Su certi sistemi ∞^1 di omografie

PIERO BUZANO (a Torino)

A Enrico Bompiani in occasione del suo Giubileo scientifico

Sunto. - Si dimostra che se y è un punto della traiettoria di x in un sistema ∞^1 di omografie (contenente l'identità) e se la stessa omografia che porta x in y fa corrispondere le relative tangenti, il sistema è un gruppo oppure è formato da omologie con lo stesso centro.

1. Scopo di questo breve lavoro (*) è di determinare i sistemi ∞^1 di omografie di uno spazio S_{n-1} — contenenti l'identità — che godono di una proprietà ovviamente spettante ai G_1 di omografie: risulterà che, fatta eccezione per i sistemi ∞^1 di omologie con lo stesso centro, la proprietà stessa è caratteristica dei G_1 .

Scriveremo le equazioni di un'omografia del sistema nella forma consueta:

$$(1) \quad y^i = a_j^i(t)x^j$$

dove $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ sono coordinate proiettive omogenee di punti corrispondenti. Riassumeremo le (1) nell'equazione matriciale:

$$(1') \quad y = A(t)x$$

Supponendo che l'identità si trovi nel sistema considerato per $t=0$, porremo la condizione:

$$(2) \quad A(0) = I_n$$

essendo I_n la matrice identica di ordine n .

(*) Dello stesso argomento, ma limitatamente al piano ($n=3$), mi sono occupato nei lavori:

Studio di alcuni sistemi ∞^1 di affinità piane, «Rend. Ist. Lomb.», vol. LXV (1932)

Studio di alcuni sistemi ∞^1 di omografie piane, «Atti Acc. Sc. Torino», vol. 80 (1945).

I procedimenti seguiti in dette note sono piuttosto laboriosi e non si prestano all'estensione al caso di n qualsiasi: perciò ho seguito ora una via diversa, giungendo comunque a concludere che quei risultati si possono estendere agli iperspazi e confermando così pienamente l'opinione allora espressa dal prof. E. BOMPIANI a cui con riconoscenza dedico questo lavoro.

La proprietà che vogliamo imporre alle omografie del sistema consisterà nel richiedere che, qualunque sia x , il punto y che gli corrisponde in $A(t)$ descriva, al variare di t , una curva le cui tangenti nei punti x e y si corrispondano pure in $A(t)$.

Tale proprietà si esprime scrivendo che al punto $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}$ la $A(t)$ fa corrispondere un punto della tangente in y , ossia:

$$(3) \quad A(t) \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = \lambda y + \mu \frac{dy}{dt}$$

Se poniamo:

$$(4) \quad C = \left(\frac{dA}{dt}\right)_{t=0}$$

ossia:

$$(4') \quad c_j^i = \left(\frac{da_j^i}{dt}\right)_{t=0}$$

la (3) diviene:

$$(5) \quad A(t)Cx = \lambda A(t)x + \mu \frac{dA}{dt}x.$$

Se indichiamo con $B(t)$ la derivata logaritmica sinistra di $A(t)$:

$$(6) \quad B(t) = A^{-1}(t) \frac{dA}{dt}$$

ovvero:

$$(7) \quad \frac{dA}{dt} = A(t)B(t)$$

la (5), premoltiplicando i due membri per $A^{-1}(t)$, si muta nella:

$$(8) \quad Cx = \lambda x + \mu B(t)x$$

ovvero nel sistema:

$$(8') \quad c_j^i x^j = \lambda x^i + \mu b_j^i(t) x^j$$

Le equazioni (2), (4), (6), (8) traducono completamente il problema: si tratta di trovarne le soluzioni.

A tale scopo osserviamo anzitutto che risolvendo due delle (8') rispetto

a λ e μ , si ricavano per queste espressioni del tipo:

$$(9) \quad \lambda = \frac{l(x)}{p(x)}, \quad \mu = \frac{m(x)}{p(x)}$$

dove $l(x)$, $m(x)$, $p(x)$ sono polinomi omogenei di 2° grado nelle x^i . Sostituendo le (9) in (8) si ha:

$$(10) \quad pCx = lx + mB(t)x$$

risulta allora che i punti ove $m(x) = 0$ senza che si annulli insieme $p(x)$ sono uniti per l'omografia C : perciò $m(x)$ e $p(x)$ devono avere un divisore comune almeno di 1° grado il quale, come risulta dalla (10), deve dividere anche $l(x)$. Supposto perciò di aver già soppresso nella (10) i fattori comuni ai due membri, restano possibili due alternative:

I) che nella (10) l , m , p siano polinomi omogenei di 1° grado nelle x^i ;

II) che nella (10) l , m , p siano indipendenti dalle x^i (e quindi funzioni solo di t).

2. Esaminiamo l'alternativa I).

Dalla (10) risulta che i punti dell'iperpiano $m(x) = 0$ sono uniti per C e quindi C è un'omologia. Risulta pure che i punti dell'iperpiano $p(x) = 0$ sono uniti per $B(t)$ e quindi anche le $B(t)$ sono omologie. Dalla (10) risulta ancora che se x_0 è il centro di C esso è pure *centro comune a tutte le omologie $B(t)$* (indipendentemente dal fatto che C sia o no speciale) (*).

Possiamo ora provare che anche *le $A(t)$ sono un sistema ∞^1 di omologie con lo stesso centro* (e quindi la proprietà richiesta è ovviamente soddisfatta in quanto le traiettorie $y(t)$ sono rette per il centro). Assunto il comune centro di omologia come punto fondamentale $(0, 0, 0, \dots, 1)$ si può esprimere $B(t)$ mediante sottomatrici nel seguente modo (con simbolismo evidente):

$$(11) \quad B(t) = \left[\begin{array}{c|c} bI_{n-1} & 0 \\ \hline b^n & b_n^n \end{array} \right]$$

(*) Infatti essendo punti corrispondenti in C allineati con il centro x_0 , avremo:

$$Cx = \alpha x_0 + \beta x$$

e sostituendo nella (10):

$$B(t)x = \frac{p}{m} \alpha x_0 + \left(\frac{p}{m} \beta - l \right) x$$

cosicchè anche x e $B(t)x$ sono allineati con x_0 .

le $n+1$ funzioni $b(t)$, $b_1^n(t)$, $b_2^n(t)$, ... $b_n^n(t)$ che vi compaiono si intenderanno date ad arbitrio e, avuto riguardo a (2), (4), (6), si assumerà:

$$C = B(0)$$

A sua volta $A(t)$ si può esprimere mediante sottomatrici nel seguente modo:

$$(12) \quad A(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{a}_n^{\cdot} \\ \hline \mathbf{a}_n^{\cdot} & a_n^n \end{array} \right]$$

Da (11) e (12) segue (non sommare rispetto ad n):

$$(13) \quad AB = \left[\begin{array}{c|c} b\mathbf{a} + \mathbf{a}_n^{\cdot} b^n & b_n^n \mathbf{a}_n^{\cdot} \\ \hline b\mathbf{a}_n^{\cdot} + b^n a_n^n & b_n^n a_n^n \end{array} \right]$$

da (12) e (13) si ricava che l'equazione (7) a cui deve soddisfare $A(t)$ si scinde nelle seguenti:

$$(14.1) \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = b\mathbf{a} + \mathbf{a}_n^{\cdot} b^n.$$

$$(14.2) \quad \frac{d\mathbf{a}_n^{\cdot}}{dt} = b_n^n \mathbf{a}_n^{\cdot}$$

$$(14.3) \quad \frac{d\mathbf{a}_n^{\cdot}}{dt} = b\mathbf{a}_n^{\cdot} + b^n a_n^n$$

$$(14.4) \quad \frac{da_n^n}{dt} = b_n^n a_n^n$$

tenuto conto delle condizioni iniziali (2) la (14.2) dà subito $\mathbf{a}_n^{\cdot} = 0$ cosicché la (14.1) si riduce a:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = b\mathbf{a}$$

da cui, sempre tenendo conto delle condizioni iniziali, risulta immediatamente:

$$\mathbf{a} = e_0^{\int_0^t b(t)dt} \mathbf{I}_{n-1} = \alpha \mathbf{I}_{n-1};$$

da (14.4) si ha poi:

$$a_n^n = e_0 \int_0^t b_n^n dt$$

e infine da (14.3) si ricava con quadrature a^n . In definitiva risulta che la matrice $A(t)$ assume la struttura:

$$(15) \quad A(t) = \left[\begin{array}{c|c} a I_{n-1} & 0 \\ \hline a^n & a_n^n \end{array} \right]$$

che è perfettamente analoga alla struttura (11) di $B(t)$: anzi l'arbitrarietà delle funzioni $b, b_1, \dots, b_n^n$ si traduce nell'arbitrarietà delle $a, a_1^n, \dots, a_n^n$ (fatte salve le condizioni iniziali). Resta così dimostrato che l'alternativa I) conduce unicamente a sistemi ∞^1 di omologie con lo stesso centro.

3. Esaminiamo ora l'alternativa II).

Se nella (10) l, m, p sono funzioni solo di t , ciò vuol dire che nella (8) λ, μ sono funzioni solo di t ; pertanto, dovendo la (8) sussistere per qualsiasi x , avremo:

$$C = \lambda I_n + \mu B(t)$$

da cui:

$$B(t) = \frac{1}{\mu} C - \frac{\lambda}{\mu} I_n$$

e sostituendo quest'espressione di $B(t)$ nell'equazione (7) otterremo:

$$(16) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{\mu} AC - \frac{\lambda}{\mu} A$$

Si tratta ora di determinare le omografie la cui matrice $A(t)$ soddisfa l'equazione (16) dove C è una matrice costante e λ, μ sono funzioni di t soggette solo alle condizioni:

$$\mu(0) = 1, \quad \lambda(0) = 0$$

affinchè possa valere la (4).

Si può semplificare notevolmente il problema osservando che, pur supponendo fissato il riferimento proiettivo in S_{n-1} , un sistema ∞^1 di omografie non determina la funzione $A(t)$, poichè il sistema stesso rimane

inalterato di fronte alle trasformazioni:

$$(17) \quad \tau = \varphi(t)$$

$$(18) \quad A(t) = \rho(t)\bar{A}(\tau)$$

con $\rho(0) = 1$ e $\varphi(0) = 0$ affinché la (2) assuma la forma:

$$(19) \quad \bar{A}(0) = I_n$$

Eseguite le trasformazioni (17) e (18), l'equazione (16) si muta nella:

$$(20) \quad \rho(t)\varphi'(t) \frac{d\bar{A}}{d\tau} + \rho'(t)\bar{A}(\tau) = \frac{1}{\mu} \rho(t)\bar{A}C - \frac{\lambda}{\mu} \rho(t)\bar{A}$$

ora si può disporre delle funzioni $\rho(t)$ e $\varphi(t)$ in modo che sia:

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{\lambda}{\mu} \quad \varphi' = \frac{1}{\mu}$$

e la (20) si ridurrà alla forma più semplice:

$$(21) \quad \frac{d\bar{A}}{d\tau} = \bar{A}(\tau)C$$

La soluzione della (21) che soddisfa alla condizione iniziale (19) è ovviamente:

$$(22) \quad \bar{A}(\tau) = e^{C\tau}$$

quindi, nell'alternativa (II), con opportuna normalizzazione e scelta del parametro, la matrice di un'omografia del sistema considerato assume la forma (22). Ne deriva che:

$$\bar{A}(\tau_2)\bar{A}(\tau_1) = \bar{A}(\tau_1 + \tau_2)$$

e quindi il sistema considerato non è altro che un gruppo a un parametro G_1 di omografie.