Der Severische Satz über analytische Fortsetzung von Funktionen mehrerer Veränderlichen und der Kontinuitätssatz.

Memoria di H. BEHNKE und K. STEIN in Münster (Westfalen).

Zusammenfassung. - *Der Kontinuitätssatz für analytische Flächen (Math. Ann.* 113) *wird zum Beweise des Satzes von* F. SEVERI *über die Fortsetzung holomorpher und meromorpher Funktionen reeller und komplexer Veränderlichen vom Rande eines Gebietes ins Innere benutzt. Dadurch kann die Severische Aussage weiter ausgedehnt werden.*

Sodann werden die Ergebnisse auf Punktmengen in vollständigen offenen komplexen Mannigfaltigkeiten übertragen. Abschliessend werden Analoga zum Kontinuitätssatz behandelt (und Folgerungen daraus gezogen), die als Objekte normale Familien und analytische Flächen an Stelle einzelner analytischer Funktionen haben.

1. Auf der Tagung über Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, die das Centre Belge de Recherches Mathématiques im März 1953 veranstaltete, hat F. SEVERI auf folgenden von ihm bewiesenen Satz (1) hingewiesen: *Im Raume von r reellen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_r$ und k komplexen Veränderlichen $w_1, \ldots, w_k$ $(k \geq 1,\ r + k \geq 2)$ sei ein beschränktes Gebiet* $\mathfrak{G}$ *mit zusammenhängendem Rande* $\mathfrak{R}$ *gegeben. Sei $f(x_1, \ldots, x_r, w_1, \ldots, w_k)$ auf* $\mathfrak{R}$ *eindeutig und (im Sinne von Weierstrass) regulär. Dann ist $f(x_1, \ldots, x_r, w_1, \ldots, w_k)$ in das Innere von* $\mathfrak{G}$ *eindeutig und regulär fortsetzbar.* F. SEVERI hat weiter betont, dass es erstrebenswert sei, auch einen einfachen Beweis der entsprechenden Aussage für meromorphe Funktionen zu finden (2).

Im Falle $r = 0$ gehen die Severischen Aussagen in schon seit langem bekannte Sätze der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen über. Ist f auf $\mathfrak{R}$ regulär, so ist die Behauptung über die uneingeschränkte reguläre Fortsetzbarkeit ins Innere von $\mathfrak{G}$ der Inhalt eines Satzes von HARTOGS und W. F. OSGOOD. Ist f auf $\mathfrak{R}$ meromorph, so ist die uneingeschränkte meromorphe Fortsetzbarkeit von f ins Innere von $\mathfrak{G}$ von E. E. LEVI nachgewiesen worden. Beides ist dargestellt in dem bekannten Lehrbuche von W. F. OSGOOD (3).

(1) F. SEVERI, *Una proprietà fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa*, « Atti Accad. naz. Lincei », Rend. VI, *15* (1932), 487-490, und: *A proposito d'un teorema di* HARTOGS, « Comm. math. helv. », *15* (1943), 350-352.

(2) Siehe zu dem Problem auch S. BOCHNER and W. T. MARTIN, *Several complex variables*, Princeton 1948, p. 64 ff.

(3) W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie II*, 1, 2. Auflage (1929), S. 211-221. Über die Vervollständigung der Beweise durch A. B. BROWN siehe weiter unten in diesem Abschnitt. Weitere Beweise gaben R. FUETER, *Über einen Hartogsschen Satz*, « Comm.

Der Beweis des Severischen Satzes für reguläre Funktionen erfolgt durch direkte Anwendung der Cauchyschen Integralformel. Ist z. B. $r = 1$ und $k = 1$ und wählen wir speziell als Gebiet $\mathfrak{G}$ den Zylinder $\{|x| < 1, |w| < 1\}$, so ist die Fortsetzung der auf $\mathfrak{R}$ gegebenen Funktion $f(x, w)$ durch das Integral

$$(1) \qquad \mathfrak{J}(x, w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\eta|=1} \frac{f(x, \eta)}{\eta - w} \, d\eta$$

gegeben. Denn auf den Deckelflächen $\{x = \pm 1, |w| \leq 1\}$ und folglich in einer Nachbarschaft ist nach Voraussetzung $f(x, w)$ regulär, und daher ist dort $\mathfrak{J}(x, w) = f(x, w)$. Andererseits ist $\mathfrak{J}(x, w)$ eine im ganzen Innern von $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion. Wegen des Identitätssatzes für analytische Funktionen muss dann $\mathfrak{J}(x, w)$ auch auf jeder Ebene $x = c$ mit $-1 \leq c \leq +1$ die vorgegebenen Randwerte $f(x, w)$ haben.

Zum Beweise der Aussage für Gebiete komplizierterer Struktur sind zusätzliche Überlegungen erforderlich. Der Beweisansatz bleibt derselbe: Es wird jeweils das vorgegebene Gebiet $\mathfrak{G}$ im (x, w)-Raum mit der Ebene $x = c$ zum Schnitt $\mathfrak{G}_c$ gebracht und nun mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die vorgegebene Funktion $f(x, w)$ vom Rande von $\mathfrak{G}_c$ ins Innere von $\mathfrak{G}_c$ fortgesetzt. Hierbei aber kann die folgende Schwierigkeit auftreten. Bei stetiger Verschiebung der Ebenen $x = c$ können bei den $\mathfrak{G}_c$ von einem c_0 ab neue « innere » Randkomponenten auftreten, und es ist von vornherein nicht sicher, dass die durch Fortsetzung mittels der Cauchyschen Integralformel vom « äusseren » Rande her erzeugten Funktionselemente auf den « inneren » Randkomponenten mit den in der Voraussetzung des Satzes vorgegebenen Funktionselementen übereinstimmen. W. F. Osgood hat in seinem Lehrbuch die bei seinem Beweisansatz analoge Schwierigkeit noch übersehen. Darauf hat A. B. Brown hingewiesen und zum ersten Male für den Hartogs-Osgoodschen Satz einen lückenlosen Beweis gegeben ([4]). Bei dem oben skizzierten Beweisansatz für den Severischen Satz lässt sich die Schwierigkeit entsprechend überwinden. Hierzu muss ausgenutzt werden, dass der Gesamtrand von $\mathfrak{G}$ zusammenhängt ([5]). Die Übertragung des Satzes auf mehr als je eine reelle oder je eine komplexe Veränderliche macht dann keine Schwierigkeit.

2. Ist $f(x_1, \ldots, x_r, w_1, \ldots, w_k)$ nur als *meromorphe* Funktion auf dem Rande des Gebietes $\mathfrak{G}$ im $(x_1, \ldots, x_r, w_1, \ldots, w_k)$-Raum vorausgesetzt, so lässt sich nicht, wie oben skizziert, vorgehen, da eine Cauchysche Integralformel

---

math. helv. », *12* (1939), 75-80, und: *Über einen Hartogsschen Satz in der Theorie der analytischen Funktionen von n komplexen Veränderlichen*, « Comm. math. helv. », *14* (1942), 394-400; ferner E. Martinelli, *Sopra una dimostrazione di* R. Fueter *per un teorema di* Hartogs, « Comm. math. helv. », *15* (1943), 340-349.

([4]) A. B. Brown, *On certain analytic continuations and analytic homeomorphismus*, « Duke Math. Journ. », *2* (1936), 20-28.

([5]) K. Stein, *Die Regularitätshüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten*, « Math. Ann. », *114* (1937), 543-569.

nicht zur Verfügung steht. Nun hat aber schon F. HARTOGS einen grundlegenden Satz über die Fortsetzung regulärer Funktionen abgeleitet, der heute, unter allgemeineren Voraussetzungen ausgesprochen, als *Kontinuitätssatz* bezeichnet wird ([6]). Wir werden weiter unten noch ausführlicher darauf eingehen. Mit Hilfe des Hartogsschen Kontinuitätssatzes lässt sich ebenfalls ein Beweis für die Severische Aussage im Falle regulärer Funktionen leicht erbringen. 1911 hat schon E. E. LEVI den Hartogsschen Spezialfall des Kontinuitätssatzes auf meromorphe Funktionen ausgedehnt, und später haben andere Autoren den allgemeinen Kontinuitätssatz auf den Fall meromorpher Funkionen erweitert. Von H. KNESER wurde der Kontinuitätssatz in der folgenden Fassung bewiesen ([7]): *Es sei* $\mathfrak{b}^2$ *ein beschränktes Gebiet mit dem Rande* $\mathfrak{c}^1$ *in der* w*-Ebene und* $f(z_1, \ldots, z_n, w)$ *eindeutig und regulär (meromorph) für* $w \in \mathfrak{c}^1$ *und* $|z_i - z_i^{(0)}| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. *Ist ferner* f *eindeutig und regulär (meromorph) für* $w \in \mathfrak{b}^2$, $z_i = z_i^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *mit lim* $z_i^{(\nu)} = z_i^{(0)}$, *so ist* f *eindeutig und regulär (meromorph) in alle Punkte* $w \in \mathfrak{b}^2$, $z_i = z_i^{(0)}$ *fortsetzbar.*

F. HARTOGS und E. E. LEVI haben den Satz für den Fall, dass $\mathfrak{b}^2$ ein Kreis ist, ausgesprochen, und zwar HARTOGS für reguläre und LEVI für meromorphe Funktionen.

Der Beweis der Severischen Aussage für reguläre (meromorphe) Funktionen in dem oben betrachteten Falle des Gebietes $\mathfrak{G}: \{-1 < x < +1, |w| < 1\}$ lässt sich nun mit Hilfe des Kontinuitätssatzes wie folgt führen. Wir betrachten wieder wie in 1. die Schnitte von $\mathfrak{G}$ mit den Ebenen $x = c$. Angenommen, f sei nicht auf allen diesen Ebenen ins Innere von $\mathfrak{G}$ regulär (meromorph) fortsetzbar. Dann gibt es ein grösstes c, genannt c_0, für das eine solche Forsetzung nicht möglich ist. Sicher ist auf Grund der Voraussetzungen $c_0 < 1$. Auf allen Ebenen $x = c$ mit $c_0 < c \leq 1$ ist f regulär (meromorph) in $|w| \leq 1$. Das aber widerspricht dem Kontinuitätssatz schon in der spezialisierten Form von HARTOGS bzw. LEVI: Es braucht nur eine Folge von Ebenen $x = c_\nu$ mit $c_\nu > c_0$ und $\lim c_\nu = c_0$ gewählt zu werden. (Dass hier eine reelle Veränderliche x an Stelle der oben im Kontinuitätssatz auftretenden komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ auftritt, stört nicht, da Regularität bzw. Meromorphie in der reellen Veränderlichen x ja immer Regularität bzw. Meromorphie in bezug auf die komplex ergänzte Veränderliche $z = x + iy$ bedeutet).

Im *allgemeinen Falle* des Severischen Satzes ($r \geq 1$ reelle und $k \geq 1$ komplexe Veränderliche, beliebige beschränkte Gebiete $\mathfrak{G}$) lässt sich entsprechend vorgehen. Nur kann man natürlich nicht den Spezialfall von HARTOGS

([6]) Die Literatur zum Kontinuitätssatz bis 1934 ist angegeben in dem Bericht von H. BEHNKE und P. THULLEN, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*, Erg. d. Math. u. i. Grenzgebiete (1934) (abgekürzt: B.-Th. Bericht).

([7]) H. KNESER, *Der Satz von dem Fortbestehen der wesentlichen Singularitäten einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen*, « Jahresberichte D. M. V. », *41* (1932), 164-168 und: *Ein Satz über die Meromorphiebereiche analytischer Funktionen von mehreren Veränderlichen*, « Math. Ann. », *106* (1932), 648-665.

bzw. LEVI des Kontinuitätssatzes zum Beweise des Satzes heranziehen, da die auftretenden zweidimensionalen Schnitte des Gebietes G nicht notwendig Kreise sein müssen. Im allgemeinen Falle ist ferner das oben erwähnte eventuelle Auftreten « innerer » Randkomponenten auf den zweidimensionalen Schnitten zu berücksichtigen. Eine vollständige Durchführung des Beweises unter Berücksichtigung dieser Schwierigkeit findet sich für den Fall $r=1$, $k=1$ in der unter (5) zitierten Arbeit.

3. Die Skizze des Beweises für die Aussagen von F. SEVERI, wie sie in 2. gegeben wurde, lässt leicht erkennen, dass die Voraussetzung über die Regularität bzw. Meromorphie der vorgegebenen Funktion auf dem gesamten Rande für wichtige Klassen von Gebieten G nicht voll ausgenutzt zu werden braucht. Das wollen wir zunächst im Falle einer komplexen und einer reellen Veränderlichen auseinandersetzen. Z. B. genügt es bei dem unter 1. betrachteten Gebiet $\mathbf{G}: \{-1<x<+1, |w|<1\}$, die Regularität bzw. Meromorphie von $f(x, w)$ lediglich auf der Mantelfläche: $\{-1 \leq x \leq +1, |w|=1\}$ und *nur einer* der beiden Deckelflächen, etwa $\{x=+1, |w| \leq 1\}$, vorauszusetzen. Der angegebene Beweis für die auf dieses Gebiet bezügliche Severische Aussage benutzt die Regularität (bzw. die Meromorphie) lediglich auf diesem Teil des Randes. Er liefert zugleich den Nachweis, dass die Funktion auch auf der anderen Deckelfläche: $\{x=-1, |w| \leq 1\}$ regulär (bzw. meromorph) ist. Die entsprechende Überlegung lässt sich für jedes Gebiet G durchführen, das ein Stück einer Ebene $x=c$ als Deckelfläche besitzt. Genauer heisst das: G muss ganz auf einer Seite von $x=c$ liegen, und ein zweidimensionales Gebiet g auf $x=c$ muss zum Rande R von G gehören. Ist dann $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \mathbf{g}$ zusammenhängend, so braucht die Regularität (bzw. Meromorphie) von f lediglich auf $\mathbf{R}^*$ vorausgesetzt zu werden (8).

Im allgemeinen Falle von r reellen und k komplexen Veränderlichen lässt sich eine entsprechende Aussage formulieren. Dabei ist zu beachten, dass die Deckelfläche nicht notwendig Stück einer Hyperebene zu sein braucht, weil bei der Anwendung des Kontinuitätssatzes zum Beweis der Severischen Aussage lediglich zweidimensionale Ebenen $x_1 = c_1, \dots, x_r = c_r$, $w_2 = \gamma_2, \dots, w_k = \gamma_k$ benutzt werden.

4. Im Anschluss an diese Aussage liegt eine weitere Verallgemeinerung nahe. Eine analytische Funktion von r reellen Veränderlichen $x_1, \dots, x_r$ und k komplexen Veränderlichen $w_1, \dots, w_k$ lässt sich auch auffassen als eine Funktion von $(r+k)$ komplexen Veränderlichen $z_1 = x_1 + iy_1, \dots$, $z_r = x_r + iy_r$, $z_{r+j} = w_j$, $j = 1, \dots, k$, die auf der $(r+2k)$-dimensionalen

(8) G braucht dabei keine zweite Deckelfläche zu besitzen, wie es in dem betrachteten Beispiel zutrifft.

Ebene $\mathbf{E}^{r+2k}$: $\{y_1 = y_2 = \dots = y_r = 0\}$ des $R^{2(r+k)}$ betrachtet wird. Diese Ebene $\mathbf{E}^{r+2k}$ ist eine r-parametrige Schar von $2k$-dimensionalen *analytischen* Ebenen, die charakterisiert sind durch $x_j = c_j$, $j = 1, \dots, r$. Für die Gültigkeit der Severischen Aussage ist diese analytische Schichtung entscheidend, nämlich: Die Severische Aussage lässt sich auch dann beweisen, wenn die betrachtete Punktmenge des Raumes $R^{2(r+k)}$ keine Schichtfläche analytischer Ebenen, sondern allgemeiner von analytischen Flächen ist.

Der hier zu Grunde gelegte Begriff der analytischen Fläche stützt sich auf den Begriff der *analytischen Menge*. Unter einer analytischen Menge $\mathbf{M}$ in einem Gebiete $\mathbf{B}^{2n}$ des Raumes R^{2n} von $n = r + k$ komplexen Veränderlichen $\xi_1, \dots, \xi_n$ wird eine in $\mathbf{B}^{2n}$ abgeschlossene Punktmenge verstanden, die in jedem ihrer Punkte durch ein lokales System analytischer Gleichungen charakterisiert wird, d. h.: Zu jedem Punkt P von $\mathbf{M}$ gibt es eine Umgebung $\mathbf{U}(P)$ und endlich viele in $\mathbf{U}(P)$ reguläre Funktionen g_λ $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, derart dass die in $\mathbf{U}(P)$ gelegenen Punkte von $\mathbf{M}$ genau mit den Lösungspunkten des Gleichungssystems g_λ $(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ übereinstimmen. M heisst irreduzibel in $\mathbf{B}^{2n}$, wenn M nicht Vereinigungsmenge zweier echter Teilmengen ist, die ihrerseits analytische Mengen in $\mathbf{B}^{2n}$ sind. Jede irreduzible analytische Menge $\mathbf{M}$ in $\mathbf{B}^{2n}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Dimension $2k$, wobei k einer der Werte $-1, 0, \dots, n$ sein kann ([9]); gilt $1 \leq k \leq n-1$, so heisst $\mathbf{M}$ eine *$2k$-dimensionale analytische Fläche* $\mathbf{F}^{2k}$ in $\mathbf{B}^{2n}$.

Wir nennen nun eine in $\mathbf{B}^{2n}$ abgeschlossene nichtleere Punktmenge eine *s-parametrige analytische Schichtfläche* $\mathbf{S}^{s+2k}$ in $\mathbf{B}^{2n}$ $(s + 2k < 2n)$, wenn sie als s-parametrige Schar von $2k$-dimensionalen analytischen Flächen darstellbar ist. Dies bedeutet: Jedem Punkte $t = (t_1, \dots, t_s)$ eines Gebietes $\mathbf{b}^s$ im Raume der reellen Veränderlichen $t_1, \dots, t_s$ ist eine $2k$-dimensionale analytische Fläche $\mathbf{F}^{2k}(t)$ in $\mathbf{B}^{2n}$ zugeordnet; alle diese $\mathbf{F}^{2k}(t)$ sind in $\mathbf{S}^{s+2k}$ enthalten, und durch jeden Punkt von $\mathbf{S}^{s+2k}$ läuft wenigstens ein $\mathbf{F}^{2k}(t)$. Die $\mathbf{F}^{2k}(t)$ hängen in folgendem Sinne stetig von t ab: Ist $t^* = (t_1^*, \dots, t_s^*)$ ein Punkt aus $\mathbf{b}^s$ und $t^{(\nu)} = (t_1^{(\nu)}, \dots, t_s^{(\nu)})$ eine gegen t^* konvergierende Folge von Punkten aus $\mathbf{b}^s$, so konvergieren die $\mathbf{F}^{2k}(t^{(\nu)})$ (gleichmässig in jedem kompakten Teil von $\mathbf{B}^{2n}$) gegen $\mathbf{F}^{2k}(t^*)$ - Jedes $\mathbf{F}^{2k}(t)$ heisse eine *Schicht* in $\mathbf{S}^{s+2k}$.

An Stelle des oben in der Severischen Aussage betrachteten Gebietes $\mathbf{G}$ in einer « Schichtebene » $\mathbf{E}^{r+2k}$ tritt jetzt ein Gebiet $\mathbf{G}^{s+2k}$ in einer analytischen Schichtfläche $\mathbf{S}^{s+2k}$, und entsprechend ist eine reguläre (bzw. meromorphe) Funktion $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ in diesem Gebiet bzw. auf seinem Rande vorgegeben. $\mathbf{G}^{s+2k}$ muss natürlich relativ kompakt in bezug auf $\mathbf{S}^{s+2k}$ sein, d. h. alle Randpunkte von $\mathbf{G}^{s+2k}$ müssen im Innern von $\mathbf{S}^{s+2k}$ liegen. Damit nun das geschilderte Beweisprinzip (das sich vornehmlich auf den Kontinuitätssatz stützt) weiterhin angewendet werden kann, muss über $\mathbf{G}^{s+2k}$ eine

([9]) $k = -1$ kennzeichnet die leere Menge, $k = n$ den Fall $M \equiv \mathbf{B}^{2n}$.

weitere besondere Voraussetzung erfüllt sein. Es sei $\mathbf{F}^{2k}(t^{(0)})$ irgendeine Schicht, die $\mathbf{G}^{s+2k}$ trifft. Dann muss es möglich sein, von der Schicht $\mathbf{F}^{2k}(t^{(0)})$ aus stetig im Raume der Parameter $t_1, \dots, t_s$ zu einer Schicht $\mathbf{F}^{2k}(t^{(1)})$ überzugehen, die lediglich Randpunkte mit dem Gebiete $\mathbf{G}^{s+2k}$ gemeinsam hat. Diese Voraussetzung ist nicht selbstverständlich. Sei z. B. $\mathbf{S}^3$ im Raume von $r+k=2$ komplexen Veränderlichen z, w die analytische Schichtfläche $|w|=|z|$. Die analytischen Schichten sind hier die analytischen Ebenen $w=z \cdot e^{it}$. Das durch $|z|<1$ in $\mathbf{S}^3$ bestimmte Gebiet $\mathbf{G}^3$ erfüllt *nicht* unsere Voraussetzung. In der Tat lässt sich in diesem Falle auch nicht jede auf dem Rande von $\mathbf{G}^3$ reguläre Funktion ins Innere von $\mathbf{G}^3$ fortsetzen, z. B. nicht $f(z, w) \equiv \frac{1}{z}$.

Man braucht jetzt natürlich einen allgemeinen Kontinuitätssatz, in dem an Stelle der oben auftretenden zweidimensionalen analytischen Ebenen $x_i = c_i$, $i=1, \dots, r$, $w_j = \gamma_j$, $j=2, \dots k$, analytische Flächen der Dimension $2k$ auftreten. Ein solcher Kontinuitätssatz existiert nun in der Tat ([10]). Im nächsten Abschnitt kommen wir darauf zurück. Mit Hilfe dieses Kontinuitätssatzes lässt sich genau wie oben zeigen, dass eine reguläre (meromorphe) Funktion vom Rande eines Gebietes $\mathbf{G}^{s+2k}$, das den obigen Bedingungen genügt, ins Innere hinein fortsetzbar ist. Natürlich muss dabei wiederum die von Brown bemerkte Schwierigkeit, von der bereits oben die Rede war, beachtet werden.

5. Der Kontinuitätssatz, wie er von F. Hartogs und E. E. Levi formuliert ist und hier in den Abschnitten 2 und 3 herangezogen wurde, bezog sich stets auf die analytische Fortsetzung regulärer (meromorpher) Funktionen auf zweidimensionalen zueinander parallelen analytischen Ebenen. Im Abschnitt 4 dagegen wird eine Aussage benötigt, die die Fortsetzung von auf analytischen Flächen gegebenen Funktionen betrifft. Der allgemeine Satz lautet: $\mathbf{F}_0^{2k}$ sei eine $2k$-dimensionale analytische Fläche in einem Gebiete $\mathbf{B}^{2n}$ des Raumes von $n=r+k$ komplexen Veränderlichen $\xi_1, \dots, \xi_n$ $(1 \leq k \leq n-1)$. $\mathbf{G}_0^{2k}$ sei ein $2k$-dimensionales Gebiet ganz im Innern von $\mathbf{F}_0^{2k}$ mit dem Rande $\mathbf{C}_0^{2k-1}$. Ferner sei $\mathbf{F}_1^{2k}$, $\mathbf{F}_2^{2k}, \dots$ eine Folge analytischer Flächen in $\mathbf{B}^{2n}$, die gleichmässig im Innern von $\mathbf{B}^{2n}$ gegen $\mathbf{F}_0^{2k}$ konvergieren. Auf jeder Fläche $\mathbf{F}_\mu^{2k}$ $(\mu = 1, 2, \dots)$ sei ein ganz im Innern liegendes Gebiet $\mathbf{G}_\mu^{2k}$ mit dem Rande $\mathbf{C}_\mu^{2k-1}$ gegeben, wobei mit wachsendem μ die $\mathbf{G}_\mu^{2k}$ gleichmässig gegen $\mathbf{G}_0^{2k}$ und die $\mathbf{C}_\mu^{2k-1}$ gleichmässig gegen $\mathbf{C}_0^{2k-1}$ konvergieren. *Ist dann die Funktion $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ in allen Punkten von $\mathbf{C}_0^{2k-1}$ sowie in allen Punkten der $\mathbf{G}_\mu^{2k}$ eindeutig und regulär (meromorph), so lässt sich f in alle Punkte von $\mathbf{G}_0^{2k}$ eindeutig und regulär (meromorph) fortsetzen.*

([10]) Für den Fall regulärer Funktionen siehe: H. Behnke, *Der Kontinuitätssatz und die Regulärkonvexität*, « Math. Ann. », *113* (1936), 392-397.

Die Behauptung in dieser Aussage (durch den Druck hervorgehoben) lässt sich offenbar auch so formulieren: Besitzt f im Innern von $\mathfrak{G}_0^{2k}$ eine Singularität, so auch im Innern der $\mathfrak{G}_\mu^{2k}$ für $\mu > \mu_0$ ([11]). Die Aussage sichert also die « stetige Fortsetzung » der Singularitäten einer analytischen Funktion. Und das hat zur Bezeichnung « Kontinuitätssatz » für diese Aussage geführt.

Im Falle der Regularität der betrachteten Funktion $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ist der Beweis des hier angeführten allgemeinen Kontinuitätssatzes sehr einfach mit Hilfe des Begriffes der von H. CARTAN und P. THULLEN eingeführten k-Konvexität ([12]) zu erbringen. Zunächst ist zu beachten, dass eine Fortsetzung von $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ von $\mathfrak{C}_0^{2k-1}$ her ins Innere von $\mathfrak{G}_0^{2k}$, wenn überhaupt möglich, stets eindeutig ist. Das bedeutet insbesondere auch, dass jede Fortsetzung innerhalb $\mathfrak{G}_0^{2k}$ von einer Randkomponente $\mathfrak{C}_0^{2k-1}$ zu einer (eventuell vorhandenen anderen) Komponente von $\mathfrak{C}_0^{2k-1}$ stets zu den dort gegebenen Funktionselementen führen muss. Träfe dies nämlich nicht zu, so müsste Gleiches auf den $\mathfrak{F}_0^{2k}$ approximierenden $\mathfrak{F}_\mu^{2k}$ für $\mu > \mu_0$ gelten. Nach Voraussetzung ist aber $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dort eindeutig vorgegeben.

Wäre nun die Behauptung des (verallgemeinerten) Kontinuitätssatzes falsch, so könnte sich f nicht uneingeschränkt vom Rande von $\mathfrak{G}_0^{2k}$ ins Innere fortsetzen lassen, d. h. das Regularitätsgebiet $\mathfrak{A}^{2n}$ von f besitzt wenigstens einen Randpunkt Q im Innern von $\mathfrak{G}_0^{2k}$, der von $\mathfrak{C}_0^{2k-1}$ her über Punkte, die zugleich in $\mathfrak{G}_0^{2k}$ und $\mathfrak{A}^{2n}$ liegen, erreichbar ist. Nun ist $\mathfrak{A}^{2n}$ k-konvex im Sinne von CARTAN-THULLEN. Wählen wir eine ganz im Innern von $\mathfrak{A}^{2n}$ liegende $2n$-dimensionale Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{C}_0^{2k-1}$, so gibt es also einen Punkt P_0 in $\mathfrak{G}_0^{2k} \cap \mathfrak{A}^{2n}$, dessen Distanz vom Rande von $\mathfrak{A}^{2n}$ kleiner ist als die Randdistanz von $\mathfrak{U}$ in bezug auf $\mathfrak{A}^{2n}$. Folglich gibt es auch eine in $\mathfrak{A}^{2n}$ reguläre und eindeutige Funktion $h(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, für die

$$(1) \qquad |h(P_0)| > \operatorname{Max} |h(\mathfrak{U})|$$

ist. Aus (1) folgt weiter, dass es eine $2n$-dimensionale Hyperkugel $\mathfrak{K}^{2n}$ um P_0 in $\mathfrak{A}^{2n}$ gibt, so dass für jeden Punkt P aus $\mathfrak{K}^{2n}$

$$(2) \qquad |h(P)| > \operatorname{Max} |h(\mathfrak{U})|$$

ist. Da die $\mathfrak{F}_\mu^{2k}$ mit ihren $\mathfrak{G}_\mu^{2k}$ und $\mathfrak{C}_\mu^{2k-1}$ gegen $\mathfrak{F}_0^{2k}$ mit $\mathfrak{G}_0^{2k}$ und $\mathfrak{C}_0^{2k-1}$ konvergieren, so müssen für $\mu > \mu_1$ alle $\mathfrak{C}_\mu^{2k-1}$ in $\mathfrak{U}$ liegen und die $\mathfrak{G}_\mu^{2k}$ mit $\mathfrak{K}^{2n}$ gemeinsame Punkte haben. Das hat zur Folge, dass es auf $\mathfrak{G}_\mu^{2k}$, $\mu > \mu_1$, Punkte P_μ, die innerhalb $\mathfrak{K}^{2n}$ liegen, gibt, so dass

$$(3) \qquad |h(P_\mu)| > \operatorname{Max} |h(\mathfrak{C}_\mu^{2k-1})|$$

([11]) Wegen der Voraussetzung der Eindeutigkeit von f in diesem Falle siehe a. a. O. ([10]).

([12]) Siehe H. CARTAN und P. THULLEN, *Regularitäts- und Konvergenzbereiche*, « Math. Ann. », *106* (1932), 617-647, B.-Th. Bericht, Kap. 6.

ist. Andererseits liegt $\mathbf{G}_\mu^{2k}$ samt Rand im Innern von $\mathbf{A}^{2n}$. Also ist auch $h(\xi_1, \dots, \xi_n)$ auf $\mathbf{G}_\mu^{2k}$ einschliesslich $\mathbf{C}_\mu^{2k-1}$ regulär. Das aber ist ein Widerspruch gegen das Maximumprinzip auf analytischen Flächen ([13]).

Der Beweis der entsprechenden Aussage für meromorphe Funktionen $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ lässt sich natürlich so nicht erbringen. Dagegen sprechen zwei Gründe. Während die Regulärkonvexität als charakteristische Eigenschaft der Existenzgebiete regulärer Funktionen gut verwendbar ist, trifft dies für die analoge Eigenschaft bei meromorphen Funktionen, die Meromorphiekonvexität ([14]), nicht zu. Zweitens beachte man, dass in dem eben durchgeführten Beweis das Maximumprinzip für reguläre Funktionen eine wesentliche Rolle spielt. Und das lässt sich auf meromorphe Funktionen natürlich nicht übertragen. Deshalb ist ein anderer Beweisansatz erforderlich.

Zum Nachweis der in Abschnitt 2 verwendeten speziellen Fassung des Kontinuitätssatzes für meromorphe Funktionen, in der die vorgegebenen analytischen Flächen $\mathbf{F}_\mu^{2k}$ zueinander parallele zweidimensionale analytische Ebenen sind, hat schon 1932 H. KNESER einen Weg aufgewiesen ([15]). Im Falle beliebiger analytischer Flächen $\mathbf{F}_\mu^{2k}$ mit $k=1$ lässt sich ein ähnlicher Weg beschreiten. Man hat insbesondere an Stelle der von H. KNESER herangezogenen gewöhnlichen Cauchyschen Integralformel eine für nicht geschlossene Riemannsche Flächen geltende verallgemeinerte Integralformel, in die die Elementarfunktionen der Flächen eingehen, zu benutzen. Dies ist durchgeführt in einer Arbeit der Verfasser: « Elementarfunktionen auf Riemannschen Flächen als Hilfsmittel für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen » ([16]).

Die Gültigkeit des Kontinuitätssatzes für meromorphe Funktionen in seiner allgemeinen Fassung mit analytischen Flächen $\mathbf{F}_\mu^{2k}$ beliebiger Dimension $2k$ ergibt sich nun durch vollständige Induktion nach k. Im Falle $k=1$ ist der Satz richtig. Angenommen, er sei für $k-1$ mit $1 \leq k-1 < n-1$ nachgewiesen. Wir wählen im R^{2n} eine $(2n-2)$-dimensionale analytische Ebene $\mathbf{H}^{2n-2}$, welche die in $\mathbf{B}^{2n}$ vorgegebene analytische Fläche $\mathbf{F}_0^{2k}$ trifft, aber nicht enthält. Sei ferner $\mathbf{H}_0^{2n-2}$ irgendeine zu $\mathbf{H}^{2n-2}$ parallele $(2n-2)$-

---

([13]) Siehe R. REMMERT und K. STEIN, *Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen*, « Math. Ann. », *126* (1953), 263-306.

([14]) Zur Definition der Meromorphiekonvexität siehe BEHNKE-THULLEN, Bericht p. 72. In einer Arbeit der Verf., *Konvergente Folgen von Regularitätsgebieten und die Meromorphiekonvexität*, « Math. Ann. », *116* (1938), 204-216 wurde gezeigt, dass die Meromorphiekonvexität mit der Regulärkonvexität äquivalent ist. Dass andererseits jedes Meromorphiegebiet meromorphkonvex ist, folgt für $n=2$ aus der Okaschen Lösung des Levischen Problems. Für $n>2$ ist in diesem Augenblick die Frage noch nicht endgültig entschieden.

([15]) Siehe a. a. O. ([7]).

([16]) H. BEHNKE und K. STEIN, *Elementarfunktionen auf Riemannschen Flächen*, « Canad. Journal of. Math. », *2* (1950), 152-165.

dimensionale analytische Ebene, die mit dem auf F_0^{2k} vorgegebenen Gebiet G_0^{2k} nebst Rand C_0^{2k-1} gemeinsame Punkte hat. Dann ist F_0^{2k} sicher auch nicht in H_0^{2n-2} enthalten, und der Durchschnitt $H_0^{2n-2} \cap F_0^{2k} = M_0^{2k-2}$ ist eine analytische Menge in B^{2n}, die in allen ihren Punkten die Dimension $2k-2$ besitzt. Bei der Durchschnittsbildung entsteht aus G_0^{2k} auf M_0^{2k-2} ein Bereich $B_0^{2k-2} = H_0^{2n-2} \cap G_0^{2k}$ mit dem Rande $C_0^{2k-3} = H_0^{2n-2} \cap C_0^{2k-1}$. Es genügt zu zeigen, dass sich die vorgegebene Funktion $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, die insbesondere auf C_0^{2k-1} als eindeutig und meromorph vorausgesetzt ist, stets in den gesamten Bereich B_0^{2k-2} vom Rande C_0^{2k-3} her eindeutig meromorph fortsetzen lässt. Denn wenn dies möglich ist, so bilden die Fortsetzungen von $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in die Bereiche B_0^{2k-2}, die bei Durchschnittsbildung von G_0^{2k} mit allen G_0^{2k} treffenden Ebenen H_0^{2n-2} auftreten, zusammen eine eindeutige meromorphe Fortsetzung von $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in das gesamte Innere von G_0^{2k} vom Rande C_0^{2k-1} her. — M_0^{2k-2} zerfällt möglicherweise in höchstens abzählbar viele $(2k-2)$-dimensionale analytische Flächen $F_{0,\nu}^{2k-2}$ $(\nu = 1, \ldots)$; sei etwa $B_{0,1}^{2k-2} = F_{0,1}^{2k-2} \cap G_0^{2k}$ nicht leer. $B_{0,1}^{2k-2}$ braucht auf $F_{0,1}^{2k-2}$ nicht zusammenhängend zu sein. Wir greifen eine zusammenhängende Komponente $G_{0,1}^{2k-2}$ von $B_{0,1}^{2k-2}$ heraus; $G_{0,1}^{2k-2}$ ist ein Gebiet auf $F_{0,1}^{2k-2}$, dessen Rand mit $C_{0,1}^{2k-3}$ bezeichnet werde. Sei jetzt P_0 ein Punkt von $G_{0,1}^{2k-2}$, ferner P_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ eine gegen P_0 konvergierende Punktfolge mit der Eigenschaft, dass jeweils P_μ dem auf F_μ^{2k} gelegenen Gebiet G_μ^{2k} angehört. Die durch P_μ laufende, zu H^{2n-2} parallele $(2n-2)$-dimensionale analytische Ebene H_μ^{2n-2} enthält für $\mu > \mu_0$ die analytische Fläche F_μ^{2k} nicht, also ist jeweils $M_\mu^{2k-2} = H_\mu^{2n-2} \cap F_\mu^{2k}$ für $\mu > \mu_0$ eine $(2k-2)$-dimensionale analytische Menge. Die F_μ^{2k} konvergieren gegen F_0^{2k}; daher konvergieren die M_μ^{2k-2} gegen M_0^{2k-2}, und jedes M_μ^{2k-2} mit $\mu > \mu_0$ besitzt einen irreduziblen Bestandteil $F_{\mu,1}^{2k-2}$, derart dass diese $(2k-2)$-dimensionalen analytischen Flächen $F_{\mu,1}^{2k-2}$ gegen $F_{0,1}^{2k-2}$ konvergieren. Es gibt dann aber auf den $F_{\mu,1}^{2k-2}$ sicher auch Gebiete $G_{\mu,1}^{2k-2}$ mit Rändern $C_{\mu,1}^{2k-3}$ mit der Eigenschaft, dass die $G_{\mu,1}^{2k-2}$ bzw. $C_{\mu,1}^{2k-3}$ gegen $G_{0,1}^{2k-2}$ bzw. $C_{0,1}^{2k-3}$ konvergieren und dass für diese Punktmengen und die gegebene Funktion $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ die Voraussetzungen des Kontinuitätssatzes mit $k-1$ an Stelle von k erfüllt sind. Folglich ist $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in alle Punkte von $G_{0,1}^{2k-2}$ vom Rande $C_{0,1}^{2k-3}$ her eindeutig meromorph fortsetzbar. Entsprechendes gilt für die anderen zusammenhängenden Komponenten von $B_{0,1}^{2k-2}$ und damit für $B_{0,1}^{2k-2}$ ebenso wie für den Durchschnitt von G_0^{2k} mit jedem weiteren irreduziblen Bestandteil $F_{0,\nu}^{2k-2}$ von M_0^{2k-2}. Haben $B_{0,\nu_1}^{2k-2} = F_{0,\nu_1}^{2k-2} \cap G_0^{2k}$ und $B_{0,\nu_2}^{2k-2} = F_{0,\nu_2}^{2k-2} \cap G_0^{2k}$ einen nicht leeren Durchschnitt, so müssen die Fortsetzungen von $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ins Innere von B_{0,ν_1}^{2k-2} und B_{0,ν_2}^{2k-2} in den gemeinsamen Punkten von B_{0,ν_1}^{2k-2} und B_{0,ν_2}^{2k-2} übereinstimmen. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ auch nicht auf allen F_0^{2k} approximierenden F_μ^{2k} eindeutig ins Innere der G_μ^{2k} fortsetzbar sein. Mithin lässt sich $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in den gesamten Bereich B_0^{2k-2} eindeutig meromorph vom Rande her fortsetzen.

Damit ist der Kontinuitätssatz für meromorphe Funktionen in seiner allgemeinsten Fassung bewiesen.

Ein weiterer Beweis ist schon 1947 von W. ROTHSTEIN veröffentlicht worden ([17]).

6. Der Kontinuitätssatz lehrt, dass unter gewissen Voraussetzungen die Fortsetzung analytischer Funktionen in Punktmengen möglich ist, die nicht von der speziell betrachteten Funktion abhängen. Vom selben Typus sind die hier betrachteten Aussagen von F. SEVERI. Vorgegeben ist in einer gewissen Punktmenge **A** die Gesamtheit der dort regulären bzw. meromorphen Funktionen; behauptet wird die Regularität bzw. Meromorphie aller dieser Funktionen in einer **A** umfassenden Punktmenge **B**. Es liegt nahe, bei gegebenem **A** nach der grössten **A** umfassenden Punktmenge **B** zu fragen. Hierüber gibt es aus den beiden letzten Jahrzehnten zahlreiche Untersuchungen, in deren Mittelpunkt die Begriffe *Regularitätshülle* und *Meromorphiehülle* stehen. Unter der Regularitätshülle **H**(**A**) einer Punktmenge **A** wird diejenige Punktmenge verstanden, die sich auf folgende Weise ergibt: Wir betrachten die Menge **Z** der auf **A** eindeutigen und regulären Funktionen $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Es sollen nun alle diejenigen Punkte über dem Raume der $\xi_1, \ldots, \xi_n$ zu **H**(**A**) gehören, in die hinein sich alle Funktionen der Menge **Z** von **A** aus gleichzeitig fortsetzen lassen. Dabei ist jeder « Punkt » von **H**(**A**) gekennzeichnet durch seinen Grundpunkt P und durch die Menge der Funktionselemente, die durch gleichzeitige Fortsetzung der Funktionen aus **Z** längs eines von **A** nach P laufenden Weges gegeben werden ([18]). (Entsprechend lässt sich die Meromorphiehülle erklären).

In den allgemeinen Darstellungen sind die grundlegenden Eigenschaften dieser Begriffe hergeleitet ([19]). Eine andere Aufgabe ist die effektive Konstruktion der Hüllen vorgegebener Punktmengen. Die Severischen Aussagen liefern Beiträge zur Lösung dieser Aufgabe. Z. B. lässt sich der in Abschnitt 1 angegebene Spezialfall der Severischen Aussage auch so formulieren: Die Regularitätshülle **H** der Punktmenge **A**: $\{x = \pm 1,\ y = 0,\ |w| \leq 1\}$ im Raume der komplexen Veränderlichen $\{z = x + iy,\ w\}$ umfasst die Punktmenge **A***: $\{|x| \leq 1,\ y = 0,\ |w| \leq 1\}$. Es ist leicht zu sehen, dass in diesem Falle **H**(**A**) mit **A*** identisch ist.

Völlig gelöst ist die eben skizzierte Aufgabe der Konstruktion von Regularitätshüllen (bzw. Meromorphiehüllen) u. a. im Falle der *Reinhardtschen*

([17]) W. ROTHSTEIN, *Die invariante Fassung des Kontinuitätssatzes für meromorphe Funktionen*, « Arch. d. Math. », *1* (1948), 119-126.

([18]) Man beachte die Analogie dieser Erklärung zur klassischen Einführung der Riemannschen Fläche. Zur genauen Definition siehe B.-Th. Bericht p. 70 und dazu wieder p. 11.

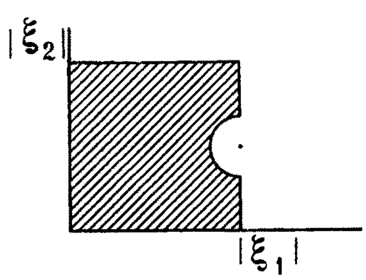
([19]) Vgl. hierzu B.-Th. Bericht, insbesondere Kap. 6.

Körper; das sind die Körper im Raume der $\xi_1, \ldots, \xi_n$, die bei Auszeichnung des Koordinatenanfangspunktes als Mittelpunkt die Drehungsgruppe

$$\xi_\nu^* = e^{i\vartheta_\nu} \cdot \xi_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

gestatten. Mit Hilfe des Kontinuitätssatzes, der hier nur in einer speziellen Fassung benötigt wird, ist leicht zu zeigen, dass man die Hülle eines Reinhardtschen Körpers **R** mit dem Mittelpunkt als innerem Punkt wie folgt erhält: Man gehe über zum Raume der n reellen Veränderlichen $\eta_\nu = \log|\xi_\nu|$ und konstruiere die im elementargeometrischen Sinne konvexe Hülle **S** des Bildes von **R** im endlichen Raume der η_ν. Dann ist **H(R)** der wie folgt zu bestimmende Reinhardtsche Körper: *a*) Die nicht auf den Koordinatenachsen gelegenen Punkte von **H(R)** sind genau diejenigen, deren Bilder im $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$-Raum zu **S** gehören. Diese Punktmenge sei mit **'H** bezeichnet. *b*) Man bilde im mengentheoretischen Sinne die abgeschlossene Hülle $'\overline{\mathbf{H}}$ von **'H**. Dann wird **H(R)** von den inneren Punkten von $'\overline{\mathbf{H}}$ gebildet.

Zum Beispiel ist die Regularitätshülle des Gebietes **D** — **K**, wo **D** der Dizylinder $\{|\xi_1| < 1,\ |\xi_2| < 1\}$ und **K** der Körper $\left\{(|\xi_1| - 1)^2 + \left(|\xi_2| - \frac{1}{2}\right)^2 < \varepsilon^2 < \frac{1}{4}\right\}$ ist, mit **D** identisch. Das sieht man schon so ein. Sei $f(\xi_1, \xi_2)$ irgendeine in **D** — **K** reguläre (meromorphe) Funktion. Wäre nun $f(\xi_1, \xi_2)$ nicht in ganz **D** hinein fortsetzbar, so gäbe es ein kleinstes Θ mit $\frac{1}{2} \leq \Theta < 1$, so dass $f(\xi_1, \xi_2)$ regulär (meromorph) im Dizylinder **D'**: $\{|\xi_1| < \Theta,\ |\xi_2| < 1\}$ ist, doch auf mindestens einer analytischen Ebene $\xi_1 = \Theta \cdot e^{i\vartheta}$ nicht in alle Punkte innerhalb $|\xi_2| < 1$ von **D'** aus lokal fortsetzbar ist. Das aber würde offenbar dem Kontinuitätssatz widersprechen; $f(\xi_1, \xi_2)$ ist also in **D** regulär (meromorph). Andererseits gibt es zu **D** eine Funktion $f(\xi_1, \xi_2)$, die in **D** regulär ist, aber alle Randpunkte von **D** zu wesentlich singulären Punkten hat. Also ist $\mathbf{D} = \mathbf{H}(\mathbf{D} - \mathbf{K})$.



Der Beweis der oben formulierten allgemeinen Aussage über die Hüllen Reinhardtscher Körper stützt sich in ähnlicher Weise auf den Kontinuitätssatz [20].

Mit den Reinhardtschen Körpern sind eng verwandt die Tubengebiete. Das sind Gebiete, die alle Transformationen

$$\xi_\nu^* = \xi_\nu + i \cdot \Theta_\nu, \quad -\infty < \Theta_\nu < +\infty, \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

[20] Siehe a. a. O. [5]; ferner PETER THULLEN, *Dominios de Regularidad y Dominios de Meromorfia de Reinhardt*, « Revista de la Unión Matemática Argentina », *11* (1945), 33-46, und H. J. BREMERMANN, *Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen*, « Schriftenreihe des Math. Inst. d. Univ. Münster », *5* (1951), 1-92.

in sich zulassen. Die Konstruktion ihrer Hüllen ist von verschiedenen Autoren durchgeführt [21]. Das Ergebnis ist: Die Regularitätshülle eines Tubengebietes **T** ist die im elementargeometrischen Sinne konvexe Hülle von **T**, also insbesondere wieder ein Tubengebiet. Die Meromorphiehülle von **T** ist mit der Regularitätshülle von **T** identisch.

Weiter lassen sich mit Hilfe des Kontinuitätssatzes die Hüllen der Hartogsschen Körper und der mit ihnen verwandten Halbtubengebiete herstellen. Das sind Körper, die Transformationen des Typus (1) bzw. (2) in einigen Veränderlichen, aber nicht notwendig in allen, zulassen. Die Hüllen solcher Gebiete werden durch super- und subharmonische Funktionen charakterisiert [22].

Schliesslich lässt sich so die Konstruktion der Hüllen aller kreissymmetrischen Körper durchführen [23]. Dabei ergibt sich, dass diese Hüllen wiederum kreissymmetrisch mit derselben diese Symmetrie charakterisierenden Transformationsgruppe sind. Man hat hier wie bei den Tubengebieten einen Spezialfall des allgemeinen Satzes, dass die Hülle **H**(**G**) eines Gebietes **G** stets die Transformationen in sich zulässt, die **G** aufweist. Bei der Untersuchung von Hüllen kreissymmetrischer Gebiete wurde auch zum ersten Mal festgestellt, dass die Hüllen schlichter Gebiete nicht notwendig wieder schlicht sein müssen [24].

7. Der Hartogs-Osgoodsche Satz wie auch der Satz von E. E. Levi [25] liefern schon Beispiele dafür, dass die Regularitäts- bzw. Meromorphiehülle einer niederdimensionalen Punktmenge im Raume von n komplexen Veränderlichen $2n$-dimensionale Gebiete enthalten kann. Ist **G** ein beschränktes Gebiet im R^{2n} mit zusammenhängendem Rande **R**, so ist **G** sowohl in der Regularitätshülle wie in der Meromorphiehülle von **R** enthalten. Die entsprechende Aussage kann sicher nicht für *alle* unbeschränkten Gebiete gelten. Schliesst man den R^{2n} zum projektiv-komplexen Raum $\bar{R}^{2n}$ ab, so lassen sich die Gebiete im $\bar{R}^{2n}$, für welche die Sätze von Hartogs-Osgood und E. E. Levi

---

(21) Siehe K. Stein a. a. O. (5), insbesondere p. 556 ff.; S. Bochner, *A theorem of analytic continuation of functions in several variables*, « Annals of Math. », *39* (1938), 14-19; S. Hitotumatu, *Note on the envelope of regularity of a tube-domain*, « Proc. of the Jap. Acad. », *26* (1950), 21-25. Ferner siehe im allgemeineren Zusammenhang H. J. Bremermann a. a. O. (20) und P. Lelong, *La convexité et les fcs. analytiques de pl. v. c.*, « Journal d. Math. ». *31* (1952), 191-219.

(22) Siehe H. J. Bremermann a. a. O. (20) und P. Lelong a. a. O. (21).

(23) Siehe B.-Th. Bericht, Kap. 2, § 4.

(24) Siehe P. Thullen, *Die Regularitätshüllen*, « Math. Ann. », *106* (1932), 64-76 und Henri Cartan, *Sur une classe remarquable de domaines*. « Comptes rendus », *192* (1931), 1077-1079.

(25) Vgl. zweiter Absatz von 1.

gelten, genau angeben ([26]). Es sind diejenigen Gebiete G, die Teilgebiete mit zusammenhängendem Rande von Regularitätsgebieten im $\bar{R}^{2n}$ sind. Insbesondere gilt dieser Satz für alle Regularitätsgebiete G im $\bar{R}^{2n}$, weil in diesem Falle der Rand von G stets zusammenhängend ist ([27]). Schliesst man den R^{2n} wie bei OSGOOD getrennt ab nach den einzelnen Veränderlichen, so sind die entsprechenden Aussagen komplizierter.

Aussagen dieser Art lassen sich auch für Gebiete G in komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten aussprechen, insbesondere in den *vollständigen, offenen, komplexen Mannigfaltigkeiten* (abgekürzt: vollständige Mannigfaltigkeiten). Dies sind $2n$-dimensionale komplex-analytische Mannigfaltigkeiten $\mathbf{M}^{2n}$, die den folgenden Bedingungen genügen ([28]): 1) *(Separabilität):* Zu je zwei Punkten von $\mathbf{M}^{2n}$ gibt es eine in $\mathbf{M}^{2n}$ reguläre und eindeutige Funktion, die in den beiden Punkten verschiedene Werte annimmt. — 2) *(Fortsetzbarkeit lokaler Koordinaten):* Zu jedem Punkte P von $\mathbf{M}^{2n}$ gibt es ein lokales Koordinatensystem $z_1^{(P)}, \ldots, z_n^{(P)}$, derart, dass die $z_\nu^{(P)}$ sich als reguläre eindeutige Funktionen in ganz $\mathbf{M}^{2n}$ hinein fortsetzen lassen. — 3) *(Regulärkonvexität):* Zu jeder kompakten Teilmenge $\mathbf{E}_0$ von $\mathbf{M}^{2n}$ gibt es eine $\mathbf{E}_0$ umfassende kompakte Teilmenge $\mathbf{E}_1$ von $\mathbf{M}^{2n}$, derart, dass zu jedem Punkte P von $\mathbf{M}^{2n}$, der nicht zu $\mathbf{E}_1$ gehört, eine in $\mathbf{M}^{2n}$ reguläre eindeutige Funktion f existiert, so dass

$$|f(P)| > \mathrm{Max}\,|f(\mathbf{E}_0)|$$

gilt. - *Ist $n > 1$, so gelten für alle in bezug auf $\mathbf{M}^{2n}$ relativ kompakten Teilgebiete G mit zusammenhängendem Rande* **R** *wieder Analoga zu den Sätzen von Hartogs-Osgood und E. E. Levi* ([28a]).

Diese Sätze machen zugleich Aussagen über die topologische Struktur der vollständigen Mannigfaltigkeit $\mathbf{M}^{2n}$, und zwar in folgendem Sinne: Nimmt man aus $\mathbf{M}^{2n}$ ein relativ in bezug auf $\mathbf{M}^{2n}$ kompaktes Gebiet G mit zusammenhängendem Rande heraus, so kann $\mathbf{M}^{2n} - \mathrm{G}$ keine vollständige Mannigfaltigkeit sein. Anderenfalls würde sich eine in $\mathbf{M}^{2n} - \mathrm{G}$ reguläre Funktion konstruieren lassen, die den Rand von G als natürliche Grenze besitzt. Aus

---

([26]) Siehe F. SOMMER, *Bereiche ohne geschlossene innere Singularitätenmannigfaltigkeiten*, « Math. Ann. », *114* (1937), 441-465.

([27]) Siehe B. CACCIOPPOLI, « Atti 1. congr. Univ. Mat. Ital. », (1938), 183-186 und H. BEHNKE, *Über die Fortsetzbarkeit analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen und den Zusammenhang der Singularitäten*, « Math. Ann. », *117* (1939), 89-97.

([28]) Siehe K. STEIN, *Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem*, « Math. Ann. », *123* (1951), 201-222 sowie H. CARTAN, Séminaire 1951-52, Exp. IX.

([28a]) Die Beweise werden an anderer Stelle durchgeführt werden.

dem Satz von HARTOGS-OSGOOD würde aber die Fortsetzbarkeit dieser Funktion ins Innere von **G** folgen ([29]).

Sehr allgemeine Aussagen über die topologische Struktur der vollständigen Mannigfaltigkeiten $\mathbf{M}^{2n}$ sind von H. CARTAN und J. P. SERRE erzielt worden ([30]). Nach ihnen sind die Bettischen Gruppen B^k für $k > n$ sämtlich Null. Das bedeutet insbesondere, dass, falls $n > 1$, jede in $\mathbf{M}^{2n}$ gelegene $(2n-1)$-dimensionale geschlossene Hyperfläche in $\mathbf{M}^{2n}$ beranden muss, eine Aussage, die offenbar mit der oben von uns angegebenen in enger Beziehung steht.

Auf vollständigen Mannigfaltigkeiten lassen sich wie in 4. analytische Schichtflächen erklären. In 4. ist die auf analytische Schichtflächen des Raumes von n komplexen Veränderlichen bezügliche Verallgemeinerung der Severischen Aussage behandelt worden. Eine entsprechende Aussage (und damit eine weitere Verallgemeinerung der Severischen Aussage) lässt sich nun auch für analytische Schichtflächen in vollständigen Mannigfaltigkeiten aussprechen.

Alle diese Aussagen liefern weitere Beispiele dafür, dass die Regularitäts- bzw. Meromorphiehülle $\mathbf{H}(\mathbf{A})$ einer Punktmenge $\mathbf{A}$ eine höhere Dimension als $\mathbf{A}$ haben kann. Die Beispiele dieses Abschnittes sind alle von folgendem Typus: Vorgegeben ist eine Punktmenge $\mathbf{B}$ mit Rand $\mathbf{R}$, derart dass die Hülle $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ die Punktmenge $\mathbf{B}$ umfasst. Im Abschnitt 3 haben wir gezeigt, dass es Fälle gibt, in denen $\mathbf{R}$ durch einen Teil $\mathbf{R}^*$ von sich ersetzt werden darf und gleichwohl auch jetzt noch $\mathbf{H}(\mathbf{R}^*)$ die Punktmenge $\mathbf{B}$ umfasst. Die Hülle einer Punktmenge $\mathbf{A}$ kann also auch von höherer Dimension als $\mathbf{A}$ sein, ohne dass $\mathbf{A}$ vollständiger Rand einer anderen Punktmenge (d. h. nullhomolog) ist. Für den besonderen Fall, dass $\mathbf{A}$ ein zweimal stetig differenzierbares Hyperflächenstück (der Dimension $2n-1$) im R^{2n} ist, enthält $\mathbf{H}(\mathbf{A})$ ein $2n$-dimensionales Gebiet stets dann, wenn $\mathbf{A}$ nicht natürliche Grenze analytischer Funktionen von beiden Seiten ist. Trifft dies für $\mathbf{A}$ nicht zu, so kann $\mathbf{H}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ sein ([31]).

Es kann auch vorkommen, dass die Dimension der Hülle $\mathbf{H}(\mathbf{A})$ einer Punktmenge $\mathbf{A}$ mindestens um 2 grösser ist als die Dimension von $\mathbf{A}$. Beispiel: $\mathbf{A}$ sei die Gesamtheit der zweidimensionalen Kanten eines vierdimensionalen Simplexes S^4 im R^4. Dann ist $\mathbf{H}(\mathbf{A}) = \mathbf{S}^4$ ([32]).

8. Angesichts der fundamentalen Bedeutung des Kontinuitätssatzes tritt die Frage auf, ob die Voraussetzungen dieses Satzes sämtlich wesentlich sind

([29]) Zum Beweise wird der Satz von HARTOGS-OSGOOD auf ein geeignetes G umfassendes Gebiet G' angewandt.

([30]) H. CARTAN, Séminaire 1951-52. Exp. XVIII-XX.

([31]) A. a. O. ([5]).

([32]) A. a. O. ([5]).

oder aber vielleicht noch eingeschränkt werden können (33). In den obigen Aussagen wird immer vorausgesetzt, dass die Flächen $\mathbf{F}_\mu^{2k}$ und $\mathbf{F}_0^{2k}$ $2k$-dimensionale analytische Flächen sind. Lässt sich der analytische Charakter von $\mathbf{F}_0^{2k}$ aufgeben? (Das würde bedeuten, dass auch fast alle $\mathbf{F}_\mu^{2k}$ nicht mehr als analytische Flächen vorausgesetzt werden können). Beim ersten der hier in 5. dargestellten Beweise (nämlich des Kontinuitätssatzes bezüglich regulärer Funktionen) wird an Eigenschaften der $\mathbf{F}_\mu^{2k}$ nur benutzt, dass wegen ihres analytischen Charakters das Maximumprinzip auf ihnen gilt. Für jede andere Klasse von Flächen $\mathbf{F}_\mu$ (auch ungerader Dimension), die dem Maximumprinzip für analytische Funktionen genügen, lässt sich daher auch ein Kontinuitätssatz (zum mindesten für reguläre Funktionen) aufstellen. Ist das Maximumprinzip auf $\mathbf{F}_0$ nicht erfüllt, so gilt der Kontinuitätssatz sicher nicht mehr uneingeschränkt (34). Die Klassifikation der Flächen mit Maximumprinzip im R^{2n} ist für beliebiges n bisher nicht durchgeführt, ausser für den Fall der Flächen von der Dimension $2n-1$. In diesem Falle sind es genau die analytischen Schichtflächen. Im Raume von zwei komplexen Veränderlichen lassen sich dagegen die Flächen mit Maximumprinzip vollständig angeben. Es sind neben den dreidimensionalen analytischen Schichtflächen mit zweidimensionalen analytischen Schichten (analytische Hyperflächen) nur noch die zweidimensionalen analytischen Flächen. So gilt z. B. auf keiner zweidimensionalen Ebene des R^4, die nicht analytische Ebene ist, das Maximumprinzip und damit nicht der Kontinuitätssatz mit dieser Ebene als Grenzfläche $\mathbf{F}_0$.

9. Der Kontinuitätssatz betrifft die Fortsetzung analytischer Funktionen. Nun gibt es ganz analoge Aussagen, die sich nicht auf analytische Funktionen, sondern auf andere Objekte beziehen.

GASTON JULIA hat 1926 in seiner grossen Arbeit « Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables » (35) einen Kontinuitätssatz für die Normalität von Familien regulärer Funktionen aufgestellt und dann, wie HARTOGS und E. E. LEVI für die Regularitäts- und Meromorphiegebiete, notwendige Bedingungen für die Normalitätsgebiete abgeleitet. Überraschend war damals die völlige Übereinstimmung dieser Bedingungen. 1932 haben dann H. CARTAN und P. THULLEN gezeigt (36), dass die Regularitätsgebiete mit den Normalitätsgebieten erster Art (37) übereinstimmen und dass die

(33) H. BEHNKE und F. SOMMER, *Über die Voraussetzungen des Kontinuitätssatzes*, « Math. Ann. », *121* (1950), 356-378.

(34) A. a. O. (33), p. 364, Satz 3.

(35) « Acta math. », *47* (1926) 53-115.

(36) Siehe die in (12) zitierte Arbeit von H. CARTAN und P. THULLEN.

(37) Eine gleichmässig konvergente Folge regulärer Funktionen heisst eine Folge erster bzw. zweiter Art, je nachdem die Grenzfunktion eine reguläre Funktion oder die Konstante ∞ ist. Eine in einem Gebiete G normale Familie F heisst dort von erster bzw. zweiter Art.

Normalitätsgebiete zweiter Art Meromorphiegebiete und zugleich meromorph-konvex sind. Darauf wurde 1938 von uns nachgewiesen, dass jedes meromorph-konvexe Gebiet, falls es schlicht ist, Regularitätsgebiet ist ([38]). Also ist jedes schlichte Normalitätsgebiet Existenzgebiet einer regulären Funktion und damit k-konvex. Das bedeutet, dass sich ganz analog wie in 5. ein allgemeiner Kontinuitätssatz für normale Familien regulärer Funktionen aufstellen lässt, der den oben erwähnten Satz von JULIA — von ihm nur für zwei Veränderliche formuliert — umfasst. Er lautet: $\mathbf{F}_0^{2k}$ sei eine $2k$-dimensionale analytische Fläche in einem Gebiete $\mathbf{B}^{2n}$ des R^{2n}. $\mathbf{G}_0^{2k}$ sei ein $2k$-dimensionales auf $\mathbf{F}_0^{2k}$ gelegenes Gebiet, das relativ in bezug auf $\mathbf{F}_0^{2k}$ kompakt ist, mit dem Rande $\mathbf{C}_0^{2k-1}$. Ferner sei $\mathbf{F}_1^{2k}, \mathbf{F}_2^{2k}, \ldots$ eine Folge analytischer Flächen in $\mathbf{B}^{2n}$, die gleichmässig gegen $\mathbf{F}_0^{2k}$ konvergieren. Auf jeder Fläche $\mathbf{F}_\mu^{2k}$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ sei ein relativ kompaktes Gebiet $\mathbf{G}_\mu^{2k}$ mit dem Rande $\mathbf{C}_\mu^{2k-1}$ gegeben, wobei mit wachsendem μ die $\mathbf{G}_\mu^{2k}$ gleichmässig gegen $\mathbf{G}_0^{2k}$ und die $\mathbf{C}_\mu^{2k-1}$ gleichmässig gegen $\mathbf{C}_0^{2k-1}$ konvergieren. Sei ferner Z eine Familie von Funktionen $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, deren Regularitätsgebiete ein schlichtes Gebiet $\mathbf{D}(Z)$ als Durchschnitt besitzen. Gehören dann alle Punkte von $\mathbf{C}_0^{2k-1}$ sowie alle Punkte jedes $\mathbf{G}_\mu^{2k} \cup \mathbf{C}_\mu^{2k-1}$ zu $\mathbf{D}(Z)$ und ist Z normal in diesen Punkten, so gehören auch die Punkte von $\mathbf{G}_0^{2k}$ zu $\mathbf{D}(Z)$, und Z bleibt in allen diesen Punkten normal. - Die Fortsetzbarkeit der Funktionen von Z in die Punkte von $\mathbf{G}_0^{2k}$ folgt unmittelbar aus dem Kontinuitätssatz in 5. Die Normalität von Z in $\mathbf{G}_0^{2k}$ ergibt sich wie in 5., indem man ausnutzt, dass das Normalitätsgebiet von Z k-konvex ist.

Es lässt sich zeigen, was hier nicht ausgeführt werden soll, dass die Voraussetzung über die Schlichtheit von $\mathbf{D}(Z)$ ersetzt werden darf durch die Forderung, dass das Gebiet $\mathbf{B}^{2n}$, in welchem die analytische Fläche $\mathbf{F}_0^{2k}$ gegeben ist, Regularitätsgebiet ist.

W. SAXER hat den Kontinuitätssatz von G. JULIA auf normale Familien meromorpher Funktionen ausgedehnt ([39]); das bedeutet, dass die Normalitätsgebiete meromorpher Familien ebenfalls den erwähnten Bedingungen von JULIA bzw. HARTOGS-LEVI genügen. Anders als im Falle regulärer Funktionen kann hier jedoch nicht aus der Theorie von CARTAN-THULLEN die

---

jenachdem jede in G gleichmässig konvergente Folge von Funktionen aus F eine Folge erster Art ist oder aber in F mindestens eine Folge zweiter Art existiert. Das zugehörige Normalitätsgebiet nennt man ein Normalitätsgebiet erster bzw. zweiter Art.

([38]) Vgl. die in ([14]) zitierte Arbeit sowie die Arbeit der Verf.: *Konvergente Folgen nichtschlichter Regularitätsbereiche*, « Ann. Mat. pura appl. », Bologna, IV, *28* (1949), 317-326. In dieser Arbeit wird die obige Aussage auf fast-endlich-blättrige Gebiete über dem R^{2n} ausgedehnt.

([39]) W. SAXER, *Über die normalen Scharen meromorpher Funktionen mehrerer Variablen*, « Comm. math. helv. », *4* (1932), 256-267 und *Sur les domaines de normalité d. fcs. mérom. d. pl. v. c.*, « J. Math. pur. appl. », IX, *31* (1952). 49-51.

Regulär- bzw. Meromorphiekonvexität dieser Gebiete erschlossen werden. Doch gibt es im Falle der Funktionen zweier Veränderlichen (auf den sich JULIA und SAXER beschränken) einen anderen Weg, dies nachzuweisen. K. OKA hat in seiner grundlegenden Arbeit « Domaines pseudoconvexes » (40) gezeigt, dass Gebiete im R^4, die den Bedingungen von HARTOGS-LEVI genügen, Regularitätsgebiete sind. Mit Hilfe der Regulärkonvexität lässt sich dann, gestützt auf den Saxerschen Kontinuitätssatz, im R^4 das Analogon des oben formulierten allgemeinen Kontinuitätssatzes für normale Familien auch im Falle meromorpher Funktionen nachweisen. Im R^{2n}, $n > 2$, ist die entsprechende Aussage bisher noch nicht bewiesen.

Eine weitere Übertragung des Kontinuitätssatzes auf andere Objekte ist von W. ROTHSTEIN vorgenommen worden (41). Diese sind bei ihm analytische Mengen von mindestens vierter Dimension im R^{2n}, $n \geq 3$. Die Aussage lautet ganz entsprechend wie in 5.; nur tritt an Stelle der Funktion f eine rein $2l$-dimensionale analytische Menge $\mathbf{M}^{2l}$, $l \geq 2$, und die Gebiete G_μ^{2k} auf den $\mathbf{F}_\mu^{2k}$ unterliegen einer gewissen Einschränkung. Besonders zu beachten ist, dass aus dieser Rothsteinschen Übertragung des Kontinuitätssatzes ein Analogon zum Hartogs-Osgoodschen Satz folgt. Eine spezielle Fassung davon lautet: Ist $\mathbf{M}^{2l}$ eine rein $2l$-dimensionale analytische Menge, $l \geq 2$, die in einer Umgebung des Randes eines Regularitätsgebietes $\mathbf{G}^{2n}$ im R^{2n}, $n \geq 3$, $n > l$, vorgegeben ist, so lässt sich $\mathbf{M}^{2l}$ in das gesamte Innere von $\mathbf{G}^{2n}$ fortsetzen. Für $l = 1$ wird die Aussage falsch, desgleichen wenn $\mathbf{G}^{2n}$ kein Regularitätsgebiet ist.

(40) « The Tohôku Math. J. », *49* (1942), 15-52.

(41) W. ROTHSTEIN, *Die Fortsetzung vier- und höherdimensionaler analytischer Flächen des R^{2n}* ($n \geq 3$), « Math. Ann. », *121* (1950), 340-355 und *Über die Fortsetzung analytischer Flächen,* « Math. Ann. », *122* (1951), 424-434.