Sulle connessioni d'ordine due secondo E. Bompiani (*) (**).

F. CACCIAFESTA (Roma)

Summary. — *Bompiani's « second order connections » ([2]), which appear to reenter among the ones considered by Ehresmann, are shown to give rise (in a special case) to the same operation of parallel displacement for the second order tangent vectors Bompiani had formulated in a former memory ([1]). An invariant definition of this connection is given.*

Introduzione.

I. — In una serie di lavori pubblicati nell'arco di vari anni, e culminati nel 1936 nella memoria [1], E. BOMPIANI sviluppò i lineamenti d'una « geometria riemanniana di specie superiore », intesa come il complesso delle proprietà invarianti per isometrie degli intorno d'ordine superiore dei punti d'una varietà. Le idee alla base di questa teoria, suggerite da una generalizzazione naturale dell'ordinario concetto d'applicabilità, portarono a nozioni geometriche ben motivate, quali quella del trasporto parallelo per i vettori di « specie », o di « ordine » superiore (introdotti da E. CARTAN).

Lo stesso Bompiani, in una nota del 1946 ([2]), introduceva, in un ordine d'idee apparentemente affatto indipendente, il concetto di « connessione d'ordine superiore »; definita formalmente come un complesso di coefficienti, le cui leggi di trasformazione fossero tali, da conferire carattere tensoriale alle combinazioni lineari, effettuate con questi coefficienti, di campi di vettori e di loro derivate. Si trattava dunque d'una generalizzazione puramente formale degli ordinari simboli di Christoffel.

Questa nozione è stata ripresa, in forma diversa e più generale, da EHRESMANN, e sulla sua scia da molti altri autori ⁽¹⁾.

Scopo del presente lavoro è porre in luce le relazioni che esistono tra i diversi risultati di Bompiani, e tra questi e la teoria più recente. In particolare, mediante l'uso d'una delle moderne definizioni di connessione, dimostreremo (nn. 7-9) che fra le connessioni del secondo ordine del 1946 ve n'è una che, opportunamente interpretata, dà luogo ad una legge di trasporto parallelo per i vettori d'ordine due considerata da Bompiani già nella memoria del '36. Brevemente, una tal connessione del

(*) Entrata in Redazione il 22 luglio 1977.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca del CNR « Strutture algebriche e geometriche ».

⁽¹⁾ V. ad es. B. CENKL [5]; P. LIBERMANN [7].

secondo ordine si rivelerà infatti come una legge che (per usare il linguaggio dei classici) associa ad ogni « spostamento infinitesimo » sulla varietà, un isomorfismo tra gli spazi lineari tangenti d'ordine due.

Mostreteremo altresì (nn. 10-11) come la predetta connessione del second'ordine di Bompiani può associarsi, in modo invariante, ad ogni connessione ordinaria (simmetrica) data sulla varietà; e vedremo (n. 12) che essa coincide con la nozione di « estensione per parallelismo » d'una connessione di primo ordine, dovuta a P. LIBERMANN ([7]).

Allo scopo di conseguire i risultati annunciati, dovremo servirci di alcuni metodi e proprietà particolari della teoria dei getti. Ad un breve richiamo di questi, con qualche opportuno complemento, è dedicata la prima parte dell'esposizione.

Generalità e richiami ⁽²⁾.

2. — Sia V una varietà differenziabile reale ad n dimensioni, (x^i) un sistema di coordinate locali su di essa, di dominio U .

Un *riferimento d'ordine r in $p \in V$* è un r -getto invertibile di funzione $(\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (V, p)$. La totalità H^r dei riferimenti di questo tipo, al variare di p in V , costituisce un fibrato principale sulla varietà, avente per proiezione l'applicazione « bersaglio », e fibra isomorfa al gruppo $G^r(n)$ degli r -getti invertibili delle funzioni $(\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$. Indicheremo con H_p^r la fibra su $p \in V$.

Nel presente lavoro, la nozione suddetta interverrà per i soli valori $r = 1, 2$. Per $r = 1$, si ha ovviamente $G^1(n) = GL(n; \mathbf{R})$, ed $H^1 \rightarrow V$ è l'ordinario fibrato dei riferimenti lineari su V .

Una carta locale su H^1 si ottiene, a partire da (x^i) , come segue. Per $p \in U$, $h \in H_p^1$ è, per definizione, l'1-getto d'una qualche $f: (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (V, p)$. Se $f^i = x^i \circ f$ sono le componenti di f rispetto ad (x^i) , ed (y^j) sono le coordinate naturali su $\mathbf{R}^n$, h risulta individuato dai valori:

$$\left(f^i(0) = x^i(p), \left. \frac{\partial f^i}{\partial y^j} \right|_0 = X_j^i(h) \right)$$

con $|X_j^i(h)| \neq 0$ perchè h è un 1-getto invertibile. Assumeremo (x^i, X_j^i) come sistema di coordinate locali in H^1 .

Riguardando h come base per lo spazio T_p tangente a V in p , la matrice $(X_j^i(h))$ corrisponde, ovviamente, alla matrice delle coordinate degli n vettori indipendenti che costituiscono h , rispetto alla base $((\partial/\partial x^i)(p))$. Indicheremo con k_p il *riferimento naturale* in p , definito come 1-getto della funzione di componenti $f^i = y^i + x^i(p)$, ed avente quindi coordinate $(x^i(p), \delta_j^i)$.

⁽²⁾ V. la nota ⁽¹⁾ ed anche W. F. POHL [8].

Un generico vettore $\lambda \in T_h(H^1)$ (ossia, tangente ad H^1 in h) si scriverà:

$$\lambda = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_h + \lambda_j^i \frac{\partial}{\partial X_j^i} \Big|_h.$$

Se $A = (a_j^i)$ è un elemento di $GL(n; \mathbf{R})$, la sua azione a destra su H^1 induce sul fibrato tangente TH^1 un'azione che si rappresenta in coordinate mediante:

$$A_*(\lambda) = (\lambda^i, \lambda_m^i a_j^m) \in T_{hA}(H^1).$$

In H^2 , può procedersi formalmente in modo del tutto analogo: $h^2 = j^2(f)$ per la stessa f di cui sopra, è l'elemento di H_p^2 individuato dai valori:

$$\left(f^i(0) = x^i(p), \quad \frac{\partial f^i}{\partial y^j} \Big|_0 = X_j^i(h^2), \quad \frac{\partial^2 f^i}{\partial y^m \partial y^n} \Big|_0 = X_{mn}^i(h^2) \right).$$

Le funzioni (x^i, X_j^i, X_{mn}^i) possono usarsi come sistema di coordinate ⁽³⁾ locali in H^2 .

In ogni fibra H_p^2 , il riferimento naturale k_p^2 è il 2-getto della stessa funzione usata per definire k_p ; le sue coordinate sono pertanto $(x^i(p), \delta_j^i, 0)$.

Per definire l'azione su TH^2 d'un elemento di $G^2(n)$, conviene far uso di una delle rappresentazioni di $G^2(n)$ come gruppo di matrici introdotte in [4]. In base ad essa, un $g \in G^2(n)$ che, in quanto 2-getto d'una funzione $(\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$, è individuato da $n^2 + n^3$ valori (g_j^i, g_{mn}^i) , dà luogo alla matrice quadrata d'ordine $n + n^2$, non degenere, definita da:

$$[g] = \begin{pmatrix} (g_j^i) & (g_{mn}^i) \\ 0 & (g_m^s)(g_n^t) \end{pmatrix}.$$

Entro $[g]$, gl'indici in alto individuano la riga, e quelli in basso la colonna; inoltre, con $(g_m^s)(g_n^t)$ si denota brevemente il prodotto di Kronecker della matrice (g_j^i) con se stessa. Tutto analogamente in seguito.

Allora, se $\varphi = (\varphi^i, \varphi_j^i, \varphi_{mn}^i)$ è un elemento di $T_{h^2}(H^2)$, la trasformazione $g_*: T_{h^2}(H^2) \rightarrow T_{h^2 \circ g}(H^2)$ manderà φ nel vettore le cui componenti del 2° e 3° gruppo si ottengono per moltiplicazione righe per colonne di matrici:

$$((\varphi_j^i), (\varphi_{mn}^i))[g].$$

Sarà pertanto: $g_*(\varphi) = (\varphi^i, \varphi_s^i g_j^s, \varphi_s^i g_{mn}^s + \varphi_{st}^i g_m^s g_n^t)$.

⁽³⁾ Ci farà comodo tener distinte le funzioni X_{mn}^i, X_{nm}^i : parleremo lo stesso, qui ed oltre, di « coordinate » e di « basi », se pure *sovrabbondanti*.

3. — Se $T \rightarrow V$ è l'ordinario fibrato tangente a V , indichiamo con $J^r(T)$ lo spazio degli r -getti delle sezioni locali di T ; si tratta, per ogni $r \geq 0$ (ma a noi interesseranno i soli casi $r = 1, 2$) d'un fibrato vettoriale reale su V , avente per proiezione l'applicazione « sorgente »; converremo d'identificare $J^0(T)$ con T .

Per $r > s$, $\varrho'_s: J^r(T) \rightarrow J^s(T)$ è l'epimorfismo canonico; e per ogni $r \geq 1$ sussiste la successione esatta di fibrati vettoriali:

$$0 \longrightarrow T \otimes (\bigcirc T^*) \xrightarrow{\iota^r} J^r(T) \xrightarrow{\varrho'_{r-1}} J^{r-1}(T) \longrightarrow 0$$

(in cui il simbolo $\bigcirc$ rappresenta il prodotto tensoriale simmetrico).

Rispetto alla solita carta su V , una base per la fibra $(J^1(T))_p$, risp. $(J^2(T))_p$, è data dall'insieme:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \otimes dx^j(p) \right)$$

e, risp.:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \otimes dx^j(p), \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \otimes dx^m(p) \bigcirc dx^n(p) \right).$$

Ometteremo generalmente, nel seguito, d'indicare il punto nel quale i diversi campi tensoriali s'intendono calcolati.

I morfismi $\iota^1 = \iota: T \otimes T^* \rightarrow J^1(T)$, e $\varrho^1_0 = \varrho: J^1(T) \rightarrow T$ possono allora descriversi in coordinate mediante le formule seguenti:

$$\iota: (X^i) \mapsto (0, X^i); \quad \varrho: (X^i, X^i_j) \mapsto (X^i).$$

Le applicazioni di getto $j^1: T \rightarrow J^1(T)$, $j^2: T \rightarrow J^2(T)$, sono invece date da:

$$j^1: (X^i) \mapsto (X^i, \partial_j X^i); \quad j^2: (X^i) \mapsto (X^i, \partial_j X^i, \partial_{mn}^2 X^i).$$

È noto, finalmente, il seguente isomorfismo di fibrati vettoriali su V , valido per ogni $r \geq 1$:

$$(3.1) \quad J^r(T) = TH^r/G^r(n).$$

Rileviamo esplicitamente che un elemento dello spazio a secondo membro è un campo di vettori tangenti ad H^r , invariante per l'azione di $G^r(n)$ e definito lungo una fibra di $H^r \rightarrow V$.

In particolare, il getto $t \in (J^1(T))_p$:

$$(3.2) \quad t = t^i \frac{\partial}{\partial x^i} + t^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$$

corrisponde, tramite l'isomorfismo (3.1), al campo tangente ad H^1 , definito su H_p^1 :

$$(3.3) \quad \tau = t^i \frac{\partial}{\partial x^i} + t_m^i X_j^m \frac{\partial}{\partial X_j^i}$$

evidentemente invariante per $GL(n; \mathbf{R})$. Viceversa, se λ è un campo su H_p^1 , tangente ad H^1 ed invariante per $GL(n; \mathbf{R})$, allora esso corrisponde all'elemento di $(J^1(T))_p$ che ha le stesse coordinate del vettore del campo in k_p .

Allo stesso modo, vi è corrispondenza biunivoca (stabilita dall'uguaglianza delle coordinate rispetto alle basi adottate) tra gli elementi di $(J^2(T))_p$ ed i valori in k_p^2 dei campi $G^2(n)$ -invarianti, tangenti ad H^2 e definiti su H_p^2 .

4. — Un *vettore tangente d'ordine 2* a V in p è, per definizione, un elemento dello spazio vettoriale $(J_{p,0}^2(V, \mathbf{R}))^*$; la totalità dei vettori tangenti d'ordine 2 a V costituisce un fibrato vettoriale su V , detto «fibrato tangente d'ordine 2 a V », e denotato con $T^2 \rightarrow V$.

Per ogni $p \in U$, un vettore $z \in T_p^2$ può scriversi:

$$(4.1) \quad z = z^i \frac{\partial}{\partial x^i} + z^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Impiegheremo l'insieme di operatori $(\partial/\partial x^i, \partial^2/\partial x^i \partial x^j)$ come base naturale per T_p^2 .

PROPOSIZIONE 1. — *Ogni elemento $h^2 = (x^i, X_j^i, X_{mn}^i) \in H_p^2$ determina una base per T_p^2 .*

Si consideri, invero, la matrice:

$$[h^2] = \begin{pmatrix} (X_j^i) & (X_{mn}^i) \\ 0 & (X_m^s)(X_n^t) \end{pmatrix}.$$

Si tratta d'una matrice quadrata d'ordine $n + n^2$, non degenera per essere obbligatoriamente $|(X_j^i)| \neq 0$. Otteniamo allora un'altra base di T_p^2 considerando la trasformatrice mediante $[h^2]$ della base naturale.

Le connessioni del second'ordine di Bompiani.

5. — Allo scopo di porre in luce le analogie con il caso che c'interesserà nel seguito, è opportuno ricordare alcuni modi di dire (non rigorosi, se pure espressivi) della geometria differenziale classica.

Una *connessione* viene allora definita assegnando, per ogni «spostamento infinitesimo» su V che faccia passare dal punto $p = (x^i)$ al punto $q = (x^i + \Delta x^i)$ (con Δx^i «incremento infinitesimo» di x^i), una legge di *trasporto parallelo* per i vettori

dello spazio tangente T_p . Si ottiene ciò con l'associare allo spostamento (Δx^i) una matrice non singolare, rappresentante la trasformazione lineare che T_p subisce nel passaggio da p a q . Se Γ_{mn}^i sono i « coefficienti » della connessione, questa matrice è data da:

$$(5.1) \quad (\delta_i^r - \Gamma_{ij}^r \Delta x^j).$$

Nello spostamento da p a q , dunque, la base $(\partial/\partial x^i)$ di T_p si muta nella $((\partial/\partial x^i) - \Gamma_{ij}^r \Delta x^j (\partial/\partial x^r))$, che viene assunta come base di T_q . Un vettore $\mathbf{v} = (v^i) \in T_p$ si « trasporta » allora nel vettore $\mathbf{v}' = v^i ((\partial/\partial x^i) - \Gamma_{ij}^r \Delta x^j (\partial/\partial x^r))$, appartenente a T_q . Le coordinate di $\mathbf{v}'$ rispetto alla base naturale in q risultano pertanto:

$$(5.2) \quad v'^i = v^i - \Gamma_{sj}^i v^s \Delta x^j.$$

Se supponiamo ora che $\mathbf{v}$ sia un campo di vettori, definito su di un aperto di V che contiene p e q , allora in q è anche dato il vettore $\mathbf{v}(q)$ del campo, di componenti:

$$(5.3) \quad v^i + (\partial_j v^i) \Delta x^j.$$

La differenza tra (5.3) e (5.2) dà, per definizione, il *differenziale covariante* di $\mathbf{v}$, e la *derivata covariante* delle singole coordinate:

$$\delta \mathbf{v} = (\partial_j v^i + \Gamma_{sj}^i v^s) \Delta x^j \frac{\partial}{\partial x^i}; \quad \delta_j v^i = \partial_j v^i + \Gamma_{sj}^i v^s.$$

6. – Nel linguaggio moderno, quanto richiamato al numero precedente può formularsi così. Al termine di « spostamento infinitesimo » si sostituisce la nozione precisa di vettore tangente; la « connessione » è definita come uno spezzamento ∇ della successione esatta:

$$(6.1) \quad 0 \longrightarrow T \otimes T^* \xrightarrow{\iota} J^1(T) \xleftarrow[\nabla]{\epsilon} T \longrightarrow 0.$$

Si tratta dunque d'una legge che associa, ad ogni $\mathbf{w} = (w^i) \in T_p$, un elemento $\nabla \mathbf{w} = (\lambda^i = w^i, \lambda_j^i)$ di $(J^1(T))_p$.

In forza di (3.1), d'altra parte, un qualunque elemento di $(J^1(T))_p$ può riguardarsi come un campo di vettori tangenti ad H^1 , definito sulla fibra H_p^1 e GL -invariante. Un elemento di H_p^1 , a sua volta, è un 1-riferimento su V d'origine p , ossia una base per T_p ; allora, se un vettore tangente a V è uno « spostamento » sulla varietà (e, in particolare, $\mathbf{w}$ fa passare da p a $p' = p + \mathbf{w}$), un vettore tangente ad H^1 è un cambiamento di riferimento: $\nabla \mathbf{w}$ appare, in definitiva, come una legge di trasformazione, associata al vettore $\mathbf{w}$, che fa passare dalla base naturale di T_p ad una base di $T_{p+\mathbf{w}}$, la matrice della trasformazione essendo $(\delta_j^i + \lambda_j^i)$.

Osserviamo ora che, come appare subito calcolando esplicitamente le formule di cambiamento di coordinate in $J^1(T)$, le componenti λ_j^i possono scriversi come

$\lambda_j^i = -\Gamma_{jr}^i w^r$, per certi coefficienti Γ_{jr}^i , funzioni del punto su V , che si trasformano a loro volta secondo le regole valide per i simboli di Christoffel. Ne deriva allora che, se pensiamo effettivamente a w come ad un vettore «infinitesimo», e poniamo dunque $w^i = \Delta x^i$, la matrice esprimente la trasformazione di base associata a w si scrive nella forma stessa (5.1).

Tenendo conto delle posizioni indicate, ∇ può rappresentarsi in coordinate mediante:

$$(6.2) \quad \nabla(w^i) = (w^i, -\Gamma_{jr}^i w^r).$$

L'applicazione ∇ definisce l'isomorfismo $J^1(T) = T \oplus (T \otimes T^*)$, cosicchè resta individuata l'applicazione fibrata $\omega: J^1(T) \rightarrow T \otimes T^*$, inversa destra di ι , tramite la relazione:

$$(6.3) \quad \iota\omega = id_{J^1(T)} - \nabla\varrho.$$

Per (6.2) si ottiene dunque, se $t = (t^i, t_j^i)$ è un qualunque elemento di $J^1(T)$:

$$(6.4) \quad \omega: (t^i, t_j^i) \mapsto (t_j^i + \Gamma_{jr}^i t^r).$$

Dunque, ω corrisponde alla «forma di connessione» della teoria standard delle connessioni su di un fibrato principale ⁽⁴⁾.

Osserviamo ora che l'espressione in coordinate di ∇ , (6.2), non è univocamente determinata. Invero, può pensarsi di saturare, anzichè il secondo, il primo degl'indici bassi nei Γ_{mn}^i .

Si ha allora:

$$(6.2') \quad \nabla(w^i) = (w^i, -\Gamma_{sj}^i w^s)$$

e, per l'applicazione ω :

$$(6.4') \quad \omega(t^i, t_j^i) = (t_j^i + \Gamma_{sj}^i t^s).$$

Se consideriamo, con P. LIBERMANN [7], ω come «forma differenziale olonoma» d'ordine 1 su T a valori in $T \otimes T^*$, l'operatore differenziale $\delta: \Gamma(T) \rightarrow \Gamma(T \otimes T^*)$ ⁽⁵⁾ ad essa associato è definito da:

$$\delta(v) = \omega(j^1(v)) = (\partial_j v^i + \Gamma_{sj}^i v^s)$$

e fornisce dunque l'operazione di derivazione covariante.

⁽⁴⁾ V. ad es. S. KOBAYASHI - K. NOMIZU [6].

⁽⁵⁾ Se $E \rightarrow V$ è un fibrato vettoriale, indichiamo con $\Gamma(E)$ l'insieme delle sue sezioni.

7. - Si definisce, modernamente, *connessione olonoma d'ordine 2 su V* ⁽⁶⁾, uno spezzamento ∇' della successione esatta:

$$(7.1) \quad 0 \longrightarrow T \otimes T^* \circ T^* \xrightarrow{\iota'} J^2(T) \xleftarrow[\nabla']{\varrho'} J^1(T) \longrightarrow 0.$$

Ancora in base alla (3.1), qualunque $\mathbf{u} = (u^i, u_j^i, u_{mn}^i) \in (J^2(T))_p$ può interpretarsi, analogamente a quanto si è fatto al numero precedente, come una trasformazione del 2-riferimento naturale k_p^2 , espressa dalla matrice:

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} (\delta_j^i + u_j^i) & (u_{mn}^i) \\ 0 & (\delta_m^r + u_m^r)(\delta_n^s + u_n^s) \end{pmatrix}$$

che risulta non degenerare, se le u_j^i sono « abbastanza piccole ».

Una volta in possesso di questa legge di trasformazione, siamo in grado di definire il trasporto parallelo per i vettori d'ordine 2, ricalcando il procedimento adottato per i vettori tangenti ordinari: il vettore $\mathbf{z} \in T_p^2$ dato da (4.1) avrà come trasportato parallelo in $q = p + (u^i)$ (u^i immaginate rappresentare uno « spostamento infinitesimo »), il vettore avente le sue stesse coordinate, ma considerate rispetto alla base trasformata della naturale mediante la matrice $[\mathbf{u}]$; e cioè:

$$z^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) + z^{ij} \left(u_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x^m} + u_i^m u_j^n \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^n} + u_i^m \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^j} + u_j^m \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^i} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right).$$

Se ora $\mathbf{z}$ si pensa come campo di vettori d'ordine 2, il suo valore in q sarà:

$$\mathbf{z} + d\mathbf{z} = (z^i + (\partial_m z^i) u^m) \frac{\partial}{\partial x^i} + (z^{ij} + (\partial_m z^{ij}) u^m) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j};$$

per differenza, si ottengono i differenziali covarianti dei due gruppi di coordinate:

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \delta z^i &= u^m \partial_m z^i - z^m u_m^i - z^{mn} u_{mn}^i \\ \delta z^{ij} &= u^m \partial_m z^{ij} - z^{mn} u_m^i u_n^j - z^{mj} u_m^i - z^{mi} u_m^j. \end{aligned}$$

8. - Se $\mathbf{v} = (v^i)$ è un campo vettoriale su V , i coefficienti d'una *connessione del 2° ordine secondo Bompiani* ⁽⁷⁾ sono le quantità $C_{ij,m}^{rs}$, $D_{ij,m}^r$, funzioni del punto su V , le cui leggi di trasformazione per un cambiamento di carta siano tali, che l'espressione:

$$(8.1) \quad \partial_{ij}^2 v^r + C_{ij,m}^{rs} \partial_s v^m + D_{ij,m}^r v^m$$

⁽⁶⁾ V. nota ⁽¹⁾.

⁽⁷⁾ V. E. BOMPIANI [2].

abbia carattere tensoriale (rispetto agli indici r, i, j , secondo le convenzioni classiche). Questa condizione permette di determinare molto facilmente le leggi stesse.

È subito evidente che, *quando inoltre i coefficienti C e D siano simmetrici negli indici i ed j , la definizione di Bompiani coincide con quella ricordata al n. 7.* Invero, tenuto conto del vincolo imposto alla (8.1), e del fatto che le diverse componenti di $u \in J^2(T)$ si trasformano come le v^i e le derivate di queste, si ha un'applicazione $J^2(T) \rightarrow T \otimes T^* \odot T^*$ definita da:

$$(u^i, u_j^i, u_{mn}^i) \mapsto (u_{mn}^i + C_{mn,s}^{ir} u_r^s + D_{mn,r}^i u^r).$$

Tale applicazione determina uno spezzamento della successione (7.1).

Più in generale, per C e D non soggetti alla condizione di simmetria detta, le connessioni di Bompiani danno le connessioni *semi-olonomiche* d'ordine 2, definite ⁽⁸⁾ come spezzamenti della successione esatta:

$$0 \rightarrow T \otimes T^* \otimes T^* \rightarrow \bar{J}^2(T) \rightarrow J^1(T) \rightarrow 0$$

con $\bar{J}^2(T)$ fibrato vettoriale dei 2-getti semi-olonomici delle sezioni di T . Non ci fermeremo su ciò.

Il caso speciale che invece ci interessa è quello che si ottiene particolarizzando l'espressione generale (8.1) al modo seguente:

$$(8.2) \quad \partial_{ij}^2 v^r + \Gamma_{mi}^r \partial_j v^m + \Gamma_{mj}^r \partial_i v^m - \Gamma_{ij}^m \partial_m v^r + v^m \partial_m \Gamma_{ij}^r$$

dove i Γ_{ij}^r sono i coefficienti d'una qualsiasi connessione simmetrica su V . Si tratta, come mostra Bompiani, della « più semplice » connessione del second'ordine che sia possibile considerare.

La (8.2) rappresenta evidentemente un operatore differenziale d'ordine 2, $\delta': \Gamma(T) \rightarrow \Gamma(T \otimes T^* \odot T^*)$. È subito visto che la forma differenziale olonoma d'ordine 2 su T , a valori in $T \otimes T^* \odot T^*$, associata a δ' ed analoga alla ω che compare in (6.4'), è l'applicazione $\omega': J^2(T) \rightarrow T \otimes T^* \odot T^*$ definita da:

$$\omega': (u^i, u_j^i, u_{mn}^i) \mapsto (u_{mn}^i + \Gamma_{rm}^i u_n^r + \Gamma_{rn}^i u_m^r - \Gamma_{mn}^r u_r^i + u^r \partial_r \Gamma_{mn}^i).$$

La ω' determina uno spezzamento della successione (7.1); il monomorfismo $\nabla': J^1(T) \rightarrow J^2(T)$, individuato tramite la relazione (analoga alla (6.3)):

$$\nabla' \varrho' = i d_{J^2(T)} - \iota' \omega',$$

⁽⁸⁾ V. ancora la nota ⁽¹⁾.

risulta:

$$(8.3) \quad \nabla': (t^i, t_j^i) \mapsto (t^i, t_j^i, \Gamma_{mn}^r t_r^i - t^r \partial_r \Gamma_{mn}^i - \Gamma_{rm}^i t_n^r - \Gamma_{rn}^i t_m^r) .$$

∇' definisce dunque una connessione olonoma d'ordine 2 nel senso del n. 7, che chiameremo *connessione di Bompiani associata alla connessione (simmetrica) (Γ_{mn}^i)* .

9. — Consideriamo ora le formule per il trasporto parallelo dei vettori d'ordine 2, date al n. 7 in corrispondenza ad un $u \in J^2(T)$ qualunque. Se, in particolare, è $u = \nabla'(\nabla(w))$ per un $w = (w^i) \in T$, con ∇ connessione simmetrica⁽⁹⁾ su V e ∇' connessione di Bompiani associata a ∇ , per le componenti (u^i, u_j^i, u_{mn}^i) di u si ha rispettivamente, in forza di (6.2) e di (8.3):

$$\begin{aligned} u^i &= w^i; & u_j^i &= -\Gamma_{jr}^i w^r; \\ u_{mn}^i &= \Gamma_{mn}^r u_r^i - u^r \partial_r \Gamma_{mn}^i - \Gamma_{rm}^i u_n^r - \Gamma_{rn}^i u_m^r = -\Gamma_{mn}^r \Gamma_{rs}^i w^s - w^r \partial_r \Gamma_{mn}^i + \\ & & & + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sn}^r w^s + \Gamma_{rn}^i \Gamma_{sm}^r w^s . \end{aligned}$$

I differenziali covarianti (7.2) diventano dunque:

$$(9.1) \quad \begin{aligned} \delta z^i &= w^m \partial_m z^i + z^m \Gamma_{mr}^i w^r + z^{mn} (\Gamma_{mn}^r \Gamma_{rs}^i + \partial_s \Gamma_{mn}^i - 2\Gamma_{rm}^i \Gamma_{sn}^r) w^s \\ \delta z^{ij} &= w^m \partial_m z^{ij} - z^{mn} \Gamma_{mr}^i \Gamma_{ns}^j w^r w^s + z^{mj} \Gamma_{mr}^i w^r + z^{mi} \Gamma_{mr}^j w^r . \end{aligned}$$

Se, al solito, interpretiamo w come « spostamento infinitesimo » su V , trascurando il termine che contiene i prodotti $w^r w^s$ nella seconda delle (9.1) (d'ordine superiore rispetto allo spostamento), si ritrovano esattamente le formule per la differenziazione covariante delle componenti dei « vettori di seconda specie », ricavate da Bompiani per via geometrica nella memoria del 1936 (v. [1], pag. 484⁽¹⁰⁾), a partire da una connessione di Levi-Civita sulla varietà V , dotata di metrica riemanniana (indotta da un ambiente euclideo, che interviene di fatto nelle deduzioni).

Abbiamo dunque dimostrato i risultati seguenti:

TEOREMA 1. — *La connessione del second'ordine di Bompiani definita dalla (8.2) a partire da una connessione simmetrica su V , è una connessione olonoma d'ordine 2 nel senso di Ehresmann-Libermann.*

TEOREMA 2. — *La predetta connessione, associata ad una connessione di Levi-Civita, determina un trasporto parallelo per i vettori tangenti d'ordine 2, che coincide con quello definito da Bompiani in [1].*

⁽⁹⁾ Intendiamo, con ciò, che ∇ sia l'operatore corrispondente, nel senso del n. 6, ad una connessione (Γ_{mn}^i) priva di torsione.

⁽¹⁰⁾ Per il confronto con le (9.1), si noti che Bompiani usa il simbolo « δ » per indicare la differenziazione ordinaria.

Una definizione intrinseca della connessione di Bompiani.

10. – Vogliamo ora introdurre una semplice interpretazione formale della connessione di Bompiani, che consente di definirla in modo intrinseco.

È noto ⁽¹¹⁾ che esiste una corrispondenza biunivoca tra connessioni simmetriche su V , e riduzioni del gruppo strutturale del fibrato $H^2 \rightarrow V$, da $G^2(n)$ a $GL(n; \mathbf{R})$. Una tale riduzione è individuata da un'applicazione fibrata s di H^1 in H^2 , «equivariante» nel senso che si abbia:

$$s(hA) = s(h)i(A) \quad \forall h \in H^1, A \in GL(n; \mathbf{R})$$

(dove i indica il monomorfismo naturale $GL(n; \mathbf{R}) \rightarrow G^2(n)$ descritto in [3]).

Sia allora V dotata di una connessione simmetrica, ed $s: H^1 \rightarrow H^2$ l'immersione corrispondente. Per ogni $h \in H^1$ può considerarsi l'applicazione «differenziale» di s , $s_{*h}: T_h(H^1) \rightarrow T_{s(h)}(H^2)$.

PROPOSIZIONE 2. – *La famiglia delle s_{*h} , al variare di h in H_p^1 per ogni $p \in V$ fissato, determina un'applicazione lineare $\tilde{s}_p: (J^1(T))_p \rightarrow (J^2(T))_p$:*

Sia, invero, $t \in (J^1(T))_p$; a norma di quanto visto al n. 3, t determina su H_p^1 un campo vettoriale τ , tangente ad H^1 ed invariante per $GL(n; \mathbf{R})$; soddisfacente cioè alla:

$$\tau(hA) = A_*(\tau(h)) \quad \forall h \in H_p^1, A \in GL(n; \mathbf{R}).$$

Consideriamo allora il campo $\tau' = s_*(\tau)$, tangente ad H^2 e definito su $s(H_p^1) \subset H_p^2$ dalla:

$$\tau'(s(h)) = (s_*(\tau))(s(h)) = s_{*h}(\tau(h)).$$

Vogliamo far vedere che τ' è invariante per l'azione di $i(GL(n; \mathbf{R})) \subset G^2(n)$; ossia che si ha:

$$(10.1) \quad \tau'(s(h)i(A)) = (i(A))_*(\tau'(s(h))) \quad (h \text{ ed } A \text{ c.s.}).$$

Se questo è vero, infatti, τ' dà luogo ad un campo τ'' $G^2(n)$ -invariante su H_p^2 , e dunque ad un elemento di $(J^2(T))_p$; con il che, $\tilde{s}_p$ risulta ben definita (ed ovviamente lineare) come l'applicazione che associa $t \in (J^1(T))_p$ all'elemento $t' \in (J^2(T))_p$ corrispondente a τ'' nell'isomorfismo (3.1).

⁽¹¹⁾ V. P. LIBERMANN [7], pag. 167.

Dimostriamo dunque la (10.1), valutando i vettori che compaiono nei due membri su di una qualunque $f: H^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita in un intorno di $s(hA) \in H_p^2$. Risulta allora, da una parte:

$$(10.2) \quad (\tau'(s(h)i(A)))f = (\tau'(s(hA)))f = (s_{*hA}(\tau(hA)))f = (\tau(hA))(f \circ s) = \\ = (A_*(\tau(h)))(f \circ s) = (\tau(h))(f \circ s \circ A);$$

e d'altra parte si ha:

$$(10.3) \quad (i(A)_*(\tau'(s(h))))f = (\tau'(s(h)))(f \circ i(A)) = \\ = (s_{*h}(\tau(h)))(f \circ i(A)) = (\tau(h))(f \circ i(A) \circ s).$$

Ora, per ogni $h \in H^1$ riesce:

$$(i(A) \circ s)(h) = s(h)i(A) = s(hA) = (s \circ A)(h)$$

e ciò prova che le espressioni (10.2) e (10.3) coincidono, che è quanto restava da dimostrare.

II. — Indichiamo con $\tilde{s}$ l'applicazione fibrata $J^1(T) \rightarrow J^2(T)$ descritta, fibra per fibra, dalle $\tilde{s}_p$ del numero precedente.

TEOREMA 3. — $\tilde{s}$ è la connessione di Bompiani associata alla connessione simmetrica su V che corrisponde all'immersione $s: H^1 \rightarrow H^2$.

Per dimostrare la nostra tesi, dobbiamo procurarci una rappresentazione di $\tilde{s}$ in coordinate locali, e mostrare che coincide con la (8.3).

Cominciamo col richiamare la definizione di s in termini della connessione su V , data in [3]. Sia $h \in H_p^1$ di coordinate (x^i, X_j^i) . La matrice non singolare (X_j^i) determina un'applicazione $(\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$, definita da $(y^i) \mapsto (X_j^i y^j)$, che denoteremo con X .

Essendo d'altra parte data una connessione su V , per ogni $p \in V$ è determinata la funzione composta $\exp_p \circ X: (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (V, p)$, definita da:

$$(y^i) \mapsto (X_j^i y^j) \xrightarrow{\exp_p} (x^i(p) + X_j^i y^j - \frac{1}{2} \Gamma_{jl}^i X_m^j X_n^l y^m y^n + \dots)$$

(si ricordino le equazioni parametriche della linea geodetica per p , tangente in p a $v = (v^i) \in T_p$: $x^i = x^i(p) + v^i s - \frac{1}{2} \Gamma_{jl}^i v^j v^l s^2 + \dots$). Il riferimento h è allora l'1-getto della funzione $(\exp_p \circ X)$; quest'ultimo è in effetti individuato dai valori $(x^i(p), X_j^i)$.

L'applicazione $s: H^1 \rightarrow H^2$ è definita semplicemente da:

$$s(h) = s(j^1(\exp_p \circ X)) = j^2(\exp_p \circ X);$$

le coordinate di $s(h)$ valgono pertanto: $(x^i(p), X_j^i, -\frac{1}{2} \Gamma_{jl}^i (X_m^j X_n^l + X_n^j X_m^l))$. Se indichiamo con $(x^\alpha) = (x^i, X_j^i)$ ($\alpha = 1, \dots, n + n^2$), e risp. $(y^{\tilde{\beta}}) = (y^i, Y_j^i, Y_{mn}^i)$ ($\tilde{\beta} = 1, \dots, n + n^2 + n^3$),

..., $n + n^2 + n^3$) le coordinate locali su H^1 ed H^2 introdotte al n. 2, s può descriversi localmente mediante:

$$(11.1) \quad \begin{cases} y^i = x^i, \\ Y_j^i = X_j^i, \\ Y_{mn}^i = -\frac{1}{2} \Gamma_{il}^i (X_m^j X_n^l + X_n^j X_m^l). \end{cases}$$

Consideriamo ora $\mathbf{t} \in (J^1(T))_p$ di coordinate date da (3.2), il campo $\boldsymbol{\tau}$ (3.3) da esso generato su H_p^1 , ed il valore $\boldsymbol{\tau}(k_p)$ di questo. $s_{*k_p}(\boldsymbol{\tau}(k_p))$ è un vettore tangente ad H^2 in $s(k_p) = (x^i(p), \delta_j^i, -\Gamma_{mn}^i)$; le sue coordinate si calcolano a partire dall'espressione generale per l'applicazione differenziale:

$$s_{*h}(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda^\alpha \frac{\partial(y^{\bar{\beta}} \circ s)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{\bar{\beta}}} \quad (h \in H^1, \boldsymbol{\lambda} \in T_h(H^1))$$

quando si ponga $h = k_p$. Le derivate a secondo membro vanno pertanto valutate in $(x^i(p), \delta_j^i)$; avuto riguardo alle (11.1) si trova:

$$s_{*k_p}(\boldsymbol{\tau}(k_p)) = t^i \frac{\partial}{\partial y^i} + t_j^i \frac{\partial}{\partial Y_j^i} + (-t^r \partial_r \Gamma_{mn}^i - t_m^r \Gamma_{rn}^i - t_n^r \Gamma_{rm}^i) \frac{\partial}{\partial Y_{mn}^i}.$$

A norma di quanto visto al n. 3, l'elemento di $(J^2(T))_p$ corrispondente si trova considerando il valore in $k_p^2 = (x^i(p), \delta_j^i, 0) \in H_p^2$ del campo $G^2(n)$ -invariante definito su H_p^2 da $s_{*k_p}(\boldsymbol{\tau}(k_p))$. Ma l'elemento di $G^2(n)$ che fa passare da $s(k_p)$ a k_p^2 è rappresentato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} (\delta_j^i) & (\Gamma_{mn}^i) \\ 0 & (\delta_m^r) (\delta_n^s) \end{pmatrix}$$

e questa opera su $s_{*k_p}(\boldsymbol{\tau}(k_p))$ dando:

$$\tilde{s}(\mathbf{t}) = (t^i, t_j^i, t_r^i \Gamma_{mn}^r - t^r \partial_r \Gamma_{mn}^i - t_m^r \Gamma_{ra}^i - t_n^r \Gamma_{rm}^i).$$

È dunque (v. (8.3)) $\tilde{s}(\mathbf{t}) = \nabla'(\mathbf{t})$, ciò che volevasi dimostrare.

12. — Accenniamo infine ad un'altra possibile interpretazione invariante della connessione di Bompiani.

Una connessione (Γ_{mn}^i) su V determina, com'è noto ⁽¹²⁾, una struttura di parallelismo assoluto su H^1 , ossia una sezione globale σ nel fibrato principale $H^1(H^1) \rightarrow H^1$

⁽¹²⁾ V. S. KOBAYASHI - K. NOMIZU [6], pag. 122.

degli 1-riferimenti sulla varietà H^1 ; ossia ancora, una connessione senza curvatura in detto fibrato. Secondo un'osservazione di P. LIBERMANN ([7]), (Γ_{mn}^i) individua, per questa via, una connessione del second'ordine su V , detta *estensione per parallelismo* di (Γ_{mn}^i) .

Notiamo ora che lo spazio H^2 può considerarsi fibrato su H^1 dall'epimorfismo canonico ϱ_1^2 (v. n. 3); $H^2 \rightarrow H^1$ può anzi riguardarsi ottenuto da $H^1(H^1) \rightarrow H^1$, riducendo il gruppo strutturale di quest'ultimo a $N_1^2(n) = \text{Ker}(G^2(n) \rightarrow GL(n; \mathbf{R}))$. Considerando allora il diagramma commutativo seguente:

$$\begin{array}{ccc} H^2 & \xrightarrow{r} & H^1(H^1) \\ & \nwarrow \varrho_1^2 & \nearrow \delta \\ & H^1 & \end{array}$$

(dove r è l'immersione determinata dalla riduzione detta). Non è difficile dimostrare che la costruzione indicata dalla Libermann coincide sostanzialmente con quella della $\tilde{s}$ (nn. 10-11). Abbiamo dunque il

TEOREMA 4. — *Se (Γ_{mn}^i) è una connessione simmetrica su V , la sua « estensione per parallelismo » coincide con la sua connessione di Bompiani associata.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BOMPIANI, *Geometrie riemanniane di specie superiore*, Mem. Acc. d'Italia, **6** (1935), pp. 269-520.
- [2] E. BOMPIANI, *Connessioni del secondo ordine*, Atti Acc. Naz. Lincei, (8) **1** (1946), pp. 483-485.
- [3] F. CACCIAFESTA, *Su alcune algebre caratteristiche nella teoria dei getti*, Ann. di Mat. pura ed appl., (4) **112** (1977), pp. 383-394.
- [4] F. CACCIAFESTA, *Rappresentazioni matriciali di gruppi di k -getti*, Rend. di Mat., (6) **10** (1977), pp. 387-396.
- [5] B. CENKL, *On the higher order connections*, Cahiers Top. Géom. Diff., **9** (1967), pp. 11-32.
- [6] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, vol. I, Interscience Publ. (1963).
- [7] P. LIBERMANN, *Sur la géométrie des prolongements des espaces fibrés vectoriels*, Ann. Inst. Fourier, **14** (1964), pp. 145-172.
- [8] W. F. POHL, *Differential geometry of higher order*, Topology, **1** (1962), pp. 169-211.