Une surface de Voss à 6 dimensions dont le sous-espace osculateur est à 9 dimensions.

Memoria di S. FINIKOF

À M. Enrico Bompiani pour un Jubilé scientifique.

§ 1. Considérons une surface $\mathfrak{M}_6$ plongée dans l'espace euclidien E_n , qui porte un réseau conjugué, composé de six familles des lignes géodésiques. Supposons que le réseau en question est holonome, c. à. d. admet une transformation de LAPLACE pour chaque couple de familles conjuguées de lignes géodésiques.

Si les vecteurs unitaires $\vec{e}_i (i = 1, \dots, 6)$ de longueur 1 du repère attaché au point M de $\mathfrak{M}_6$ touchent des lignes géodésiques du réseau de Voss, tandis que les vecteurs $\vec{e}_\alpha (\alpha = 7, 8, 9)$ avec les $\vec{e}_i$ déterminent le sous-espace osculateur E_9 , les premières équations dérivatives de $\mathfrak{M}_6$ s'écrivent:

$$d\vec{M} = \omega^i \vec{e}_i \quad (i, j = 1, \dots, 6)$$

$$d\vec{e}_i = \omega^j_i \vec{e}_j + \omega^\alpha_i \vec{e}_\alpha \quad (\alpha, \beta = 7, 8, 9) \quad (1: 1)$$

$$d\vec{e}_\alpha = \omega^j_\alpha \vec{e}_j + \omega^\beta_\alpha \vec{e}_\beta + \omega^\lambda_\alpha \vec{e}_\lambda; \quad (\lambda = 10, \dots)$$

les formes $\omega^i, \omega^j_i, \omega^\alpha_\alpha$ etc. vérifient les équations de la structure euclidienne; les vecteurs $\vec{e}_\lambda$ avec les précédents déterminent le second sous-espace osculateur.

La différenciation extérieure de l'identité évidente

$$\omega^\alpha = 0$$

nous donne

$$[\omega^i, \omega^j_i] = 0,$$

d'où à l'aide du lemme de CARTAN on obtient

$$(1: 2) \quad \omega^\alpha_i = l^\alpha_{ij} \omega^j \quad l^\alpha_{ij} = l^\alpha_{ji}$$

et les formes quadratiques asymptotiques sont $\vec{e}_\alpha d^2 \vec{M} = \vec{e}_\alpha$, $d(\omega^i \vec{e}_i) = \omega^i \vec{e}_\alpha d\vec{e}_i = \omega^i \omega_i^\beta \vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta$; remplaçons maintenant le ω_i^β par son valeur (1: 2) et posons

$$(1: 3) \quad \vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = \rho_{\alpha\beta}. \quad \det |\rho_{\alpha\beta}| \neq 0;$$

nous obtenons

$$(1: 4) \quad \Phi_\alpha = \rho_{\alpha\beta} l_{ij}^\beta \omega^i \omega^j,$$

Deux familles de lignes

$$(1: 5) \quad \omega^a(d_1) = \delta_1^a, \quad \omega^a(d_2) = \delta_2^a \quad \delta_b^a = \begin{cases} 0, & \text{si } a \neq b \\ 1, & \text{si } a = b \end{cases}$$

sont conjugués, si la forme bilinéaire

$$\Phi_\alpha(d_1, d_2) = \rho_{\alpha\beta} l_{ij}^\beta \omega^i(d_1) \omega^j(d_2) = 0$$

est nulle. En y portant les valeurs (1: 5), on obtient

$$l_{12}^\beta = 0.$$

En général la condition que chaque couple de lignes $i, j = 1, \dots, 6$ soit conjugué est l'annulation de tous les coefficients

$$(1: 6) \quad l_{ij}^\beta = 0, \quad (i \neq j)$$

à deux indices en bas différents.

$$(1: 7) \quad \Phi_\alpha = \sum_{\substack{i=1, \dots, 6 \\ \beta=7, 8, 9}} \rho_{\alpha\beta} l_i^\beta (\omega^i)^2.$$

Or, le sous-espace E_0 non dégénéré, ces formes sont linéairement indépendantes.

En les remplaçant par leur combinaison linéaires, on réduit à la façon

$$(1: 8) \quad \Psi^{i+6} = l_{ii}^{i+6} (\omega^i)^2 + \sum_{j=4, 5, 6} l_{jj}^{i+6} (\omega^j)^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Supposons, que la surface a le système des formes quadratiques

$$(1: 9) \quad \begin{aligned} & l_{11}^7(\omega^1)^2 + l_{44}^7(\omega^4)^2 + l_{66}^7(\omega^6)^2, \\ & l_{22}^8(\omega^2)^2 + l_{55}^8(\omega^5)^2, \\ & l_{33}^9(\omega^3)^2 \end{aligned}$$

et les composants ω_i^α par le choix convenable des vecteurs $\vec{e}_\alpha$ se réduisent à la forme

$$(1: 10) \quad \begin{aligned} \omega_1^7 &= \lambda_1 \omega^1, \quad \omega_4^7 = \lambda_4 \omega^4, \quad \omega_6^7 = \lambda_6 \omega^6, \\ \omega_2^8 &= \lambda_2 \omega^2, \quad \omega_5^8 = \lambda_5 \omega^5, \\ \omega_3^9 &= \lambda_3 \omega^3 \end{aligned}$$

et toutes les autres sont égales à zéro.

$$(1: 11) \quad \begin{aligned} \omega_2^7 &= \omega_3^7 = \omega_5^7 = 0, \\ \omega_1^8 &= \omega_5^8 = \omega_4^8 = \omega_6^8 = 0, \\ \omega_1^9 &= \omega_2^9 = \omega_4^9 = \omega_5^9 = \omega_6^9 = 0. \end{aligned}$$

Admettons que tous les coefficients λ_i sont différents de zéro.

§ 2. De même, si l'on différencie l'identité évidente

$$\omega_i^\lambda = 0,$$

on obtient

$$[\omega_i^\alpha \omega_\alpha^\lambda] = 0;$$

en vertu de (1: 10), (1: 11) les équations prennent la forme

$$(2: 1) \quad \begin{aligned} [\omega^1 \omega_7^\lambda] &= 0, \quad [\omega^2 \omega_8^\lambda] = 0, \quad [\omega^3 \omega_9^\lambda] = 0, \\ [\omega^4 \omega_7^\lambda] &= 0, \quad [\omega^5 \omega_8^\lambda] = 0, \\ [\omega^6 \omega_7^\lambda] &= 0 \end{aligned}$$

Trois équations de la première colonne en vertu du lemme de CARTAN exigent proportionnalité de la forme ω_7^λ aux formes $\omega^1, \omega^4, \omega^6$ à la fois.

Or les formes ω^i sont linéairement indépendantes, donc la forme ω_7^λ s'annule; de même la forme ω_8^λ

$$(2: 2) \quad \omega_7^\lambda = 0, \quad \omega_8^\lambda = 0, \quad \omega_9^\lambda = b_9^\lambda \omega^9,$$

les équations (1: 1) de la dernière ligne prennent maintenant la forme

$$(2: 3) \quad \begin{aligned} d\vec{e}_7 &= \omega_7^i \vec{e}_i + \omega_7^8 \vec{e}_8, \\ d\vec{e}_8 &= \omega_8^i \vec{e}_i + \omega_8^9 \vec{e}_9, \\ d\vec{e}_9 &= \omega_9^i \vec{e}_i + \omega_9^8 \vec{e}_8 + a_9^{10} \omega^3 \vec{e}_{10}, \end{aligned}$$

où le vecteur e_{10} de longueur 1 est déterminé par l'équation

$$(2: 4) \quad a_9^{10} \vec{e}_{10} = b_8^\lambda \vec{e}_\lambda$$

et

$$(2: 5) \quad \omega_7^{10} = 0, \quad \omega_8^{10} = 0, \quad \omega_9^{10} = a_9^{10} \omega^3.$$

Ainsi la dimension du second sous-espace osculateur E_{10} est plus grande d'une unité que celle du premier.

§ 3. Deux familles de lignes admettent une transformation de LAPLACE, si les tangentes aux lignes de la première famille engendrent une surface développable, quand le point de contact décrit une ligne de la seconde famille, c.a.d. s'il existe un point

$$\vec{M}_1 = \vec{M} + \rho \vec{e}_{k_1}$$

sur la tangente $\vec{e}_{k_1}$, dont le déplacement infinitésimal

$$(3: 1) \quad \begin{aligned} d_2 \vec{M}_1 &= d_2(\vec{M} + \rho \vec{e}_{k_1}) = \\ &= \omega^{k_2} \vec{e}_{k_2} + \vec{e}_{k_1} d_2 \rho + \rho \sum_j \omega_{k_1}^j (d_2) \vec{e}_j \end{aligned}$$

coincide avec la direction de la tangente $\vec{e}_{k_1}$.

En posant

$$(3: 2) \quad \omega_{k_1}^j = \sum_i l_{k_1 i}^j \omega^i,$$

donc

$$\omega_{k_1}^j(d_2) = l_{k_1 k_2}^j \omega^{k_2};$$

en omettant les termes contenant le vecteur $\vec{e}_{k_1}$, on reçoit

$$\omega^{k_2} \vec{e}_{k_2} + \rho \sum_{j \neq k_1} l_{k_1 k_2}^j \omega^{k_2} \vec{e}_j = 0;$$

d'où en égalant les coefficients des vecteurs $\vec{e}_{k_2}$, $\vec{e}_j (j \neq k_1, k_2)$ on obtient

$$1 + \rho l_{k_1 k_2}^{k_2} = 0, \quad l_{k_1 k_2}^j = 0. \quad (j \neq k_1, k_2)$$

La première de ces équations détermine ρ , c.a.d. la position du foyer M_1 sur la droite $(M; \vec{e}_{k_1})$; la seconde restreint les formes ω_k^i : les coefficients $l_{k_1 k_2}^j$ à trois indices différents s'annulent.

L'équation (3: 2) prend la forme

$$(3: 3) \quad \omega_i^j = l_{ii}^j \omega^i + l_{ij}^j \omega^j.$$

Si en outre, les lignes coordonnées sont géodésiques, c.a.d. chaque vecteur e_i au déplacement $d_i(\omega^k = \frac{k}{i})$ ne tourne pas dans le sous-espace tangent, le coefficient l_{ii}^j est nul et l'égalité (3: 3) devient

$$(3: 4) \quad \omega_i^j = l_{ij}^j \omega^j.$$

§ 4. Les équations (1: 10), (1: 11), (3: 4) forment le système différentiel du problème. Elles ont beaucoup de conséquences différentielles.

En dérivant extérieurement les équations (1: 11), on obtient en vertu de (1: 10), (3: 4)

$$(4: 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\omega_7^8 \omega^1] = 0, \quad [\omega_7^9 \omega^1] = 0, \quad [\omega_8^9 \omega^1] = 0, \quad [\omega_8^7 \omega^2] = 0 \\ [\omega_7^8 \omega^4] = 0, \quad [\omega_7^9 \omega^4] = 0, \quad [\omega_8^9 \omega^3] = 0, \quad [\omega_8^7 \omega^5] = 0 \\ [\omega_7^8 \omega^6] = 0, \quad [\omega_7^9 \omega^6] = 0, \end{array} \right.$$

$$(4: 2) \quad [\omega_9^7 \omega^3] = 0, \quad [\omega_9^8 \omega^3] = 0.$$

En traitant comme le système (2: 1), on obtient

$$(4: 3) \quad \omega_7^8 = 0, \quad \omega_8^7 = 0, \quad \omega_7^9 = 0, \quad \omega_8^9 = 0,$$

$$(4: 4) \quad \omega_9^7 = \alpha_9^7 \omega^3, \quad \omega_9^8 = \alpha_9^8 \omega^3.$$

Or, on peut poser

$$\vec{e}_7 \vec{e}_{10} = \vec{e}_8 \vec{e}_{10} = \vec{e}_9 \vec{e}_{10} = 0.$$

En différenciant ces identités, on obtient

$$\begin{aligned} \omega_{10}^7 + \omega_{10}^8 \rho_{78} + \omega_{10}^9 \rho_{79} &= 0, \\ (4: 5) \quad \omega_{10}^7 \rho_{87} + \omega_{10}^8 + \omega_{10}^9 \rho_{89} &= 0, \\ \omega_{10}^7 \rho_{97} + \omega_{10}^8 \rho_{98} + \omega_{10}^9 &= -\omega_9^{10} = -\alpha_9^{10} \omega^3. \end{aligned}$$

Si l'on multiplie les équations (4: 5) successivement par les mineurs réduites π^{ab} du déterminant (1: 3) et prend la somme, on obtient

$$(4: 6) \quad \omega_{10}^7 = -\pi^{79} \alpha_9^{10} \omega^3, \quad \omega_{10}^8 = -\pi^{89} \alpha_9^{10} \omega^3, \quad \omega_{10}^9 = -\alpha_9^{10} \omega^3,$$

De même, en différenciant les identités

$$(\vec{e}_7)^2 = (\vec{e}_8)^2 = (\vec{e}_9) = (\vec{e}_{10})^2 = 1,$$

on obtient

$$(4: 7) \quad \omega_7^7 = \omega_8^8 = 0, \quad \omega_{10}^{10} = 0,$$

$$(4: 8) \quad \omega_9^9 = -(\alpha_9^7 \rho_{97} + \alpha_9^8 \rho_{98}) \omega^3 = \alpha_9^9 \omega^3,$$

si l'on pose

$$\alpha_9^7 \rho_{97} + \alpha_9^8 \rho_{98} + \alpha_9^9 = 0.$$

§ 5. En différenciant extérieurement les équations (1:10) on obtient

$$(5: 1) \quad (I_{1-6}) \quad [\Delta \lambda, \omega^i] = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_k &= d\lambda_k - 2\lambda_k \omega_k^k + \lambda_k \sum_{j=1, \dots, 6}^{j \neq k} l_{jk}^k \omega^j, \quad (k = 1, 2, 4, 5, 6) \\ (5: 2) \quad \Delta \lambda_3 &= d\lambda_3 - 2\lambda_3 \omega_3^3 - \alpha_9^9 \lambda_3 \omega^3 + \lambda_3 \sum_{j=1 \dots 6}^{j \neq 3} l_{j3}^3 \omega^j. \end{aligned}$$

En différenciant extérieurement les équations (3: 4), on obtient 30 équations, q'on peut écrire en trois groupes numérotés avec deux indices (5: i, j), où $i, j = 1, \dots, 6, i \neq j$.

$$\begin{aligned} & [\Delta l_{ij}^j \omega^j] + \lambda^j [\omega_i^j \omega^i] = 0, \quad (i = 1, 4, 5) \\ (5: i, j) \quad & [\Delta l_{ij}^j \omega^j] + \lambda_i [\omega_8^j \omega^i] = 0, \quad (i = 2, 5) \\ & [\Delta l_{ij}^j \omega^j] + \lambda_i [\omega_3^j \omega^i] = 0, \quad (i = 3). \end{aligned}$$

Il est facile à voir que chaque forme ω_i^j entre au moins à deux équations $i = 1, 4, 6; i \neq j$.

Or ces équations contiennent la même forme ω^j , indépendante sur la variété intégrale, et différentes formes ω^i ; donc la forme ω_i^j ne dépend que de la forme ω^j

$$(5: 4) \quad \omega_i^j = a_i^j \omega^j \quad (j = 1, \dots, 6)$$

et les équations (5: i, j) du premier groupe ($i = 1, 4, 6$) si l'on fait substitution (5: 4), prennent la forme

$$(5: 5) \quad (\Pi_{1-15}) \quad [\Delta l_{ij}^j \omega^j] = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 4, 6 \\ j = 1, \dots, j \neq i \end{array} \right)$$

où

$$(5: 6) \quad \nabla l_{ij}^j = \Delta l_{ij}^j - \lambda_i a_i^j \omega^i.$$

De même, les équations (5: i, j) du second groupe ($i = 2, 5$) donnent

$$(5: 7) \quad \omega_8^j = a_8^j \omega^j \quad (j = 1, 3, 4, 6)$$

et les équations quadratiques

$$(5: 8) \quad (\Pi_{16-24}) \quad [\nabla l_{2j}^j \omega^j] = 0, \quad [\nabla l_{5j}^j \omega^j] = 0 \quad (j = 1, 3, 4, 6)$$

où

$$\begin{aligned} (5: 9) \quad & \nabla l_{2j}^j = \Delta l_{2j}^j - \lambda_2 a_8^j \omega^8, \\ & \nabla l_{5j}^j = \Delta l_{5j}^j - \lambda_5 a_8^j \omega^8. \end{aligned}$$

Il nous reste deux équations du second groupe (5: i, j)

$$(5: 10) \quad \begin{aligned} (IV_{1,2}) \quad [\Delta l_{25}^5 \omega^5] + \lambda_2 [\omega_8^5 \omega^2] &= 0, \\ [\Delta l_{52}^2 \omega^2] + \lambda_5 [\omega_8^2 \omega^5] &= 0 \end{aligned}$$

et cinq équations du troisième groupe

$$(5: 11) \quad \begin{aligned} (V_{3-7}) \quad [\Delta l_{3j}^j \omega^j] + \lambda_3 [\omega_9^j \omega^3] &= 0 \\ (j = 1, 2, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

que nous venons annexer aux équations (V_{1,2}).

Puis la troisième équation (2: 5)

$$\omega_9^{10} = a_9^{10} \omega^3.$$

On obtient par une dérivation extérieure

$$(5: 12) \quad (III_{11}) \quad [\Delta a_9^{10} \omega^3] = 0$$

où

$$(5: 13) \quad \Delta a_9^{10} = da_9^{10} - a_9^{10} (\omega_3^3 + a_9^9 \omega^3 - \sum_{k=3}^{k=1 \dots 6} l_{k3}^3 \omega^k).$$

Il nous reste à différencier les équations (5: 4), (5: 7) et (4: 4); elles donnent

$$(5: 14) \quad \begin{aligned} (III_{1-10}) \quad [\Delta a_l^j \omega^j] &= 0, \quad (j = 1, \dots, 6) \\ [\Delta a_8^j \omega^j] &= 0, \quad (j = 1, 3, 4, 6) \end{aligned}$$

où

$$(5: 15) \quad \begin{aligned} \Delta a_l^j &= da_l^j + a_8^j \sum_{k \neq j}^{k=1 \dots 6} l_{kj}^j \omega^k - \sum_{k \neq j}^{k=1 \dots 6} l_{kj}^j \omega_7^k, \quad (j = 1 \dots 6) \\ \Delta a_8^j &= da_8^j + a_8^j \sum_{k \neq j}^{k=1 \dots 6} l_{kj}^j \omega^k - \sum_{k \neq j}^{k=1 \dots 6} l_{kj}^j \omega_8^k, \quad (j = 1, 3, 4, 6) \end{aligned}$$

et

$$(5: 16) \quad \begin{aligned} (V_{1,2}) \quad [\Delta a_9^7 \omega^3] &= \lambda_1 [\omega_9^1 \omega^1] + \lambda_4 [\omega_9^4 \omega^4] + \lambda_6 [\omega_9^6 \omega^6] \\ [\Delta a_9^8 \omega^3] &= \lambda_2 [\omega_9^2 \omega^2] + \lambda_5 [\omega_9^5 \omega^5] \end{aligned}$$

où

$$\Delta a_9^7 = da_9^7 - a_9^7 \omega_3^3 + \sum_{i=1,4,6} l_{i3}^3 \omega^i \quad (5: 17)$$

$$\Delta a_9^8 = da_9^8 - a_9^8 \omega_3^3 + \sum_{i=2,5} l_{i3}^3 \omega^i.$$

§ 6. Le système des équations différentielles, qui détermine notre surface de Voss, contient 65 équations de PFAFF, à savoir; (1: 10, 11), (2: 2, 5), (3: 4), 4: 4, 6, 7, 8), (5: 4, 7]. Les équations quadratiques sont réunies en cinq groupes. Le premier contient 6 équations, qui proviennent de la différenciation du système (1: 10). Chaque équation du groupe contient un seul produit extérieur et un seul différentiel $d\lambda_i$

$$(6: 1) \quad (I_{1-6}) \quad [\Delta \lambda_i \omega^i] = 0.$$

Le second groupe contient 24 équations qui proviennent de la différenciation extérieure des équations (3: 4). La substitution (5: 4) ou (5: 7) les réduit à un seul terme

$$(6: 2) \quad (II_{1-15}) \quad [\nabla l_{ij}^j \omega_j] = 0,$$

$$(6: 3) \quad (II_{16-24}) \quad [\nabla l_{2j}^j \omega^j] = 0, \quad [\nabla l_{5j}^j \omega^j] = 0, \quad (j = 1, 3, 4, 6)$$

Le troisième groupe contient onze équations, chacune à un terme, qui proviennent de la différenciation des équations (5: 4), (5: 7), (2: 5).

$$(6: 4) \quad (III_{1-11}) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\Delta a_7^j \omega^j] = 0 \quad (j = 1 \dots) \\ [\Delta a_8^j \omega^j] = 0 \quad (j = 1, 3, 4, 6) \end{array} \right\}$$

$$(6: 5) \quad [\Delta a_9^{10} \omega^3] = 0.$$

Enfin, le cinquième groupe contient les dernières équations (3: 4). Ce groupe contient les formes caractéristiques ω_9^j .

$$(6: 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (V_{1,2}) \quad [\Delta a_9^7 \omega^3] = \lambda_1[\omega_9^1 \omega^1] + \lambda_4[\omega_9^4 \omega^4] + \lambda_6[\omega_9^6 \omega^6], \\ [\Delta a_9^8 \omega^3] = \lambda_2[\omega_9^2 \omega^2] + \lambda_5[\omega_9^5 \omega^5], \end{array} \right.$$

$$(6: 8) \quad (V_{3-7}) \quad [\Delta l_{3j}^j \omega^j] + 3[\omega_9^j \omega^3] = 0 \quad (j = 1, 2, 4, 5, 6)$$

chaque groupe des équations, au delà des formes ω^i indépendantes sur la variété intégrale, possède ses formes du système caractéristique, différentes des formes des autres groupes. Il en suit qu'on peut étudier chaque groupe à part. Si chaque sous-groupe du système des équations quadratiques est involutive, le système en est également et les caractères sont égaux aux sommes des caractères correspondants des sous-groupes.

Les groupes I, II, III contiennent 41 équations, dont chacune est à un seul terme. Le sous-système évidemment est involutive. Le premier caractère est égal au nombre des équations, les autres sont nul

$$\sigma_1 = 41, \sigma_2 = \dots = \sigma_6 = 0.$$

La quatrième groupe contient deux équations et $q = 4$ formes caractéristiques (au delà des ω^i) $\omega_8^2, \omega_8^5, \Delta l_{25}^5, \Delta l_{52}^2$. En appliquant le lemme de CARTAN aux équations (6.6), on obtient $\mathfrak{U} = 6$ paramètres arbitraires. Les caractères du sous-système sont

$$\sigma'_1 = 2, \sigma'_2 = 2, \sigma'_3 = 0, \dots = \sigma'_k = 0$$

Le nombre de CARTAN

$$Q' = \sigma'_1 + 2\sigma'_2 = 6$$

coïncide avec $\mathfrak{U}'$; le sous-système est involutive.

Il cinquième groupe contient 7 équations et $q = 12$ formes caractéristiques, (au delà des ω^i). En appliquant le lemme de CARTAN aux équations (V_{3-7}) , on obtient

$$\Delta l_{3j}^j = a_j \omega^j + b_j \omega^3, \quad (j = 1, 2, 4, 5, 6)$$

(6: 10)

$$\lambda_3 \omega_9^j = b_j \omega^j + c_j \omega^3.$$

qui contient 15 paramètres arbitraires a_j, b_j, c_j . En portant les expressions des ω_9^j dans les équations $(V_{1,2})$ on obtient

$$\lambda_3 \Delta a_9^7 = \lambda_3 a^7 \omega^3 c_1 \lambda_1 \omega^1 - c^4 \lambda_4 \omega^4 - c_6 \lambda_6 \omega^6,$$

$$\lambda_3 \Delta a_9^8 = \lambda_3 a^3 \omega^3 - c_2 \lambda_2 \omega^2 - c_5 \lambda_5 \omega^5;$$

c'est encore deux paramètres arbitraires a^7, a^8 ; donc en tout il existe $\mathfrak{U}'' = 16$ paramètres arbitraires. Les caractères du sous-système sont

$$\sigma'_1 = 7, \sigma'_2 = 5, \sigma'_3 = \dots = \sigma'_6 = 0$$

Le nombre de CARTAN

$$Q'' = 7 + 2.5 = 17 = N'',$$

donc le sous-système est involutive et tout le système en est également avec les caractères

$$S_1 = \sigma_1 + \sigma'_1 + \sigma''_1 = 50, S_2 = \sigma'_2 + \sigma''_2 = 7, S_2 = \dots = S_6 = 0.$$

Il en suit que la variété de Voss en question dépend de 7 fonctions arbitraire des deux arguments.

§ 7. En transformant les équations quadratiques nous avons souvent appliqué le prolongement partiel du système. Donc il faut démontrer que le système caractéristique du système prolongé est complètement intégrable. Or c'est presque évident, toutes les équations de PFAFF ont été différenciées et les résultats ont été annexés au système. Il reste à vérifier les formes

$$(7: 1) \quad \omega_8^2, \omega_8^5, \omega_9^i (i = 1, 2, 4, 5, 6), \Delta\lambda_i, \nabla l_{ij}^i, \Delta a_7^i (i = i \neq j), \\ \Delta a_8^j (j = 1, 3, 4, 6), \Delta a_9^8, \Delta a_9^{10},$$

Or

$$D\omega_8^2 \equiv D\omega_8^5 \equiv D\omega_9^i \equiv 0 \pmod{\omega^t, i = 1 \dots 6}$$

en vertu des équations du système.

Puis

$$D\Delta\lambda_i \equiv -[d\lambda_i, 2\omega_i^t] - 2\lambda_i \sum_{k \neq i} [\omega_i^k \omega_k^t] + \sum_k [dl_{ki}^t \omega^t] + \sum_k l_{ki}^t [\omega^t \omega_k^t] \\ \equiv -[d\lambda_i, \omega_i^t] \pmod{\omega^t}$$

Or l'équation (5: 2) nous donne

$$d\lambda_i \equiv 2\lambda_i \omega_i^t$$

donc

$$D\Delta\lambda_i \equiv 0. \pmod{\omega^t}$$

De même, on démontre la congruence à zéro des différentielles extérieures des autres formes (7:1).

§ 8. Le tableau des composants des déplacements infinitésimales du repère de la surface $\mathfrak{N}_6$ nous permet de faire quelques conclusions sur la géométrie de la surface.

Par exemple, chacune des cinq premières lignes coordonnées est située dans un plan fixe: les lignes $\omega^k = \delta_i^k$ ($i = 1, 4, 6$) sont situées dans les plans $(M, \vec{e}_i, \vec{e}_7)$, les lignes $\omega^k = \delta_j^k$ ($j = 2, 5$) dans les plans $(M, \vec{e}_j, \vec{e}_8)$.

Les surfaces à deux dimensions

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega^6 = 0$$

sont situées dans les espaces à trois dimensions (M, e_2, e_5, e_8) .

Toute la surface $\mathfrak{N}_6$ est une famille à un paramètre des sous-variétés de Voss $\mathfrak{N}_5$, déterminées par l'équation $\omega^3 = 0$ complètement intégrable.

§ 9. La variété de Voss $\mathfrak{N}_6$ admet une déformation conservant le réseau conjugué des géodésiques et le type projectif de $\mathfrak{N}_6$.

Considérons un couple des variétés de Voss $\mathfrak{N}_6, \mathfrak{N}_6^*$ du même type projectif, applicables avec conservation du réseau de géodésiques. Les deux surfaces sont déterminées par les composants $\omega_i^j, \omega_i^z \dots$ et $\omega_i^{*j}, \omega_i^{*z} \dots$ qui vérifient le système de PFAFF (1: 10, 11), (2: 2, 5), (3: 4), (4: 3, 4, 6, 7, 8), (5: 4, 7) et des équations quadratiques (I — V).

Désignons les différences des éléments correspondants des deux surfaces

$$(9: 1) \quad \overline{\omega_i^z} = \omega_i^{*z} - \omega_i^z, \quad \overline{\lambda_i \omega_i^j} = \lambda_i^* \omega_i^{*j} - \lambda_i \omega_i^j = \lambda_i \omega_i^j - \lambda_i \omega_i^j \lambda_i \omega_i^j \text{ etc.}$$

L'élément linéaire $\mathfrak{N}_6$ est

$$(9: 2) \quad ds^2 = d\overline{M}^2 (\omega^t \vec{e}_t)^2 = \sum_{i=1 \dots 6} (\omega^t)^2 + 2 \sum_{i \neq j}^{i, j=1 \dots 6} P^{ij} \omega^t \omega^j$$

où $p_{ij} = e_i e_j$ le cosinus de l'angle des vecteurs e_i, e_j et est invariant; comme

$$dp_{ij} = \omega_i^k p_{kj} + \omega_j^k p_{ik},$$

les formes ω_i^j sont invariantes, et l'équation (3: 4) montre que les coefficients l_{ij}^i sont invariants également.

Les différences des équations de PFAFF correspondantes sont

$$(9: 3) \quad \overline{\omega_i^7} = \overline{\lambda_i} \omega^t, \quad (i = 1, 4, 6), \quad \overline{\omega_j^8} = \overline{\lambda_j} \omega^t (j = 2, 5), \quad \overline{\omega_8^9} = \overline{\lambda_8} \omega^3,$$

$$(9: 4) \quad \overline{\omega_{i'}^7} = 0 (i' = 2, 3, 5), \quad \overline{\omega_{j'}^8} = 0, \quad (j' = 1, 3, 4, 6), \quad \overline{\omega_k^9} = 0, \quad (k=1, \dots, 6)$$

$$(9: 5) \quad \overline{\omega_7^8} = \overline{\omega_7^9} = \overline{\omega_8^7} = \overline{\omega_8^9} = 0, \quad \overline{\omega_9^7} = \overline{a_9^7} \omega^3, \quad \overline{\omega_9^8} = \overline{a_9^8} \omega^3,$$

$$(9: 6) \quad \overline{\omega_i^t} = \overline{a_i^t} \omega^t (i = 1 \dots 6), \quad \overline{\omega_j^t} = \overline{a_j^t} \omega^t (j = 1, 3, 4, 6), \quad \overline{\omega_9^{10}} = \overline{a_9^{10}} \omega^3.$$

Les équations quadratique :

1. L'équation (I₁₋₆) prend la forme

$$(9: 7) \quad (I_{\bar{1}-6}) \quad [\Delta \lambda_i \omega^i] = 0$$

où

$$(9: 8) \quad \begin{aligned} \bar{\Delta} \lambda_i &= \bar{\Delta}^* \lambda_i - \Delta \lambda_i = \bar{d} \lambda_i - 2 \bar{\lambda}_i \omega_i^i + \bar{\lambda}_i \sum_{k \neq i}^{k=1 \dots 6} l_{ki}^i (i = 1, 2, 4, 6) \\ \bar{\Delta} \lambda_3 &= \bar{d} \lambda_3 - 2 \bar{\lambda}_3 \omega_3^3 + \bar{\lambda}_3 a_3^3 \omega^3 + \bar{\lambda}_3 \sum_{k \neq 3}^{k=1 \dots 6} l_{k3}^3 \end{aligned}$$

2. Les équations quadratiques du second groupe donnent des équations finies.

En vertu de (5: 3) on a

$$(9: 9) \quad \bar{\Delta} l_{ij}^i = 0$$

donc l'équation (5: 6) donne

$$(9: 10) \quad \bar{\nabla} l_{ij}^i = - \bar{\lambda}_i a_j^i \omega^i \left(\begin{matrix} i = 1, 4, 6 \\ j = 1, \dots 6, \neq i \end{matrix} \right)$$

Les équations (II₁₋₁₅) prennent la forme

$$\bar{\lambda}_i a_j^i [\omega^i \omega^j] = 0.$$

Donc

$$(9: 11) \quad (II_{\bar{1} \dots \bar{15}}) \quad \bar{\lambda}_i^* a_j^i - \lambda_i a_j^i = 0.$$

De même, en vertu de (5: 9)

$$(9: 12) \quad \bar{\nabla} l_{2j}^i = - \bar{\lambda}_2 a_8^i \omega^2, \quad \bar{\nabla} l_{5j}^i = - \bar{\lambda}_5 a_8^i \omega^5$$

et le (II₁₆₋₂₄) donne

$$(9: 13) \quad (II_{\bar{16} \dots \bar{24}}) \quad \bar{\lambda}_2^* a_8^i = \lambda_2 a_8^i, \quad \bar{\lambda}_5^* a_8^i = \lambda_5 a_8^i$$

3. Les équations (5: 13), (5: 15) nous donnent

$$(9: 14) \quad \bar{\Delta} a_j^i = \bar{d} a_j^i + \bar{a}_j^i \sum_{k \neq j}^{k=1 \dots 6} l_{kj}^i \omega^k - \sum_{k \neq j}^{k=1 \dots 6} l_{kj}^i \bar{a}_7^k$$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta a}_8^j &= \overline{da}_8^j + \overline{a}_8^j \sum_{k \neq j}^{k=1 \dots 6} l_{kj}^j \omega^k - \sum_{k \neq j}^{k=1, 3, 4, 6} l_{kj}^j \overline{a}_8^k \\ (9: 15) \quad \overline{\Delta a}_9^{10} &= \overline{da}_9^{10} - \overline{a}_9^{10} \omega_8^3 - \overline{a}_9^{10} \overline{a}_9^3 \omega^3 + \overline{a}_9^{10} \sum_{k \neq 8}^{k=1 \dots 6} l_{k8}^3 \omega^k \end{aligned}$$

et le sous-système (III₁₋₁₁) donne

$$[\overline{\Delta a}_i^j \omega^i] = 0 \quad (i = 1 \dots 6)$$

$$(III_{\overline{1} \dots \overline{11}}) \quad [\overline{\Delta a}_8^j \omega^j] = 0 \quad (j = 1, 3, 4, 6)$$

$$[\overline{\Delta a}_9^{10} \omega^3] = 0$$

4. Comme

$$\overline{\Delta l}_{25}^5 = 0, \quad \overline{\Delta l}_{52}^2 = 0,$$

le sous-système (IV_{1, 2}) prend la forme

$$(IV_{\overline{1}, \overline{2}}) \quad [\overline{\lambda}_2 \omega_8^5, \omega^2] = 0, \quad [\overline{\lambda}_5 \omega_8^2, \omega^5] = 0$$

5. Les équations (5: 17) donnent

$$\overline{\Delta a}_9^7 = \overline{da}_9^7 - \overline{a}_9^7 \omega_9^3, \quad \overline{\Delta a}_9^8 = \overline{da}_9^8 - \overline{a}_9^8 \omega_9^3$$

et les équations (V_{1, 2}) prennent la forme

$$(V_{\overline{1}, \overline{2}}) \quad \left\{ \begin{aligned} [\overline{\Delta a}_9^7 \omega^8] &= [\overline{\lambda}_1 \omega_9^1, \omega^1] + [\overline{\lambda}_4 \omega_9^4, \omega^4] + [\overline{\lambda}_6 \omega_9^6, \omega^6] \\ [\overline{\Delta a}_9^8 \omega^3] &= [\overline{\lambda}_2 \omega_9^2, \omega^2] + [\overline{\lambda}_5 \omega_9^5, \omega^5]. \end{aligned} \right.$$

Enfin, en vertu de $\Delta_{ij}^j = 0$ les équations (V₃₋₇) prennent la forme

$$(V_{\overline{3} \dots \overline{7}}) \quad [\overline{\lambda}_3 \omega_9^j, \omega^3] = 0 \quad (j = 1, 2, 4, 5, 6)$$

§ 10. Etude des relations finis.

Groupe premier contient la relation (9: 11)

$$(II_{\overline{1} \dots \overline{15}}) \quad \begin{aligned} \lambda_i^* a_i^j &= \lambda_i a_i^j, & i &= 1, 4, 6 \\ & & j &= 1 \dots 6j \neq i \end{aligned}$$

il en suit

$$\frac{a_i^j}{a_i^i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i^*} = \varphi$$

Comme les indices i et j prennent leurs valeurs indépendamment, le rapport μ de leurs grandeurs n'en dépend pas.

Donc

$$(10:1) \quad \lambda_i^* = \frac{1}{\varphi} \lambda_i, \quad a_i^j = \varphi a_7^j \begin{pmatrix} i = 1, 4, 6 \\ j = 1 \dots 6 \end{pmatrix}$$

En différenciant les logarithmes de chaque membre des égalités (10:1), on obtient en vertu de

$$\frac{\Delta \lambda_i^*}{\lambda_i^*} - \frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} + d \text{ en } \varphi = 0$$

$$\frac{\Delta a_i^j}{a_i^j} - \frac{\Delta a_7^j}{a_7^j} = \sum_{k=1 \dots 6}^{k \neq j} l_{kj}^i \left(\frac{a_7^k}{a_7^i} - \frac{a_7^k}{a_7^j} \right) \omega^k + d \text{ en } \varphi$$

Ici en vertu de (10:1) la parenthèse devient nul; comme en vertu de de (I₁₋₆), (I₁₋₆), $\Delta \lambda_i$, $\Delta \lambda_i^*$ ne dépendent que de ω^i et en vertu de (III₁₋₁₀), (III₁₋₁₀) ne dépendent que de ω^i , la différentielle d en φ est égale à zero.

Ainsi

$$(10:2) \quad \varphi = \text{const}, \quad \Delta \lambda_i^* = \frac{1}{\varphi} \Delta \lambda_i, \quad \Delta a_7^j = \varphi a_7^j$$

et les équations (I_{1, 4, 6}) et (III_{1, ... 11}) sont vérifiées.

Le second groupe contient les relations (9:13).

$$(II_{16-24}) \quad \begin{aligned} \lambda_2^* a_8^j &= \lambda_2 a_8^j \\ \lambda_5^* a_9^j &= \lambda_5 a_9^j \end{aligned} \quad (j = 1, 3, 4, 6)$$

Il en suit

$$\frac{a_8^j}{a_8^i} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2^*} = \frac{\lambda_5}{\lambda_5^*} = \psi$$

ou

$$(10: 3) \quad \lambda_i = \frac{1}{\psi} \lambda_i (i = 2, 5) \quad a^*_j = \psi a^j_j (j = 1, 3, 4, 6)$$

En dérivant logarithmiquement deux membres de la première équation, on obtient

$$(10: 4) \quad \psi = \text{const} \quad \Delta \lambda^*_i = \frac{1}{\psi} \Delta \lambda_i \quad (i = 2, 5)$$

La seconde équation à l'aide de (5: 15) donne

$$(10: 5) \quad \left(\frac{\Delta a^*_8}{\psi} - \Delta a^j_8 \right) + l^j_{2j} \left(\frac{\omega^2_8}{\psi} - \omega^2_8 \right) + l^j_{5j} \left(\frac{\omega^5_8}{\psi} - \omega^5_8 \right) = 0.$$

Ici la première parenthèse en vertu de (III₁₋₁₀) ne dépend que de ω^j ($j = 1, 3, 4, 6$); tandis que en vertu de (IV_{1, 2}) en transformant à l'aide de la première équation (10: 3), on obtient

$$\left[\frac{\omega^5_8}{\psi} - \omega^5_8, \omega^2 \right] = 0, \quad \left[\frac{\omega^2_8}{\psi} - \omega^2_8, \omega^5 \right] = 0.$$

Ainsi la seconde et la troisième parenthèses (10: 5) ne dépendent que de ω^5 et de ω^2 conformément. Donc, chacune de trois parenthèses est égale à zéro

$$(10: 6) \quad \Delta a^*_j = \psi \Delta a^j_8 \quad (j = 1, 3, 4, 6)$$

$$(10: 7) \quad \omega^2_8 = \psi \omega^2_8, \quad \omega^5_8 = \psi \omega^5_8$$

L'équation (10: 6) et la seconde de 10: 4) se vérifient identiquement en vertu de 10: 3) et $\psi = \text{const}$; elles réduisent à l'identité (I_{2, 5}) et (III₇₋₁₀).

Les équations (10: 7) sont complètement intégrables et vérifient les équations quadratiques (IV_{1, 2}).

§ 11. *Le théorème d'existence.*

Ainsi, au-delà des équations finies

$$\lambda^*_i = \frac{1}{\varphi} \lambda_i (i = 1, 4, 6), \quad \lambda^*_j = \frac{1}{\psi} \lambda_j (j = 2, 5)$$

$$a^*_i = \varphi a^i_i (j = 1 \dots 6), \quad a^*_j = \psi a^j_j (j = 1, 3, 4, 5)$$

et une série des équations de PFAFF, y compris les équations complètement intégrables (10: 7), il reste pour déterminer la déformation $\mathfrak{NC}_6^*$ neuf équations quadratiques

$$\begin{aligned} & \text{(III}_{\overline{\text{II}}}) \quad [\overline{\Delta\lambda_3}\omega^3] = 0 \text{ (I}_{\overline{3}}), \quad [\overline{\Delta a_9^{10}}\omega^3] = 0 \\ & \text{(V}_{\overline{\text{I}}, \overline{2}}) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\overline{\Delta a_9^7}\omega^3] = [\overline{\lambda_1}\omega_9^1, \omega^1] + [\overline{\lambda^4}\omega_9^4\omega^4] + [\overline{\lambda_6}\omega_9^6, \omega^6] \\ [\overline{\Delta a_9^8}\omega^3] = [\overline{\lambda_2}\omega_9^2, \omega^2] + [\overline{\lambda_5}\omega_9^5, \omega^5] \end{array} \right. \\ & \text{(V}_{\overline{3}} \dots \overline{7}) \quad [\overline{\lambda_3}\omega_j^j\omega^3] = 0 \quad (j = 1. 2. 4. 5. 6). \end{aligned}$$

Il est évident que les deux premières équations sont involutives. Le système $(\text{V}_{\overline{\text{I}} \dots \overline{7}})$ contient $\sigma_1 = 7$ équations quadratiques et 9 formes caractéristiques $\overline{\Delta a_9^7}$, $\overline{\Delta a_9^8}$ et $\overline{\omega_j^j} (j = 1. 2. 4. 5. 6)$. En appliquant le lemme de CARTAN on obtient

$$(11: 1) \quad \overset{*}{\lambda_3}\overset{*}{\omega_j^j} = \lambda_3\omega_j^j + \overset{*}{a_j^j}\omega^3.$$

Comme la première variété est donnée, les formes ω_j^j sont connues; on peut les prendre de la seconde équation (6: 10)

$$\lambda_3\omega_j^j = b_j\omega^j + c_j\omega^3$$

En portant l'expression

$$(11: 2) \quad \overset{*}{\lambda_3}\overset{*}{\omega_j^j} = b_j\omega^j + (\overset{*}{a_j^j} + c_j)\omega^3 \quad (j = 1. 2. 4. 5. 6)$$

dans les équations $(\text{V}_{\overline{\text{I}}, \overline{2}})$, on obtient

$$\begin{aligned} & \overset{*}{\lambda_3}\overline{\Delta a_9^7} = -(\overset{*}{\lambda_1}\overset{*}{a_9^1} + \overset{*}{\lambda_{[1}\lambda_{3]}})\omega' - (\overset{*}{\lambda_4}\overset{*}{a_9^4} + \overset{*}{\lambda_{[4}\lambda_{3]}})\omega^4 - \\ & (11: 3) \quad -(\overset{*}{\lambda_6}\overset{*}{a_9^6} + \overset{*}{\lambda_{[6}\lambda_{3]}})\omega^6 + \overset{*}{a_9^7}\omega^3 \\ & \overset{*}{\lambda_3}\overline{\Delta a_9^8} = -(\overset{*}{\lambda_2}\overset{*}{a_9^2} + \overset{*}{\lambda_{[2}\lambda_{3]}})\omega^2 - (\overset{*}{\lambda_5}\overset{*}{a_9^5} + \overset{*}{\lambda_{[5}\lambda_{3]}})\omega^5 + \\ & + \overset{*}{a_9^8}\omega^3 \end{aligned}$$

Les développements (11: 2, 3) contiennent $N = 7$ paramètres arbitraires

$$\overset{*}{a_9^7}, \overset{*}{a_9^8} \text{ et } \overset{*}{a_j^j} \quad (j = 1. 2. 4. 5. 6)$$

Comme les caractères du sous-système $(V_{\bar{1} \dots \bar{7}})$ sont

$$\sigma_1 = 7, \quad \sigma_2 = \dots = \sigma_6 = 0.$$

Le nombre de CARTAN $Q = 7 = N$; le sous-système est involutive et tout le système également avec les caractères

$$S_1 = 9, \quad S_2 = \dots = S_6 = 0.$$

Ainsi la surface de Voss $\mathfrak{N}_6$ du type projectif considéré admet la déformation continue en surface de Voss de même type avec neuf fonctions arbitraires d'un argument.

Il est remarquable, que ces neuf fonctions arbitraires sont liées à la forme ω^3 . Si l'on pose

$$\omega^3 = 0,$$

c.à.d. si l'on considère une sous-variété $\mathfrak{N}_5$ de la famille à un paramètre des variétés $(\mathfrak{N}_5)$ qui compose la variété $\mathfrak{N}_6$, les équations $(I_{\bar{3}})$, $(III_{\bar{11}})$, $(V_{\bar{1} \dots \bar{7}})$ disparaissent. Chaque $\mathfrak{N}_5$ est située dans un $\mathcal{E}_7$ euclidien déterminé par les vecteurs $\vec{e}_i, \vec{e}_\alpha (i \neq 3, \alpha \neq 9)$. La déformation de la sous-variété $\mathfrak{N}_5$, forcée par la déformation de $\mathfrak{N}_6$ est dégénérée en l'extension des vecteurs $\vec{e}_7, \vec{e}_8$ en φ et ψ fois conformement, c.à.d. en transformation centro affine de l'espace $\mathcal{E}_7$.