Esistenza e unicità degli integrali di un'equazione alle derivate parziali della forma

$$X_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n, z).$$

Memoria di LUIGI MERLI (a Firenze).

Sunto. - Si dimostra un criterio di esistenza e di unicità degli integrali di un'equazione alle derivate parziali, come indicato nel titolo della memoria.

1. Un'equazione differenziale ordinaria, del primo ordine, in una sola incognita $y(x)$ e di forma normale si scrive

$$(1) \quad Dy(z) = f(x, y(x)),$$

dove $D = \frac{d}{dx}$ è il *derivatore* rispetto alla variabile x e $f(x, y)$ è una data funzione in un certo campo del piano (x, y) .

Invece di D consideriamo un operatore più generale, quale il *pluriderivatore* ⁽¹⁾ $\mathfrak{D}_n \equiv X_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}$, essendo $X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, \dots, x_n)$, assegnate funzioni in un determinato dominio rettangolare dello spazio ad n dimensioni e, parallelamente all'equazione precedente, consideriamo un'equazione alle derivate parziali della forma

$$(1_n) \quad \mathfrak{D} z(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, z(x_1, \dots, x_n)).$$

Scopo di questo lavoro è di *indicare una estensione all'equazione (1_n) del ben noto teorema per l'equazione (1) su l'esistenza e l'unicità della soluzione soddisfacente ad una certa condizione iniziale* ⁽²⁾. Per la dimostrazione sfrutto una interessante scomposizione in prodotto di operatori elementari dei pluriderivatori $\mathfrak{D}_n$ ⁽³⁾, scomposizione che permette di ridurre l'equazione (1_n) ad una equazione integrale. Ciò rende possibile l'applicazione del classico metodo

⁽¹⁾ A. MAMBRIANI, *La pluderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali*, « Rivista Mat. Univ. », Parma, 6, 321-348 (1955).

⁽²⁾ G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Zanichelli (Bologna), P. I, pag. 7 (1948).

⁽³⁾ B. MANFREDI, *Decomposizione in prodotto di operazioni elementari delle espressioni alle derivate parziali, del primo ordine e totalmente lineari*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (9), 4, 381-390 (1949). *Su la genesi dei pluriderivatori*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), 11, 538-543 (1956).

delle approssimazioni successive, con conseguente costruzione effettiva della soluzione per la classe molto più vasta di equazioni alle derivate parziali (1_n), (4). Mi limito qui, per semplicità, al caso di due sole variabili indipendenti, cioè al caso di un'equazione alle derivate parziali di primo ordine, del tipo

$$(2) \quad \mathfrak{D}z \equiv X(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y, z)$$

dove $z(x, y)$ è la funzione incognita e $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $f(x, y, z)$ sono funzioni assegnate dei loro argomenti. Le conclusioni che si ottengono sono però estendibili, senza difficoltà, alle equazioni più generali (1_n).

Nel seguito dico che « un biderivatore $\mathfrak{D} = X(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ è univoco, continuo e non nullo in un dominio rettangolare R del piano (x, y) » quando i coefficienti $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ di $\mathfrak{D}$ sono univoci in R , continui in R e non contemporaneamente nulli in ciascun punto di R [è cioè $|X(x, y)| + |Y(x, y)| > 0$ per $(x, y) \in R$].

Mi propongo di dimostrare il seguente

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ:

Sia data l'equazione alle derivate parziali (2), con il biderivatore $\mathfrak{D}$ univoco, continuo e non nullo in un dominio rettangolare R del piano (x, y) ; sia (x_0, y_0) un punto interno ad R in cui è $X(x_0, y_0) \neq 0$; siano $a > 0$ e $b > 0$ le massime costanti positive tali che nel rettangolo R_0 , $a, b \equiv \{x_0 \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, risulti $X(x, y) \neq 0$; sia infine $\varphi(y)$ una prefissata funzione continua e derivabile nell'intervallo $(y_0 - b, y_0 + b)$, verificante una limitazione della forma $|\varphi(y) - z_0| \leq k'$, con $k' > 0$.

Se il rapporto $Y(x, y)/X(x, y)$ nel rettangolo R_0 , a, b , è lipschitziano rispetto ad y , uniformemente rispetto ad x ;

se la funzione $f(x, y, z)$ nel parallelepipedo P_0 , $a, b, k \equiv \{x_0 \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b, z_0 - k \leq z \leq z_0 + k\}$, con $k > k'$, è univoca e continua;

se, infine, il rapporto $f(x, y, z)/X(x, y)$ nel parallelepipedo P_0 , a, b, k è lipschitziano rispetto a z , uniformemente rispetto ad (x, y) ;

allora esistono due costanti a' e b' , con $0 < a' < a$ e $0 < b' < b$, tali che nel rettangolo $r_0 \equiv \{x_0 \leq x \leq x_0 + a', y_0 - b' \leq y \leq y_0 + b'\}$ l'equazione (2) ha una soluzione $z = z(x, y)$ ed una sola soddisfacente alla condizione iniziale

$$(3) \quad z(x_0, y) = \varphi(y).$$

2. La dimostrazione del teorema è basata, come abbiamo detto, sulla riduzione della (2) ad una equazione integrale servendoci di una scomposizione dei pluriderivatori, che ci proponiamo ora di richiamare.

(4) loc. cit. in (4), pag. 323.

Sotto le ipotesi enunciate nel teorema, l'equazione differenziale ordinaria $Dy(x) = Y(x, y)/X(x, y)$, possiede una ed una sola curva integrale passante per il punto (x_0, y_0) . Ne indicheremo l'integrale generale con $y = \gamma(x, c)$, con c costante arbitraria. Se qui ricaviamo c si abbia $c = \omega(x, y)$. Con le due funzioni $\gamma(x, y)$ ed $\omega(x, y)$ formiamo le sostituzioni $\left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \gamma(x, y) \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \omega(x, y) \end{smallmatrix} \right\}$ così definite:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \gamma(x, y) \end{smallmatrix} \right\} z(x, y) = z(x, \gamma(x, y)), \quad \left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \omega(x, y) \end{smallmatrix} \right\} z(x, y) = z(x, \omega(x, y)).$$

Il biderivatore $D = X(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$, si scompone allora nel seguente modo:

$$(4) \quad \mathfrak{D} \equiv X(x, y) \underbrace{\left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \omega(x, y) \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \gamma(x, y) \end{smallmatrix} \right\}}_{\leftarrow},$$

dove la sottolineatura orientata indica l'ordinato susseguirsi da destra verso sinistra dei quattro operatori indicati e cioè la sostituzione $\left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \gamma(x, y) \end{smallmatrix} \right\}$, il derivatore $\frac{\partial}{\partial x}$, la sostituzione $\left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \omega(x, y) \end{smallmatrix} \right\}$, il moltiplicatore $X(x, y)$.

Tale scomposizione si verifica subito nel seguente modo. È

$$\begin{aligned} X(x, y) \underbrace{\left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \omega(x, y) \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \gamma(x, y) \end{smallmatrix} \right\}}_{\leftarrow} z(x, y) &= X(x, y) \left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \omega(x, y) \end{smallmatrix} \right\} \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial x} z(x, \gamma(x, y)) \right\}}_{\leftarrow} = \\ &= X(x, y) \underbrace{\left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \omega(x, y) \end{smallmatrix} \right\}}_{\leftarrow} [z_1(x, \gamma(x, y)) + \gamma_1(x, y) z_2(x, \gamma(x, y))], \end{aligned}$$

avendo indicato per brevità con $z_1(x, y)$ e $z_2(x, y)$ le derivate parziali rispetto ad x e ad y di $z(x, y)$ e con $\gamma_1(x, y)$ la derivata, rispetto ad x , di $\gamma(x, y)$. Quindi:

$$\begin{aligned} X(x, y) \underbrace{\left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \omega(x, y) \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \gamma(x, y) \end{smallmatrix} \right\} \right\}}_{\leftarrow} z(x, y) &= X(x, y) [z_1(x, \gamma(x, y, \omega(x, y))) + \\ &+ \gamma_1(x, \omega(x, y)) z_2(x, \gamma(x, \omega(x, y)))]. \end{aligned}$$

Ma quest'ultimo membro, tenuto conto che è $y = \gamma(x, \omega(x, y))$, si scrive: $X(x, y) [z_1(x, y) + \gamma_1(x, \omega(x, y)) z_2(x, y)]$, e poichè $\gamma(x, c)$ è soluzione dell'equazione $Dy(x) = Y(x, y)/X(x, y)$, risulta $\gamma_1(x, c) = Y(x, \gamma(x, c))/X(x, \gamma(x, c))$. Quindi $\gamma_1(x, \omega(x, y)) = Y(x, \gamma(x, \omega(x, y)))/X(x, \gamma(x, \omega(x, y)))$ ed anche in virtù della relazione $y = \omega(x, \gamma(x, y))$,

$$\gamma_1(x, \omega(x, y)) = Y(x, y).$$

Si conclude quindi:

$$\begin{aligned} X(x, y) \left\{ \frac{y}{\omega(x, y)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} \frac{y}{\gamma(x, y)} \right\} z(x, y) &= X(x, y) [z_1(x, y) + \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} z_2(x, y)] = \\ &\longleftarrow \\ &= X(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = \left\{ X(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right\} z(x, y) = \mathfrak{D}z(x, y). \end{aligned}$$

3 Ci serviremo ora della (4) per la riduzione della (2) ad equazione integrale.

Infatti la scomposizione di $\mathfrak{D}$ data dalla (4) ci permette di scrivere la (2) nel seguente modo:

$$X(x, y) \left\{ \frac{y}{\omega(x, y)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} \frac{y}{\gamma(x, y)} \right\} z(x, y) = f(x, y, z)$$

$\longleftarrow$

e dividendo ambo i membri per $X(x, y)$, sempre non nullo nel rettangolo R_0 a, b ,

$$\left\{ \frac{y}{\omega(x, y)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} \frac{y}{\gamma(x, y)} \right\} z(x, y) = F(x, y, z(x, y)),$$

$\longleftarrow$

avendo posto per brevità $F(x, y, z) = f(x, y, z)/X(x, y)$. Applicando ad ambo i membri la sostituzione $\left\{ \frac{y}{\gamma(x, y)} \right\}$, tenuto conto che è

$$\left\{ \frac{y}{\gamma(x, y)} \right\} \left\{ \frac{y}{\omega(x, y)} \right\} = 1,$$

si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{y}{\gamma(x, y)} \right\} z(x, y) = F(x, \gamma(x, y), z(x, \gamma(x, y))).$$

$\longleftarrow$

Di qui, con una integrazione indefinita, rispetto alla variabile x , di ambo i membri, risulta

$$\left\{ \frac{y}{\gamma(x, y)} \right\} z(x, y) = \Omega(y) + \int_{x_0}^x F(\xi, \gamma(\xi, y), z(\xi, \gamma(\xi, y))) d\xi,$$

dove $\Omega(y)$ è una funzione (derivabile) arbitraria di y .

Applicando infine ad ambo i membri la sostituzione $\left\{ \frac{y}{\omega(x, y)} \right\}$, si ottiene

$$z(x, y) = \Omega(\omega(x, y)) + \int_{x_0}^x F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), z(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))) d\xi.$$

Osserviamo ora che, essendo

$$z(x_0, y) = \Omega(\omega(x_0, y)),$$

la condizione iniziale $z(x_0, y) = \varphi(y)$, implica che sia

$$\Omega(\omega(x_0, y)) = \varphi(y),$$

ed anche

$$\Omega(\omega(x_0, \gamma(x_0, y))) = \varphi(\gamma(x_0, y)).$$

Ma $\omega(x_0, \gamma(x_0, y)) = y$, onde si dovrà avere

$$\Omega(y) = \varphi(\gamma(x_0, y)),$$

e quindi

$$\Omega(\omega(x, y)) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))).$$

Pertanto l'equazione (2) diventa

$$(5) \quad z(x, y) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^x F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), z(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))) d\xi,$$

e questa equazione integrale è equivalente alla (2) con la condizione iniziale (3) del teorema. Infatti facendo nella (5) $x = x_0$, si ha

$$z(x_0, y) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x_0, y))), \text{ ossia } z(x_0, y) = \varphi(y).$$

Per la dimostrazione del teorema basterà quindi provare che *l'equazione integrale (5) ha una soluzione $z(x, y)$ ed una sola.*

4. Applicheremo il metodo delle approssimazioni successive.

Poniamo intanto

$$(6) \quad M = \max_{(x, y, z) \in P_0, a, b, c} F(x, y, z) = \max_{(x, y, z) \in P_0, a, b, c} f(x, y, z)/X(x, y).$$

Consideriamo poi successivamente le seguenti funzioni

$$(6_0) \quad z_0(x, y) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))),$$

$$(6_1) \quad z_1(x, y) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^x F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), z_0(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))) d\xi,$$

$$(6_2) \quad z_2(x, y) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^x F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), z_1(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))) d\xi,$$

.

$$(6_n) \quad z_n(x, y) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^x F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), z_{n-1}(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))) d\xi,$$

.

Vogliamo accertarci, in primo luogo, che le funzioni scritte abbiano una esistenza effettiva.

Osserviamo che la funzione che compare sotto il segno di integrale nella (6₁), è calcolata nei punti

$$(7) \quad (\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), z_0(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))), \begin{cases} x_0 \leq \xi \leq x \leq x_0 + a \\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b. \end{cases}$$

Ora è necessario accertare che questi punti appartengono tutti al parallelepipedo P_0 , a, b, c perchè si possa in essi calcolare la funzione $F(x, y, z) = f(x, y, z)/X(x, y)$.

Intanto, tenuto conto della (6₀), si ha:

$$z_0(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))))$$

e, tenuto conto che è

$$\omega(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) = \omega(x, y),$$

si ha:

$$z_0(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y)))$$

che è indipendente da ξ . Ora, per $x = x_0$, si ha:

$\varphi(\gamma(x_0, \omega(x_0, y))) = \varphi(y)$, quindi, per la supposta continuità della $\varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y)))$ rispetto alla x , preso una k' , con $0 < k' < k'' < k$, corrispondentemente al numero $k'' - k' > 0$, esisterà un δ' , con $0 < \delta' < a$, tale che sia

$$|\varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) - \varphi(y)| \leq k'' - k', \quad \text{per } x_0 \leq x \leq x_0 + \delta'.$$

Tenendo ora conto della limitazione supposta per $\varphi(y)$,

$$|\varphi(y) - z_0| < k', \quad \text{per } y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,$$

e quindi, sommando membro a membro,

$$|\varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - z_0| \leq k''$$

e a maggior ragione

$$(8) \quad |\varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) - z_0| \leq k'', \quad \text{per } \begin{cases} x_0 \leq x \leq x_0 + \delta' \\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b. \end{cases}$$

$$\text{È poi} \quad \gamma(x_0, \omega(x, y)) = y,$$

onde, per la continuità di $\gamma(\xi, \omega(x_0, y))$ rispetto a ξ e ad x , fissato b' , con $0 < b' < b$ esisterà un δ'' , con $0 < \delta'' < a$, tale che sia

$$|\gamma(\xi, \omega(x, y)) - y| < b - b', \quad \text{per } x_0 \leq \xi \leq x \leq x_0 + \delta'';$$

quindi, fissando y in modo che risulti

$$|y - y_0| < b',$$

ne segue

$$|\gamma(\xi, \omega(x, y)) - y| + |y_0 - y| < b,$$

e, a più forte ragione,

$$|\gamma(\xi, \omega(x, y)) - y_0| < b, \quad \text{per} \quad \begin{cases} x_0 \leq \xi \leq x \leq x_0 + \delta'' \\ y_0 - b' \leq y \leq y_0 + b'. \end{cases}$$

Pertanto, detto δ il maggiore dei due membri δ' e δ'' , i punti (7), quando risulti

$$x_0 \leq \xi \leq x \leq x_0 + \delta, \quad y_0 - b' \leq y \leq y_0 + b',$$

appartengono al parallelepipedo P_0 , a , b , k .

Per x e y verificanti queste limitazioni, dalla (6₁) tenuto conto della (6), si ha:

$$|z_1(x, y) - \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y)))| \leq \int_{x_0}^x M d\xi = M(x - x_0).$$

Aggiungendo la condizione

$$x - x_0 \leq (k - k'')/M,$$

avremo

$$|z_1(x, y) - \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y)))| < k - k'',$$

che sommata con la (8), ci dà

$$|z_1(x, y) - z_0| \leq k, \quad \text{per} \quad (x, y) \in r_0,$$

con

$$r_0 \equiv \{x_0 \leq x \leq x_0 + a', \quad y_0 - b' \leq y \leq y_0 + b'\}.$$

essendo

$$a' = \min. \{a, \delta, (k - k'')/M\}.$$

Per $(x, y) \in r_0$ la (6₂) ha significato. Infatti si ricava:

$$|z_2(x, y) - \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y)))| \leq \int_{x_0}^x M d\xi = M(x - x_0) \leq k - k'',$$

e tenuto conto della (8) si ha:

$$|z_2(x, y) - z_0| \leq k, \quad \text{per} \quad (x, y) \in r_0.$$

In generale si conclude

$$|z_n(x, y) - z_0| \leq k, \quad \text{per} \quad \begin{cases} n = 1, 2, \dots \\ (x, y) \in r_0. \end{cases}$$

Si è così ottenuto una determinata successione di funzioni

$$z_0(x, y), z_1(x, y), \dots, z_n(x, y), \dots$$

che, per la loro stessa definizione, sono tutte continue.

Dimostreremo ora che tale successione converge uniformemente verso una funzione $z(x, y)$, con $(x, y) \in r_0$.

A tale scopo consideriamo la serie

$$(9) \quad z_0(x, y) + \{z_1(x, y) - z_0(x, y)\} + \dots + \{z_n(x, y) - z_{n-1}(x, y)\} + \dots$$

e proviamo che essa è assolutamente e uniformemente convergente in r_0 .

Dalle (6₁) e (6₂) si ha:

$$(10_1) \quad |z_2(x, y) - z_1(x, y)| \leq \int_{x_0}^x |F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), z_1(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))) - \\ - F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), z_0(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))))| d\xi.$$

Per l'ipotesi fatta che $F(x, y, z)$ sia lipschitziana rispetto a z , uniformemente per $(x, y) \in r_0$, si ha, essendo $L > 0$ una conveniente costante:

$$(10_2) \quad |z_2(x, y) - z_1(x, y)| \leq L \int_{x_0}^x |z_1(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) - z_0(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))| d\xi$$

e analogamente

$$(10_3) \quad |z_3(x, y) - z_2(x, y)| \leq L \int_{x_0}^x |z_2(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) - z_1(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))| d\xi,$$

.

$$(10_n) \quad |z_n(x, y) - z_{n-1}(x, y)| \leq L \int_{x_0}^x |z_{n-1}(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) - z_{n-2}(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))| d\xi,$$

.

Cambiando ora nelle (6₀), (6₁), ..., (6_n), ... la ξ in t ,

$$z_0(x, y) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))),$$

$$z_1(x, y) = \varphi(\gamma(x, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^x F(t, \gamma(t, \omega(x, y)), z_0(t, \gamma(t, \omega(x, y)))) dt,$$

$$z_2(x, y) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^x F(t, \gamma(t, \omega(x, y)), z_2(t, \gamma(t, \omega(x, y)))) dt,$$

. ,

$$z_n(x, y) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^x F(t, \gamma(t, \omega(x, y)), z_{n-1}(t, \gamma(t, \omega(x, y)))) dt$$

.

In ambo i membri di queste uguaglianze applichiamo ora la sostituzione

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ \xi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y \\ \gamma(\xi, \omega(x, y)) \end{array} \right\}.$$

Tenuto conto che è

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ \xi \end{array} \right\} \begin{array}{l} y \\ \gamma(\xi, \omega(x, y)) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \omega(x, y) = \omega(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) = \omega(x, y), \end{array} \right.$$

si ha :

$$\begin{aligned} z_0(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) &= \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))), \\ z_1(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) &= \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^{\xi} F(t, \gamma(t, \omega(x, y)), z_0(t, \gamma(t, \omega(x, y)))) dt \\ &\dots \dots \dots \\ z_n(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) &= \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^{\xi} F(t, \gamma(t, \omega(x, y)), z_{n-1}(t, \gamma(t, \omega(x, y)))) dt \\ &\dots \dots \dots, \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Da queste segue successivamente

$$\begin{aligned} |z_1(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) - z_0(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))| &= \left| \int_{x_0}^{\xi} F(t, \gamma(t, \omega(x, y)), z_0(t, \gamma(t, \omega(x, y)))) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^{\xi} |F(t, \gamma(t, \omega(x, y)), z_0(t, \gamma(t, \omega(x, y))))| dt \leq M \int_{x_0}^{\xi} dt = M(\xi - x_0) \\ |z_2(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) - z_1(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))| &\leq \\ &\leq \int_{x_0}^{\xi} |F(t, \gamma(t, \omega(x, y)), z_1(t, \gamma(t, \omega(x, y)))) - F(t, \gamma(t, \omega(x, y)), z_0(t, \gamma(t, \omega(x, y))))| dt \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^{\xi} |z_1(t, \gamma(t, \omega(x, y))) - z_0(t, \gamma(t, \omega(x, y)))| dt \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^{\xi} M(t - x_0) dt = LM \left[\frac{(t - x_0)^2}{2} \right]_{x_0}^{\xi} = LM \frac{(\xi - x_0)^2}{2!}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (10₁), (10₂), ..., (10_n), .. si ha :

$$\begin{aligned} |z_2(x, y) - z_1(x, y)| &\leq L \int_{x_0}^x M(\xi - x_0) d\xi = LM \frac{(x - x_0)^2}{2!}, \\ &\dots \dots \dots \\ |z_n(x, y) - z_{n-1}(x, y)| &\leq L \int_{x_0}^x L^{n-2} M \frac{(\xi - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} d\xi = L^{n-1} M \frac{(x - x_0)^n}{n!}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Si conclude che la serie (9) è uniformemente convergente per $(x, y) \in r_0$ e poichè le $z_n(x, y)$ sono tutte continue, la funzione limite $z(x, y)$ è anch'essa continua.

Dimostriamo ora che la successione

$$(11) \quad f(x, y, z_0(x, y)), f(x, y, z_1(x, y)), \dots, f(x, y, z_n(x, y)), \dots$$

per $(x, y) \in r_0$, converge uniformemente, per $n \rightarrow \infty$, alla funzione $f(x, y, z(x, y))$

Infatti per la condizione di LIPSCHITZ, si ha:

$$|f(x, y, z_n(x, y)) - f(x, y, z(x, y))| \leq L |z_n(x, y) - z(x, y)|$$

e l'uniforme convergenza della (11) è così assicurata.

Sarà allora lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale nella (6_n) cioè in

$$z_n(x, y) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^x F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), z_{n-1}(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))) d\xi.$$

Per $n \rightarrow \infty$ si ha quindi:

$$z(x, y) = \varphi(\gamma(x_0, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^x F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), z(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))) d\xi$$

per $(x, y) \in r_0$.

La funzione $z = z(x, y)$ è perciò una soluzione dell'equazione integrale (5).

5. Mostriamo ora che la funzione $z(x, y)$ è l'unica soluzione dell'equazione (5).

Infatti, se $\bar{z}(x, y)$ fosse un'altra soluzione della (5), cioè se fosse

$$\bar{z}(x, y) = \varphi(\xi(x_0, \omega(x, y))) + \int_{x_0}^x F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), \bar{z}(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))) d\xi,$$

per $(x, y) \in r_0$, sottraendo dalla (6_n), si avrebbe:

$$\begin{aligned} z_n(x, y) - \bar{z}(x, y) &= \int_{x_0}^x [F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), z_{n-1}(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))) - \\ &\quad - F(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)), \bar{z}(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))))] d\xi, \end{aligned}$$

onde, prendendo i valori assoluti di ambi i membri e applicando la condizione di LIPSCHITZ:

$$|z_n(x, y) - \bar{z}(x, y)| \leq L \int_{x_0}^x |z_{n-1}(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y))) - \bar{z}(\xi, \gamma(\xi, \omega(x, y)))| d\xi.$$

Procedendo analogamente a quanto fatto precedentemente, si ha:

[illegible]

e applicando queste ultime disuguaglianze, dalla (12) si ha:

$$|z_n(x, y) - z[x, y]| \leq L \int_{x_0}^x \frac{L^{n-1} M (\xi - x_0)^n}{n!} d\xi = L^n \frac{M(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

e quest'ultimo membro è il termine generale di una serie convergente. Risulta quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n(x, y) - \bar{z}(x, y)| = 0,$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x, y) = \bar{z}(x, y).$$

Pertanto la $z(x, y)$ coincide con la $\bar{z}(x, y)$ e anche l'unicità è così dimostrata.