Structures locales (*).

Mémoire de CHARLES EHRESMANN (à Princeton, New Jersey, U.S.A.).

Résumé. - Définition d'une espèce de structures locales par la notion de loi d'induction vérifiant certains axiomes, en particulier l'axiome du recollement. Pseudogroupe des automorphismes locaux d'une structure locale. Espèce des structures locales associées à un pseudogroupe de transformations. Exemples d'espèces de structures locales (les structures fibrées et les structures infinitésimales forment d'autres exemples, non étudiés dans cette conférence d'introduction). La notion de jet local est l'outil principal pour l'étude des structures locales. Groupoïde des jets d'automorphismes locaux, groupe d'isotropie locale. La considération de l'espace des jets locaux permet de démontrer en particulier le théorème fondamental de la théorie des espaces localement homogènes de LIE.

1. La notion d'espèce de structures mathématiques (1).

Pour expliquer la notion générale d'espèce de structures mathématiques, partons de l'exemple des structures topologiques.

Sur l'ensemble E une structure topologique est définie par la donnée d'un ensemble O de parties de E , qui seront appelées les ensembles ouverts de la structure topologique. Cet ensemble O devra vérifier les deux axiomes suivants :

(O_1) - L'intersection d'une famille finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

(O_2) - La réunion d'une famille quelconque d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

En particulier l'ensemble E lui-même et l'ensemble vide sont des ensembles ouverts.

Soit $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des parties de E . O est une partie de $\mathfrak{S}(E)$, c'est-à-dire un élément de $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(E))$, que nous pourrions appeler l'élément structural définissant une topologie. Les axiomes (O_1) et (O_2) définissent une partie Ω de $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(E))$, ensemble des éléments vérifiant ces axiomes. Tout élément O de Ω définit une structure topologique sur E . Nous pouvons remplacer E par un ensemble quelconque. La loi de formation de $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(E))$ à partir de E et en plus les deux axiomes (O_1) et (O_2) définissent l'espèce des structures topologiques, c'est-à-dire la classe des structures topologiques sur un ensemble quelconque.

(*) Conférence polycopiée à Rome en Mars 1952. Cette conférence est l'introduction d'un cycle de 8 conférences faites par l'auteur à Rome sur le sujet : Structures locales, structures fibrées, structures infinitésimales.

(1) N. BOURBAKI, *Théorie des Ensembles*, fasc. de Résultats (Paris, Hermann).

D'une façon générale, une espèce de structures mathématiques est définie par :

1° - La donnée d'un certain nombre d'ensembles auxiliaires $A_1, A_2, \dots, A_k$.

2° - La donnée d'une loi de formation d'un ensemble M à partir d'un ensemble quelconque E et des ensembles $A_1, \dots, A_k$. Cette loi de formation indique une suite d'opérations du type suivant : a) formation de l'ensemble des parties d'un ensemble déjà obtenu. b) formation du produit de deux ensembles déjà obtenus.

3° - La donnée d'un système d'axiomes imposant des conditions aux éléments de M , c'est-à-dire déterminant une partie W de M . On prendra pour E un ensemble quelconque tel que le système d'axiomes ait un sens pour les éléments de M .

L'ensemble W constitue une espèce de structures mathématiques sur E . Tout élément S de W sera une structure de cette espèce sur E . La classe des structures S ainsi obtenue sur un ensemble E quelconque constitue une espèce de structures mathématiques.

EXEMPLES : l'espèce des structures topologiques vérifiant des axiomes supplémentaires : structures topologiques séparées, structures d'espace topologique compact, etc. Structures d'ordre. Structures algébriques. Structures composées des structures élémentaires précédentes : groupes topologiques, espaces vectoriels topologiques, etc.

2. La notion d'espèce de structures locales ⁽²⁾.

Une espèce de structures locales est une espèce de structures (λ) pour laquelle il existe une loi d'induction, c'est-à-dire une loi qui associe à toute structure S d'espèce (λ) , donnée sur un ensemble E , un ensemble Φ de parties de E et qui détermine sur tout ensemble $U \in \Phi$ une structure d'espèce (λ) appelée structure induite par S sur U , l'ensemble U muni de cette structure induite étant appelé sous-espace distingué de E , de telle façon que les conditions suivantes soient satisfaites :

1° - Φ est l'ensemble des ensembles ouverts d'une topologie sur E . On dira que S est une structure locale par rapport à cette topologie.

2° - La loi d'induction est canonique, c'est-à-dire si une application biunivoque f de E sur E' transporte la structure S sur une structure S' définie sur E' , la restriction de f à chaque sous-espace distingué de E est un isomorphisme sur un sous-espace distingué de E' muni de la structure S' .

3° - *Transitivité des structures induites* : Si U est un sous-espace distingué de E , les sous-espaces distingués de U sont les sous-espaces distingués de E qui sont contenus dans U .

⁽²⁾ *Structures locales et structures infinitésimales*, « Comptes Rendus Ac. Sciences », Paris, 234, 1952, p. 587-589.

4° - *Axiome du recollement.* Si E' est la réunion d'une famille de sous-ensembles E_i dont chacun est muni d'une structure d'espèce (λ) telle que $E_i \cap E_j$ soit sous-espace distingué de E_i et de E_j , les structures induites sur $E_i \cap E_j$ par celles qui sont données sur E_i et E_j étant identiques, il existe sur E' une structure d'espèce (λ) bien déterminée telle que E_i soit sous-espace distingué de E' muni de cette structure. Nous dirons que l'espace E' muni de cette structure est obtenu par recollement de sous-espaces E_i . Les structures données sur les E_i seront dites cohérentes entre elles.

En particulier la structure induite par S sur E est identique à S .

3. Exemple des structures topologiques.

Les structures topologiques forment une espèce de structures locales. Soit T une topologie sur E Φ est l'ensemble des ensembles ouverts de cette topologie. La topologie induite sur $U \in \Phi$ est celle dont les ouverts sont les ouverts de E contenus dans U . La transitivité des topologies induites est évidente. Soit (E_i) un recouvrement de E' et supposons donnée sur chaque E_i une topologie T_i telle que $E_i \cap E_j$ soit ouvert dans E_i et dans E_j , les topologies induites sur $E_i \cap E_j$ par T_i et T_j étant identiques. Une topologie T' sur E' telle que E_i soit ouvert et telle que T_i soit la topologie induite sur E_i par T' est forcément celle qui admet pour ensembles ouverts les réunions quelconques d'ouverts des espaces E_i .

L'espace E' muni de cette topologie peut aussi être obtenue de la manière suivante : l'espace somme $\Sigma_i E_i$ est l'ensemble des couples (i, x) , où $x \in E_i$. L'application biunivoque $x \rightarrow (i, x)$ de E_i sur un sous-ensemble E'_i de $\Sigma_i E_i$ transporte la topologie de E_i sur une topologie de E'_i . La topologie d'espace somme sur $\Sigma_i E_i$ est celle dont les ouverts sont des réunions quelconques d'ouverts des espaces E'_i . Soit f l'application $(i, x) \rightarrow x$ de $\Sigma_i E_i$ sur E' . Soit ρ la relation d'équivalence associée dans $\Sigma_i E_i$. L'application biunivoque de $\Sigma_i E_i / \rho$ sur E' canoniquement associée à f est un homéomorphisme, et on peut ainsi identifier canoniquement $\Sigma_i E_i / \rho$ à E' .

On peut définir la topologie induite par T sur un sous-ensemble A quelconque de E . Mais par recollement de sous-espaces A_i formant un recouvrement de E on ne retrouve pas forcément l'espace topologique E . Il y a cependant un autre cas intéressant où E est isomorphe à $\Sigma_i A_i / \rho$, ρ étant la relation d'équivalence associée à l'application canonique de $\Sigma_i A_i$ sur E . C'est le cas où les A_i sont des ensembles fermés tels que tout point de E admette un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini des ensembles A_i .

4. - Le pseudogroupe des automorphismes locaux d'une structure locale.

Si E et E' sont deux ensembles muni de deux structures S et S' , un isomorphisme de E sur E' est une application biunivoque de E sur E' qui transporte S sur S' .

Soit S une structure locale d'une espèce donnée définie sur E . Soit Γ l'ensemble des automorphismes locaux de E , c'est-à-dire des isomorphismes d'un sous-espace distingué sur un sous-espace distingué. Γ est un pseudogroupe de transformations, c'est-à-dire un ensemble de transformations vérifiant les axiomes suivants :

1° - Tout $f \in \Gamma$ est une application biunivoque de $U \in \Phi$ sur $f(U) \in \Phi$, où Φ est l'ensemble des parties de E vérifiant les deux axiomes des ensembles ouverts d'une topologie ; cette topologie s'appellera la topologie sous-jacente au pseudogroupe de transformations.

2° - Soit $U = \bigcup_i U_i$ et $U_i \in \Phi$. Pour qu'une application biunivoque f de U sur un sous-ensemble $f(U)$ de E appartienne à Γ , il faut et il suffit que la restriction de f à U_i , pour chaque indice i , appartienne à Γ .

3° - Pour tout $U \in \Phi$, l'application identique de U appartient à Γ . Si $f \in \Gamma$, on a aussi $f^{-1} \in \Gamma$. Si $f \in \Gamma$ et $f' \in \Gamma$, on a aussi $f'f \in \Gamma$, où $f'f$ est l'application $x \rightarrow f'(f(x))$ pour tout x tel que $f'(f(x))$ soit défini.

D'après 3°, Γ est un groupoïde pour la loi de composition entre applications, à condition de considérer que $f'f$ est défini seulement dans le cas où le but de f est identique à la source de f' . Etant donnée une application f d'un ensemble U sur un ensemble $f(U)$, nous appelons U la source et $f(U)$ le but de f .

5. Structures localement isomorphes.

Soit S une structure locale sur E , S' une structure de même espèce sur E' . Un *isomorphisme local* f de E sur E' , c'est-à-dire un isomorphisme d'un sous-espace distingué de E sur un sous-espace distingué de E' , sera aussi appelé *carte locale* de E sur E' . Au couple (f_1, f_2) de deux cartes locales est associé l'automorphisme local φ_{21} de E tel que : $f_1(x) = f_2(x')$, où $x \in E_1$, $x' \in E_2$, soit équivalent à $x' = \varphi_{21}(x)$. Nous dirons que φ_{21} est le changement de cartes locales associé à (f_1, f_2) .

Soit (f_i) un ensemble de cartes locales de E sur E' tel que leurs buts recouvrent E' . Un tel ensemble de cartes sera appelé *atlas* de E sur E' . S'il existe un atlas de E sur E' , nous dirons que E' est localement isomorphe à E .

Propriété de transitivité : si E' est localement isomorphe à E et E'' localement isomorphe à E' , alors E'' est localement isomorphe à E .

Si E' est localement isomorphe à E , l'ensemble des cartes locales de E sur E' est appelé *atlas complet* de E sur E' .

Soit $\mathcal{A} = (f_i)$ un ensemble d'applications biunivoques de sous-espaces distingués U_i de E , muni de la structure locale S , sur des sous-ensembles U'_i d'un ensemble quelconque E' sur lequel nous ne considérons aucune structure donnée d'avance. Appelons encore f_i carte locale de E sur E' . Si les U'_i recouvrent E' , c'est-à-dire si $E' = \bigcup_i U'_i$, nous dirons encore que $\mathcal{A}$ est un

atlas de E sur E' . Si les changements de cartes locales φ_{ji} , associés aux couples (f_i, f_j) appartiennent tous à Γ , pseudogroupe des automorphismes locaux de E , nous dirons que $\mathcal{A}$ est compatible avec Γ . Soit $\mathcal{A}$ un atlas de E sur E' compatible avec Γ . En transportant par f_i la structure de U_i sur U'_i , les structures ainsi définies sur les U'_i sont cohérentes. Donc l'atlas détermine sur E' une structure locale S' de même espèce que S .

6. L'espèce de structures locales associées à un pseudogroupe de transformations ⁽³⁾.

Soit Γ un pseudogroupe de transformations défini dans E et soit $\mathcal{A}$ un atlas de E sur E' compatible avec Γ . Chaque carte locale f_i de l'atlas $\mathcal{A}$ a pour source un ensemble $U \in \Phi$, où Φ est l'ensemble des ouverts de la topologie sous-jacente à Γ . Un atlas $\mathcal{A}$ compatible avec Γ sera dit *complet* lorsqu'il est identique à tout atlas compatible avec Γ et contenant $\mathcal{A}$. Une carte locale de E sur E' est dite compatible avec $\mathcal{A}$ lorsqu'en l'adjoignant à $\mathcal{A}$ on obtient encore un atlas compatible avec Γ . On démontre facilement :

PROPOSITION. — Etant donné un atlas $\mathcal{A}$ de E sur E' compatible avec Γ , soient f_λ et f_μ deux cartes locales de E sur E' dont chacune est compatible avec Γ . Par adjonction à $\mathcal{A}$ de f_λ et f_μ on obtient encore un atlas compatible avec Γ .

PROPOSITION. Tout atlas $\mathcal{A}$ compatible avec Γ est contenu dans un atlas complet $\bar{\mathcal{A}}$ unique compatible avec Γ , appelé atlas complet engendré par $\mathcal{A}$.

$\bar{\mathcal{A}}$ s'obtient en effet par adjonction à $\mathcal{A}$ de toutes les cartes compatibles séparément avec $\mathcal{A}$.

DÉFINITION : Un atlas complet de E sur E' compatible avec Γ définit sur E' une *structure associée* à Γ . La classe des structures associées à Γ , sur un ensemble quelconque, est l'*espèce des structures associées* à Γ .

D'après la proposition précédente, un atlas incomplet compatible avec Γ détermine déjà une structure associée à Γ unique, celle qui est définie par l'atlas complet engendré.

PROPOSITION. L'espèce des structures associées à un pseudogroupe de transformations Γ est une espèce de structures locales.

Soit S' la structure définie sur E' par l'atlas complet $\bar{\mathcal{A}}$ de E sur E' , compatible avec Γ . L'ensemble Φ' des sous-espaces distingués de E' est l'ensemble des réunions de buts de cartes locales appartenant à $\bar{\mathcal{A}}$. La structure induite par S' sur $U' \in \Phi'$ est définie par l'ensemble des cartes locales appartenant à $\bar{\mathcal{A}}$ et dont le but est contenu dans U' . On vérifie facilement les axiomes d'une espèce de structures locales.

Si f est une application biunivoque de E' sur E'' , la structure déduite

⁽³⁾ C. EHRESMANN, *Sur la théorie des espaces fibrés* (Coll. de Topologie alg., C.N.R.S., Paris, 1947).

de S' par f est celle qui est définie par l'atlas (ff_i) , où f_i est une carte quelconque appartenant à $\mathcal{A}$.

En particulier Γ définit un atlas complet de E sur E compatible avec Γ , donc une structure associée à Γ . Cette structure locale admet Γ pour *pseudogroupe des automorphismes locaux*.

7. Structures subordonnées.

Soit Γ_1 un sous-pseudogroupe de Γ ; c'est-à-dire $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Soit $\mathcal{A}_1$ un atlas complet compatible avec Γ_1 de E sur E' . Comme $\mathcal{A}_1$ est aussi compatible avec Γ , il est contenu dans un atlas complet $\mathcal{A}$ compatible avec Γ . Ainsi toute structure associée à Γ_1 détermine une structure unique associée à Γ ; la première est définie par $\mathcal{A}_1$, la deuxième par $\mathcal{A}$. Nous dirons que la première est subordonnée à la seconde, ou qu'elle est plus précise que la seconde. Mais inversement étant donné un atlas $\mathcal{A}$ complet compatible avec Γ , il n'existe pas nécessairement un atlas $\mathcal{A}_1$ contenu dans $\mathcal{A}$ et compatible avec Γ_1 . Ceci pose le *problème d'existence* des structures locales associées à Γ_1 qui soient subordonnées à une structure locale donnée S associée à Γ . On a aussi le *problème d'équivalence* de deux structures locales subordonnées à S ; deux structures S_1 et S_1' subordonnées à S peuvent être dites équivalentes lorsqu'il existe un automorphisme de la structure S qui transporte S_1 sur S_1' .

Par exemple Γ_1 peut se réduire à l'application identique de E . Considérons sur E la structure locale définie par Γ , sur E' la structure locale S définie par un atlas complet $\mathcal{A}$ de E sur E' compatible avec Γ . Un atlas $\mathcal{A}_1$ contenu dans $\mathcal{A}$ et compatible avec Γ_1 se réduit alors à un isomorphisme global de E sur E' .

8. Les structures de variétés topologiques et leurs structures subordonnées.

L'espace numérique réel R^n , à n dimensions, est muni d'une topologie canonique: un sous-ensemble U de R^n est ouvert lorsque tout point x de U est centre d'une boule contenue dans U . Une variété topologique V_n est un ensemble muni d'une structure topologique localement homéomorphe (c'est-à-dire localement isomorphe) à R^n , mais vérifiant de plus une *propriété de caractère non local*, à savoir l'axiome de HAUSDORFF. Une structure de variété topologique sur V_n peut donc être définie par un atlas de R^n sur V_n compatible avec le pseudogroupe Λ_n des automorphismes locaux de R^n , à condition que la topologie ainsi définie sur R^n vérifie l'axiome de HAUSDORFF.

On est conduit à considérer des structures associées à des sous-pseudogroupes de Λ_n . Soit Λ_n^+ le pseudogroupe des automorphismes locaux de R^n ayant le degré topologique égal à $+1$; ce sont les automorphismes locaux qui conservent une orientation donnée de R^n (On prendra l'orientation cano-

nique définie par la suite des vecteurs de base canoniques $e_1, e_2, \dots, e_n$ de R^n). Une structure associée à $\overset{+}{\Lambda}_n$ est une structure de variété topologique orientée. Une variété topologique admet ou bien deux orientations (c'est-à-dire structures subordonnées associées à $\overset{+}{\Lambda}_n$), ou bien aucune.

Soit Λ_n^r le pseudogroupe des automorphismes locaux de R^n qui sont r fois continûment différentiables ainsi que leurs inverses (c'est-à-dire le rang en chaque point de $\varphi \in \Lambda_n^r$ est égal à n). Une structure associée à Λ_n^r est une structure de r -variété (ou variété r fois différentiable).

Soit $\overset{+}{\Lambda}_n^r$ le sous-pseudogroupe de $\overset{+}{\Lambda}_n^r$ formé par les $\varphi \in \Lambda_n^r$ dont le déterminant jacobien est positif en chaque point. Les structures associées sont les structures de r -variétés orientées. Une r -variété admet ou bien deux orientations ou bien aucune. Soit Λ_n^∞ le sous-pseudogroupe de Λ_n^r formé par les automorphismes locaux indéfiniment différentiables de R^n . Les structures associées sont les structures de variétés indéfiniment différentiables. On peut encore considérer $\overset{+}{\Lambda}_n^\infty$.

Soit Λ_n^ω le sous-pseudogroupe de Λ_n^r formé des automorphismes locaux analytiques de R^n . Les structures associées sont les structures de variétés analytiques réelles. De même $\overset{+}{\Lambda}_n^\omega$.

Soit Λ_n^c le pseudogroupe des automorphismes locaux analytiques complexes et inversibles de C^n , espace numérique complexe à n dimensions complexes qu'on peut identifier à R^{2n} . On a $\Lambda_n^c \subset \overset{+}{\Lambda}_{2n}^\omega$. Les structures associées à Λ_n^c sont les structures de variétés analytiques complexes. On obtient les structures analytiques pseudocomplexes, en considérant de même le pseudogroupe des automorphismes locaux de C^n qui sont analytiques complexes ou antianalytiques complexes (c'est-à-dire composés d'un automorphisme analytique complexe et de l'antiinvolution $z_i = \bar{z}_i$).

Soit Λ_n^a le sous-pseudogroupe de Λ_n^ω formé par les automorphismes locaux algébriques réels; de même Λ_n^{ac} le sous-pseudogroupe de Λ_n^c formé par les automorphismes locaux algébriques complexes de C^n . Les structures locales associées peuvent s'appeler les structures de variété localement algébrique réelle ou complexe. Toute variété algébrique sans singularités au sens classique est munie d'une telle structure.

On peut aussi considérer les sous-pseudogroupes de Λ_n^a ou de Λ_n^{ac} formés par les automorphismes locaux birationnels de R^n ou de C^n . Les structures locales associées sont les structures de variétés localement rationnelles réelles ou complexes.

Pour toutes les structures du type précédent on a le problème d'existence de structures subordonnées: par exemple à une structure de variété topologique ou de variété différentiable donnée sur V_n . On a de même le problème d'équivalence de deux structures subordonnées. Par exemple une structure

de r -variété sur V_n admet toujours une structure de variété analytique réelle subordonnée, en vertu d'un théorème de WHITNEY affirmant la possibilité de plonger une variété différentiable dans un espace numérique sur une variété analytique plongée. Par contre une structure différentiable sur V_{2n} n'admet pas toujours une structure analytique complexe subordonnée⁽⁴⁾; par exemple la sphère S_{2n} n'en admet pas pour $2n \neq 2$ ou 6. Pour S_6 le problème n'est pas résolu.

9. Structures locales associées à un pseudogroupe de transformations de Lie.

L'ensemble des automorphismes locaux différentiables de R^{2n} qui laissent invariante la forme différentielle extérieure

$$dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \dots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

forme un *pseudogroupe de Lie* (groupe « infini » dans la terminologie de LIE). Une structure locale associée peut s'appeler structure de variété *symplectique*.

A tout pseudogroupe de LIE (notion que nous définirons⁽⁵⁾ d'une façon générale) correspond ainsi une espèce de structures associées. Considérons en particulier un groupe de LIE G opérant sur un espace E . Le composé $s\alpha$ de $s \in G$ et $\alpha \in E$ est une fonction deux fois différentiable de (s, α) . Soit φ une application biunivoque d'un ouvert U de R^n sur un ouvert $\varphi(U)$ de E telle que la restriction de φ à un voisinage suffisamment petit d'un point quelconque α de U soit la restriction d'une transformation appartenant à G . L'ensemble des applications de cette espèce forme un pseudogroupe Γ ; c'est le *pseudogroupe de Lie déduit de G* . On est ainsi conduit à considérer les structures locales associées à Γ . En particulier, on obtient ainsi les espaces localement euclidiens, localement non-euclidiens, localement affines, localement projectifs, etc.; si G est transitif dans E , les espaces localement isomorphes à E sont appelés espaces localement homogènes de LIE.

10. Structures fibreuses et structures feuilletées.

Les relations d'équivalence dans un espace topologique forment une espèce de structures locales. Si ρ est une relation d'équivalence dans l'espace topologique E , les sous-espaces distingués pour cette structure sont les ensembles ouverts saturés de E (c'est-à-dire les ouverts qui sont réunions de classes d'équivalence). La structure induite sur un ouvert saturé U est définie par la topologie induite sur U et par la relation d'équivalence induite sur U .

Les relations d'équivalence telles que les classes d'équivalence soient toutes homéomorphes à un espace topologique F forment également une espèce

⁽⁴⁾ Voir ⁽³⁾ et C. EHRESMANN, *Sur les variétés presque complexes*, « Proc. Int. Congr. Math. », 1950, ainsi que A. BOREL et J. P. SERRE, « Comptes Rendus », 233, 1951, p. 680.

⁽⁵⁾ *Structures locales et structures infinitésimales*, « Comptes Rendus », 234, p. 587-589).

de structures locales, qu'on pourrait appeler l'espèce des structures fibreuses à classes d'équivalence homéomorphes à F . Ces classes d'équivalence peuvent s'appeler les fibres de la structure. Les structures fibrées s'obtiennent en précisant cette notion de structure fibreuse.

Une autre espèce de structures locales est définie de la manière suivante : Soit $\mathcal{C}$ une topologie sur E et $\mathcal{C}'$ une topologie plus fine que $\mathcal{C}$ telle que l'application identique de E soit localement un homéomorphisme d'un ouvert relativement à $\mathcal{C}'$ sur un sous-espace de E relativement à $\mathcal{C}$ et supposons de plus $\mathcal{C}'$ localement connexe. La structure définie par $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ pourra s'appeler structure feuilletée généralisée. La classe des structures de cette espèce est une espèce de structures locales. Les sous-espaces distingués relativement à la structure $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ sont les ouverts relativement à $\mathcal{C}$ munis des topologies induites par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Les composantes connexes relativement à $\mathcal{C}'$ sont appelées feuilles de la structure feuilletée.

Par exemple, dans R^n considérons la partition par les sous-espaces linéaires de R^n définies par $x_i = \text{const.}$, où $i = p + 1, \dots, n$. Soit $\mathcal{C}$ la topologie naturelle sur R^n et soit $\mathcal{C}'$ la topologie somme de ces sous-espaces linéaires. Le couple $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ définit la structure feuilletée canonique sur R^n , dont les feuilles sont les sous-espaces linéaires considérés. Une structure sur V_n localement isomorphe à cette structure s'appelle *structure feuilletée sur V_n* . Elle sera définie par un atlas de R^n sur V_n compatible avec le pseudogroupe Γ des automorphismes locaux de la structure feuilletée canonique sur R^n . Si l'on considère le sous-pseudogroupe de Γ formé d'automorphismes locaux r fois différentiables, les structures locales associées sont les structures feuilletées r fois différentiables. Un atlas de R^n sur V_n compatible avec Γ détermine sur V_n d'une part une topologie $\mathcal{C}_1$ localement homéomorphe à $\mathcal{C}$, d'autre part une topologie $\mathcal{C}_1'$ localement homéomorphe à $\mathcal{C}'$. Les composantes connexes de V_n relativement à $\mathcal{C}_1'$ sont les feuilles de la structure feuilletée.

11 - La notion de jet local.

Soient E et E' deux espaces munis de deux structures locales S et S' de même espèce. Soient f et f_1 deux isomorphismes locaux de E dans E' , définis dans deux voisinages ouverts distingués de $x \in E$. (La topologie considérée sur E est celle dont les ensembles ouverts sont les sous-espace distingués pour la structure de S). Nous dirons que f et f_1 sont de même classe locale en x lorsque les restrictions de f et de f_1 à un voisinage ouvert distingué de x sont identiques. L'ensemble des isomorphismes locaux de E dans E' qui sont de même classe locale en x que f sera appelé le jet local de f en x ; il peut se noter $j_x^\lambda f$ et x peut s'appeler la source du jet local, $f(x)$ son but. Si f' est un isomorphisme local de E' dans un espace E'' muni encore d'une structure de même espèce, on peut définir le composé de $j_x^\lambda f$ et $j_{f(x)}^\lambda f'$, en supposant $x' = f(x)$, par la formule $j_x^\lambda(f'f) = (j_{x'}^\lambda f')(j_x^\lambda f)$.

Soit $\Pi(E)$ l'ensemble des jets locaux d'automorphismes locaux de E dans E . Muni de la loi de composition entre jets locaux, $\Pi(E)$ est un groupoïde. Soit $\Pi_x(E)$ le sous-ensemble des jets locaux des automorphismes locaux laissant fixe $x \in E$. $\Pi_x(E)$ est un groupe qu'on peut appeler *groupe d'isotropie locale* de E au point x . L'espace E est dit localement homogène lorsque $\Pi(E)$ est transitif dans E , c'est-à-dire lorsqu'il existe un automorphisme local de E transformant un point x arbitraire en un point x' arbitraire. Si E est localement homogène, les groupes d'isotropie locaux de E sont tous isomorphes.

Soit $\Pi(E, E')$ l'ensemble des jets locaux d'isomorphismes locaux de E dans E' . Nous pouvons munir $\Pi(E, E')$ de la topologie suivante : si f est un isomorphisme local de E dans E' défini dans l'ouvert distingué U , l'ensemble des jets locaux $j_x^\lambda f$, pour $x \in U$, sera un ouvert élémentaire de $\Pi(E, E')$. Un ouvert quelconque de $\Pi(E, E')$ sera une réunion quelconque d'ouverts élémentaires. Soient α et β les deux projections canoniques de $\Pi(E, E')$ sur E et sur E' ; pour $x \in \Pi(E, E')$, $\alpha(x)$ est la source de x , $\beta(x)$ son but. Les projections α et β sont des homéomorphismes locaux au sens généralisé suivant : les restrictions de α et β à un ouvert élémentaire sont des homéomorphismes.

Les notions précédentes permettent, par exemple, de faire l'étude globale d'un espace localement homogène de LIE, ou, plus généralement, localement isomorphe à un espace muni d'un groupe de transformations de LIE. Soient E , un espace homogène de LIE, E' un espace localement isomorphe à E' . Alors la topologie de $\Pi(E, E')$ vérifie l'axiome de HAUSDORFF. Toute composante connexe de $\Pi(E, E')$ est un revêtement de E pour la projection α ; elle se projette par β sur un ensemble ouvert de E' . Si E est compact et simplement connexe, toute composante connexe de $\Pi(E, E')$ est isomorphe à E et forme un revêtement simplement connexe de E' ; elle définit un isomorphisme de E sur ce revêtement. Nous arrivons ainsi au théorème ⁽⁶⁾ :

Si un espace localement homogène de Lie est compact et simplement connexe, il est isomorphe à un espace homogène de Lie.

Plus généralement, cet énoncé, est valable en y remplaçant le mot compact par complet.

⁽⁶⁾ C. EHRESMANN, *Sur les espaces localement homogènes*, « L'Enseignement Mathématique », 5-6, 1936, p. 325).