Geometria proiettivo-differenziale di alcune varietà equi-parametriche.

Memoria di ILIE POPA e GHEORGHE GHEORGHIEV (a Iasi)

A Enrico Bompiani in occasione del suo Giubileo scientifico.

Sunto - Sono studiate, dal punto di vista proiettivo, alcune varietà complesse generate da elementi (punti, rette o piani) appartenenti ad un tetraedro e dipendenti da un solo parametro. Si mettono in luce i legami (subordinazioni) tra le geometrie di tali varietà.

1. Nella geometria proiettiva, sono studiate di solito configurazioni generate da punti, rette o piani. Un punto di S_3 genera—secondo il numero dei parametri di quali esso dipende—una linea, una superficie oppure un dominio spaziale con una certa organizzazione di suoi punti; una retta genera una superficie rigata, una congruenza, un complesso oppure la totalità delle rette organizzata in un certo modo; un piano genera configurazioni duali alle prime.

Considerando, come elemento generatore, combinazioni di punti, rette o piani, si ottengono generalmente varietà non olonome.

In ciò che segue, saranno considerate varietà generate da elementi appartenenti ad un tetraedro. È utile osservare che la geometria di alcune configurazioni è subordinata a quella delle altre; criterio di subordinazione essendo la povertà di componenti nell'elemento generatore. Infatti, se la varietà v e V hanno elementi generatori e , rispettivamente, E con $e \subset E$, è sempre possibile colmare la differenza $E - e$ per la considerazione di opportuni intorni di e su v , cioè ridurre la geometria di v a quella di V ; gli invarianti di v si otterranno per certe particolarizzazioni di quelli di V . La geometria di qualunque varietà è subordinata a quella della varietà generata dal quadripunto $A_0A_1A_2A_3$; per questa, le formule di FRENET-CARTAN

$$dA_i = \omega_i^j A_j$$

contengono tutte le proprietà.

Si può dunque compiere la geometria di una varietà v in due tappe:

1) Subordinare la geometria di v a quella, già costruita, di un'altra varietà V e

2) Colmare la differenza $E - e$ coll'introduzione di opportuni intorno di e su v .

In questo modo, le interpretazioni geometriche del riferimento e degli invarianti di v sono semplici conseguenze di quelle relative a V .

Se le componenti punti, rette o piani dell'elemento generatore dipendono dallo stesso numero di parametri, diremo che la varietà è *equi-parametrica*. La geometria di tale varietà può essere considerata, nello stesso tempo, come quella della corrispondenza tra configurazioni descritte dalle singole componenti.

2. Per illustrare le generalità precedenti, consideriamo le varietà generate da:

E_1 : due rette non incidenti

E_2 : » » incidenti

E_3 : » punti

E_4 : un piano, una retta nel piano e un punto su di essa

E_5 : » » e un punto incidenti

E_6 : » punto e una retta per esso

E_7 : una retta

E_8 : un punto.

Si vede subito che hanno luogo le inclusioni:

$$E_1 \supset E_7;$$

$$E_2 \supset E_4; E_4 \supset E_5 \supset E_8; E_4 \supset E_6 \supset E_7;$$

$$E_3 \supset E_6; E_6 \supset E_8.$$

Notiamo che E_2 non è incluso in E_1 , ma è un caso d'eccezione.

Per esempio, l'inclusione $E_2 \supset E_5$ mostra che la geometria di una varietà non olonome lineare V_3^2 può essere dedotta da quella della coppia di varietà V_3^1 a centri coincidenti; l'inclusione $E_2 \supset E_6$ ci mostra che la geometria della varietà di coni lo studio della quale è stato schizzato da noi recentemente [I] è riducibile a quella di due varietà di coni associate.

Appaiono come irriducibili nel gruppo di varietà considerate la geometria delle varietà generate da E_1 , E_2 , E_3 , lo studio delle quale dev'essere fatto direttamente.

In ciò che segue, ci limiteremo alle varietà uniparametriche. Fra poco, presenteremo lo studio di qualche altre varietà.

3. Abbiamo mostrato altrove [2], [3] che la geometria della varietà uni-parametrica generata da E_2 è governata dalle formule di FRENET

$$\begin{aligned}\frac{dA_0}{ds} &= \dot{A}_0 = \tau_1 A_0 + A_3 \\ \dot{A}_1 &= A_0 + (\kappa_1 - \tau_1) A_1 + A_2 \\ \dot{A}_2 &= \kappa_2 A_0 + A_1 - \tau_1 A_2 \\ \dot{A}_3 &= \tau_2 A_0 + \kappa_3 A_1 + \kappa_4 A_2 + (\tau_1 - \kappa_1) A_3,\end{aligned}$$

dove $ds = \omega_0^3$ è l'invariante differenziale del prim'ordine, $\kappa_1 \dots \kappa_4$ invarianti finiti dal secondo ordine e τ_1 , τ_2 del terzo ordine della varietà.

Si ottengono le geometrie delle varietà subordinate:

per la varietà generata da E_4 , prendendo $\kappa_2 = 0$

$$\begin{array}{llllll} \gg & \gg & \gg & \gg & \gg & E_5, & \gg & \kappa_2 = \kappa_4 = 0 \\ \gg & \gg & \gg & \gg & \gg & E_8, & \gg & \kappa_2 = \kappa_4 = \kappa_1 = \dot{\kappa}_3 - 2\kappa_3 \tau_1 = 0 \\ \gg & \gg & \gg & \gg & \gg & E_6, & \gg & \kappa_2 = \tau_1 = 0 \\ \gg & \gg & \gg & \gg & \gg & E_7, & \gg & \kappa_2 = \tau_1 = \dot{\kappa}_4 - 2\kappa_1 \kappa_4 + 2\kappa_3 = 0 \end{array}$$

Notiamo che, per questa via, le geometrie delle curve sghembe, E_3 elemento generatore, delle superficie rigate E_7 , delle bande rigate E_6 e degli elementi di contatto E_5 si deducono da quella di due superficie rigate con intersezione non lineare. Da un altro canto, è da notare che la geometria di quest'ultima configurazione E_2 elemento generatore è semplicissima appunto per il fatto che il riferimento d'ordine zero è più ampio degli altri.

4. Coppie di superficie rigate elemento generatore E_1 .

Nel 1923, E.P. LANE ha abbozzato lo studio della corrispondenza tra due superficie rigate [4]; I. CREANGA [5] e, più recentemente, E. T. IVLEV [6] sono tornati sullo stesso argomento.

Siano R , R^* le superficie rigate generate da $g = A_0 A_1$, $g^* = A_2 A_3$. Per

i riferimenti d'ordine zero, avremo

$$\pi_0^2 = \pi_0^3 = \pi_1^2 = \pi_1^3 = \pi_2^0 = \pi_2^1 = \pi_3^0 = \pi_3^1 = 0.$$

Supposto $\omega_0^3 \neq 0$, l'annullarsi di ω_0^3 dipende soltanto dalla scelta del riferimento, si avrà

$$\begin{aligned} \omega_0^2 + a\omega_0^3 &= \omega_1^2 + b\omega_0^3 = \omega_1^3 + c\omega_0^3 = \omega_2^0 + e\omega_0^3 = \omega_2^1 + \\ &+ f\omega_0^3 = \omega_3^0 + h\omega_0^3 = \omega_3^1 + k\omega_0^3 = 0. \end{aligned}$$

Si può scegliere

$$a = c = e = k = 0, \quad b = h = -1.$$

Le generatrici $g + dg$, $g^* + dg^*$ hanno — in coordinate locali — le equazioni:

$$\begin{aligned} x^2 &= \omega_0^2 x^0 + \omega_1^2 x^1 & x^0 &= \omega_2^0 x^2 + \omega_3^0 x^3 \\ &\text{rispettivamente} & & \\ x^3 &= \omega_0^3 x^0 + \omega_1^3 x^1 & x^1 &= \omega_2^1 x^2 + \omega_3^1 x^3 \end{aligned}$$

ciò che significa che A_0A_3 , A_1A_2 sono le rette che incontrano la quadrupla g , g^* , $g + dg$, $g^* + dg^*$ e che i casi esclusi b o $h = 0$ con $a = c = e = k = 0$ significano che R e R^* sono sviluppabile

La scelta fatta ha come conseguenza:

$$\pi_0^1 = \pi_1^0 = \pi_2^2 = \pi_3^2 = 0, \quad \pi_0^0 = \pi_3^3, \quad \pi_1^1 = \pi_2^2$$

dalla quale risulta, in primo luogo:

$$\begin{aligned} \omega_0^1 + A\omega_0^3 &= \omega_1^0 + B\omega_0^3 = \omega_2^2 + C\omega_0^3 = \omega_3^2 + E\omega_0^3 = \omega_0^0 - \omega_3^3 + \\ &+ F\omega_0^3 = \omega_1^1 - \omega_2^2 + G\omega_0^3 = 0 \end{aligned}$$

e, in secondo, che ω_0^3 e $f \neq -1$ ⁽¹⁾ sono invarianti del primo ordine della varietà. L'invariante f sarà notato per $-\kappa$. L'interpretazione di ω_0^3 e κ è semplicissima: i birapporti delle quaterne determinate da g , $g + dg$, g^* , $g^* + dg^*$ su A_0A_3 , A_1A_2 sono $(\omega_0^3)^2$, rispettivamente, $\kappa(\omega_0^3)^2$. In legame con lo stesso intorno del primo ordine della varietà, si può osservare:

Sia $P(\lambda, \mu, 0, 0)$ un punto di g ; il piano tangente in P a R sega g^* in $P^*(0, 0, \mu, \lambda)$ ciò che vuol dire che la corrispondenza tra R e R^* induce

⁽¹⁾ Il caso escluso, $f = -1$, sarà studiato separatamente.

un'omografia tra le punteggiate g, g^* . Il piano tangente in P^* a R^* sega g' in $P_1(\lambda, \mu\lambda, 0, 0)$. Si ottiene così la serie di punti, su g , $P_n(\lambda, \mu\lambda^n, 0, 0)$ convergenti ai vertici A_0 oppure A_1 secondo che $|\lambda| < 1$ oppure $|\lambda| > 1$.

Nelle relazioni precedenti, si può prendere $B = -1$ e si avrà $\pi_0^0 = \pi_1^1$. Come $\Sigma \pi_i^i = 0$, ne segue che tutti i parametri secondari π_j^j sono nulli dunque che il riferimento canonico è del secondo ordine; i coefficienti A, C, E, F, G sono invarianti, pure del secondo ordine, della varietà; in fine, da $\pi_0^0 = 0$, risulta che $\omega_0^0 = \rho \omega_0^3$ con ρ invariante del terzo ordine della varietà. In conclusione, la varietà RR^* ha un invariante differenziale (ω_0^3) e uno finito λ del primo ordine, 5 invarianti del secondo ordine che saranno notati per $\tau_1, \dots, \tau_5$ e uno del terzo ordine ρ . Le formule di FRENET-CARTAN sono

$$\begin{aligned}\frac{dA_0}{\omega_0^3} &= \dot{A}_0 = \rho A_0 + \tau_1 A_1 + A_3 \\ \dot{A}_1 &= A_0 - (\rho + \tau_4 + \tau_5) A_1 + A_2 \\ \dot{A}_2 &= \lambda A_1 + (\tau_4 - \rho) A_2 + \tau_2 A_3 \\ \dot{A}_3 &= A_0 + \tau_3 A_2 + (\rho + \tau_5) A_3\end{aligned}$$

e le condizioni d'immobilità

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}^0 + \rho x^0 + x^1 + x^3}{x^0} &= \frac{\dot{x}^1 + \tau_1 x^0 - (\rho + \tau_4 + \tau_5) x^1 + \lambda x^2}{x^1} = \\ \frac{\dot{x}^2 + x^1 + (\tau_4 - \rho) x^2 + \tau_3 x^3}{x^2} &= \frac{\dot{x}^3 + x^0 + \tau_2 x^2 + (\rho + \tau_5) x^3}{x^3}.\end{aligned}$$

Interpretazioni geometriche.

In ciò che riguarda il riferimento, rimane a caratterizzare il punto unitario. Consideriamo, in primo luogo, la retta caratteristica del piano $A_1 A_2 A_3 (x^0 = 0)$. Conformemente alle condizioni d'immobilità, le sue equazioni sono

$$x^0 = x^1 + x^3 = 0.$$

La sua intersezione con $A_1 A_3$ è il punto $V_{13} (0, 1, 0, -1)$ il cui armonico rispetto alla coppia A_1, A_3 è il punto unitario U_{13} sullo spigolo $A_1 A_3$.

Il piano $A_0 A_2 U_{13}$ ha l'equazione

$$x^1 - x^3 = 0.$$

In secondo luogo, la tangente in A_1 alla curva descritta da questo punto ha le equazioni:

$$x^3 = x^0 - x^2 = 0.$$

Il piano definito da U_{13} e questa tangente è $x^0 - x^2 = 0$.

In fine, la quadrica pre-osculatrice a R lungo g contenente la generatrice g^* ha l'equazione

$$x^0x^2 - x^1x^3 = 0.$$

Questa quadrica e i due piani considerati cui sopra hanno in comune due punti, uno di essi essendo il punto unitario cercato.

Interpretazioni geometriche degli invarianti $\tau_1, \dots, \tau_5$ e ρ .

La tangente in A_0 alla curva descritta da questo punto ha le equazioni:

$$x^2 = x^1 - \tau_1x^3 = 0.$$

Ne segue l'interpretazione di τ_1 come un birapporto. Nello stesso modo, le tangenti in A_2 e A_3 , ai luoghi di questi punti, essendo

$$x^0 = \kappa x^3 - \tau_2x^1 = 0, \quad \text{rispettivamente,} \quad x^1 = x^3 - \tau_3x^3 = 0$$

si ottengono interpretazioni per τ_2, τ_3 .

Le quadriche osculatrici a R o R^* lungo g , rispettivamente, g^* , sono

$$(Q) \quad 2x^0x^2 - 2x^1x^3 + (\tau_2 - 1)(x^2)^2 - 2\tau_4x^2x^3 + (\tau_1 - \tau_3)(x^3)^2 = 0$$

$$(Q^*) \quad 2\kappa x^0x^2 - 2x^1x^3 + \frac{\tau_2 - \kappa}{\kappa}(x^1)^2 - \left(2\tau_4 - \frac{\kappa}{\kappa}\right)x^0x^1 + (\tau_1 - \kappa\tau_3)(x^0)^2 = 0$$

il piano polare di A_2 rispetto Q ha l'equazione

$$x^0 - \tau_4x^3 = 0$$

che fornisce l'interpretazione di τ_4 .

I piani

$$x^1 - x^2 = 0, \quad x^0 - x^2 = 0$$

passanti per spigoli e punto unitario del riferimento, hanno significato

geometrico; le loro rette caratteristiche

$$x^1 - x^2 = \tau_1 x^0 - \tau_3 x^3 + (1 - \kappa + 2\tau_4 + \tau_5)x^1 = 0$$

rispettivamente

$$x^0 - x^2 = (2\rho - \tau_4)x^0 + (\tau_3 + 1)x^0 = 0$$

forniscono - se τ_1, τ_3 non sono simultaneamente nulli, rispettivamente $\tau_3 \neq -1$ interpretazioni per τ_5 e ρ .

Altre interpretazioni sono fornite dai piani osculatori alle curve descritte dai vertici del riferimento, oppure dai punti caratteristici delle sue faccie.

Nello stesso scopo, si potrebbero considerare altri enti geometrici collegati alla configurazione; per esempio, i complessi lineari aventi contatto di second'ordine con una delle rigate e del primo coll'altra:

$$(C) \quad (\tau_3 - \tau_1)p_{03} + (\tau_2 - 1)p_{12} = 0$$

rispettivamente

$$(C^*) \quad (\kappa\tau_3 - \tau_1)p_{03} + (\tau_2 - \kappa)p_{12} = 0.$$

Coppie reciproche.

Le rette $\bar{g} = A_0A_3, \bar{g}^* = A_1A_2$ generano le superficie rigate $\bar{R}, \bar{R}^*$.

Le rette $\bar{g} + d\bar{g}, \bar{g}^* + d\bar{g}^*$ infinitamente vicine a $\bar{g}, \bar{g}^*$ hanno le equazioni

$$\begin{aligned} x^1 &= \tau_1 \omega_0^3 x^0 & x^0 &= \omega_0^3 x^1 \\ x^2 &= \tau_2 \omega_0^3 x^3 & x^3 &= \tau_2 \omega_0^3 x^2; \end{aligned} \quad , \text{rispettivamente,}$$

ne segue che le rette appoggianti su $\bar{g}, \bar{g}^*, \bar{g} + d\bar{g}, \bar{g}^* + d\bar{g}^*$ sono g e g^* . La coppia R, R^* sarà perciò chiamata *reciproca* della coppia $\bar{R}, \bar{R}^*$. Escludendo i casi $\tau_1\tau_2\tau_3 = 0$ - quando $\bar{R}$ o $\bar{R}^*$ sarebbe sviluppabile - birapporti delle quaterne determinate da $\bar{g}, \bar{g}^*, \bar{g} + d\bar{g}, \bar{g}^* + d\bar{g}^*$ su g e g^* hanno i valori $\tau_1(\omega_0^3)^2, \tau_2\tau_3(\omega_0^3)^2$. La geometria della coppia reciproca è riducibile a quella della coppia iniziale scambiando l'invariante differenziale ω_0^3 per $\sqrt{\tau_1}\omega_0^3$ oppure per $\sqrt{\tau_2\tau_3}\omega_0^3$. L'invariante $\bar{\kappa}$ sarà $\frac{\tau_1}{\tau_2\tau_3}$ oppure l'inverso di questo.

Corrispondenze notevoli.

Da ciò che precede, segue che la corrispondenza con $\tau_1 = \tau_2\tau_3$ è tale che la coppia reciproca sia eccezionale $\bar{\kappa} = 1$. Questa corrispondenza (ma per la

quale $\kappa \neq 1$, $\tau_1 - \tau_3 \neq 0$, $\tau_2 - 1 \neq 0$, $\tau_1 - \kappa\tau_3 \neq 0$, $\tau_2 - \kappa \neq 0$) è caratterizzata anche dal fatto che i complessi lineari C , C^* coincidono cioè che gli intorni di second'ordine delle rigate R e R^* appartengono allo stesso complesso lineare.

I casi più particolari $\tau_1 - \tau_3 = \tau_2 - 1 = 0$ oppure $\tau_1 - \kappa\tau_3 = \tau_2 - \kappa = 0$ sono caratterizzati dal fatto che uno o l'altro dei detti complessi C , C^* sono indeterminati.

In fine, casi più particolari sono quelli per i quali

$$\tau_1 - \tau_3 = \tau_2 - 1 = \tau_4 = 0 \quad \text{oppure} \quad \tau_1 - \kappa\tau_3 = \tau_2 - \kappa = \tau_4 - \frac{\dot{\kappa}}{2\kappa} = 0$$

per i quali la quadrica osculatrice ad una delle rigate passa per la generatrice dell'altra.

Tornando alla corrispondenza indotta tra le punteggiate g e g^* da quella tra le rigate R e R^* , si può chiedere quando la tangente in un punto $P(1, t, 0, 0)$, alla curva da esso descritta, incontra g^* e quella nel punto corrispondente $P^*(0, 0, t, 1)$ incontra g .

La tangente in P ha le equazioni

$$x^1 - tx^0 = Sx^3$$

$$x^2 = tx^3$$

con $S = \dot{t} - t^2 - t(2\rho + \tau_4 + \tau_5) + \tau_1$;

la tangente in P^* ha le equazioni

$$x^2 - tx^3 = Tx^0$$

$$x^1 = tx^0$$

con $T = \dot{t} - \tau_2 t^2 - (2\rho - \tau_4 + \tau_5)t + \tau_3$.

Le condizioni imposte mostrano che le curve descritte da P , P^* appartengono alle famiglie "R": $S=0$, $T=0$. Queste famiglie coincidono se e solo se

$$\tau_3 - \tau_1 = \tau_2 - 1 = \tau_4 = 0$$

Osservazione.

Dallo studio della corrispondenza tra le superficie rigate R , R^* , si potrebbe dedurre quello del complesso composto dalle ∞^1 congruenze lineari aventi come direttrici la coppia g , g^* . Tali complessi sono stati studiati da diversi geometri, tra i quali MENTRE il quale ne ha determinato la generalità e ha mostrato diversi modi di generare tali complessi per complessi lineari [7].

Il caso eccezionale.

Nelle considerazioni precedenti, abbiamo escluso il caso $\omega_2^4 = \omega_0^3$, essendo soddisfatte le relazioni $\omega_2^3 = \omega_2^0 = \omega_1^3 = \omega_3^4 = 0$ e $\omega_1^2 = \omega_3^0 = \omega_0^3$.

Si può vedere subito che anche nel caso $\omega_2^4 = \omega_0^3$ accanto alle relazioni precedenti si ha $d\omega_3^3 = 0$ dunque che ω_3^3 è invariante differenziale della varietà.

Le conseguenze differenziali di questo sistema sono

$$\omega_2^3 = \omega_1^0 + A\omega_0^3, \quad \omega_3^2 = \omega_0^4 + B\omega_0^3, \quad \omega_3^3 = \omega_0^0 + C\omega_0^3, \quad \omega_2^2 = \omega_1^4 + D\omega_0^3.$$

Scegliendo $A = B = 0$ $C \neq D$, si avrà — dalle prime due relazioni —

$$\omega_1^0 = \alpha\omega_0^3, \quad \omega_0^4 = \tau\omega_0^3$$

e — dalle seconde —

$$\omega_2^2 = \omega_1^4 + \kappa_1\omega_0^3, \quad \omega_3^3 = \omega_0^0 + \kappa_2\omega_0^3$$

con κ_1, κ_2, τ invarianti.

Si può prendere $\alpha = 1$, con la quale tutti π_i^i risultano nulli e, come conseguenza differenziale, $\omega_0^0 = \rho\omega_0^3$ con ρ pure invariante.

Con ciò, le formole di FRENET-CARTAN sono

$$A_0 = \rho A_0 + \tau A_1 + A_3$$

$$\dot{A}_1 = A_0 - \left(\rho + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) A_1 + A_2$$

$$\dot{A}_2 = A_1 + \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} - \rho \right) A_2 + A_3$$

$$\dot{A}_3 = A_0 + \tau A_2 + (\rho + \kappa_2) A_3.$$

Notiamo che queste formole sono del tutto simili a quelle del caso non eccezionale più precisamente: 1 nella vece di κ_1 ; $\tau_1 = \tau_3 = \tau$; $\tau_2 = 1$; $\tau_4 = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}$; $\tau_5 = \kappa_2$ ciò che ci dispensa d'interpretare questi invarianti.

Tale corrispondenza gode di notevoli proprietà.

La più semplice è quella che le omografie da essa indotte sulle punteggiate g e g^* sono delle identità.

Un'altra è quella che gli intorni di prim'ordine delle due rigate R, R^* appartengono alla stessa quadrica. Ne segue che i complessi lineari a contatto rigato del prim'ordine con una delle rigate e di ordine zero con l'altra ha contatto del prim'ordine anche con questa. Ma di più, gli intorni

del terz'ordine delle due rigate appartengono allo stesso complesso lineare di equazione $p_{12} - \tau p_{03} = 0$ che è speciale se $\tau = 0$. Questa proprietà è caratteristica per il caso presente.

Se, di più, tra gli invarianti della corrispondenza ha luogo la relazione $\tau = 2\tau(\rho + \kappa_2)$, questo complesso è fisso e le rigate in corrispondenza appartengono ad un complesso lineare. Si può dire che questa è la più generale corrispondenza tra le rigate di un complesso lineare. Per il cambiamento del punto unitario

$$A_0 = \sqrt{\tau} B_0, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} B_1, \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} B_2, \quad A_3 = \sqrt{\tau} B_3$$

si ottengono le formule semplicissime di tale corrispondenza

$$\begin{aligned} \dot{B}_0 &= -\kappa_2 B_0 + B_1 + B_3 & B_2 &= B_1 + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} B_2 + \tau B_3 \\ \dot{B}_1 &= \tau B_0 + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} B_1 + B_2 & \dot{B}_3 &= B_0 + B_2. \end{aligned}$$

Un'altra proprietà caratteristica del caso eccezionale è la seguente:

La corrispondenza considerata stabilisce una trasformazione asintotica tra le rigate R e R^* .

Da una parte, si corrispondono le asintotiche rettilinee; da un'altra, le asintotiche curvilinee nei punti corrispondenti $P(1, t, 0, 0)$, $P^*(0, 0, t, 1)$, — per l'omografia indotta tra le punteggiate g, g^* — si ottengono dalla stessa equazione

$$t - t^2 - (2\rho + \kappa_2)t + \tau = 0.$$

Reciprocamente, nel caso della corrispondenza non-eccezionale, le asintotiche in P e P^* hanno le equazioni

$$2t - t^2(\tau_2 + 1) - 2t(2\rho + \tau_5) + \tau_1 + \tau_3 = 0$$

rispettivamente

$$2t - t^2(\tau_2 + \kappa) - 2t\left(2\rho + \tau_5 - \frac{\kappa}{2\kappa}\right) + \frac{\tau_1}{\kappa} + \tau_3 = 0$$

esse coincidono se, e solo se, $\kappa = 1$.

5. Coppie di curve. — Lo studio di tale configurazione ha fatto l'oggetto di moltissimi lavori specialmente da quelli di HALPHEN, BERZOLARI, BOMPIANI ecc.; più recentemente, lo studio delle coppie di curve è stato ripreso da M. BARNER in un lavoro [8] di cui abbiamo notizie da Mathematical Reviews.

Siano Γ_0 e Γ_1 due curve sghembe del $'S_3$ proiettivo; A_0 e A_1 punti generici su di esse. Esprimendo che, nei riferimenti d'ordine zero, A_0 e A_1 sono punti fissi, avremo $\pi_0^1 = \pi_0^2 = \pi_0^3 = 0$, $\pi_1^0 = \pi_1^2 = \pi_1^3 = 0$. Si può considerare $\omega_0^3 \equiv 0$ (il caso escluso, $\omega_0^3 \equiv 0$, si riferisce soltanto alla scelta del riferimento). Si avrà dunque

$$\omega_0^1 + a\omega_0^2 = \omega_0^2 + b\omega_0^3 = 0, \quad \omega_1^0 + c\omega_1^2 = \omega_1^2 + f\omega_1^3 = \omega_1^3 + g\omega_1^0 = 0.$$

Possiamo prendere $a=b=0$, $c=g=0$, $f=-1$. Ne segue: $\pi_3^1 = \pi_3^2 = 0$, $\pi_2^1 = \pi_2^2 = 0$, $\pi_0^1 + \pi_2^2 = 0$. Questa scelta significa semplicemente che lo spigolo A_0A_3 è la tangente in A_0 a Γ_0 e A_1A_2 è quella a Γ_1 in A_1 . Il caso escluso, $f=0$ accanto a $b=0$ significa che le tangenti a Γ_0 e Γ_1 nei punti A_0 , A_1 s'incontrano. C'è, d'una parte, un'ampia generalizzazione proiettiva della trasformazione di COMBESURE, curve a tangenti paralleli e, da un'altra, il caso delle coppie di curve situate su una sviluppabile. Lo studio di tale configurazione è stato fatto da BOMPIANI in un bellissimo lavoro inserito negli "Scritti matematici,, offerti a BERZOLARI [9].

Per i riferimenti del second'ordine, avremo:

$$\omega_0^1 + A\omega_0^2 = \omega_0^2 + B\omega_0^3 = \omega_0^3 + C\omega_0^0 = \omega_0^0 + F\omega_0^2 = 0, \quad \omega_1^0 + \omega_2^2 + G\omega_1^3 = 0.$$

Si può prendere $A=0$, $B=C=-1$, $F=0$.

La scelta $A=F=0$ vuol dire che $A_0A_3A_2$ è il piano osculatore a Γ_0 in A_0 e $A_1A_2A_3$ è quello a Γ_1 in A_1 , oppure che A_2 è l'intersezione della tangente a Γ_0 col piano osculatore a Γ_1 e reciprocamente. Abbiamo escluso i casi $B=0$, $C=0$. Uno di essi significa che il piano osculatore ad una delle curve passa per il punto generico dell'altra. Se fosse simultaneamente $B=C=0$, si avrebbe il caso delle trasformate asintotiche — lo studio proiettivo-differenziale della quale è stato fatto, anni fa, per uno di noi. La scelta fatta a come conseguenze $\pi_2^1 = \pi_1^2 = \pi_0^1 = \pi_3^0 = 0$. Essendo $\Sigma\pi_i^j = 0$, tutti i parametri secondari risultano zero dunque il riferimento proiettivo, determinato. Ne segue $d\omega_0^3 \equiv 0$ ciò che significa che ω_0^3 è invariante differenziale della configurazione; esso sarà notato per ds . G risulta invariante del secondo ordine e sarà notato per κ . Le conseguenze menzionate mettono in evidenza 4 invarianti del terz'ordine e si avrà

$$\omega_0^0 = \tau_1 ds, \quad \omega_1^1 = \tau_2 ds, \quad \omega_2^2 = \tau_3 ds, \quad \omega_3^3 = \tau_4 ds$$

e le formule di FRENET:

$$\dot{A}_0 = \tau_1 A_0 + A_3 \quad \dot{A}_2 = \tau_3 A_1 + (\kappa - \tau_1) A_2 + A_3$$

$$\dot{A}_1 = -\tau_2 A_1 + A_2 \quad \dot{A}_3 = \tau_4 A_0 + A_2 + (\tau_2 - \kappa) A_3.$$

Le condizioni d'immobilità saranno

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}^0 + \tau_1 x^0 + \tau_4 x^3}{x^0} &= \frac{\dot{x}^1 - \tau_2 x^1 + \tau_3 x^2}{x^1} = \frac{\dot{x}^2 + x^1 + (\kappa - \tau_1)x^2 + x^3}{x^2} = \\ &= \frac{\dot{x}^3 + x^0 + x^2 + (\tau_2 - \kappa)x^3}{x^3}\end{aligned}$$

Interpretazioni geometriche.

In ciò che riguarda il riferimento, rimane a caratterizzare il punto unitario. Essendo questo punto, del second'ordine della configurazione, ci conviene di considerare il regolo osculatore alla rigata A_0A_1 lungo questa generatrice. In coordinate locali x^0, x^1, x^2, x^3 , l'equazione di questo regolo è

$$2x^0x^2 - 2x^1x^3 + (x^2)^2 - 2\kappa x^2x^3 - (x^3)^2 = 0.$$

Le generatrici del secondo regolo di questa quadrica in A_0 e A_1 sono rispettivamente

$$x^2 = x^3 + 2x^1 = 0, \quad x^3 = x^2 + 2x^0 = 0.$$

Esse segano A_1A_3 , rispettivamente, A_0A_2 nei punti V_{13}, V_{02} . I punti unitari U_1, U_{02} degli spigoli A_1A_3, A_0A_2 sono determinati dai birapporti

$$[A_1, A_3; V_{13}, U_{13}] = [A_0, A_2; V_{02}, U_{02}] = -2.$$

Gli stessi punti U_{13}, U_{02} possono essere determinati considerando le rette caratteristiche dei piani $A_0A_1A_2, A_0A_1A_3$. Le equazioni di queste rette sono

$$x^3 \equiv x^0 + x = 0, \quad x^2 \equiv x^1 + x^3 = 0.$$

La quadrica pre-osculatrice alla rigata A_0A_1 passante per lo spigolo A_2A_3 ha l'equazione

$$x^0x^2 - x^1x^3 = 0.$$

La retta $U_{02}U_{13}$ sega questa quadrica in due punti uno di essi essendo appunto il punto unitario del riferimento.

Nello stesso scopo, si potrebbe fare uso della "superficie principale" della coppia di curve, luogo dei vertici dei coni quadrati contenenti gli interni del second'ordine delle curve Γ_0, Γ_1 , superficie considerata da HALPHEN, BERZOLARI e BOMPIANI, la cui equazione è

$$x^0(x^2)^3 - x^1(x^3)^3 = 0.$$

Per trovare un'interpretazione dell'invariante differenziale, basta considerare la quaterna di piani passanti per A_0A_1 : $\alpha_2 \equiv A_0A_1A_3$, $\alpha_3 \equiv A_0A_1A_2$, π_0 e π_1 passanti anche per $A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2A_0$ rispettivamente, per $A_1 + dA_1 + \frac{1}{2}d^2A_1$ e si avrà

$$ds = \pm 2\sqrt{\text{parte pr.} [\alpha_2, \alpha_3; \pi_0, \pi_1]}.$$

Lo spigolo A_2A_3 , intersezione dei piani osculatrici a Γ_0 in A_0 e a Γ_1 in A_1 incontra la quadrica osculatrice alla rigata generata da A_0A_1 lungo questa generatrice, nei punti

$$(x^2)^2 - 2\kappa x^2 x^3 - (x^3)^2 = 0,$$

punti che forniscono l'interpretazione dell'invariante κ . Si può notare che l'annullare di κ significa che i punti A_2, A_3 sono inversi rispetto la quadrica considerata. Altre interpretazioni di κ si ottengono considerando i piani polari di U_{02}, U_{13} rispetto la stessa quadrica.

La tangente in A_3 alla curva descritta da questo punto, ha le equazioni

$$x^1 = x^0 - \tau_4 x^2 = 0.$$

L'intersezione di questa tangente con A_0A_2 fornisce l'interpretazione dell'invariante τ_4 . Analogamente, si trova l'interpretazione di τ_3 . È da notare la relazione

$$\tau_4 = (A_1, \dot{A}_1, \ddot{A}_1, \ddot{\ddot{A}}_1)$$

la quale mostra che $\tau_4 = 0$ significa che Γ_1 è una curva piana; analogamente $\tau_3 = 0$ significa che Γ_0 è piana.

Per trovare interpretazioni geometriche per τ_1, τ_2 , basta considerare i punti flecnodali, su A_0A_1 , della superficie rigata generata da A_0A_1 . Questi punti $F_i(1, \rho_i, 0, 0)$, determinati con ρ_i radici dell'equazione:

$$\tau_1 \rho^2 + [\dot{\kappa} + \kappa(\tau_2 - \tau_1) + \tau_3 - \tau_4] \rho + \tau_2 = 0.$$

forniscono le interpretazioni cercate.

Notiamo che:

$\tau_2 = 0$ significa che Γ_0 è flecnodale della rigata A_0A_1 ;

$\tau_1 = 0$ significa che Γ_1 è flecnodale della stessa rigata;

$\dot{\kappa} + \kappa(\tau_2 - \tau_1) + \tau_3 - \tau_4 = 0$ significa che i punti flecnodali sono coniugati rispetto alla coppia A_0A_1 ;

in fine, se $\tau_1 = \tau_2 = \dot{\kappa} + \tau_3 - \tau_4 = 0$, la superficie A_0A_1 è una quadrica.

Osservazione. - Altre interpretazioni degli invarianti della configurazione possono ricavarsi dalla considerazione di certi complessi lineari.

Il complesso lineare contenente 3 tangenti consecutive della curva Γ_0 e 2 della curva Γ_1 ha l'equazione

$$p_{01} + \tau_3 p_{23} = 0;$$

il complesso lineare ottenuto scambiando Γ_0 e Γ_1 tra loro ha l'equazione

$$p_{01} + \tau_4 p_{23} = 0.$$

Questi complessi sono speciali se Γ_0 , rispettivamente Γ_1 , sono curve piane.

I due complessi coincidono se, e solo se, $\tau_3 = \tau_4$.

In fine, tale complesso è stazionario se, di più,

$$\frac{\dot{\tau}_3}{2\tau_3} + \tau_1 - \tau_2 = 0.$$

Dunque la corrispondenza tra Γ_0 e Γ_1 con $\tau_3 - \tau_4 = \frac{\dot{\tau}_3}{2\tau_3} + \tau_1 - \tau_2 = 0$ è la più generale corrispondenza puntuale tra le curve appartenenti ad un complesso lineare.

Applicazioni.

Come abbiamo accennato al principio, dalla geometria delle coppie di curve si possono dedurre quelle della banda rigata e della superficie rigata.

1°. Sia Γ^0 la curva della banda rigata considerata e A_0A_1 la sua retta. Facciamo coincidere Γ_1 con una delle curve flecnodali della rigata descritta da A_0A_1 ciò che da $\tau_1 = 0$. Dunque una banda rigata ammette un invariante differenziale e quattro invarianti finiti.

È facile vedere che se, tra questi invarianti, ha luogo la relazione

$$2\tau_2 - \kappa = 0,$$

oppure se, nel caso $2\tau_2 - \kappa \neq 0$, ha luogo $\frac{d}{ds} \log (2\tau_2 - \kappa) - \frac{\tau_4}{2\tau_2 - \kappa} + \tau_1 + \tau_2 = 0$, la banda è conica ciò che vuol dire che la sviluppabile generata dal piano $A_0A_1A_3$ è un cono.

2°. Si ottiene la geometria della superficie rigata generata da A_0A_1 , considerando Γ_0 e Γ_1 flecnodali di questa superficie. Si ha dunque

$\tau_2 = \tau_1 = 0$. Le formole di FRENET saranno dunque

$$\dot{A}_0 = A_3, \quad \dot{A}_1 = A_2, \quad \dot{A}_2 = \tau_3 A_1 + \kappa A_2 + A_3, \quad \dot{A}_3 = \tau_4 A_0 + A_2 - \kappa A_3.$$

Nel caso particolare, quando τ_3 , o τ_4 , è nullo si ottiene la geometria delle superficie rigate con una o le ambedue flecnodali curve piane. Le formole di FRENET delle rigate a linee flecnodali piane e distinte sono semplicissime:

$$\dot{A}_0 = A_3, \quad \dot{A}_1 = A_2, \quad \dot{A}_2 = \kappa A_2 + A_3, \quad \dot{A}_3 = A_2 - \kappa A_3.$$

Lo studio di questa importante classe di superficie è stato eseguito magistralmente da O. MAYER [10].

6. Coppie di curve nell' S_3 affine. - La configurazione delle curve Γ_0, Γ_1 sarà rapportata a triedri $AI_1I_2I_3$ con: A punto generico di Γ_0 e $A + I_1 = M$, punto generico di Γ_1 . Escludendo, per momento, il caso delle coppie a tangenti incidenti, il metodo di CARTAN ci conduce alle formole di FRENET:

$$\dot{A} = I_3, \quad \dot{I}_1 = I_2 - I_3, \quad \dot{I}_2 = \kappa_1 I_1 + \kappa_2 I_2 + \kappa_3 I_3, \quad \dot{I}_3 = \kappa_4 I_1 + \kappa_5 I_2 - \kappa_2 I_3.$$

La configurazione ha un invariante differenziale $\omega_3^2 = ds$ del primo ordine e 5 invarianti finiti, $\kappa_1, \dots, \kappa_5$.

Lo spigolo AI_2 del riferimento è la paretella, per A , alla tangente in M a Γ_1 , mentre AI_3 è la tangente in A a Γ_0 . Il piano unitario per AI_1 è il piano asintotico della superficie rigata generata da AI_1 .

Interpretazioni geometriche degli invarianti della configurazione risultano dalle considerazioni dei seguenti enti geometrici:

Il piano osculatore Γ_0 in A ha, in coordinate locali, l'equazione

$$\kappa_5 x^1 - \kappa_4 x^3 = 0.$$

Quello osculatore a Γ_1 in M ,

$$\kappa_1 x^3 - \kappa_3 x^1 + \kappa_3 x^0 = 0.$$

La retta caratteristica del piano AI_1I_2 è descritta dal punto $P \equiv M + \lambda(I_2 + \kappa_3 I_1)$, mentre il suo punto caratteristico è definito da λ soddisfacente

$$\lambda[\dot{\kappa}_3 - \kappa_3(\kappa_2 + \kappa_3) + \kappa_1] = \kappa_3.$$

Similmente, la retta caratteristica dal piano AI_1I_3 è descritta dal punto $Q \equiv A + \mu(I_3 - x_5I_1)$ e il suo punto caratteristico si ottiene per:

$$\mu[\kappa_5(1 + \kappa_2 - \kappa_5) - \kappa_4] = \kappa_5.$$

La caratteristica del piano AI_2I_3 : $R \equiv A + \nu(\kappa_4I_2 - \kappa_1I_3)$.

La quadrica osculatrice alla superficie generata da AI_1 , lungo questa generatrice, ha l'equazione

$$2x^1x^2 + 2x^1x^3 - 2x^0x^2 + 2\kappa_2x^2x^3 - \kappa_3(x^2)^2 + \kappa_5(x^3)^2 = 0$$

avente il centro nel punto $[2\kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_5, \kappa_2 - \kappa_5, -1, 1]$; questa quadrica diventa paraboloide se $2\kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_5 = 0$, quando la superficie AI_1 è a piano direttore. Il punto $(\lambda, \mu, 0, 0)$ è punto flecnodale sulla generatrice AI_1 se:

$$\lambda^2(\dot{\kappa}_5 + \kappa_4) + \lambda\mu(\dot{\kappa}_2 - 2\dot{\kappa}_5 + \kappa_1 - \kappa_4) + \mu^2 \frac{d}{ds}(\kappa_5 - \kappa_2 - \kappa_3) = 0.$$

Ne segue che Γ_0 è flecnodale sulla rigata AI_1 se

$$\dot{\kappa}_5 + \kappa_4 = 0; \Gamma_1 \text{ è flecnodale se } \kappa_5 - \kappa_2 - \kappa_3 = c \stackrel{te}{=}.$$

Come nel caso proiettivo, dalla geometria della coppia di curve, si possono dedurre quelle della banda o della superficie rigata.

La corrispondenza di Combescure.

Nel caso delle coppie a tangenti paralleli, le formole di FRENET sono:

$$\dot{A} = I_3, \quad \dot{I}_1 = \kappa I_3, \quad \dot{I}_2 = \tau I_1 + \rho I_3, \quad \dot{I}_3 = I_2$$

dove κ , τ e ρ sono invarianti d'ordine 1, 3 e 4 rispettivamente. Si può notare che $-\frac{1}{\kappa}$ è l'ascisse del punto cuspidale della sviluppabile AI_1 mentre $\tau = -[I_3, \dot{I}_3, \ddot{I}_3]$ il quale rappresenta dunque il rapporto dell'arco affine di Γ_0 per $(\omega_0^3)^3$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GHEORGHIEV GH. et POPA I., *Géométrie différentielle projective des variétés de cônes*, «C. R. Acad. Sci. Paris», T. 251-1960, p. 1208-1210, 1268-1269.
- [2] — —, *Sur une variété uni-dimensionnelle non holonome de A. MYLLER*, «Anal. Sci. Univ. Iasi», T. VI-1960, p. 59-75.

- [3] — —, *Asupra unor varietati neolomone unidimensionale*, «Studii si Cerc. Acad. R. P. R. Iasi», seria Matematica, T. XI-1960 p. 333-336.
 - [4] LANE E. P., *Ruled surfaces with generators in one-to-one correspondance*, «Trans. Amer. Math. Soc.», T. 25-1923, p. 281-296.
 - [5] CREANGA I., *Sur une famille de transformations entre deux surfaces réglées*, «Bul. Polit. Iasi», T. II-1947, p. 35-45.
 - [6] IVLEV E. T., *Coppie di superficie rigate nello spazio proiettivo tridimensionale*, in l. russa. «Rendiconti del Colloquio di Mat. e Mecc.», Università di Tomsk U. R. S. S., 1960, p. 50-51.
 - [7] MENTRÉ P., *Sur les complexes engendrés par une congruence linéaire non speciale*, C. R. Acad. Sci. Paris», T. 191-1930, p. 644-646.
 - [8] BARNER M., *Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurvenpaare*, «Math. Zeitschr.», T. 56-1952 p. 409-442.
 - [9] BOMPIANI E. - *Sulle curve sghembe*, Scritti matematici offerti a LUIGI BERZOLARI, 1936, p. 515-552.
 - [10] MAYER O., *Sur les surfaces réglées à lignes flecnodales planes*, «Ann Sci. Univ. Jassy», T. 15-1927, p. 25-55.
-