in P_0 . Essendo P_0 regolare, si può supporre che P, Q variino in I in modo che $\lim P_0P, \lim P_0Q$ sieno due semitangenti non allineate λ_1, λ_2 in P_0 (di cui una arbitraria) e $\lim QP = \mu$. Dalla relazione

$$(9) \quad \frac{f(P) - f(Q)}{QP} = \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} \frac{P_0P}{QP} + \frac{f(Q) - f(P_0)}{P_0Q} \frac{Q P_0}{QP}$$

(nella quale, si ricordi, QP, P_0P, P_0Q son positivi, così che $Q P_0$ è negativo), tenendo conto sia delle relazioni derivanti dalla (8) per $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$, sia delle

$$\lim \frac{P_0P}{QP} = \frac{\sin \mu \lambda_2}{\sin \lambda_1 \lambda_2}, \quad \lim \frac{Q P_0}{QP} = \frac{\sin \lambda_1 \mu}{\sin \lambda_1 \lambda_2},$$

e infine dal legame fra i seni di quattro direzioni orientate di un piano, si deduce che:

$$(10) \quad \lim \frac{f(P) - f(Q)}{QP} = \alpha \frac{\sin \mu y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x \mu}{\sin xy}.$$

Dunque il primo membro della (10) è indipendente dalla coppia λ_1, λ_2 e coincide col primo membro della (8) quando $\mu = \lambda$ è una semitangente di I in P_0 e all'insieme dei Q è sostituito il punto fisso P_0 . Epperò, secondo la definizione del n. 7, esiste $f_\mu(P_0)$. In particolare per $\mu = x, y$ si ha:

$$(11) \quad f_x(P_0) = \alpha, \quad f_y(P_0) = \beta;$$

e pertanto $\alpha \Delta x + \beta \Delta y$ è individuato. Di più cangiando μ in $-\mu$ viene $f_{-\mu}(P_0) = -f_\mu(P_0)$.

Viceversa, suppongasì la $f(P)$ ultraderivabile secondo ogni semitangente μ di I in P_0 . Per la regolarità di P_0 , μ può ottenersi come limite d'una semiretta QP (Q, P variabili in I) per Q, P tendenti a P_0 in modo che $\lim P_0P = x$, $\lim P_0Q = y$, ove x, y son due convenienti semitangenti (non allineate) di I in P_0 (di cui una arbitraria). Dalla (9) in virtù delle

$$\lim \frac{P_0P}{QP} = \frac{\sin \mu y}{\sin xy}, \quad \lim \frac{Q P_0}{QP} = \frac{\sin x \mu}{\sin xy}$$

e dal fatto che i rapporti $\frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P}, \frac{f(Q) - f(P_0)}{P_0Q}$ hanno i limiti (11), si deduce la (10). E poichè il valore $f_\mu(P_0)$ del primo membro della (10), uguaglia (n. 7) $f'_\mu(P_0)$, si conclude che tutte le semitangenti ad F in $\bar{P}_0$ giaccion sul piano (1). Dunque $\alpha \Delta x + \beta \Delta y$ è differenziale di f in P_0 .

9. Se I possiede in P_0 una sola semitangente λ , condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità di $f(P)$ in P_0 , è che esista la derivata $f'_\lambda(P_0)$; se I possiede in P_0 due semitangenti opposte $\lambda, -\lambda$, condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità, è che esistano $f'_\lambda(P_0), f'_{-\lambda}(P_0)$ ed abbiano valori opposti. In questi casi si ha in P_0 un fascio lineare di differenziali.

Questo teorema è conseguenza ovvia dell'equivalenza del fatto analitico che esistano ∞^1 differenziali in P_0 e del fatto geometrico che F possieda in $\bar{P}_0$ una sola tangente (n. 5, Oss.). Quando esistano $f'_\lambda(P_0), f'_{-\lambda}(P_0)$ ed abbiano valori non opposti, il diagramma F possiede in P_0 un sol piano tangente, ma questo è parallelo all'asse z .

10. In particolare, se I è un dominio piano contornato da una linea di JORDAN chiusa, le rette del piano uscenti da un punto interno o da un punto contorno semplice per la linea (cfr. col n. 18) sono tutte tangenti al dominio nel punto stesso, che è un punto d'accumulazione regolare. Dunque una funzione $f(x, y)$ finita sopra una cella piana contornata da una linea di Jordan con tutti i punti semplici, è differenziabile in tutta la cella, contorno incluso, allora e solo allora che sia ultraderivabile dovunque e in ogni direzione.

Se il contorno ha una cuspidi, perchè f sia differenziabile anche nella cuspidi occorre e basta che esista l'ultraderivata di f secondo la tangente alla cuspidi. Però ivi si hanno ∞^1 differenziali.

Ogni retta uscente dalla cuspidi è in questo caso corda impropria del dominio.

Condizione per l'iperdifferenziabilità.

11. Dimostriamo ora il teorema seguente:

Sia $f(P)$ una funzione finita di un punto P mobile in un insieme piano serrato I , avente in P_0 un'accumulazione. La $f(P)$ sia continua in P_0 . Allora condizione necessaria e sufficiente perchè $f(P)$ sia iperdifferenziabile in P_0 , è che le corde improprie del diagramma $F[z = f(P)]$ nel punto $\bar{P}_0$ corrispondente a P_0 , giacciono tutte in (almeno) un piano non parallelo all'asse z .

Sia anzitutto $\lim H(P, Q) = 0$, comunque P, Q tendano a P_0 (n. 6). Denotati con $\bar{P}, \bar{Q}$ i punti di F corrispondenti a P, Q ; con P', Q' le proiezioni secondo z dei punti P, Q (e $\bar{P}, \bar{Q}$) sul piano (1); e infine con $r, \bar{r}, r', \bar{r}'$ le semirette $QP, \bar{Q}\bar{P}, Q'P', \bar{Q}'\bar{P}'$, si ottiene (come nel n. 5) la relazione:

$$H(P, Q) = \frac{\sin \bar{r} r' \sin zr}{\sin z \bar{r} \sin z r'},$$

da cui segue:

$$|H(P, Q)| \geq |\sin \bar{r} r' \sin zr|.$$

Onde, chiamato τ l'angolo di z col piano xy :

$$|H(P, Q)| \geq |\sin \bar{r} r'| \sin \tau,$$

dalla quale si deduce che $\lim \bar{r} r' = 0$; epperò le corde improprie di F giacciono tutte nel piano (1).

Viceversa, se il piano (1) contiene tutte le corde improprie di F in $\bar{P}_0$, l'angolo di $\bar{r}$ con (1) tende a zero comunque P, Q tendano a P_0 . La cosa è pressochè evidente; ma, se si vuol precisarla, basterà ripetere qui un ragionamento perfettamente analogo a quello svolto, in condizioni simili, per le semitangenti, nel n. 5. Si posson pertanto definire gli angoli θ, ϕ , analogamente a quanto fu fatto nel n. 5; e si ottiene così:

$$|H(P, Q)| \leq \frac{|\sin \bar{r} r' \sin zr|}{\sin \theta \sin \phi}.$$

Ora $\sin \bar{r} r'$ tende a zero e $\sin zr$ si conserva limitato; dunque $\lim H(P, Q) = 0$, comunque P, Q tendano a P_0 ed $f(P)$ è perciò iperdifferenziabile in P_0 .

OSSERVAZIONE. — L'iperdifferenziale di f in P_0 sarà *individuato* se in $\bar{P}_0$ il diagramma F possiede almeno due corde improprie non allineate e non situate in un piano parallelo a z ; potrà *variare in un fascio*, se in P_0 vi è una sola corda impropria.

12. Se P_0 è un punto d'accumulazione regolare per I , condizione necessaria e sufficiente per l'iperdifferenziabilità di $f(P)$ in P_0 è che la funzione sia iperderivabile secondo ogni semicorda impropria di I in P_0 . In tal caso l'iperdifferenziale è individuato.

Sia $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ un iperdifferenziale di F in P_0 . Allora (n. 11) tutte le corde improprie di F in $\bar{P}_0$ giacciono sul piano (1). E siccome fra queste corde, attesa la regolarità di P_0 , vi son due tangenti distinte, così intanto si conclude che $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è individuato.

Ciò posto, designamo con λ una semicorda impropria di I in P_0 e con P, Q due punti di I , che tendano comunque a P_0 , sotto la sola condizione $\lim QP = \lambda$. Indichiamo inoltre con H_ε l'insieme delle semirette QP , i cui Q, P giacciono in un intorno di raggio ε di P_0 e con $\bar{H}_\varepsilon$ l'insieme delle corrispondenti semirette $\bar{Q}\bar{P}$. Ogni semiretta $\bar{\lambda}$, che sia di accumulazione per $\bar{H}_\varepsilon$ per ε qualunque, ha per proiezione λ , perchè questa è l'unica retta

di accumulazione comune agli H_i . E siccome $\bar{\lambda}$, in quanto semicorda impropria di F , giace sul piano (1), ne segue che $\bar{\lambda}$ è individuata come intersezione del piano (1) col piano parallelo a z condotto per λ . Ciò significa che il rapporto incrementale (7) tende verso un limite determinato e finito espresso da (n. 4):

$$(12) \quad f_{\lambda}^*(P_0) = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x \lambda}{\sin xy}.$$

Proviamo che la condizione enunciata è sufficiente. Bisogna dimostrare che ogni corda impropria di F in $\bar{P}_0$ sta sul piano (1), perchè ciò equivale appunto (n. 11) ad affermare che $f(P)$ è iperdifferenziabile in P_0 .

Sia λ una qualsiasi semicorda impropria di I in P_0 . Attesa la regolarità di P_0 , λ si può ottenere come limite di una semiretta QP (Q, P variabili in I) per Q, P tendenti a P_0 in modo che $\lim P_0P = x$, $\lim P_0Q = y$, ove x, y son due semitangenti convenienti non allineate (di cui una arbitraria). Per ipotesi esistono $f_x^*(P_0) = \alpha$, $f_y^*(P_0) = \beta$. Dalla relazione (9), tenuto conto che

$$\lim \frac{P_0P}{QP} = \frac{\sin \lambda y}{\sin xy}, \quad \lim \frac{QP_0}{QP} = \frac{\sin x \lambda}{\sin xy}$$

e che:

$$\lim \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = \alpha, \quad \lim \frac{f(Q) - f(P_0)}{P_0Q} = \beta,$$

si ricava:

$$\lim \frac{f(P) - f(Q)}{QP} = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x \lambda}{\sin xy}.$$

Ma siccome, esistendo la iperderivata $f_{\lambda}^*(P_0)$, il limite del rapporto $\frac{f(P) - f(Q)}{QP}$ resta lo stesso comunque P, Q tendano a P_0 , purchè $\lim QP = \lambda$, la precedente relazione riducesi alla (12), la quale esprime che ad ogni semicorda impropria λ di I in P_0 corrisponde una semicorda impropria di F in $\bar{P}_0$, avente per proiezione λ e situata sul piano (1). Poichè, viceversa, ogni semicorda impropria di F in $\bar{P}_0$ si proietta in una semicorda di I in P_0 , si conclude che tutte le corde improprie di F in $\bar{P}_0$ giacciono sul piano (1); c. d. d.

13. Se I ammette in P_0 una sola corda impropria, condizione necessaria e sufficiente per la iperdifferenziabilità di $f(P)$ in P_0 è che $f(P)$ sia iperderivabile secondo una (e quindi secondo l'altra) delle due semicorde in cui P_0 divide quella corda. In tal caso vi è in P_0 un fascio di iperdifferenziali.

Infatti, quando I ha in P_0 una sola corda impropria b , il diagramma F non può avere che una sola corda impropria in $\bar{P}_0$ o più corde improprie situate sul piano parallelo a z condotto per b . Se $f(P)$ è iperdifferenziabile in P_0 quest'ultima eventualità va esclusa (n. 11). Ma allora ogni piano (1) passante per l'unica corda impropria di F in P_0 (e non parallelo all'asse z) dà luogo ad un iperdifferenziale (n. 11).

14. Un esempio di una $f(P)$ possedente in P_0 un fascio di iperdifferenziali è dato dalla $z = f(P)$ di un punto $\bar{P}$ mobile su una linea di JORDAN F , che si proietti biunivocamente sulla linea I del piano xy e che abbia nel punto $\bar{P}_0$ un punto semplice. Invero, in $\bar{P}_0$ il diagramma F possiede una sola corda impropria: la tangente.

Ma una $f(P)$ può anche possedere in P_0 un fascio di differenziali e un solo iperdifferenziale.

Un esempio elegante è fornito dalla $z = f(P)$ di un punto $\bar{P}$ mobile sopra un diagramma F costituito da due linee di JORDAN l, m tracciate sopra una superficie di JORDAN Φ , nelle ipotesi che le l, m si proiettino biunivocamente sul piano xy ; che l, m passino semplicemente per $\bar{P}_0$, toccandosi ivi; che Φ abbia in $\bar{P}_0$ un punto semplice col piano tangente π non parallelo a z .

In questo caso le corde improprie al diagramma F in $\bar{P}_0$ riempiono il fascio $\bar{P}_0$ sopra π . A π corrisponde il solo iperdifferenziale che $f(P)$ ha in P_0 . Agli altri piani passanti per la tangente comune corrispondono altrettanti differenziali.

La stessa conclusione vale se l, m son rami analitici lineari di origine $\bar{P}_0$. Allora il piano delle corde improprie di F in $\bar{P}_0$ è il cosiddetto *piano principale* di HALPHEN, luogo dei punti da cui i rami l, m si proiettano sopra un piano secondo due rami aventi un contatto più intimo di quello che hanno le proiezioni da un punto generico.

Se il piano π (tangente a Φ o piano principale dei due rami) è parallelo a z , ma la tangente comune non lo è, si ha l'esempio di una $f(P)$ che possiede in P_0 un fascio di differenziali e nessun iperdifferenziale.

La regola generale di derivazione delle funzioni composte.

15. Le considerazioni precedenti permettono di decidere quand'è che ad una $f(P)$ può applicarsi la regola di derivazione delle funzioni composte, intesa nella più generale accezione. Si dirà che tale regola è applicabile, quando,

fissata una qualunque semitangente λ di I in P_0 e considerato un sottoinsieme K di I avente in P_0 la sola semitangente λ , sussiste la relazione:

$$g'_\lambda(P_0) = \alpha x'_\lambda(P_0) + \beta y'_\lambda(P_0),$$

ove $g(P)$ è la funzione $f(P)$ per P variabile in K ; α, β son due coefficienti numerici, indipendenti dal sottoinsieme K considerato, e $x'_\lambda(P_0), y'_\lambda(P_0)$, derivate direzionali secondo λ delle coordinate x, y del punto P mobile in K , dipendono solo da λ .

È facile riconoscere che la regola suddetta è applicabile allora e solo allora che $f(P)$ ammetta in P_0 almeno un differenziale.

Invero, se $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è un differenziale di $f(P)$ in P_0 , sarà:

$$(13) \quad g'_\lambda(P_0) = f'_\lambda(P_0) = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x \lambda}{\sin xy},$$

e d'altronde è chiaro che

$$x'_\lambda(P_0) = \frac{\sin \lambda y}{\sin xy}, \quad y'_\lambda(P_0) = \frac{\sin x \lambda}{\sin xy}.$$

Viceversa, se la (13) vale comunque sieno scelti λ e il sottoinsieme K , le tangenti a F in $\bar{P}_0$ giacciono sul piano (1), onde (n. 5) $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è un differenziale di $f(P)$ in P_0 .

Quando K sia un arco rettificabile di origine P_0 , avente ivi la semitangente λ , risulta in particolare

$$x'_\lambda(P_0) = \frac{dx}{ds}, \quad y'_\lambda(P_0) = \frac{dy}{ds},$$

ove s sia la lunghezza dell'arco P_0P da P_0 verso P .

16. Se gli assi positivi x, y , cui riferiscesi il differenziale $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, son due semicorde (in particolare semitangenti) di I in P_0 , e P_0 è regolare, i coefficienti α, β , che compaiono nella regola di derivazione delle funzioni composte, son le ultraderivate direzionali di f secondo x, y ; altrimenti i numeri stessi non hanno significato intrinseco rispetto ad $f(P)$.

Ma, come il differenziale di $f(P)$ in P_0 si può scrivere, ove esista, rispetto a due assi cartesiani qualunque (n. 6, Oss.), così la regola di derivazione delle funzioni composte può riferirsi a due assi qualunque. Se x, y son due semitangenti non allineate di $f(P)$ in P_0 , risulta (tanto se P_0 è regolare, quanto se non lo è):

$$\alpha = f'_x(P_0), \quad \beta = f'_y(P_0).$$

Presi due assi cartesiani qualunque x', y' , oltre alla (13), vale la:

$$g'_\lambda(P_0) = f'_\lambda(P_0) = \alpha' \frac{\sin \lambda y'}{\sin x' y'} + \beta' \frac{\sin x' \lambda}{\sin x' y'},$$

ove

$$\alpha' = \alpha \frac{\sin x' y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x x'}{\sin xy}, \quad \beta' = \alpha \frac{\sin y' y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin xy'}{\sin xy},$$

le quali definiscono i coefficienti α', β' con cui si compone il differenziale totale di $f(P)$ in P_0 , rispetto agli assi x', y' , allorchè esso è intrinsecamente individuato dalle due derivate direzionali $f'_x(P_0), f'_y(P_0)$.

I numeri α', β' non posson però generalmente concepirsi come limiti di rapporti incrementali. Tuttavia, da un punto di vista puramente formale, α', β' son da considerarsi come derivate di f in P_0 , rispetto ad x', y' , in quanto definiscono il differenziale $\alpha' \Delta x' + \beta' \Delta y'$. Sono le *derivate perfette* del GUARESCHI.

Se $f(P)$ ha in P_0 un fascio di differenziali, ogni coppia α, β di numeri soddisfacenti alla (13) può esser assunta come coppia di derivate perfette di f rispetto a due assi qualunque x, y ; ma in realtà in questo caso la regola di derivazione delle funzioni composte dice ben poco, perchè l'insieme I e un qualunque suo sottoinsieme K hanno in P_0 la medesima tangente.

Continuità delle iperderivate quando esistono in un dominio piano.

17. Cominciamo dal caso delle funzioni di una variabile.

Per una funzione $f(P)$ di un punto P variabile in un insieme rettilineo I , si posson definire, in un punto P_0 d'accumulazione di I , le derivate e le iperderivate direzionali (ma non le ultraderivate).

Se l'insieme I è addirittura un intervallo, si riconosce immediatamente che l'iperderivata esiste in ogni punto di I quando ivi esista la derivata ordinaria e sia continua.

Molto più interessante è la proposizione reciproca, che pure è vera. Vale cioè il teorema:

Se una funzione $f(P)$ di un punto P variabile in un intervallo rettilineo I , è iperderivabile in ogni punto dell'intervallo, la derivata $f'(P)$ è dovunque continua. (La reciproca è ovvia).

Dimostreremo questo teorema nel n. successivo, riducendolo ad un'espressiva proprietà geometrica, che gli equivale.

18. Conviene che ricordiamo prima la definizione di *punto semplice* P di una varietà topologica M_k appartenente ad uno spazio S_n , data nella mia Nota di Cracovia.

Il punto P (che può esser interno o situato sul contorno di M_k) dicesi semplice, quando le corde improprie di M_k per P giacciono in uno spazio lineare S_k ⁽⁶⁾. Tale definizione equivale a quest'altra: Il punto P è semplice, quando un S_{n-k} prossimo a P sega M_k nell'intorno di P al più in un punto (esattamente in un punto se P è interno ad M_k). Fanno eccezione soltanto gli S_{n-k} abbastanza prossimi a spazi S_{n-k} appartenenti ad un certo S_k passante per P , che si chiama lo S_k *tangente* ad M_k in P .

Ebbene, vale il teorema:

Se una linea di Jordan ha tutti i punti semplici, la tangente in un punto su essa mobile varia con continuità ⁽⁷⁾.

Basta dimostrare il teorema per le linee piane (cfr. col successivo n. 28).

Scelta sul piano una direzione y non parallela alla retta tangente alla linea data F in suo punto $\bar{P}_0$, se $\bar{P}_0$ è interno ad F le rette abbastanza prossime a $\bar{P}_0$, parallele ad y , segan la linea attorno a $\bar{P}_0$ in un sol punto. Onde F può esser rappresentata intorno a $\bar{P}_0$ da un'equazione del tipo $y=f(P)$, ove P varii in un intorno del punto P_0 proiezione di $\bar{P}_0$ sopra un asse x .

La conclusione analoga vale se $\bar{P}_0$ è un estremo di F , purchè si assuma come asse y una retta non tangente ad F in $\bar{P}_0$ e si considerino le parallele ad y situate da quella parte di y cui appartiene un intorno abbastanza ristretto di $\bar{P}_0$ su F . Allora $y=f(P)$ sarà definita soltanto da una parte di P_0 .

Dall'ipotesi che F abbia in $\bar{P}_0$ una sola corda impropria (coincidente colla tangente), segue che in P_0 la $f(P)$ ammette l'iperderivata direzionale (nelle due direzioni uscenti da P_0 , se il punto è interno all'intervallo I dove risulta definita $f(P)$, in una sola direzione, se P_0 è un estremo di I). In ogni punto interno di F vi son dunque due semitangenti opposte.

Viceversa, se $f(P)$ è iperderivabile in ogni punto dell'intervallo I , il dia-

⁽⁶⁾ Nella mia Nota, *Le curve intuitive* (« Rendiconti di Palermo », 1930) un punto semplice P di una linea piana è definito dalla condizione che vi sia in esso una sola tangente sulla quale si possa proiettare ortogonalmente un intorno di P sulla linea. Questa definizione è più generale di quella del testo: ossia un punto P può esser semplice nel senso attuale e non esserlo nel senso della Nota di Cracovia. Però allora la tangente in quel punto ha ivi una discontinuità. Un esempio è fornito da una curva $y=f(x)$, in cui $f(x)$ sia derivabile in un intervallo, con derivata non sempre continua. È chiaro che la definizione della Nota di Cracovia aderisce meglio alla nozione intuitiva di punto semplice.

⁽⁷⁾ Ved. il n. 85 del libro citato di BOULIGAND ove è dimostrato un teorema equivalente a questo, sul fondamento della semicontinuità superiore del « paratingente ».

gramma $y = f(P)$ ha in ogni punto una sola corda impropria e quindi ogni tal punto è semplice pel diagramma. Da ciò intanto segue l'equivalenza della proprietà geometrica da dimostrarsi e del teorema del n. 17.

Passiamo a stabilire il teorema geometrico. Fissato un punto P_0 di I , diciamo t_0 la tangente al diagramma F nel punto P_0 corrispondente e t la tangente nel punto $\bar{P}$ corrispondente a P mobile su I . Indichiamo inoltre con K_ε l'insieme delle tangenti a F nei punti situati in un intorno di raggio ε di $\bar{P}_0$. Esistono certamente rette di accumulazione per K_ε , qualunque sia ε ; sia r una di queste. Occorre dimostrare che r coincide necessariamente con t_0 .

Scelti un numero $\varepsilon > 0$ e un angolo (acuto) δ , esiste qualche tangente t ad F in un punto distinto da $\bar{P}_0$, situato nell'intorno di raggio ε di $\bar{P}_0$, la quale forma con r un angolo $< \delta$. Ragionando come nel n. 4 della mia Nota di Cracovia, si conclude che è possibile trovare in F un insieme numerabile $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ di punti convergente a $\bar{P}_0$ e tale che la tangente t_n in $\bar{P}_n$, per $n \rightarrow \infty$, tenda ad r . Da questo dedurremo che r è corda impropria di F in $\bar{P}_0$ e quindi che coincide con t_0 .

Si fissino all'uopo due successioni decrescenti e infinitesime di numeri positivi non nulli e di angoli acuti non nulli:

$$(14) \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots; \quad \delta_1, \delta_2, \dots.$$

Sia $\bar{P}_1'$ il primo punto della successione $\bar{P}_n$, che trovasi nell'intorno di raggio $\frac{1}{2}\varepsilon_1$ di $\bar{P}_0$ e t_1' la tangente a F in $\bar{P}_1'$. Considerato l'intorno di raggio $\frac{1}{2}\varepsilon_1$ di $\bar{P}_1'$, ivi potrà scegliersi (pel principio Z del n. 2 della mia Nota di Cracovia) un punto $\bar{P}_1''$ distinto da $\bar{P}_1'$, tale che la retta $\bar{P}_1'\bar{P}_1''$ formi con t_1' un angolo acuto $< \delta_1$. Sia similmente $\bar{P}_2'$ il primo punto della successione $\bar{P}_n'$, distinto da $\bar{P}_1'$, che trovasi nell'intorno di raggio $\frac{1}{2}\varepsilon_2$ di $\bar{P}_0$ e t_2' la tangente ad F in $\bar{P}_2'$. Si potrà allora determinare nell'intorno di raggio $\frac{1}{2}\varepsilon_2$ di $\bar{P}_2'$ un punto $\bar{P}_2''$, distinto da $\bar{P}_2'$, tale che la retta $\bar{P}_2'\bar{P}_2''$ formi con t_2' un angolo acuto $< \delta_2$; e così proseguendo.

La retta $\bar{P}_n'\bar{P}_n''$ viene in tal guisa ad avere i suoi punti distinti $\bar{P}_n', \bar{P}_n''$ nell'intorno di raggio ε_n di $\bar{P}_0$ e l'angolo acuto (o retto) φ_n , ch'essa forma con r è minore dell'angolo δ_n aumentato dell'angolo acuto (o retto) θ_n , che la tangente t_n' a F in $\bar{P}_n'$ forma con r .

Presi ora ad arbitrio il numero $\varepsilon > 0$ e l'angolo acuto $\delta > 0$, da un certo n in poi risulta $\varepsilon_n < \varepsilon$, $\delta_n < \frac{1}{2}\delta$, $\theta_n < \frac{1}{2}\delta$, onde $\varphi_n < \delta$; epperò $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{P}_n'\bar{P}_n'' = r$; c. d. d.

OSSERVAZIONE. — Una linea di Jordan a punti semplici risulta sempre rettificabile, appunto perchè la sua tangente è variabile con continuità, così che è applicabile la conclusione del n. 7 della mia citata Nota sulle curve intuitive. Essa ammette sempre perciò una rappresentazione parametrica regolare in grande.

19. Consideriamo ora una funzione $f(P)$ di un punto P variabile in un dominio piano I . Vale il teorema analogo a quello indicato nel n. 17 per le funzioni di una variabile; cioè:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione reale $f(P)$ di un punto variabile in un dominio piano I sia iperdifferenziabile in ogni punto interno al dominio, è che esistano dovunque nell'interno di I le derivate parziali di f e sieno continue. (La sufficienza della condizione è ovvia).

Questo teorema equivale alla proprietà geometrica, che stabiliremo nel n. successivo.

20. Una superficie di Jordan coi punti tutti semplici ha il piano tangente variabile con continuità ⁽⁸⁾.

È chiaro che basterà dimostrare il teorema in piccolo per una superficie dello spazio ordinario.

L'intorno F di un punto $\bar{P}_0$ interno alla data superficie può rappresentarsi con un'equazione del tipo $z = f(P)$, ove $f(P)$ sia una funzione reale, continua di un punto P variabile nell'interno di una cella piana I , comprendente il punto P_0 che corrisponde a $\bar{P}_0$. Tale rappresentazione si ottiene proiettando l'intorno di $\bar{P}_0$ sul piano xy , secondo una direzione z non parallela al piano tangente ad F in $\bar{P}_0$, tenuto conto della proprietà caratteristica dei punti semplici.

Il fatto che i punti di F sieno semplici (cioè che le corde improprie in ciascuno di essi giacciono sul piano tangente) equivale (n. 11) all'iperdifferenziabilità della $f(P)$ in ogni punto di I : donde l'asserita equivalenza fra la proprietà geometrica e il teorema del n. 19.

Considereremo dapprima (come del resto nell'enunciato del teor. 19) i punti interni ad F , cioè i punti interni ad I .

Sia λ una semiretta di origine P_0 . Nel punto $\bar{P}$ di F , corrispondente a P variabile nell'interno di I , vi è una sola tangente t ad F , la quale ap-

⁽⁸⁾ Ved. a tal proposito il n. 86 del citato libro di BOULIGAND.

partenga alla giacitura $z\lambda$ dei piani paralleli a z e a λ . Dimostreremo che la derivata $f'_\lambda(P)$ è continua in P_0 . Da ciò per $\lambda = x, y$ trarremo la conclusione del teorema.

Avvertiamo anzitutto che la continuità di $f'_\lambda(P)$ in P_0 equivale al fatto che per $P \rightarrow P_0$ la tangente t tende all'analogha tangente t_0 in P_0 . Invero, se t ha per limite t_0 , quella delle due semitangenti in cui $\bar{P}$ divide t , che si proietta nella semiretta avente la direzione λ , ha per limite l'analogha semitangente in $\bar{P}_0$.

D'ora innanzi indicheremo brevemente con t le tangenti che appartengono alla giacitura $z\lambda$. Scelto un intorno di raggio ε di $\bar{P}_0$, denotiamo con K_ε l'insieme delle t che toccano F nei punti dell'intorno fissato e con r una retta d'accumulazione (uscendo da $\bar{P}_0$) di K_ε , qualunque sia ε . Poichè le t appartengono alla giacitura $z\lambda$, così sarà di r . Per dimostrare il teorema, basterà provare che r è una corda impropria di F , perchè allora ne seguirà che r coincide con t_0 , che è l'unica corda impropria di F in $\bar{P}_0$, appartenente alla giacitura $z\lambda$.

Non c'è qui che da ripetere, con lievi cangiamenti di parole, il ragionamento del n. 18. Fissata una successione $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ di punti interni ad F , che converga a $\bar{P}_0$, in modo che $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = r$ (ove t_n è la t relativa a $\bar{P}_n$),

consideriamo le successioni (14). Sia P'_1 il primo dei punti $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ che cade nell'intorno di raggio $\frac{1}{2}\varepsilon_1$ di $\bar{P}_0$ e t'_1 la t relativa. Il piano parallelo a $z\lambda$ passante per P'_1 taglia F secondo una linea di JORDAN, che ha in P'_1 un punto semplice e per tangente ivi t'_1 . Si può dunque scegliere nell'intorno di raggio $\frac{1}{2}\varepsilon_1$ di $\bar{P}'_1$ un punto $\bar{P}''_1$ (interno alla linea), distinto da $\bar{P}'_1$ e tale che la retta $\bar{P}'_1\bar{P}''_1$ formi con t'_1 un angolo $< \delta_1$; e così proseguendo. Si giunge in tal guisa a costruire due successioni $\bar{P}'_1, \bar{P}'_2, \dots; \bar{P}''_1, \bar{P}''_2, \dots$ di punti interni ad F e tali che $\bar{P}'_n, \bar{P}''_n$ giacciono nell'intorno di raggio ε_n di $\bar{P}_0$ e la retta $\bar{P}'_n\bar{P}''_n$ forma con t'_n (la t relativa a $\bar{P}'_n$) un angolo $\psi_n < \delta_n$. Siccome poi le rette $r, \bar{P}'_n\bar{P}''_n, t'_n$ appartengono alla giacitura $z\lambda$, l'angolo φ_n che la retta $\bar{P}'_n\bar{P}''_n$ forma con r è non maggiore della somma dell'angolo non ottuso θ_n che t'_n forma con r e dell'angolo ψ_n ; e quindi è minore di $\theta_n + \delta_n$.

Di qui si deduce (n. 18) che $\lim \bar{P}'_n\bar{P}''_n = r$; epperò r è corda impropria; c. d. d.

Se P_0 è un punto contorno del dominio piano I , la conclusione vale immutata, purchè si riferisca ad una semicorda impropria λ , di origine P_0 , dell'insieme I , tale che per ciascuno dei punti di I situati in un intorno abbastanza piccolo di P_0 passi una semicorda impropria di I parallela a λ . Questa

condizione è sempre soddisfatta nei punti contorno di I , quando il contorno è costituito da una linea di JORDAN a punti tutti semplici; epperò *la continuità del piano tangente ad una superficie di Jordan a punti tutti semplici, vale anche nei punti del contorno, quando questi costituiscono una linea di Jordan a punti semplici.*

OSSERVAZIONE. — Nei riguardi della *quadrabilità di una superficie di Jordan F a punti tutti semplici* è ovvio ch'essa sussiste in piccolo, per ogni cella abbastanza piccola di F , la quale sia *regolarmente* rappresentabile (p. es. per mezzo di una proiezione) sopra una cella piana. La possibilità di una rappresentazione parametrica regolare in grande di una superficie di JORDAN, che sia una cella a due dimensioni coi punti tutti semplici, non pare sia tanto facile a dimostrarsi.

Condizione per la differenziabilità in un dominio piano.

21. Stabilita la condizione d'iperdifferenziabilità in un dominio piano, occupiamoci della semplice differenziabilità.

Sia $f(P)$ una funzione definita in un dominio piano I e $P_0(x_0, y_0)$ sia un punto interno ad I . Secondo il n. 8 la condizione necessaria e sufficiente perchè $f(P)$ sia differenziabile in P_0 (che è un punto d'accumulazione regolare), è che $f(P)$ sia ultraderivabile secondo ogni direzione uscente da P_0 . Ora questa condizione può rendersi notevolmente più espressiva, nel caso attuale.

Prendiamo come *rapporti incrementali parziali (generalizzati)* di $f(P)$ in P_0 i rapporti

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}, \quad \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0},$$

nei quali si abbandoni la troppo esigente condizione che il punto $P(x, y)$ si muova rispettivamente sopra una retta $y = \text{cost.}$ o rispettivamente $x = \text{cost.}$ È soltanto abbandonando tale condizione che si può sperare di far giuocare il vero carattere della $f(P)$, la quale deve concepirsi come funzione della *coppia* (x, y) e non di ciascuna delle variabili. Ebbene, se comunque P tende a P_0 , sotto la sola condizione che la semiretta P_0P tenda ad una semiretta qualsiasi prefissata, in cui non sia rispettivamente costante x od y , esistono finiti i limiti dei predetti rapporti, tali limiti si chiameranno le *derivate parziali generalizzate* di $f(P)$ in P_0 e si designeranno con $f_x(P_0)$, $f_y(P_0)$.

Sono questi i medesimi simboli delle ultraderivate; ma la cosa non dà

luogo ad ambiguità, perchè, come risulterà dal seguito, i valori di $f_x(P_0)$, $f_y(P_0)$, quando esistono entrambi, coincidono appunto coi valori delle ultraderivate.

Stabiliamo il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(P)$ del punto $P(x, y)$ di un dominio piano I , sia differenziabile nel punto $P_0(x_0, y_0)$ interno ad I , è che in P_0 esistano le derivate parziali generalizzate $f_x(P_0)$, $f_y(P_0)$.

La necessità della condizione è già contenuta nel n. 8, perchè la definizione delle derivate parziali generalizzate fornisce un modo particolare di ottenere, ove esistano, i valori delle ultraderivate omonime.

Stabiliamo la sufficienza della condizione. Se facciamo variare $P(x, y)$ sulla parallela ad x condotta per P_0 , eppoi sulla parallela ad y per P_0 , in forza dell'ipotesi risulta $\alpha = f_x(P_0) = \bar{f}_x'(P_0)$, $\beta = f_y(P_0) = \bar{f}_y'(P_0)$, ove f_x , f_y denotano le derivate generalizzate e $\bar{f}_x'$, $\bar{f}_y'$ le derivate parziali ordinarie.

Indichiamo con $M(x, y_0)$, $N(x_0, y)$ le proiezioni di $P(x, y)$, comunque variabile, sulle parallele per P_0 ad x , y . Sussistono le relazioni:

$$(15) \quad \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = \frac{f(P) - f(M)}{MP} \frac{MP}{P_0P} + \frac{f(M) - f(P_0)}{P_0M} \frac{P_0M}{P_0P}$$

$$(16) \quad \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = \frac{f(P) - f(N)}{NP} \frac{NP}{P_0P} + \frac{f(N) - f(P_0)}{P_0N} \frac{P_0N}{P_0P}.$$

Supposto che $P \rightarrow P_0$ in modo che $\lim P_0P = x'$ (ove x' è equipollente al semiasse positivo x o al semiasse $-x$), la semiretta NP tende pure ad x' . Pertanto viene:

$$(17) \quad \lim \frac{NP}{P_0P} = \frac{\sin x'y'}{\sin x'y'} = 1, \quad \lim \frac{P_0N}{P_0P} = \frac{\sin x'x'}{\sin x'y'} = 0,$$

ove y' è il limite di P_0N . La (16) dimostra allora che:

$$\lim \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = \pm \alpha,$$

secondo che x' è equipollente ad x o a $-x$. Esiste perciò la derivata direzionale $f'_x(P_0)$. Similmente dalla (15) si deduce che esiste $f'_y(P_0) = \pm \beta$, valendo il $+$ o il $-$ secondo che y' è equipollente ad y o a $-y$.

Supponiamo ora che $P \rightarrow P_0$ in modo che $\lim P_0P = \lambda$, ove λ è una semiretta non parallela agli assi. Sieno x' , y' i limiti delle semirette P_0M , MP . Dalla (15) tenuto conto delle

$$(18) \quad \lim \frac{MP}{P_0P} = \frac{\sin x'\lambda}{\sin x'y'}, \quad \lim \frac{P_0M}{P_0P} = \frac{\sin \lambda y'}{\sin x'y'},$$

si deduce:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{P - P_0} = f'_{x'}(P_0) \frac{\sin \lambda y'}{\sin x' y'} + f'_{y'}(P_0) \frac{\sin x' \lambda}{\sin x' y'},$$

cioè:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{P - P_0} = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin x y} + \beta \frac{\sin x \lambda}{\sin x y},$$

epperò tutte le semitangenti in $\bar{P}_0$ alla superficie $F(z = f(P))$, ivi comprese quelle che corrispondono alle direzioni degli assi, giacciono sul piano (1); e quindi (n. 5, Oss.) la $f(P)$ è differenziabile in P_0 .

OSSERVAZIONE. — Il teorema dimostrato prova che il concetto di derivate parziali generalizzate è quello che più naturalmente estende il concetto di derivata per le funzioni di una variabile, perchè fa equivalere la differenziabilità all'esistenza delle derivate generalizzate, come per le funzioni di una variabile la differenziabilità equivale all'esistenza della derivata.

22. Si può chiedere se per la differenziabilità di $f(P)$ in un punto P_0 interno al dominio piano I , basti l'esistenza dei limiti dei rapporti incrementali generalizzati sopra le rette uscenti da P_0 . Ebbene, la sola esistenza di questi limiti (finiti) in ogni punto interno ad I non basta; ma essa diviene sufficiente quando i limiti medesimi, considerati come funzioni del punto P_0 variabile nell'interno di I , siano limitati. Vale cioè il teorema:

Se in ogni punto (x, y) interno ad un dominio piano I , dove sia data una funzione $f(x, y)$, esistono, univocamente determinati dal punto, i limiti

$$(19) \quad \begin{aligned} \alpha(x, y) &= \lim_{\bar{x} \rightarrow x} \frac{f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x, \bar{y})}{\bar{x} - x} \\ \beta(x, y) &= \lim_{\bar{y} \rightarrow y} \frac{f(\bar{x}, \bar{y}) - f(\bar{x}, y)}{\bar{y} - y} \end{aligned}$$

quando il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ tende ad (x, y) sopra una retta qualunque uscente da (x, y) , sulla quale non sia rispettivamente costante x od y ; e le funzioni $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ son limitate nell'interno di I ⁽⁹⁾, la data funzione $f(x, y)$ è differenziabile nell'interno del dominio.

Anzitutto è chiaro che $f(P)$ ammette in un punto $P_0(x_0, y_0)$ interno ad I

⁽⁹⁾ Cioè limitate in ogni dominio interno ad I , il che equivale, pel teorema di WEIERSTRASS, a supporre che α , β siano limitate nell'intorno di ogni punto interno ad I .

le derivate parziali $\bar{f}_x'(P_0)$, $\bar{f}_y'(P_0)$, aventi i valori $\alpha(x_0, y_0)$, $\beta(x_0, y_0)$. Ne deriva che, se P, Q son due punti distinti variabili nell'interno di I colla condizione che la retta PQ si conservi parallela ad un asse, p. es. y , il rapporto $\frac{f(P) - f(Q)}{QP}$ si mantiene limitato, perchè

$$|f(P) - f(Q)| = QP |\beta(R)|,$$

ove R è un conveniente punto interno al segmento QP .

Proviamo ora che in P_0 esistono altresì le derivate direzionali secondo gli assi e che:

$$(20) \quad \begin{aligned} \alpha(x_0, y_0) &= \bar{f}_x'(P_0) = f_x'(P_0) = -f'_{-x}(P_0) \\ \beta(x_0, y_0) &= \bar{f}_y'(P_0) = f_y'(P_0) = -f'_{-y}(P_0). \end{aligned}$$

Conservando le notazioni del n. prec., si muova dalla (15) e facciasi tendere P a P_0 in modo affatto arbitrario, colla sola condizione che $\lim P_0P = x'$ sia una semiretta parallela all'asse x (equipollente ad x o a $-x$). Sarà allora $\lim P_0M = x'$. Si chiami y' il limite di MP . Viene:

$$\lim \frac{MP}{P_0P} = \frac{\sin x'x'}{\sin x'y'} = 0, \quad \lim \frac{P_0M}{P_0P} = \frac{\sin x'y'}{\sin x'y'} = 1,$$

e, siccome $\frac{f(P) - f(M)}{MP}$ si conserva limitato, perchè la retta PM è sempre parallela ad y , così la (15) prova l'esistenza del limite del primo membro, cioè l'esistenza di $f'_x(P_0)$ e il fatto che:

$$f'_x(P_0) = \lim \frac{f(M) - f(P_0)}{P_0M} = \pm \alpha(x_0, y_0),$$

valendo il $+$ o il $-$ secondo che x' è equipollente ad x o a $-x$.

Similmente dalla (16) si deduce l'esistenza di $f'_y(P_0)$, ove y' , parallela ad y , sia il limite di P_0P , e si dimostra la seconda delle (20).

Suppongasi ora che $P(x, y)$ muovasi sopra una semiretta λ per P_0 , non parallela agli assi, sicchè rimane fisso il segno di $y - y_0$. Quando $y \rightarrow y_0$ (cioè $P \rightarrow P_0$) la seconda delle (19) porge:

$$\lim \frac{f(P) - f(M)}{MP} = \pm \beta(x_0, y_0),$$

ove vale il $+$ o il $-$ secondo che $\lim MP$ è equipollente ad y o a $-y$, cioè secondo che $y > y_0$ o $y < y_0$.

Posto $\lim MP = y'$, $\lim P_0M = x'$, sussistono le (18), e dalla (15) segue:

$$\lim \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = f'_{x'}(P_0) \frac{\sin \lambda y'}{\sin x'y'} + f'_{y'}(P_0) \frac{\sin x'\lambda}{\sin x'y'},$$

cioè:

$$(21) \quad \lim \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = \alpha(x_0, y_0) \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta(x_0, y_0) \frac{\sin x\lambda}{\sin xy}.$$

Facciamo infine tendere comunque P a P_0 colla sola condizione $\lim P_0P = \lambda$. Designata con M l'intersezione della semiretta λ colla parallela all'asse y per P (intersezione certo esistente per P abbastanza prossimo a P_0 , perchè $\lim P_0P = \lambda$), vale la (15) (dove però M non ha il significato di prima). Se $\lim MP = y'$ viene:

$$\lim \frac{MP}{P_0P} = \frac{\sin \lambda \lambda}{\sin \lambda y'} = 0, \quad \lim \frac{P_0M}{P_0P} = \frac{\sin \lambda y'}{\sin \lambda y'} = 1;$$

epperò, essendo limitato il rapporto $\frac{f(P) - f(M)}{MP}$, dalla (15) si trae:

$$\lim \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = \lim \frac{f(M) - f(P_0)}{P_0M}.$$

Ma pel calcolo del secondo membro si può applicare la (21) (dove P fa le veci di M); dunque questa relazione vale anche quando P si approssima comunque a P_0 sotto la condizione $\lim P_0P = \lambda$.

La conclusione è che la (21) vale qualunque sia λ , anche parallela all'asse x o all'asse y , sotto la sola condizione $\lim P_0P = \lambda$; epperò tutte le semitangenti ad F in $\bar{P}_0$ giacciono sul piano:

$$z - z_0 = \alpha(x_0, y_0)(x - x_0) + \beta(x_0, y_0)(y - y_0),$$

e quindi (n. 5, Oss.) $f(P)$ è differenziabile in P_0 .

OSSERVAZIONE 1^a. — La condizione indicata non è però necessaria. Per es. la funzione

$$f(0) = 0, \quad f(x) = x^{1+\gamma} \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0, \quad 0 < \gamma < 1),$$

concepita come funzione di due variabili, è ovunque differenziabile, perchè $f(x)$ è ovunque derivabile. Ma le sue derivate parziali non sono limitate, perchè il massimo ed il minimo limite di $f'(x)$ per $x \rightarrow 0$ sono $+\infty$, $-\infty$. Pertanto

in ogni punto dell'asse y i numeri $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ relativi a questa funzione non son limitati ⁽¹⁰⁾.

OSSERVAZIONE 2^a. — Se all'ipotesi che $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ sieno limitati nell'interno di I si sostituisce l'ipotesi che esistano in ogni punto interno ad I le derivate $\bar{f}_x'$, $\bar{f}_y'$ e sieno limitate, secondo il teorema di RADEMACHER citato nella prefazione, si può soltanto affermare che $f(P)$ è differenziabile *quasi dappertutto* in I . Ne è possibile eliminare questa indeterminazione dell'enunciato, perchè è nella natura della cosa, come lo mostra l'esempio della funzione

$$f(0, 0) = 0, \quad f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(radicale positivo; x, y non ambedue nulli), la quale ha derivate limitate attorno all'origine e non è ivi differenziabile ⁽¹¹⁾.

23. La opportunità di sostituire agli ordinari rapporti incrementali parziali i rapporti incrementali generalizzati nello studio delle funzioni di più variabili, e quindi agli incrementi parziali della funzione gl'incrementi parziali generalizzati, si manifesta evidente anche quando si pon soltanto mente alla continuità *superficiale* di $f(P)$. Si sa che per la continuità superficiale di $f(P)$ in P_0 non basta che gl'incrementi $f(x, y) - f(x_0, y)$, $f(x, y) - f(x, y_0)$, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ tendano tutti a zero quando $P(x, y)$ tende a P_0 sulla parallela ad x per P_0 o sulla parallela ad y per P_0 o sopra una retta qualunque per P_0 . Invece, come vedremo:

Perchè una funzione $f(x, y)$ sia superficialmente continua in un punto $P(x_0, y_0)$ interno ad un dominio piano I dov'essa è definita, bisogna e basta che

$$\lim [f(x, y) - f(x_0, y)] = 0, \quad \lim [f(x, y) - f(x, y_0)] = 0,$$

quando $P(x, y)$ tende a $P_0(x_0, y_0)$ in modo che $\lim P_0P$ sia una qualunque semiretta λ , sulla quale x, y rispettivamente non si conservino costanti.

Chiamiamo ancora M, N i punti (x, y_0) , (x_0, y) . La necessità della condizione è evidente, perchè $f(P) - f(N) = [f(P) - f(P_0)] + [f(P_0) - f(N)]$, e analo-

⁽¹⁰⁾ Il ragionamento del n. 21 prova che quando $f(P)$ è differenziabile in ogni punto interno ad un dominio piano I , le possibili rette d'accumulazione in $\bar{P}_0$ delle tangenti ad F nei punti d'un intorno di $\bar{P}_0$ la cui massima corda tenda a zero, son corde improprie di F in $\bar{P}_0$. Perciò quando una almeno delle derivate parziali di f non è limitata attorno a P_0 , vi è in $\bar{P}_0$ una corda impropria di F parallela all'asse z .

⁽¹¹⁾ Quest'esempio ed il precedente mi sono stati addotti dal prof. PICONE, al quale avevo comunicato i miei risultati.

gamente per $f(P) - f(M)$. Si vede anzi che i limiti degl'incrementi parziali son zero comunque $P \rightarrow P_0$. Ma quel che *basta* è che i limiti stessi si annullino quando $P \rightarrow P_0$ nel modo enunciato.

Ragioniamo per assurdo, supponendo dunque che f non sia superficialmente continua in P_0 . Vi sarà allora ivi un valore d'accumulazione L di $f(P)$, diverso da $f(P_0)$ e in ogni intorno di P_0 cadranno punti Q tali che $|f(Q) - L| \leq \varepsilon$, ove $2\varepsilon < |L - f(P_0)|$.

Da qui, ammessa la forma particolare del postulato di ZERMELO, concernente la possibilità di costruire una successione di punti estraendone uno da ciascun insieme di una successione ⁽¹²⁾, si deduce ovviamente l'esistenza di una successione P_ν convergente a P_0 e tale che $|f(P_\nu) - L| \leq \varepsilon$. Se questa successione ha in P_0 più d'una semitangente, si potrà (n. 1) estrarre da essa una successione parziale avente in P_0 una sola semitangente λ . Continueremo a indicare con P_ν tale successione parziale. La semitangente λ sarà non parallela ad uno almeno, p. es. y , dei due assi; e quindi su essa non sarà $x = \text{cost.}$.

Designate con x_ν, y_ν le coordinate di P_ν e con N_ν il punto (x_0, y_ν) , siccome da un certo ν in poi l'angolo della semiretta P_0P_ν con λ è minore di un angolo comunque prefissato, i punti P_ν saranno distinti dai corrispondenti punti N_ν . Si ha ora:

$$\begin{aligned} |f(x_\nu, y_\nu) - f(x_0, y_\nu)| &\geq |L - f(N_\nu)| - |f(P_\nu) - L| \geq |L - f(N_\nu)| - \varepsilon \\ &\geq |L - f(P_0)| - |f(P_0) - f(N_\nu)| - \varepsilon, \end{aligned}$$

e siccome, in virtù dell'ipotesi, $f(P_0) - f(N_\nu)$ tende a zero per $\nu \rightarrow \infty$, così, da un certo ν in poi, $|f(P_0) - f(N_\nu)| < \varepsilon$ e

$$|f(x_\nu, y_\nu) - f(x_0, y_\nu)| > |L - f(P_0)| - 2\varepsilon,$$

che è un numero fisso > 0 . Ciò contraddice all'ipotesi di partenza. È dunque assurdo ammettere che f non sia superficialmente continua in P_0 .

OSSERVAZIONE. — Un ragionamento dello stesso tipo, ma più semplice, prova che $f(P)$ è superficialmente continua in P_0 allora e solo allora che $\lim [f(P) - f(P_0)] = 0$ per $P \rightarrow P_0$ in modo che $\lim P_0P$ sia una qualunque prefissata semiretta per P_0 , il che si può esprimere dicendo che $f(P)$ è *continua nelle diverse direzioni per P_0* . Però questa condizione è molto meno significativa della precedente.

(¹²) Qui e nell'osservazione del n. 24 son i soli punti della presente Memoria dove si ammette il postulato di ZERMELO (sotto la forma indicata).

Osservazioni varie.

24. La nozione di semitangente di un insieme, consente di rendere più espressivo e concreto un teorema relativo ai massimi e minimi di una funzione $f(P)$ di due variabili, il quale rimette in valore, nel solo senso in cui essa può rigorosamente sussistere, la vecchia idea di LAGRANGE per la ricerca dei massimi e minimi di $f(P)$, e si applica anche ai massimi e minimi vincolati. Si dimostra infatti facilmente che:

Se $f(P)$ è una funzione reale e continua di un punto P variabile in un insieme piano serrato I , per verificare che in un punto d'accumulazione P_0 di I essa presenta un massimo o un minimo (relativo), basta verificare che $f(P)$ gode di questa proprietà quando P s'avvicina a P_0 sotto la sola condizione che la semiretta P_0P tenda ad una qualunque, ma determinata, semitangente λ di I in P_0 (¹³).

Ammissa soddisfatta la condizione p. es. pel massimo, si tratta di provare che in un intorno di P_0 in I è $f(P) \leq f(P_0)$. Se, invero, esistono punti Q di I in ciascun dei quali sia $f(Q) > f(P_0)$, poichè in ogni punto d'accumulazione dei Q la funzione (attesa la sua continuità) assume un valore non minore di $f(P_0)$, i punti R dell'intorno di P_0 in cui $f(R) \geq f(P_0)$ costituiscono un sottoinsieme serrato K di I . L'insieme K avrà in P_0 almeno una semitangente λ e si potrà far variare P in una successione S di punti di K convergente a P_0 , in modo che $\lim P_0P = \lambda$. Si contraddice così all'ipotesi. Pertanto è assurdo ammettere che $f(P)$ non sia massima in P_0 , per P variabile in I .

OSSERVAZIONE. — In realtà il ragionamento precedente è esauriente soltanto nel caso in cui $f(P_0)$ sia un massimo o un minimo effettivo (o, come altri dice, proprio), ogni volta che $\lim P_0P$ sia una semiretta determinata. Invero, se $f(P_0)$ è semplicemente un massimo quando $\lim P_0P$ è determinato, non si può escludere che nei punti della successione S sia sempre $f(R) = f(P_0)$, epperò non si arriva all'assurdo. Nel caso di un massimo o di un minimo ineffettivo, per concludere sembra necessario di ricorrere al postulato di ZERMELO (sotto la forma particolare applicata nel n. 23). Ammettendo questo

(¹³) Il VIVANTI (« Rend. dei Lincei », 1898, 1° sem., p. 240) ridusse la verifica alla variabilità di P sulle linee cantoriane uscenti da P_0 (facendo però uso implicito del postulato di ZERMELO). Nella premessa alla Memoria, *Sugli estremanti delle funzioni di due variabili* (« Memorie della R. Acc. d'Italia », 1930-VIII) io avevo ridotto la verifica alla variabilità di P sulle linee di JORDAN uscenti da P_0 .

postulato basta considerare l'insieme H (non necessariamente serrato) dei punti Q tali che $f(Q) > f(P_0)$ e costruire mediante H una successione di punti Q convergente a P_0 , tale che $f(Q) > f(P_0)$ e $\lim QP_0 = \lambda$. Donde l'assurdo.

25. Dato un insieme piano serrato I chiamiamo *punto interiore* di I ogni punto P_0 tale che le semitangenti ad I in P_0 sieno a due a due opposte. Quando I è un dominio piano ogni punto interno è interiore. Si prova agevolmente che:

Se $f(P)$ presenta un massimo od un minimo (relativo) in un punto P_0 interiore all'insieme serrato I dov'essa è definita, ed in P_0 la funzione è differenziabile, tutte le derivate direzionali di f son ivi nulle.

Infatti, le derivate direzionali in P_0 relative a due semitangenti opposte λ , $-\lambda$ debbon aver lo stesso valore assoluto e segni contrari, per l'ipotesi della differenziabilità. D'altronde esse risultano ambedue non positive o ambedue non negative, secondochè $f(P_0)$ è un massimo o un minimo; e però son nulle.

26. Si tenga ora conto del teorema di WEIERSTRASS per gli estremi di una funzione, nel caso in cui l'insieme piano I , dov'essa è data, è un insieme qualunque limitato e serrato (non necessariamente un dominio) ⁽¹⁴⁾. Se ne deduce ovviamente che una $f(P)$ continua in ogni punto di un tal insieme, assume in I un massimo ed un minimo (assoluto). E da ciò segue subito la seguente estensione del teorema di ROLLE ⁽¹⁵⁾.

Se una funzione $f(P)$, finita e continua in tutti i punti di un insieme piano, limitato e serrato, I , e differenziabile nei punti interiori, assume valori uguali nei punti non interiori di I , esiste qualche punto interiore dove tutte le derivate direzionali son nulle.

Se $z = f(P)$ è una superficie F di JORDAN a punti semplici, se ne deduce altresì facilmente che, separata da F una cella con un contorno l a punti semplici (piano o sghembo), esiste almeno un punto P interno alla cella, tale che la proiezione ortogonale di l sul piano tangente in P circonda l'area massima (rispetto alle aree contornate dalle proiezioni ortogonali di l su altri piani dello spazio).

⁽¹⁴⁾ Ved. le mie *Lezioni di Analisi* (Bologna, Zanichelli, 1933-XI), p. 171, n. 19.

⁽¹⁵⁾ Estensioni in altro senso si trovano p. es. nelle *Lezioni di Analisi infinitesimale* di PICONE (« Circolo Mat. di Catania », 1923, vol. I), pp. 133, 244.

27. Le osservazioni precedenti stanno alla base di una trattazione dei massimi e minimi delle funzioni di più variabili, di cui ho appena iniziato lo sviluppo. La considerazione delle derivate direzionali prime evidentemente non basta. Occorre introdurre le *derivate direzionali successive*. E perciò bisogna anzitutto definire in modo topologico-infinitesimale gl'intorni dei diversi ordini di un punto di accumulazione O di un insieme serrato I di punti di un S_n . È ciò che ho fatto mediante le *semiparabole osculatrici* (dei vari ordini) ad I nel punto O , oppure mediante una trasformazione birazionale reale, senza eccezioni, dell'intorno di O , in guisa da mutare il dato insieme in uno di uno spazio di dimensione tanto alta, che gl'intorni dei vari ordini, da prendersi in considerazione, sieno raggiungibili con spazi lineari uscenti da O . Si arriva così alle derivate direzionali dei vari ordini e alla formula di TAYLOR sotto ipotesi molto più ampie delle consuete. Spero di poter tornare un'altra volta su quest'argomento.

28. Le nozioni di tangenti e corde improprie di un insieme in un punto di accumulazione permettono di considerare nel gruppo delle trasformazioni topologiche (omeomorfismi) un sottogruppo caratterizzante una geometria intermedia fra la topologia e la geometria differenziale, e che potrebbe chiamarsi topologia del 1° ordine ⁽¹⁶⁾.

Sieno I, I' due insiemi perfetti ⁽¹⁷⁾ di punti appartenenti a due spazi lineari qualunque; e fra I, I' interceda un omeomorfismo Ω . Si dirà che questo è un *omeomorfismo del 1° ordine* quando, considerati due punti O, O' di I, I' , omologhi in Ω , l'omeomorfismo fa corrispondere biunivocamente ad ogni semitangente o semicorda impropria di I in O una semitangente o rispettivamente semicorda impropria di I' in O' , ad ogni tangente e ad ogni corda impropria, una tangente od una corda impropria. Con ciò si vuol dire che, mentre P tende in I a O in guisa che $\lim OP = \lambda$, P' tende in I' ad O' in guisa che la semiretta $O'P'$ tende essa pure verso un limite determinato λ' ; e che mentre P, Q tendono in I a O in modo che $\lim PQ = \mu$, P', Q' tendono in I' ad O' in guisa che la semiretta $P'Q'$ tende anch'essa verso un limite determinato μ' . Inoltre a semitangenti o semicorde opposte corrispondono semitangenti e semicorde opposte.

⁽¹⁶⁾ È in sostanza la stessa geometria avente come gruppo fondamentale il gruppo topologico ristretto, di cui al n. 67 del libro di BOULIGAND.

⁽¹⁷⁾ Si può anche supporre soltanto che I, I' siano serrati, bastando allora riferire la definizione successiva a coppie di punti omologhi che siano di accumulazione pei due insiemi.

Le operazioni di proiezione entro uno spazio lineare S_n danno generalmente luogo ad omeomorfismi del 1° ordine. Sia O un punto di accumulazione di un insieme serrato I di S_n e sia C un centro di proiezione. Allora *condizione necessaria e sufficiente perchè fra l'intorno di O in I e l'intorno del punto O' nell'insieme I' proiezione di I da C sopra un iperpiano, vi sia un omeomorfismo del 1° ordine, è che le corde improprie di I in O stieno tutte (almeno) in un iperpiano non passante per C .*

L'asserzione è di verifica immediata.

Si può così parlare di *dimensione di un insieme serrato I in un suo punto d'accumulazione O* come della dimensione dello spazio lineare minimo in cui si può proiettare l'intorno di O in I , in guisa che l'intorno proiezione sia omeomorfo del 1° ordine al dato. È chiaro che la dimensione k di I in O uguaglia la dimensione del minimo spazio lineare congiungente le corde improprie di I in O (le quali, è superfluo dirlo, non costituiscono però sempre uno spazio lineare!) ⁽¹⁸⁾. È altresì evidente che *la dimensione di accumulazione di una M_k topologica in un suo punto uguaglia k e supera k secondo che il punto di M_k è semplice o no.*

Non sembra facile rispondere alla questione se la dimensione k di un insieme serrato I in un suo punto d'accumulazione O sia o meno un invariante di fronte agli omeomorfismi del 1° ordine (la cosa è ovvia per $k=1$). Possiamo invece agevolmente dimostrare che:

Il concetto di punto semplice di una varietà topologica è invariante di fronte agli omeomorfismi del 1° ordine.

Esponiamo la dimostrazione, per brevità di linguaggio, nel caso di una superficie F . Premettiamo che, se due linee di JORDAN l, m di S_n aventi in O un punto semplice, non si toccano ivi, l'insieme $l+m$ ha come corde improprie in O tutte le rette per O , appartenenti al piano ω delle due tangenti. Indichiamo invero con H_ϵ l'insieme delle rette che congiungono coppie di punti distinti P, Q di $l+m$, situati nell'intorno di raggio ϵ di O . Se una retta a per O è di accumulazione per H_ϵ qualunque sia ϵ , ed esistono rette PQ formanti con a un angolo comunque piccolo ed i cui punti P, Q variano o su l o su m , la a coincide colla tangente in O ad l o ad m . Se invece esistono rette $P'Q$ formanti con a un angolo comunque piccolo ed i cui punti P, Q

⁽¹⁸⁾ Il GUARESCHI nel lavoro citato introduce la locuzione di « dimensione di un'accumulazione O » come numero delle tangenti linearmente indipendenti in O . Ma un insieme I di S_n , che abbia in O un'accumulazione di dimensione $n-1$ in questo senso, può benissimo non esser biunivocamente proiettabile (nell'intorno di O) sopra un iperpiano.

distinti fra loro e da O stieno uno su l e l'altro su m , il piano OPQ (individuato per ε abbastanza piccolo!) ha per limite il piano ω e quindi a giace in ω .

Viceversa, ogni retta a del fascio O in ω è corda impropria, perchè, se è distinta dalle tangenti in O ad l, m (che si sa già esser corde improprie), condotto per a un iperpiano S_{n-1} , che non contenga ω , ogni iperpiano parallelo a quello e ad esso abbastanza vicino, sega l, m , attorno ad O , ciascuna in un punto e la congiungente di questi due punti ha per limite a .

Ciò premesso, sia F' la trasformata di F mediante un omeomorfismo Ω del 1° ordine fra gl'intorni dei punti omologhi O, O' di F, F' . Su F' si posson intanto tracciare infinite linee di JORDAN, aventi in O' un punto semplice; le trasformate mediante Ω delle linee analoghe uscenti da O su F . Anzi esistono in F' linee di JORDAN passanti semplicemente per O' con un'assegnata tangente. Per ogni coppia di linee di JORDAN uscenti su F' da O' , con tangenti distinte, si hanno ∞^1 corde improprie di F' in O' situate sul piano delle due tangenti. Pertanto tutte le corde improprie di F' giacciono in questo piano, che non muta al variar delle due linee, se no non ci potrebbe esser corrispondenza biunivoca fra le corde improprie di F e le corde improprie di F' in O, O' . Dunque O' è semplice per F' .

29. *La corrispondenza indotta da un omeomorfismo del 1° ordine fra le tangenti in due punti semplici omologhi di due varietà topologiche di dimensione k , è proiettiva.*

Questa è conseguenza ovvia del teorema precedente, per $k > 2$. Invero, se O, O' son i due punti corrispondenti delle varietà M_k, M'_k , la corrispondenza indotta fra le due stelle di tangenti omologhe in O, O' è proiettiva, perchè è biunivoca e ad un fascio di rette fa corrispondere un fascio di rette.

Suppongasì $k=2$, e si osservi anzitutto che quando la superficie F , avente in O un punto semplice, appartiene ad uno spazio S_r ($r \geq 3$), si può sempre proiettarla da un S_{r-3} , che non incontri il piano tangente in O (epperò nessuna corda impropria di F), sopra un piano. La corrispondenza Ω fra l'intorno di O in F e l'intorno piano del punto omologo O' è un omeomorfismo del 1° ordine (n. 28) e la corrispondenza indotta fra le tangenti in O, O' ai due insiemi è proiettiva, perchè generata da una proiezione.

Sicchè tutto si riduce a provare che un omeomorfismo del 1° ordine Ω fra due intorni piani π, π' , di centri O, O' , dà luogo ad un'omografia fra le direzioni omologhe. Infatti le coordinate x', y' di un punto mobile in π' risultano funzioni continue delle coordinate x, y del punto corrispondente in π , le quali, a cagion delle proprietà di Ω , ammettono in O' iperderivate in tutte

le direzioni. Perciò le x' , y' sono differenziabili (anzi iperdifferenziabili). In conseguenza il coefficiente angolare di una direzione uscente da O' è funzione lineare del coefficiente angolare dell'omologa direzione per O .

Un elegante corollario delle precedenti considerazioni è questo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una $f(P)$ di un punto P mobile in un dominio piano I , sia iperdifferenziabile in un punto P_0 interno ad I , è che fra i punti di un intorno di P_0 e i corrispondenti valori di $f(P)$ vi sia un omeomorfismo del 1° ordine.

OSSERVAZIONE. — Si posson altresì considerare omeomorfismi di ordine superiore definiti in relazione agl'intorni topologico-infinitesimali dei varii ordini di un punto di accumulazione di un insieme.