Formule di maggiorazione connesse ad una classe di trasformazioni lineari (*).

Memoria di GAETANO FICHERA (a Trieste).

Sunto. - Si costruisce un funzionale $F(v)$ i cui valori sono limitati inferiormente dal modulo di una trasformazione lineare, che verifica opportune ipotesi. Come applicazione vengono ottenute formole di maggiorazione globale per le soluzioni di talune equazioni differenziali lineari.

Siano S ed S' due spazi di BANACH lineari rispetto allo stesso corpo numerico reale N ⁽¹⁾ e sia

$$(1) \quad u' = T(u)$$

una trasformazione lineare di S in una varietà lineare $T(S)$ di S' . Dicendo che la trasformazione è lineare, intendo che:

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$$

quali si siano i due punti u e v di S e i due numeri a e b di N .

Supponiamo che esista la trasformazione inversa della (1):

$$(2) \quad u = T^{-1}(u')$$

ovviamente lineare, e che sia continua.

Scopo del presente lavoro è di far conoscere, in opportune ipotesi per la trasformazione data e la sua inversa, un metodo per la maggiorazione del modulo della (2), cioè un procedimento per ottenere valori per eccesso dell'estremo superiore $\mu(T^{-1})$ del funzionale:

$$\frac{\|T^{-1}(u')\|}{\|u'\|} \quad [u' \in T(S) - \omega', \omega' = \text{origine di } S'].$$

La classe di trasformazioni che considereremo include quella relativa ad una categoria di trasformazioni connesse con problemi al contorno per equazioni differenziali lineari, fra i quali rientrano quelli relativi ai classici problemi al contorno per le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico e di tipo parabolico.

(*) Lavoro eseguito per l'INAC nell'Istituto matematico dell'Università di Trieste. I risultati di esso, furono comunicati al Congresso della Società Matematica Austriaca a Salisburgo (9-15 settembre 1952) ed esposti in una conferenza, tenuta presso l'Istituto Matematico dell'Università di Napoli (4 maggio 1953).

(1) G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I, Istituto Matematico, Università di Trieste.

L'interesse, anche pratico, delle formule di maggiorazione, ottenute nel presente lavoro, risiede nella possibilità, che esse offrono, di fornire una limitazione per l'errore di approssimazione, relativo a procedimenti di calcolo delle soluzioni di equazioni lineari ⁽²⁾.

Per quanto riguarda le equazioni differenziali del tipo anzidetto, credo che venga per la prima volta risoluto in modo esauriente il problema della maggiorazione dell'errore relativo all'applicazione del classico metodo d'approssimazione, cosiddetto dei minimi quadrati.

Si perverrà, fra l'altro, a portare un ulteriore contributo ad un risultato di RENATO CACCIOPOLI, relativo ad una limitazione globale per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari di tipo ellittico ⁽³⁾.

1. Teoremi generali. - Siano $B_1, B_2, \dots, B_n; G_1, G_2, \dots, G_m, n+m$ insiemi boreliani rispettivamente appartenenti agli spazi euclidei $S_{k_1}, S_{k_2}, \dots, S_{k_n}; S_{h_1}, S_{h_2}, \dots, S_{h_m}$.

Sia S_B una varietà lineare, rispetto al corpo reale N , di vettori $u \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ad n componenti reali di cui la i -esima sia definita in B_i ed S_G una varietà lineare di vettori $U \equiv (U_1, U_2, \dots, U_m)$ con U_j (reale) definita in G_j . Nella varietà lineare $S_B^{(0)}$ contenuta in S_B siano definite le trasformazioni lineari:

$$v = E(u), \quad v = E^*(u),$$

aventi codomini:

$$E(S_B^{(0)}) \quad \text{e} \quad E^*(S_B^{(0)})$$

contenuti in S_B e contenenti $S_B^{(0)}$. Siano anche definite in $S_B^{(0)}$ le trasformazioni lineari:

$$U = L(u), \quad U = L^*(u), \quad U = M(u), \quad U = M^*(u)$$

con codomini:

$$L(S_B^{(0)}), \quad L^*(S_B^{(0)}), \quad M(S_B^{(0)}), \quad M^*(S_B^{(0)})$$

contenuti in S_G .

Supporremo che in B_i e in G_j siano definite le due funzioni completamente additive non negative d'insieme $\beta_i(E_i)$ e $\gamma_j(I_j)$ per tutti gli insiemi boreliani E_i ed I_j rispettivamente contenuti in B_i e G_j .

⁽²⁾ Cfr. G. FICHERA, loc. cit ⁽¹⁾, pp. 250-253.

⁽³⁾ Cfr. R. CACCIOPOLI, *Limitazioni per le soluzioni di una equazione lineare ellittica a derivate parziali*, « Giornale di Matematiche di Battaglini », vol. 80, pp. 186-212, (1950-51).

I vettori u di S_B e U di S_G siano tali che per ognuno di essi esistano finiti gli integrali di LEBESGUE-STIELTJES:

$$\int_{B_i} u_i^2 d\beta_i, \quad \int_{G_j} U_j^2 d\gamma_j.$$

Porremo, detti u e v vettori di S_B :

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{B_i} u_i v_i d\beta_i$$

e detti U e V due vettori di S_G :

$$(U, V) = \sum_{j=1}^m \int_{G_j} U_j V_j d\gamma_j.$$

Epperò S_B ed S_G sono spazi hilbertiani.

Faremo la seguente prima ipotesi fondamentale:

1^a) *Assunti comunque due vettori u e v in $S_B^{(0)}$ sussiste l'identità:*

$$(1) \quad (u, E^*(v)) - (v, E(u)) = (M^*(u), L^*(v)) - (M(v), L(u)).$$

Sia S' lo spazio hilbertiano $S_B \times S_G$ il cui elemento generico indicheremo con $u' \equiv \{u, U\}$.

Consideriamo le due trasformazioni lineari di $S \equiv S_B^{(0)}$ in S' :

$$u' = T(u) \equiv \{E(u), L(u)\}; \quad u' = T^*(u) \equiv \{E^*(u), L^*(u)\}$$

e facciamo la seguente ipotesi fondamentale:

2^a) *Esistono le trasformazioni inverse della $T(u)$ e della $T^*(u)$*

$$u = T^{-1}(u'), \quad u = T^{*-1}(u').$$

Indicato con ω l'elemento nullo in S_B e con Ω quello in S_G , poniamo:

$$u'_1 \equiv \{u, \Omega\}, \quad u'_2 \equiv \{\omega, U\},$$

per modo che

$$u' = u'_1 + u'_2.$$

Poniamo inoltre:

$$\begin{aligned} E^{-1}(u) &= T^{-1}(u'_1), & L^{-1}(U) &= T^{-1}(u'_2), \\ E^{*-1}(u) &= T^{*-1}(u'_1), & L^{*-1}(U) &= T^{*-1}(u'_2) \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} T^{-1}(u') &= E^{-1}(u) + L^{-1}(U), \\ T^{*-1}(u') &= E^{*-1}(u) + L^{*-1}(U). \end{aligned}$$

Considereremo la seguente terza ipotesi fondamentale:

3^a) Il codominio $L(S_B^{(0)})$ di L è una base per S_G (*).

Avvertiamo che indicheremo con $E_i(u)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $L_j(u)$, $M_j(u)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) le componenti, rispettivamente, di $E(u)$, $L(u)$ ed $M(u)$.

Analogamente con $E_i^{-1}(u)$ e $L_i^{-1}(u)$ indicheremo le componenti di $E^{-1}(u)$ ed $L^{-1}(u)$.

Sussiste il seguente teorema:

I. - Il funzionale:

$$I(u) = \frac{\|u\|^2}{\|T(u)\|^2} = \frac{\|u\|^2}{\|E(u)\|^2 + \|L(u)\|^2}$$

sia dotato di massimo in $S_B^{(0)} - \omega$ ed esista un vettore u_0 massimante $I(u)$ tale che tutte le componenti del vettore $T(u_0)$ siano non negative.

Sia Γ l'insieme, supposto non vuoto, dei vettori w di $S_B^{(0)}$ per ognuno dei quali si ha:

$$E^*(w) \subset S_B^{(0)}, \quad L^*(w) = \Omega, \quad E_i E^*(w) > 0, \quad L_j E^*(w) > 0.$$

Detto $F(w)$ il maggiore fra gli $n + m$ numeri:

$$\text{estr. sup.}_{B_i} \frac{w_i}{E_i E^*(w)}, \quad \text{estr. sup.}_{G_j} \frac{-M_j(w)}{L_j E^*(w)},$$

se sono soddisfatte le ipotesi 1^a), 2^a), 3^a), si ha:

$$\max_{u \in S_B^{(0)} - \omega} I(u) \leq \text{estr. inf.}_{w \in \Gamma} F(w) \quad (5)$$

e quindi:

$$(2) \quad \|u\|^2 \leq F(w) [\|E(u)\|^2 + \|L(u)\|^2].$$

Per ogni $u \in S_B^{(0)}$ consideriamo il vettore v verificante le equazioni:

$$E^*(v) = u, \quad L^*(v) = \Omega;$$

tale vettore esiste ed è unico, avendo noi ammesso che la T^* è dotata di trasformazione inversa e che $E^*(S_B^{(0)}) \supset S_B^{(0)}$.

Anzichè considerare il funzionale $I(u)$ definito in $S_B^{(0)} - \omega$, potremo considerare il funzionale:

$$J(v) = \frac{\|E^*(v)\|^2}{\|EE^*(v)\|^2 + \|LE^*(v)\|^2},$$

definito in $E^{*-1}(S_B^{(0)}) - \omega$. Esisterà un vettore v_0 massimante $J(v)$, tale che le funzioni $E_i E^*(v_0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $L_j E^*(v_0)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) siano tutte non negative.

(*) Ciò significa che $L(S_B^{(0)})$ è denso in S_G . Cfr. loc. cit. (*), pag. 28.

(5) Si conviene, eventualmente, di attribuire al funzionale $F(w)$, definito in Γ , anche il valore $+\infty$ in corrispondenza a qualche w .

Detto v un qualsiasi fissato vettore $\neq \omega$ della varietà lineare $E^{*-1}(S_B^{(0)})$ e considerata la funzione di $\varepsilon: J(v_0 + \varepsilon v)$, la condizione:

$$\left[\frac{dJ(v_0 + \varepsilon v)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = 0$$

fornisce:

$$\begin{aligned} & (E^*(v), E^*(v_0))(\|EE^*(v_0)\|^2 + \|LE^*(v_0)\|^2) = \\ & = \|E^*(v_0)\|^2[(EE^*(v), EE^*(v_0)) + (LE^*(v), LE^*(v_0))]. \end{aligned}$$

Posto:

$$\mu = \max_{u \in S_B^{(0)} - \omega} I(u)$$

si ha:

$$(3) \quad (E^*(v), E^*(v_0)) = \mu[(EE^*(v), EE^*(v_0)) + (LE^*(v), LE^*(v_0))].$$

Dalla (1) si ha d'altra parte, tenendo presente che $L^*(v) = L^*(v_0) = \Omega$:

$$(4) \quad (E^*(v), E^*(v_0)) = (v_0, EE^*(v)) - (M(v_0), LE^*(v)).$$

Da (3) e (4) si trae

$$(5) \quad (v_0 - \mu EE^*(v_0), EE^*(v)) = (M(v_0) + \mu LE^*(v_0), LE^*(v)).$$

Sia u un vettore di $S_B^{(0)}$ soluzione delle equazioni

$$E(u) = v_0 - \mu EE^*(v_0), \quad L(u) = \Omega.$$

Tale vettore certo esiste in virtù dell'ipotesi 2^a) e dato che

$$v_0 \in E^{*-1}(S_B^{(0)}) \subset S_B^{(0)} \subset E(S_B^{(0)}); \quad EE^*(v_0) \in E(S_B^{(0)}).$$

Dalla (5) si trae, ponendovi $v = E^{*-1}(u)$

$$\|v_0 - \mu EE^*(v_0)\| = 0$$

e quindi:

$$v_0 - \mu EE^*(v_0) = \omega.$$

Si ha allora, detto u un qualsiasi vettore di $S_B^{(0)}$:

$$(M(v_0) + \mu LE^*(v_0), L(u)) = 0$$

ma essendo (3^a ipotesi) $L(S_B^{(0)})$ una base per S_G , deve essere:

$$W = M(v_0) + \mu LE^*(v_0) = \Omega.$$

Infatti, dato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, deve esserci un $u_\varepsilon \in S_B^{(0)}$ tale che:

$$\|W - L(u_\varepsilon)\| < \frac{\varepsilon}{\|W\|}.$$

Ne segue:

$$\|W\|^2 = (W, W - L(u_\varepsilon)) \leq \|W\| \|W - L(u_\varepsilon)\| < \varepsilon.$$

Abbiamo così dimostrato che il vettore v_0 massimante $J(v)$ è soluzione del seguente sistema:

$$(6) \quad \begin{cases} v_0 - \mu EE^*(v_0) = \omega, \\ M(v_0) + \mu LE^*(v_0) = \Omega. \end{cases}$$

Sia ora w un qualsiasi vettore appartenente a Γ . Consideriamo in corrispondenza le funzioni:

$$f_i = \mu - \frac{w_i}{E_i E^*(w)}.$$

Supponiamo vi sia un punto x_i in uno dei B_i in cui $f_i \leq 0$. Sarà allora:

$$\text{estr. inf. } f_i = \mu - \text{estr. sup. } \frac{w_i}{E_i E^*(w)} \leq 0$$

e quindi $F(w) \geq \mu$.

Supponiamo che in ogni B_i riesca $f_i > 0$.

Indicando con v_0 il vettore massimante, sopra specificato, e detto B_i' l'insieme dei punti di B_i in cui $E_i E^*(v_0) = 0$ (e quindi anche $v_{0i} = 0$), si ha in $B - B_i'$:

$$f_i = \frac{v_{0i}}{E_i E^*(v_0)} - \frac{w_i}{E_i E^*(w)} = \frac{v_{0i} E_i E^*(w) - w_i E_i E^*(v_0)}{E_i E^*(v_0) \cdot E_i E^*(w)}$$

e quindi:

$$\int_{B_i} [v_{0i} E_i E^*(w) - w_i E_i E^*(v_0)] d\beta_i \geq 0.$$

Ne segue:

$$(7) \quad (v_0, EE^*(w)) - (w, EE^*(v_0)) \geq 0.$$

Si ha d'altra parte:

$$\begin{aligned} & (v_0, EE^*(w)) - (E^*(w), E^*(v_0)) + (E^*(w), E^*(v_0)) - (w, EE^*(v_0)) = \\ & = - (M^* E^*(w), L^*(v_0)) + (M(v_0), LE^*(w)) + (M^* E^*(v_0), L^*(w)) - (M(w), LE^*(v_0)) \end{aligned}$$

e quindi, ricordando che $L^*(v_0) = L^*(w) = \Omega$, per la (7) si trae:

$$(8) \quad (M(v_0), LE^*(w)) - (M(w), LE^*(v_0)) \geq 0.$$

Si considerino ora le funzioni:

$$g_j = \mu + \frac{M_j(w)}{L_j E^*(w)}.$$

Si ha in $G_j - G_j'$, essendo G_j' l'insieme in cui si annullano $M_j(v_0)$ e $L_j E^*(v_0)$:

$$g_j = - \frac{M_j(v_0)}{L_j E^*(v_0)} + \frac{M_j(w)}{L_j E^*(w)} = \frac{-M_j(v_0) \cdot L_j E^*(w) + M_j(w) \cdot L_j E^*(v_0)}{L_j E^*(v_0) \cdot L_j E^*(w)}.$$

Ma in virtù della (8) deve essere:

$$\sum_{j=1}^m \int_{G_j} [M_j(w) L_j E^*(v_0) - M_j(v_0) L_j E^*(w)] d\gamma_j \leq 0$$

e quindi vi sarà almeno un indice j per il quale:

$$\int_{G_j} [M_j(w) L_j E^*(v_0) - M_j(v_0) L_j E^*(w)] d\gamma_j \leq 0.$$

Ciò implica, essendo $L_j E^*(v_0) \cdot L_j E^*(w) \geq 0$, che in qualche punto α_j di $G_j - G_j'$ sarà $g_j \leq 0$.

Ne segue:

$$\text{estr. inf.}_{G_j} g_j = \mu - \text{estr. sup.}_{G_j} \frac{-M_j(w)}{L_j E^*(w)} \leq 0$$

e quindi:

$$\mu \leq F(w).$$

Il teorema è così completamente dimostrato.

In modo perfettamente analogo si dimostra il seguente:

II. - Il funzionale $I(u)$ sia dotato di minimo in $S_B^{(0)} - \omega$ ed esista un vettore u_0 minimante $I(u)$ tale che tutte le componenti del vettore $T(u_0)$ siano non negative.

Sia Γ l'insieme dei vettori w di $S_B^{(0)}$ indicato nell'enunciato del teorema precedente.

Detto $F(w)$ il minore fra gli $n + m$ numeri:

$$\text{estr. inf.}_{B_i} \frac{w_i}{E_i E^*(w)}, \quad \text{estr. inf.}_{G_j} \frac{-M_j(w)}{L_j E^*(w)},$$

se sono soddisfatte le ipotesi 1^a), 2^a), 3^a) si ha:

$$\|u\|^2 \geq F(w) [\|E(u)\|^2 + \|L(u)\|^2].$$

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del teorema I.

Evidentemente perchè questo ultimo teorema sia espressivo, occorrerà supporre che non sia vuoto il sottoinsieme di Γ costituito dagli elementi w per i quali:

$$w_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad M_j(w) < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Per quanto riguarda l'esistenza del massimo del funzionale $I(u)$, sussiste il seguente teorema:

III. - Se il codominio $T(S)$ della trasformazione T è una varietà completa dello spazio S' e se la forma quadratica $\|T^{-1}(u')\|^2$, definita in $T(S)$, è totalmente continua, esiste il massimo di $I(u)$ in $S_B^{(0)}$.

Per la dimostrazione di questo teorema rimandiamo alle « *Lezioni sulle trasformazioni lineari* » citate nella nota ⁽¹⁾ (cfr. pag. 220) ⁽²⁾.

Analogamente sussiste il teorema:

IV. - Se S è uno spazio hilbertiano completo e se la forma quadratica $\|T(u)\|^2$ è totalmente continua, esiste il minimo di $I(u)$ in $S_B^{(0)}$.

Circa il segno delle componenti del vettore massimante (minimante) $I(u)$, il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente perchè esse abbiano tutte lo stesso segno.

V. - Se esistono una trasformazione di S_B in una sua parte contenente $E(S_B^{(0)})$:

$$w = \varphi(u)$$

ed una trasformazione di S_G in una sua parte, contenente $L(S_B^{(0)})$:

$$W = \Phi(U),$$

tali che:

$$\begin{aligned} 0 \leq w_i \leq |u_i|, \quad 0 \leq W_j \leq |U_j|, \quad |E_i^{-1}[\varphi(u)] + L_i^{-1}[\Phi(U)]| &\geq |E_i^{-1}(u) + L_i^{-1}(u)| \\ |w_i| \geq |u_i|, \quad W_j \geq |U_j|, \quad |E_i^{-1}[\varphi(u)] + L_i^{-1}[\Phi(U)]| &\leq |E_i^{-1}(u) + L_i^{-1}(u)| \\ (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

e se $I(u)$ è dotato di massimo (minimo) in $S_B^{(0)}$, allora vi è un vettore massimante (minimante) $I(u)$ che ha le componenti tutte dello stesso segno.

La dimostrazione segue ovviamente dall'osservare che si ha:

$$I(u) \leq \frac{\|E^{-1}[\varphi(u)] + L^{-1}[\Phi(U)]\|^2}{\|\varphi(u)\|^2 + \|\Phi(U)\|^2}$$

(o la disuguaglianza opposta nel caso del minimo).

Vogliamo osservare che il teorema I si può generalizzare nel seguente:

VI. - Il funzionale $I(u)$ sia dotato di massimo in $S_B^{(0)}$ — o ed esista un vettore u_0 di esso massimante, tale che il vettore $T(u_0) \equiv (E(u_0), L(u_0))$ abbia non negative le componenti $E_1(u_0), E_2(u_0), \dots, E_{n'}(u_0); L_1(u_0), L_2(u_0), \dots, L_m(u_0)$ ($n' \leq n, m' \leq m$) e non positive le altre.

Sia Γ l'insieme, supposto non vuoto, dei vettori w di $S_B^{(0)}$ per ognuno dei quali si ha:

$$\begin{aligned} E^*(w) \subset S_B^{(0)}, \quad L^*(w) = \Omega \\ E_i E^*(w) > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n'), \quad E_k E^*(w) < 0 \quad (k = n' + 1, \dots, n) \\ L_j E^*(w) < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m'), \quad L_h E^*(w) < 0 \quad (h = m' + 1, \dots, m). \end{aligned}$$

⁽²⁾ Cfr. anche F. RIESZ - B. S. NAGY. *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Académie des Sciences de Hongrie, Budapest, 1952.

Detto $F(w)$ il maggiore fra gli $n + m$ numeri:

$$\text{estr. sup.}_{B_i} \frac{w_i}{E_i E^*(w)}, \quad \text{estr. sup.}_{G_j} \frac{-M_j(w)}{L_j E^*(w)},$$

se sono soddisfatte le ipotesi 1^a), 2^a), 3^a) si ha:

$$\max_{u \in S_B^{(0)} - \omega} I(u) \leq \text{estr. inf.}_{w \in \Gamma} F(w).$$

La dimostrazione è perfettamente identica a quella del teorema I.

Analoga generalizzazione sussiste per il teorema II.

Nelle applicazioni può presentarsi non agevole il verificare che il funzionale del teorema I è dotato di massimo. Può riuscire allora utile sostituire il teorema I con il seguente:

VII. - Il funzionale $I(u)$ sia limitato in $S - \omega$ e dettane μ l'estremo superiore esista una successione $\{v^{(k)}\}$ verificante le seguenti condizioni:

$$a) \quad L(v^{(k)}) = \Omega; \quad E^*(v^{(k)}) \subset S_B^{(0)};$$

$$H(v^{(k)}) = \sum_{i=1}^n \int_{B_i} |E_i E^*(v^{(k)})| d\beta_i + \sum_{j=1}^m \int_{G_j} |L_j E^*(v^{(k)})| d\gamma_j < +\infty.$$

$$b) \quad \text{Max} \lim_{k \rightarrow \infty} H(v^{(k)}) > 0;$$

$$\text{Max} \lim_{k \rightarrow \infty} (\|EE^*(v^{(k)})\|^2 + \|LE^*(v^{(k)})\|^2) < +\infty.$$

$$c) \quad E_i E^*(v^{(k)}) \geq 0; \quad L_j E^*(v^{(k)}) \geq 0,$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m);$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(v^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|E^*(v^{(k)})\|^2}{\|EE^*(v^{(k)})\|^2 + \|LE^*(v^{(k)})\|^2} = \mu.$$

Detto Γ l'insieme, supposto non vuoto, dei vettori w di $S_B^{(0)}$ per ognuno dei quali si ha:

$$E^*(w) \subset S_B^{(0)}, \quad L^*(w) = \Omega, \quad \text{estr. inf.}_{B_i} E_i E^*(w) > 0, \quad \text{estr. inf.}_{G_j} L_j E^*(w) > 0$$

ed indicato con $F(w)$ il maggiore fra gli $n + m$ numeri:

$$\text{estr. sup.}_{B_i} \frac{w_i}{E_i E^*(w)}, \quad \text{estr. sup.}_{G_j} \frac{-M_j(w)}{L_j E^*(w)},$$

se sono soddisfatte le ipotesi 1^a), 2^a), 3^a), si ha:

$$\text{estr. sup.}_{S-\omega} I(u) \leq \text{estr. inf.}_{\Gamma} F(w).$$

Proviamo innanzitutto che, se v è un vettore di $S \equiv S_B^{(0)}$ per il quale si ha:

$$(9) \quad L^*(v) = \Omega, \quad E^*(v) \subset S_B^{(0)},$$

sussiste la disuguaglianza:

$$\|v\|^2 + \|M(v)\|^2 \leq \mu^2 (\|EE^*(v)\|^2 + \|LE^*(v)\|^2).$$

Dato $\varepsilon > 0$ arbitrario, sia u_ε un vettore di S tale che $\|L(u_\varepsilon) - M(v)\| < \varepsilon$. Tale vettore certo esiste in virtù della ipotesi 3^a). Poichè $E(S_B^{(0)}) \supset S$, esisterà un vettore $u \subset S$ soluzione del seguente sistema:

$$(10) \quad E(u) = v, \quad L(u) = -L(u_\varepsilon).$$

Tenendo presente la prima delle (9) e le (10), la (1) fornisce:

$$\begin{aligned} (u, E^*(v)) &= \|v\|^2 + (M(v), L(u_\varepsilon)) = \\ &= \|v\|^2 + \|M(v)\|^2 + (M(v), L(u_\varepsilon) - M(v)) \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 + \|M(v)\|^2 &\leq \|u\| \|E^*(v)\| + \|M(v)\| \varepsilon \leq \\ &\leq \mu (\|L(u)\|^2 + \|E(u)\|^2)^{\frac{1}{2}} (\|EE^*(v)\|^2 + \|LE^*(v)\|^2)^{\frac{1}{2}} + \|M(v)\| \varepsilon \leq \\ &\leq \mu (\|v\|^2 + \|M(v)\|^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \|M(v)\|)^{\frac{1}{2}} (\|EE^*(v)\|^2 + \|LE^*(v)\|^2)^{\frac{1}{2}} + \|M(v)\| \varepsilon. \end{aligned}$$

Da ciò si deduce, per l'arbitrarietà di ε :

$$\|v\|^2 + \|M(v)\|^2 \leq \mu (\|v\|^2 + \|M(v)\|^2)^{\frac{1}{2}} (\|EE^*(v)\|^2 + \|LE^*(v)\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

cioè la disuguaglianza annunciata.

Per ogni $u \subset S_B^{(0)}$ consideriamo il vettore v verificante le equazioni:

$$E^*(v) = u, \quad L^*(v) = \Omega.$$

Anzichè considerare il funzionale $I(u)$ definito in $S_B^{(0)} - \omega$, potremo, come nella dimostrazione del teorema I, considerare il funzionale:

$$J(v) = \frac{\|E^*(v)\|^2}{\|EE^*(v)\|^2 + \|LE^*(v)\|^2},$$

definito in $E^{*-1}(S_B^{(0)}) - \omega$. Detta $\{v^{(k)}\}$ la successione considerata nell'enunciato, facciamo vedere che:

$$(11) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\|v^{(k)} - \mu EE^*(v^{(k)})\|^2 + \|M(v^{(k)}) + \mu LE^*(v^{(k)})\|^2) = 0.$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} &\|v^{(k)} - \mu EE^*(v^{(k)})\|^2 + \|M(v^{(k)}) + \mu LE^*(v^{(k)})\|^2 = \\ &= \|v^{(k)}\|^2 + \|M(v^{(k)})\|^2 + 2\mu [(M(v^{(k)}), LE^*(v^{(k)})) - (v^{(k)}, EE^*(v^{(k)}))] + \\ &\quad + \mu^2 (\|EE^*(v^{(k)})\|^2 + \|LE^*(v^{(k)})\|^2) = \\ &= \|v^{(k)}\|^2 + \|M(v^{(k)})\|^2 - 2\mu \|E^*(v^{(k)})\|^2 + \mu^2 (\|EE^*(v^{(k)})\|^2 + \|LE^*(v^{(k)})\|^2) \leq \\ &\leq 2\mu^2 (\|EE^*(v^{(k)})\|^2 + \|LE^*(v^{(k)})\|^2) - 2\mu \|E^*(v^{(k)})\|^2. \end{aligned}$$

Per la seconda delle condizioni b) esiste una costante $A > 0$ tale che per ogni k riesca:

$$(12) \quad \|EE^*(v^{(k)})\|^2 + \|LE^*(v^{(k)})\|^2 \leq A.$$

Ciò implica la (11).

Sia ora w un arbitrario vettore di Γ . Se qualcuna delle seguenti $n+m$ funzioni:

$$\mu - \frac{w_i}{E_i E^*(w)}, \quad \mu + \frac{M_j(w)}{L_j E^*(w)}$$

ha estremo inferiore nullo o negativo, riesce $F(w) \geq \mu$.

Sia infatti:

$$\text{estr. inf.}_{B_i} \left(\mu - \frac{w_i}{E_i E^*(w)} \right) \leq 0 \quad \left[\text{estr. inf.}_{G_j} \left(\mu + \frac{M_j(w)}{L_j E^*(w)} \right) \leq 0 \right].$$

Sarà allora:

$$\mu \leq \text{estr. sup.}_{B_i} \frac{w_i}{E_i E^*(w)} \leq F(w) \quad \left[\mu \leq \text{estr. sup.}_{G_j} \frac{-M_j(w)}{L_j E^*(w)} \leq F(w) \right].$$

Orbene, mostreremo che è impossibile che, quali si siano i ed j , riesca:

$$\text{estr. inf.}_{B_i} \left(\mu - \frac{w_i}{E_i E^*(w)} \right) > 0, \quad \text{estr. inf.}_{G_j} \left(\mu + \frac{M_j(w)}{L_j E^*(w)} \right) > 0.$$

Ammettendo, per assurdo, che ciò si verifichi, si ha, detto p^2 un opportuno numero positivo:

$$\text{estr. inf.}_{B_i} (\mu E_i E^*(w) - w_i) \geq p^2 > 0, \quad \text{estr. inf.}_{G_j} (\mu L_j E^*(w) + M_j(w)) \geq p^2 > 0.$$

Sia $\{v^{(k)}\}$ la successione di vettori già considerata. Si ha:

$$\begin{aligned} (\mu E_i E^*(w) - w_i) E_i E^*(v^{(k)}) &= v_i^{(k)} E_i E^*(w) - w_i E_i E^*(v^{(k)}) + (\mu E_i E^*(v^{(k)}) - v_i^{(k)}) E_i E^*(w) \\ (\mu L_j E^*(w) + M_j(w)) L_j E^*(v^{(k)}) &= M_j(w) L_j E^*(v^{(k)}) - M_j(v^{(k)}) L_j E^*(w) + \\ &\quad + (\mu L_j E^*(v^{(k)}) + M_j(v^{(k)})) L_j E^*(w). \end{aligned}$$

Da queste eguaglianze, tenendo presente che:

$$(v^{(k)}, EE^*(w)) - (w, EE^*(v^{(k)})) + (M(w), LE^*(v^{(k)})) - (M(v^{(k)}), LE^*(w)) = 0,$$

si trae:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{B_i} E_i E^*(v^{(k)}) d\beta_i + \sum_{j=1}^m \int_{G_j} L_j E^*(v^{(k)}) d\gamma_j &\leq \frac{1}{p^2} [(\mu EE^*(v^{(k)}) - v^{(k)}, EE^*(w)) + \\ &\quad + (\mu LE^*(v^{(k)}) + M(v^{(k)}), LE^*(w))] \leq \frac{1}{p^2} (\|v^{(k)} - \mu EE^*(v^{(k)})\|^2 + \\ &\quad + \|M(v^{(k)}) + \mu LE^*(v^{(k)})\|^2)^{\frac{1}{2}} (\|EE^*(w)\|^2 + \|LE^*(w)\|^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e quindi l'assurdo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_i} E_i E^*(v^{(k)}) d\beta_i + \sum_{j=1}^m \int_{G_j} L_j E^*(v^{(k)}) d\gamma_j \right) = 0.$$

Analogo teorema può enunciarsi e dimostrarsi in sostituzione del teorema II allorchè non si ammetta l'esistenza del minimo di $I(u)$.

2. Equazioni alle derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico.

Sia A un campo (insieme aperto) limitato dallo spazio euclideo S_r . La frontiera $\mathcal{F}A$ di A sia costituita da un numero finito di ipersuperficie chiuse di classe due, cioè localmente rappresentabili con funzioni continue e dotate di derivate prime e seconde continue. Sia A' un campo contenente $A + \mathcal{F}A$ e si consideri in A' l'operatore differenziale del secondo ordine di tipo ellittico positivo:

$$(13) \quad E(u) = \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{k=1}^r b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu.$$

Le funzioni a_{hk} siano di classe due ⁽⁷⁾ in A' ed ivi dotate di derivate seconde hölderiane. Le b_k di classe uno con derivate prime hölderiane e la c sia hölderiana in A' ed ivi mai positiva.

Vogliamo considerare un notevole caso particolare del teorema I.

Assumeremo $n = m = 1$; $B_1 = A$; $G_1 = \mathcal{F}A$. Come S_B la varietà delle funzioni misurabili in A ed ivi di quadrato integrabile secondo LEBESGUE. S_G sarà la varietà delle funzioni definite su $\mathcal{F}A$ ed ivi di quadrato ipersuperficialmente integrabile secondo LEBESGUE. La varietà $S_B^{(0)} \equiv S$ sarà quella delle funzioni di classe uno in $A + \mathcal{F}A$ e dotate di derivate seconde continue e di quadrato integrabile in A .

Assumeremo la trasformazione $E(u)$ definita dalla (13) ed $E^*(u)$ al modo seguente:

$$E^*(u) = \sum_{h,k}^{1,r} \frac{\partial^2 a_{hk} u}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{k=1}^r \frac{\partial b_k u}{\partial x_k} + cu = 0.$$

La $L(u)$ e la $L^*(u)$ si assumono coincidenti con la trasformazione che ad una funzione u di S fa corrispondere la sua traccia su $\mathcal{F}A$ cambiata di segno.

La funzione d'insieme β_1 è l'ordinaria misura in S_r e la γ_1 la misura ipersuperficiale su $\mathcal{F}A$.

Fatte tali assunzioni, verifichiamo il sussistere delle ipotesi 1^a), 2^a), 3^a).

⁽⁷⁾ Dicendo che una data funzione è di classe q in un insieme, intendo che è ivi continua assieme alle sue derivate parziali fino a quelle di ordine q incluso.

La (1) dell'ipotesi 1^a) è verificata assumendo:

$$M^*(u) = -\left(\frac{\partial u}{\partial v} + bu\right), \quad M(v) = -\frac{\partial v}{\partial v}$$

dove si è posto, detta n la normale ad $\mathcal{F}A$ interna ad A :

$$\frac{\partial}{\partial v} \equiv \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \cos(x_k, n) \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad b = \sum_{h=1}^r \left(b_h - \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k}\right) \cos(x_h, n).$$

Sussiste infatti per ogni coppia di funzioni di S la ben nota formola di GREEN:

$$(14) \quad \int_A (uE^*(v) - vE(u))d\tau = \int_{\mathcal{F}A} \left[v\left(\frac{\partial u}{\partial v} + bu\right) - u\frac{\partial v}{\partial v} \right] d\sigma$$

che con le posizioni assunte altro non è che la (1).

Il ben noto teorema di unicità relativo ai due problemi:

$$\begin{aligned} E(u) &= v \quad \text{in } A, & u &= U \quad \text{su } \mathcal{F}A; \\ E^*(u) &= v \quad \text{in } A, & u &= U \quad \text{su } \mathcal{F}A, \end{aligned}$$

con v continua in A ed U su $\mathcal{F}A$, assicura il sussistere dell'ipotesi 2^a).

Infine, poichè appartengono ad S i polinomi, essendo ben noto che, data una qualsiasi funzione U di S_G ed $\varepsilon > 0$, esiste un polinomio P tale che:

$$\int_{\mathcal{F}A} |U - P|^2 d\sigma < \varepsilon$$

risulta verificata anche l'ipotesi 3^a).

Più delicata è la verifica dell'ipotesi ammessa nel teorema I, relativa all'esistenza del massimo di $I(u)$. Più semplice si presenta invece il verificare le ipotesi del teorema VII.

Facciamo intanto vedere che:

$$I(u) = \frac{\int_A u^2 d\tau}{\int_A |E(u)|^2 d\tau + \int_{\mathcal{F}A} u^2 d\sigma}$$

è limitato superiormente in $S - \omega$.

Sia $w(x)$ un'arbitraria funzione di classe uno in $A + \mathcal{F}A$ e di classe due in A verificante le condizioni:

$$(15) \quad \text{estr. inf.}_A E^*(w) > 0 \quad \text{in } A, \quad w = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}A.$$

Sia $u_0(x)$ la funzione verificante la $E(u_0) = 0$ in A e che su $\mathcal{F}A$ coincide con u e sia $u_1 = u - u_0$.

Dalla (14), ponendo al posto di u , successivamente, u_0^2 ed u_1^2 e ricordando che w è mai positiva in A , si trae:

$$\int_A u_0^2 E^*(w) d\tau \leq - \int_{\mathcal{F}A} u_0^2 \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma,$$

$$\int_A u_1^2 E^*(w) d\tau \leq 2 \int_A u_1 w E(u_1) d\tau$$

e quindi:

$$(16) \quad \int_A u_0^2 d\tau \leq \frac{\max_{\mathcal{F}A} \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|}{\text{estr. inf.}_A E^*(w)} \int_{\mathcal{F}A} u_0^2 d\sigma$$

$$(17) \quad \int_A u_1^2 d\tau \leq \frac{2 \max_A |w|}{\text{estr. inf.}_A E^*(w)} \int_A |E(u_1)|^2 d\tau \quad (^8).$$

Dalle (16), (17) segue la limitatezza di $I(u)$.

Diremo μ l'estremo superiore di $I(u)$. Se u è una qualsivoglia funzione di S , possono determinarsi due successioni di funzioni $\{f_s\}$ e $\{U_s\}$ rispettivamente definite in A e su $\mathcal{F}A$, tali che:

$$f_s > 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_A (f_s - |E(u)|)^2 ds = 0; \quad U_s < 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}A} (U_s + |u|)^2 ds = 0$$

e tali inoltre che la funzione u_s verificante il sistema:

$$E(u_s) = f_s \quad \text{in } A, \quad u_s = U_s \quad \text{su } \mathcal{F}A$$

appartenga ad S ⁽⁹⁾.

Sarà allora:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} I(u_s) \geq I(u).$$

(⁸) La (16) e la (17) sono state già ottenute con analogo procedimento da CACCIOPOLI (loc. cit. (³)) assumendo però come w la soluzione del sistema $E^*(w) = 1$ in A , $w = 0$ su $\mathcal{F}A$.

La possibilità di pervenire ad una maggiorazione quale la (16) era stata anche indicata — sia pure in un caso particolare — nella mia Nota: *Sulla maggiorazione dell'errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della Fisica Matematica*, « Rend. Acc. delle Sci. Fis. Mat. e Nat. di Napoli », (1950).

(⁹) È opportuno ricordare che il sistema dei monomi $\{m_s\}$ è tale che il sistema di vettori $\{E(m_s), m_s\}$ è completo nello spazio di HILBERT dei vettori aventi due componenti, la prima definita in A , la seconda su $\mathcal{F}A$.

Questa disuguaglianza ci permette di affermare che esiste una successione $\{u^{(k)}\}$ di funzioni di S tali che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(u^{(k)}) = \mu$$

e per la quale si ha:

$$E(u^{(k)}) > 0 \quad \text{in } A, \quad L(u^{(k)}) \equiv -u^{(k)} > 0 \quad \text{su } \mathcal{F}A.$$

Sia $v^{(k)}$ la soluzione del sistema:

$$E^*(v^{(k)}) = u^{(k)} \quad \text{in } A, \quad L^*(v^{(k)}) \equiv -v^{(k)} = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}A.$$

La successione $\{v^{(k)}\}$ verifica le condizioni a) e c) dell'enunciato del teorema VII. Verifichiamo le b). A tale scopo occorre far ricorso alla funzione di GREEN $G(x, y)$ per il problema di DIRICHLET in A , relativo all'operatore E . L'esistenza di tale funzione e le proprietà che ne sfrutteremo in seguito sono assicurate dalle ipotesi assunte sui coefficienti di E e sulla frontiera di $\mathcal{F}A$ ⁽¹⁰⁾.

Detta σ , la misura ipersuperficiale della ipersfera unitaria, poniamo:

$$k_r = \begin{cases} (r-2)\sigma, & \text{per } r > 2 \\ 2\pi & \text{per } r = 2 \end{cases}.$$

Diciamo $a(x) \equiv a(x_1, x_2, \dots, x_r)$ il determinante della matrice (a_{hk}) . In ogni punto x di A si ha:

$$u(x) = \frac{1}{k_r \sqrt{a(x)}} \int_{\mathcal{F}A} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x, y) d_\nu \sigma - \frac{1}{k_r \sqrt{a(x)}} \int_A E(u) G(x, y) d_\nu \tau.$$

Poniamo:

$$u(y) = U(y) \quad \text{su } \mathcal{F}A, \quad E(u) = v(y) \quad \text{in } A,$$

$$\frac{1}{k_r \sqrt{a(x)}} \frac{\partial}{\partial \nu} G(x, y) = H_1(x, y), \quad \frac{1}{k_r \sqrt{a(x)}} G(x, y) = H_2(x, y),$$

$$K_{11}(y, t) = \int_A H_1(x, y) H_1(x, t) d_x \tau, \quad K_{12}(y, z) = \int_A H_1(x, y) H_2(x, z) d_x \tau,$$

$$K_{22}(z, s) = \int_A H_2(x, z) H_2(x, s) d_x \tau.$$

⁽¹⁰⁾ Cfr. G. GIRAUD, *Sur le problème de Dirichlet*, ecc., « Ann. Ec. Sup. », t. 49, 1926, pag. 1-128; M. GEVREY, *Determination et emploi des fonctions de Green* ecc., « Jour. de Math. », t. 9, 1930. p. 1-80. Cfr. anche loc. cit. ⁽⁴⁾.

Si ha :

$$\begin{aligned} \|u\|^2 = Q(U, v) = & \iint_{(\mathcal{F}A)^2} K_{11}(y, t) U(y) U(t) d_y \sigma d_t \sigma + \\ & + 2 \int_{\mathcal{F}A} d_y \sigma \int_A K_{12}(y, z) U(y) v(z) d_z \tau + \iint_{A^2} K_{22}(z, s) U(z) U(s) d_z \tau d_s \tau. \end{aligned}$$

Consideriamo lo spazio di HILBERT $\mathcal{H}$ dei vettori a due componenti U e v la prima di quadrato ipersuperficialmente integrabile su $\mathcal{F}A$ e la seconda di quadrato integrabile in A . La forma quadratica $Q(U, v)$ definita in $\mathcal{H}$ è totalmente continua ⁽¹¹⁾ essendo i nuclei $K_{11}(y, t)$, $K_{12}(y, z)$, $K_{22}(z, s)$ nuclei di FREDHOLM. Il funzionale :

$$(18) \quad \frac{Q(U, v)}{\|U\|^2 + \|v\|^2}$$

è dotato di massimo ⁽¹²⁾ in $\mathcal{H}$ privato dell'origine. Tale massimo coincide con l'estremo superiore di $I(u)$ in S (cfr. nota a piè di pagina ⁽⁹⁾),

Sfruttando proprietà più intime di $G(x, y)$, si potrebbe dimostrare che se U_0, v_0 è il vettore massimante del funzionale (18), esiste una funzione u_0 di S tale che :

$$u_0 = U_0 \text{ su } \mathcal{F}A, \quad E(u_0) = v_0 \text{ in } A$$

e quindi che esiste il massimo di $I(u)$ in $S - \omega$. Ciò però non è essenziale ai nostri scopi. Infatti possiamo supporre che la successione $u^{(k)}$ sopra considerata sia tale che :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A [E(u^{(k)}) - v_0]^2 d\tau = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}A} [L(u^{(k)}) - U_0]^2 d\sigma = 0.$$

Essendo :

$$H(v^{(k)}) = \int_A |E(u^{(k)})|^2 d\tau + \int_{\mathcal{F}A} |L(u^{(k)})|^2 d\sigma$$

si ha allora :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(v^{(k)}) = \int_A |v_0|^2 d\tau + \int_{\mathcal{F}A} |U_0|^2 d\sigma > 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_A |EE^*(v^{(k)})|^2 d\tau + \int_{\mathcal{F}A} |E^*(v^{(k)})|^2 d\sigma \right) = \int_A v_0^2 d\tau + \int_{\mathcal{F}A} U_0^2 d\sigma < +\infty.$$

È perciò verificata la b).

⁽¹¹⁾ Cfr. loc. cit. (1), pag. 219.

⁽¹²⁾ Cfr. loc. cit. (1), pag. 220.

Possiamo allora applicare al caso particolare considerato il teorema VII, deducendo il seguente:

VIII. - Sia $w(x)$ un'arbitraria funzione definita in $A + \mathfrak{F}A$, appartenente ad S assieme ad $E^*(w)$ e verificante le condizioni:

$$(19) \quad w = 0 \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}A,$$

$$(20) \quad E^*(w) < 0 \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}A,$$

$$(21) \quad \text{estr. inf.}_A EE^*(w) > 0.$$

Nelle ipotesi ammesse per A e per l'operatore del secondo ordine di tipo ellittico E , qualunque sia la funzione $u(x)$ di classe uno in $A + \mathfrak{F}A$ e dotata di derivate seconde continue e di quadrato integrabile in A si ha:

$$(22) \quad \left| \int_A u^2 d\tau \leq F(w) \left\{ \int_A |E(u)|^2 d\tau + \int_{\mathfrak{F}A} u^2 d\sigma \right\} \right|$$

essendo $F(w)$ il maggiore dei due numeri:

$$\text{estr. sup.}_A \frac{w}{EE^*(w)}, \quad \max_{\mathfrak{F}A} \frac{-\frac{\partial w}{\partial \nu}}{E^*(w)}$$

(ν conormale interna a $\mathfrak{F}A$).

Con procedimento analogo ed anzi con maggiore semplicità dal teorema VII si traggono i due seguenti:

IX. - Sia $w(x)$ una funzione verificante tutte le ipotesi specificate nel teorema precedente, ma in luogo della (21) la seguente:

$$(23) \quad EE^*(w) = 0 \quad \text{in} \quad A.$$

Qualunque sia la soluzione $u_0(x)$ di classe uno in $A + \mathfrak{F}A$ dell'equazione $E(u_0) = 0$, si ha:

$$(24) \quad \left| \int_A u_0^2 d\tau \leq \left(\max_{\mathfrak{F}A} \frac{-\frac{\partial w}{\partial \nu}}{E^*(w)} \right) \int_{\mathfrak{F}A} u_0^2 d\sigma \right|.$$

X. - Sia $w(x)$ una funzione verificante tutte le ipotesi del teorema VIII, ma in luogo della (20) la seguente:

$$(25) \quad E^*(w) = 0 \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}A.$$

Qualunque sia la funzione $u_1(x)$ di classe uno in $A + \mathfrak{F}A$, dotata di derivate seconde continue e di quadrato integrabile in A e nulla su $\mathfrak{F}A$, si ha:

$$(26) \quad \left[\int_A u_1^2 d\tau \leq \left(\text{estr. sup.}_A \frac{w}{EE^*(w)} \right) \int_A |E(u_1)|^2 d\tau \right].$$

La (24) e la (26) sono del tipo rispettivamente della (16) e della (17). Occorre però notare che l'applicazione delle (22), (24), (26) conduce a maggiorazioni più strette che non le analoghe deducibili da (16), (17).

Ciò è di grande importanza nei problemi quantitativi; ad esempio per la maggiorazione dell'errore nel classico metodo di calcolo delle soluzioni del sistema:

$$(27) \quad E(u) = f \text{ in } A, \quad u = g \text{ su } \mathfrak{F}A,$$

cosidetto dei minimi quadrati.

Dato un sistema $\{m_s\}$ di funzioni tali che il sistema di vettori $\{E(m_s), m_s\}$ sia completo in $\mathcal{H}$, si determinino le costanti $c_s^{(n)}$ mediante la condizione:

$$\int_A \left[f - \sum_{s=1}^n c_s^{(n)} E(m_s) \right]^2 d\tau + \int_{\mathfrak{F}A} \left[g - \sum_{s=1}^n c_s^{(n)} m_s \right]^2 d\sigma = \text{minimo}.$$

Dalla (22) si deduce che la successione $\sum_{s=1}^n c_s^{(n)} m_s$ converge in media verso la soluzione di (27), nonchè una maggiorazione per l'errore quadratico medio

$$\int_A \left[u - \sum_{s=1}^n c_s^{(n)} m_s \right]^2 d\tau.$$

È evidente l'interesse pratico di avere per $F(w)$ un valore quanto più piccolo è possibile.

Sia $r=2$ ed $E(u) \equiv \Delta_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$. Assumiamo per A il dominio ellittico:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \quad (a \geq b > 0).$$

Per conseguire la (22) si può considerare la funzione:

$$w = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \right)^2 - 8 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \right) + 7$$

per modo che $F(w)$ sarà il maggiore dei due numeri:

$$\frac{7a^4b^4}{24(a^4 + b^4) + 16a^2b^2}, \quad \frac{3a^2b}{a^2 + 3b^2}.$$

Si noti che per $r = 2$ si può concedere al campo A una maggiore generalità e, ad esempio, supporre che la sua frontiera sia costituita da archi di curva di classe due che si saldano senza formare cuspidi.

Tutte le premesse occorse per stabilire i teoremi VIII, IX, X risultano verificate anche in tali ipotesi per $\mathcal{F}A$.

Se A è il dominio rettangolare:

$$-a \leq x_1 \leq a, \quad -b \leq x_2 \leq b$$

ed è $E(u) \equiv \Delta_2 u$, si assuma:

$$w = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

e quindi $F(w)$ è il maggiore dei tre numeri:

$$a, \quad b, \quad \frac{a^2 b^2}{8}.$$

Si noti che le (16), (17) pur fornendo maggiorazioni che — in genere — saranno assai più grossolane di quelle date in (22), (24), (26), tuttavia richiedono, per essere conseguite, un numero assai minore di informazioni sull'operatore E . Precisamente non occorre servirsi dell'esistenza della funzione di GREEN e della soluzione del problema di DIRICHLET per tale operatore, sia pure con dati particolari, ma soltanto di quella di qualche funzione verificante le (15). Ciò è da tener presente per l'impiego di formule di maggiorazione del tipo di quelle in questione a scopi non quantitativi, ma, per esempio, soltanto esistenziali ⁽¹³⁾.

Il sistema (6), nel caso particolare considerato nel presente paragrafo, è il seguente:

$$(6') \quad \begin{cases} v_0 - \mu E E^*(v_0) = 0 & \text{in } D, \\ \frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \mu E^*(v_0) = 0 & \text{su } \mathcal{F}D \end{cases} \quad (v_0 = 0 \text{ su } \mathcal{F}D).$$

Se esiste il massimo di $I(u)$, coincide con il più grande autovalore di questo sistema ⁽¹⁴⁾.

⁽¹³⁾ Cfr. G. STAMPACCHIA, *Problema di Dirichlet e proprietà qualitative della soluzione*, «Giornale di Matematiche di Battaglini», S. IV, v. LXXX, f. 2°, pp. 226-237.

⁽¹⁴⁾ La Signa L. Pesci nella sua Tesi di laurea, compiuta presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, usando i procedimenti della presente Memoria, ha, fra l'altro, considerato il caso $r = 1$, $E \equiv \frac{d^2}{dx^2}$, $D \equiv (-c, c)$. In tal caso nella (22) si può assu-

3. Equazioni alle derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo parabolico.

Sia A il campo di S_r considerato nel paragrafo precedente ed $E(u)$ l'operatore di tipo ellittico già considerato.

Indicherò con D il dominio dello spazio S_{r+1} delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_r, t$ definito da:

$$x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_r) \subset A + \mathfrak{F}A, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Considererò in D i due operatori del secondo ordine di tipo parabolico:

$$P(u) = E(u) - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad P^*(u) = E^*(u) + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Denoterò con $\mathfrak{F}_1 D, \mathfrak{F}_2 D, \mathfrak{F}_3 D$ le parti della frontiera $\mathfrak{F}D$ di D così definite:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1 D) & \quad x \subset A, & t = 0, \\ \mathfrak{F}_2 D) & \quad x \subset \mathfrak{F}A, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \mathfrak{F}_3 D) & \quad x \subset A, & t = t_0. \end{aligned}$$

Siano $u(x, t)$ e $v(x, t)$ una coppia di funzioni appartenenti all'insieme S delle funzioni di classe uno in D e dotate delle derivate seconde rispetto alle coordinate di x continue in $D - \mathfrak{F}D$ e di quadrato sommabile in D . Per esse sussiste la seguente formula di reciprocità:

$$(28) \quad \begin{aligned} \int_0^{t_0} dt \int_A [uP^*(v) - vP(u)] d\tau &= \int_0^{t_0} dt \int_{\mathfrak{F}A} \left[v \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + bu \right) - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right] d\sigma - \\ &\quad - \int_{\mathfrak{F}_1 D} uv d\tau + \int_{\mathfrak{F}_3 D} uv d\tau. \end{aligned}$$

La direzione orientata ν e b sono definiti come in precedenza.

mere $w = x^4 - 6c^2x^2 + 5c^4 + \rho c^2$ ($\rho > 0$), per modo che $F(w)$ è il maggiore fra i due numeri $\frac{c^2(5c^2 + \rho)}{24}$, $\frac{c(4c^2 + \rho)}{\rho}$ e quindi:

$$\int_{-c}^c u^2 dx \leq F(w) \left\{ [u(c)]^2 + [u(-c)]^2 + \int_{-c}^c \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx \right\}.$$

Il sistema (6') nel caso attuale può scriversi (ponendo $\mu = \lambda^{-4}$ ed assunto $c = 1$):

$$\frac{d^4 v_0}{dx^4} - \lambda^4 v_0 = 0; \quad v(-1) = v(1) = 0; \quad v''(-1) + \lambda^4 v'(-1) = 0, \quad v'(1) - \lambda^4 v'(1) = 0.$$

Il più grande autovalore μ (corrispondente al più piccolo λ) si calcola in tal caso elementarmente ed è ≈ 1.13 . Il minimo valore di $F(w)$ al variare di ρ in $(0, +\infty)$ è ≈ 1.17 .

Il funzionale che prenderemo in considerazione è il seguente:

$$I(u) = \frac{\int_0^{t_0} dt \int_A u^2 d\tau}{\int_0^{t_0} dt \int_A |P(u)|^2 d\tau + \int_{\mathfrak{F}_1 D} u^2 d\tau + \int_0^{t_0} dt \int_{\mathfrak{F}_A} u^2 d\sigma}.$$

Detto ω l'elemento nullo di S , cioè la funzione identicamente nulla in D , dimostreremo che $I(u)$ definito in $S - \omega$ è ivi limitato. Sia w una funzione appartenente ad S e verificante le condizioni:

$$(29) \quad \text{estr. inf. } P^*(w) > 0 \quad \text{in } D - \mathfrak{F}D, \quad w = 0 \quad \text{su } \mathfrak{F}_2 D + \mathfrak{F}_3 D.$$

Sia u_1 una funzione di S nulla su $\mathfrak{F}_1 D + \mathfrak{F}_2 D$. Dalla (28) si trae per $u = u_1^2$ e $v = w$:

$$\int_0^{t_0} dt \int_A u_1^2 P^*(w) d\tau \leq 2 \int_0^{t_0} dt \int_A u_1 w P(u_1) d\tau.$$

Se è $u_0 \subset S$ riesce $P(u_0) = 0$, la (28) fornisce:

$$\int_0^{t_0} dt \int_A u_0^2 P(w) d\tau \leq - \int_0^{t_0} dt \int_{\mathfrak{F}_A} u_0^2 \frac{\partial w}{\partial v} d\sigma - \int_{\mathfrak{F}_1 D} u_0^2 w d\tau.$$

Si trae quindi:

$$(30) \quad \int_0^{t_0} dt \int_A u_0^2 d\tau \leq \left(\frac{\max_{\mathfrak{F}_A} \left| \frac{\partial w}{\partial v} \right| + \max_{\mathfrak{F}_1 D} |w|}{\text{estr. inf.}_{D - \mathfrak{F}D} P^*(w)} \right) \left\{ \int_0^{t_0} dt \int_{\mathfrak{F}_A} u_0^2 d\sigma + \int_{\mathfrak{F}_1 D} u_0^2 d\tau \right\}$$

$$(31) \quad \int_0^{t_0} dt \int_A u_1^2 d\tau \leq \left(\frac{2 \max_D |w|}{\text{estr. inf.}_{D - \mathfrak{F}D} P^*(w)} \right) \int_0^{t_0} dt \int_A |P(u_1)| d\tau \quad (15).$$

Da queste disuguaglianze segue la limitatezza di $I(u)$.

Si può ora procedere come nel caso dell'operatore ellittico E , dato che anche per il problema:

$$P(u) = f(x, t) \quad \text{in } T - \mathfrak{F}D, \quad u = g \quad \text{su } \mathfrak{F}_1 D + \mathfrak{F}_2 D$$

(15) Le (30), (31) sussistono anche se i coefficienti dell'operatore E dipendono da t , purchè si ammetta esistente la w verificante le (29).

non dipendendo i coefficienti di $E(u)$ da t è già acquisita l'esistenza della funzione di GREEN $G(x, t; y, s)$ che verifica le ipotesi richieste per applicare i ragionamenti fatti nel paragrafo precedente ⁽¹⁶⁾.

Si perviene così al seguente teorema.

XI. - Sia $w(x, t)$ una arbitraria funzione di classe uno nel cilindro D , appartenente ad S assieme a $P^*(w)$ e verificante le condizioni:

$$\begin{aligned} w &= 0 && \text{su } \mathfrak{F}_2 D + \mathfrak{F}_3 D, \\ \text{estr. inf.}_D PP^*(w) &> 0 && \text{in } D, \\ P^*(w) &< 0 && \text{su } \mathfrak{F}_1 D + \mathfrak{F}_2 D. \end{aligned}$$

Indicato con $F(w)$ il maggiore fra i tre numeri:

$$\text{estr. sup.}_D \frac{w}{PP^*(w)}, \quad \max_{\mathfrak{F}_1 D} \frac{-w}{P^*(w)}, \quad \max_{\mathfrak{F}_2 D} \frac{-\frac{\partial w}{\partial \nu}}{P^*(w)}.$$

(ν conormale interna alla sezione retta $A + \mathfrak{F}A$ di D)

sussiste per ogni u di S la seguente formola di maggiorazione:

$$\left| \int_0^{t_0} dt \int_A u^2 d\tau \leq F(w) \left\{ \int_0^{t_0} dt \int_A |P(u)|^2 d\tau + \int_0^{t_0} dt \int_{\mathfrak{F}A} u^2 d\sigma + \int_{\mathfrak{F}_1 D} u^2 d\tau \right\} \right|.$$

Sussistono anche gli analoghi dei teoremi IX e X. L'enunciazione di essi è ovvia.

Sia $r=1$, A l'intervallo $(0, l)$ dell'asse x e $P(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$.

Si può assumere:

$$w = [3t_0^2(t - t_0) - (t - t_0)^3](x^2 - lx),$$

per modo che $F(w)$ sarà il maggiore fra i tre numeri:

$$\frac{1}{2} t_0^2, \quad \frac{1}{8} l^2, \quad \frac{1}{2} l.$$

⁽¹⁶⁾ Cfr. E. ROTHE, *Über die Wärmeleitung mit nichtkonstanten Koeffizienten in räumlichen Falle*, « Math. Ann. », 102, (1930), pp. 650-670; *Über die Grundleistung bei parabolischen Gleichungen*, « Math. Zeit. », 33, (1931), pp. 488-504.

G. GIRAUD, *Sur certaines opérations aux dérivées partielles du type parabolique*, « C. R. Ac. Sci. », 195, (1932), pp. 98-100.

M. GEVREY, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, « Jour. de Math. », (6), 9, (1913), pp. 305-371 e (6), 10, (1914), pp. 105-148.

Cfr. anche loc. cit. (4).

Si ha in tal caso:

$$\int_0^{t_0} dt \int_0^l |u(x, t)|^2 dx \leq F(w) \left\{ \int_0^{t_0} dt \int_0^l \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \int_0^l |u(x, 0)|^2 dx + \right. \\ \left. + \int_0^{t_0} (|u(0, t)|^2 + |u(l, t)|^2) dt \right\}.$$

4. Altre applicazioni.

Analoghe applicazioni — sia per le equazioni ellittiche, che per quelle paraboliche — possono farsi considerando problemi al contorno più generali. La condizione che sostanzialmente è richiesta per l'applicazione del metodo, come si constata dalla dimostrazione del teorema VIII, è la positività nell'interno del dominio della funzione di GREEN relativa al problema al contorno che si considera. Così pure il metodo può applicarsi ad equazioni di ordine superiore al secondo con dati al contorno che però diano luogo ad una funzione di GREEN positiva. Ad esempio si consideri l'equazione:

$$(32) \quad \Delta_2 \Delta_2 u = f \quad \text{in } A \quad \left(\Delta_2 = \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right)$$

con le condizioni al contorno:

$$(33) \quad u = g_1 \quad \text{su } \mathcal{F}A, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (n \text{ normale interna a } \mathcal{F}A).$$

Sia A un campo per il quale la funzione di GREEN è positiva, ad esempio un campo ipersferico ⁽¹⁷⁾.

Detta allora w una funzione verificante le seguenti condizioni:

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}A, \quad \Delta_2^2 w > 0 \quad \text{su } \mathcal{F}A, \quad \frac{\partial \Delta_2^2 w}{\partial n} > 0 \quad \text{su } \mathcal{F}A, \quad \text{estr. inf.}_A \Delta_2^2 w > 0$$

e indicato con $F(w)$ il maggiore fra i numeri:

$$\text{estr. inf.}_A \frac{w}{\Delta_2^2 w}, \quad \max_{\mathcal{F}A} \frac{\Delta_2 w}{\frac{\partial \Delta_2^2 w}{\partial n}}, \quad \max_{\mathcal{F}A} \frac{-\frac{\partial \Delta_2 w}{\partial n}}{\Delta_2^2 w}$$

⁽¹⁷⁾ È stato dimostrato che esistono campi per i quali la funzione di GREEN per il problema (32) (33) è di segno variabile. Cfr. P. GARABEDIAN, *A Partial Differential Equation Arising in Conformal Mapping*, « Pacific Journ. of Math. », v. I, n. 4, pp. 485-524. C. H. LORWNER - G. SZEGÖ, *On Generation of Solutions of the Biharmonic Equation etc.*, « Dept. of Math. », Stanford University, Technical Report n. 13.

sussiste la disuguaglianza:

$$\int_A u^2 d\tau \leq F(n) \left\{ \int_A (\Delta_2 \Delta_2 u)^2 d\tau + \int_{\mathcal{F}A} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \right] d\sigma \right\}.$$

I procedimenti seguiti possono anche applicarsi ad equazioni integrali o ad equazioni algebriche per problemi di calcolo di autovalori. In tal caso si vengono a ritrovare teoremi già sostanzialmente noti ⁽¹⁸⁾, che pertanto vengono inquadrati nella teoria generale da noi svolta.

⁽¹⁸⁾ Cfr. J. BARTA, « Comptes Rendus », 204, 472 (1937).

L. COLLATZ, *Eigenwerte aufgaben*, Akademische Verlagsgesellschaft, (1949), Leipzig.

R. J. DUFFIN, *Lower bounds for Eigenvalues*, « The Phy. Rev. », (1947), v. 71, pag. 827.