

Pressioni critiche e sforzi in un involucro cilindrico rinforzato con nervature solidali comunque intervallate ed eventualmente impresse.

Nota del prof. G. KRALL (a Roma).

§ 1. Premesse.

Un problema notevole della Teoria dell'elasticità, particolarmente importante per le applicazioni navali, è indubbiamente costituito dalla ricerca degli sforzi e delle condizioni di stabilità dell'equilibrio di un involucro cilindrico, chiuso agli estremi, con o senza nervature irrigidenti, eventualmente *impresse*, soggetto a pressione idrostatica esterna.

A questo problema, sotto aspetti ridotti, sono legate molte ricerche tra cui singolare rilievo hanno avuto quelle di H. LORENZ 1), K. v. SANDEN e P. TÖLKE 2), W. FLÜGGE 3), S. TIMOSHENKO 4), R. V. SOUTHWELL 5), v. MISES 6), F. VITERBO 7).

Tutte hanno portato un contributo importante alla conoscenza delle soluzioni effettive, tanto interessanti per il calcolo di uno scafo per sommergibile.

Le ricerche del LORENZ, di SOUTHWELL e v. MISES mirano in particolare alla valutazione delle pressioni critiche p_{cr} su un involucro cilindrico soggetto o no a sforzo assiale, (in generale derivante dalla pressione sui fondi) che infestona secondo configurazioni assiali e non assialsimmetriche.

Tali ricerche è cercato qui di estendere al caso del cilindro *ortotropo* cioè ad anisotropia ortogonale, nel senso delle basi e delle generatrici. Sono pervenuto così a formole molto semplici che in prima approssimazione possono sostituire le complesse ricerche generali del FLÜGGE.

La ricerca di v. SANDEN e TÖLKE considera, secondo la classica teoria delle *volte sottili* del LOVE, il problema del cilindro con nervature (ossature) *eguali ed equidistanti*; però, quando passa a tenere conto, riprendendo una precedente memoria di v. SANDEN e GÜNTHER 8), dello sforzo assiale conseguente alla pressione sui fondi, adotta un criterio semplificativo di cui diremo che è stato espresso, accanto a varie osservazioni utili per il tecnico,

da F. VITERBO nella citata memoria 7). Tale criterio non rispecchia completamente la realtà. Infatti, poichè con questo si è condotti a riportare il problema dell'involucro con sforzo assiale a quello che ne è privo, salvo ad assumere, m essendo il coefficiente di POISSON, una pressione esterna virtuale

$$p^* = p \frac{2m - 1}{2m}$$

in luogo di quella effettiva p , riesce manifesto che restano del tutto trascurati (il che però, nei casi ordinari, è praticamente legittimo) i momenti flettenti longitudinali dovuti a tale sforzo, momenti che si sviluppano inevitabili quando le generatrici perdono la configurazione retta.

Una nuova impostazione della teoria che tenga completa considerazione dello sforzo assiale costituisce uno scopo della trattazione che segue. In questa si mira, anche per specifiche richieste che mi sono pervenute, a studiare con ogni dettaglio l'aspetto non critico, ma istessamente fondamentale, del problema generale, sino ad ora non considerato, involgente la determinazione degli sforzi in involucri cilindrici con ossature aventi distribuzione e rigidità qualunque. In queste si possono comprendere compartimenti stagni e anelli rinforzati o sottoposti eventualmente a sforzo preliminare, opposto alla pressione, esterna per un sommergibile, interna per un tubo in pressione.

È avuto per fine essenziale la ricerca di procedimenti attuabili effettivamente e presentabili in forma sintetica come appare nel § successivo in cui tutti i risultati sono stati riassunti come è conveniente per le applicazioni ed illustrati con esempi numerici.

Concludendo queste premesse mi è gradito esprimere cordiali ringraziamenti al prof. M. PICONE, direttore dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, che mi ha dato la possibilità — particolarmente compendiata nella acuta ed efficace collaborazione del dott. D. CALIGO — di tentare, anche attraverso numerose esperienze numeriche, varie vie prima di pervenire all'assetto attuale del lavoro, assetto che credo soddisfacente; dall'altro, di superare agilmente i non lievi sviluppi algoritmici che ricorrono al § 3.

§ 2. Riassunto dei risultati conseguiti ⁽¹⁾.

Sforzi in un involucro cilindrico rinforzato con nervature solidali comunque intervallate ed eventualmente impresse (forzate) soggetto a pressione idrostatica esterna e sui fondi.

(1) Non mi sembrò necessario riassumere qui i risultati del § 2, n. 3 perchè evidenti nel testo; i risultati ai n. 1 e 2 di detto § sono noti dal LORENZ, op. cit.

N. 1. Specificazione dei simboli. — Definiamo :

p = pressione esterna.

m = coefficiente di POISSON; per l'acciaio: $\frac{1}{m} = 0,30$, $\frac{2m-1}{2m} = 0,850$.

$$p^* = p \frac{2m-1}{2m}.$$

E = modulo d'elasticità.

d = larghezza dell'ala della nervatura.

$\vec{P} = \vec{p}d$ = sforzo centrifugo impresso con *forzamento*, agente sull'involucro in senso opposto alla pressione p .

N = sforzo longitudinale per unità di lunghezza misurata sulla circonferenza di raggio r_0 . Se è dovuto alla pressione sui fondi si à

$$N = r_0^2 \pi p : 2r_0 \pi = \frac{r_0 p}{2}.$$

F' = area sezione nervatura (ossatura).

J' = momento di inerzia (rispetto all'asse baricentrico) di F' , $i'^2 = \frac{J'}{F'}$.

δ = spessore dell'involucro.

y_s' = distanza del baricentro di F' dal mezzo lamiera.

F = area sezione nervatura + lamiera direttamente a contatto con l'ala, dunque $F = F' + d \cdot \delta$.

y_s = distanza del baricentro di F dal mezzo lamiera, quindi

$$y_s = y_s' \frac{1}{1 + \frac{d \cdot \delta}{F'}}.$$

J = momento d'inerzia di F , quindi

$$J = J' \left(1 + \frac{y_s'^2}{i'^2} \frac{1}{1 + \frac{d \cdot \delta}{F'}} \right).$$

r_0 = raggio medio contato sul mezzo lamiera.

r = raggio baricentrico di F' .

r' = raggio baricentrico di $F = F' + d \cdot \delta$.

r_e = raggio esterno dell'involucro.

$2b$ = intervallo netto tra le nervature, quindi $2b + d$ è l'interesse tra le nervature.

Poniamo:

$$n = 12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{N}{E \delta} \left(\frac{b}{\delta}\right)^2 \text{ dunque, per } N \cong \frac{r_0^2 \pi p}{2 r_0 \pi},$$

$$n = 6 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p r_0}{E \delta} \left(\frac{b}{\delta}\right)^2.$$

$$\gamma = 12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\frac{b}{\delta}\right)^4 \cdot \frac{p^*}{E}.$$

$$\nu = \frac{(p^* - \bar{p}) d^*}{E \delta} \cdot \frac{r^2}{F}, \text{ con } d^* = d \cdot \frac{r_e}{r}.$$

$$\beta = 12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{b^4}{r_0^2 \delta^2}.$$

$$\varepsilon = \frac{1}{6} \frac{m^2}{m^2 - 1} \left(\frac{\delta}{b}\right)^3 \frac{r^2}{F}.$$

Si considera il solo caso praticamente interessante

$$n^2 - 4\beta < 0$$

dunque, se lo sforzo deriva dalla pressione sui fondi, e quindi $N \cong \frac{r_0 p}{2}$,
il caso

$$\frac{p}{E} < \sqrt{\frac{4}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^2}.$$

N. 2. **Caso particolare.** — INVOLUCRO CILINDRICO CON NERVATURE EGUALI ED EQUIDISTANTI EVENTUALMENTE FORZATE (cfr. fig. 1).

Posto

$$\xi = \frac{x}{b}$$

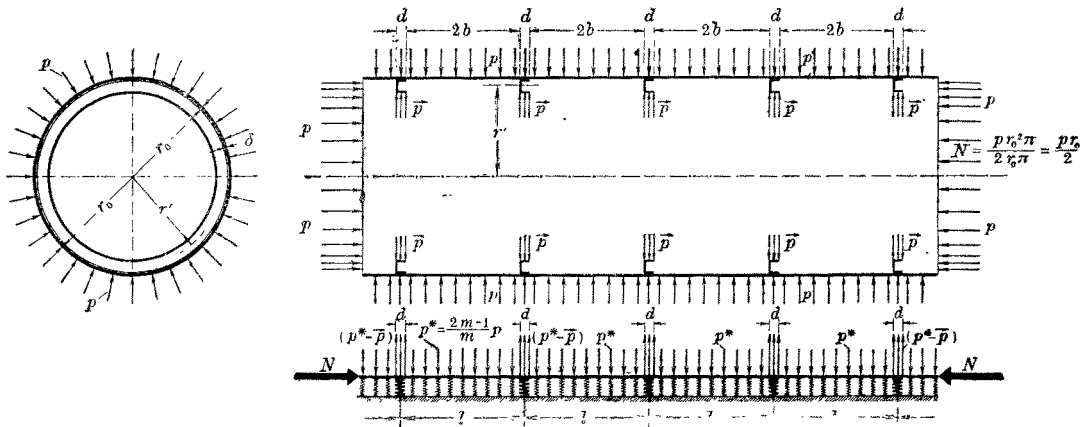


Fig. 1

e contato x così che siano

$\xi = 0$, $\xi = 2$ le sezioni di attacco,
 $\xi = 1$ la sezione di mezzeria; posto ancora

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\beta} - \frac{n}{2})}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\beta} + \frac{n}{2})},$$

si à per lo spostamento $w = w(\xi)$,

$$w(\xi) = \delta \cdot v(\xi)$$

con

$$v(\xi) = \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\nu - \frac{\gamma}{\beta}}{2\varepsilon\eta_1\eta_2(\eta_1^2 + \eta_2^2)(\text{Sh}^2\eta_1 + \sin^2\eta_2) + \eta_1 \sin\eta_2 \cos\eta_2 + \eta_2 \text{Sh}\eta_1 \text{Ch}\eta_1} \cdot \\ \cdot \{ \text{Sh}\eta_1 \cdot [\eta_1 \text{Sh}\eta_1(1 - \xi) \sin\eta_2\xi + \eta_2 \text{Ch}\eta_1(1 - \xi) \cos\eta_2\xi] + \\ \sin\eta_2 \cdot [\eta_1 \text{Ch}\eta_1\xi \cos\eta_2(1 - \xi) - \eta_2 \text{Sh}\eta_1\xi \sin\eta_2(1 - \xi)] \}.$$

Per la 2^a derivata di v si à

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} = \frac{\left(\nu - \frac{\gamma}{\beta}\right)(\eta_1^2 + \eta_2^2)}{2\varepsilon\eta_1\eta_2(\eta_1^2 + \eta_2^2)(\text{Sh}^2\eta_1 + \sin^2\eta_2) + \eta_1 \sin\eta_2 \cos\eta_2 + \eta_2 \text{Sh}\eta_1 \text{Ch}\eta_1} \cdot \\ \cdot \{ \eta_1 \text{Sh}\eta_1 \text{Sh}\eta_1(1 - \xi) \sin\eta_2\xi - \eta_2 \text{Sh}\eta_1 \text{Ch}\eta_1(1 - \xi) \cos\eta_2\xi + \\ + \eta_1 \sin\eta_2 \text{Ch}\eta_1\xi \cos\eta_2(1 - \xi) + \eta_2 \sin\eta_2 \text{Sh}\eta_1\xi \sin\eta_2(1 - \xi) \}.$$

In $\xi = 0$, cioè all'attacco,

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} = \frac{\left(\nu - \frac{\gamma}{\beta}\right) \cdot (\eta_1^2 + \eta_2^2) \cdot (\eta_1 \sin\eta_2 \cos\eta_2 - \eta_2 \text{Sh}\eta_1 \text{Ch}\eta_1)}{2\varepsilon\eta_1\eta_2(\eta_1^2 + \eta_2^2) \cdot (\text{Sh}^2\eta_1 + \sin^2\eta_2) + \eta_1 \sin\eta_2 \cos\eta_2 + \eta_2 \text{Sh}\eta_1 \text{Ch}\eta_1}.$$

Per $n = 0$ si à

$$\eta_1 = \eta_2 = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4}} = \sqrt[4]{3 \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\frac{b}{\delta}\right)^2 \left(\frac{b}{r_0}\right)^2}.$$

Poichè non consegue nessuna semplificazione ulteriore, appare inutile la scrittura per disteso delle corrispondenti espressioni di v , $\frac{d^2v}{d\xi^2}$ (1).

Noto $v(\xi)$ e $\frac{d^2v}{d\xi^2}$ si à quanto occorre per i calcoli successivi.

(1) Tali espressioni appaiono del resto negli esempi numerici a § 3

1) Sforzi S_t negli anelli irrigidenti od ossature

$$S_t = \frac{v(0) \cdot \delta \cdot EF}{r} = EF \frac{\delta}{r} v(0),$$

1a) σ specifica in detti anelli

$$\sigma = \frac{S_t}{F} = E \frac{\delta}{r} v(0).$$

2) Sforzi secondo i paralleli dell'involucro

$$s_t = \frac{v(\xi) \cdot \delta \cdot E\delta}{r_0} = E\delta \cdot \frac{\delta}{r_0} \cdot v(\xi),$$

e quindi

$$\sigma_t = \frac{s_t}{\delta} = E \frac{\delta}{r_0} v(\xi),$$

3) Momenti flettenti lungo le generatrici

$$m(\xi) = -\frac{m^2}{m^2-1} \frac{E\delta^3}{12} \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{m^2}{m^2-1} \frac{E\delta^2}{12} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 \frac{d^2v}{d\xi^2}.$$

N. 3. Caso generale. — INVOLUCRO CILINDRICO CON NERVATURE, FORZATE O NO, COMUNQUE INTERVALLATE, E CON COMPARTIMENTI STAGNI. PRESSIONE SULL'INVOLUCRO E PRESSIONE SUI FONDI (cfr. fig. 2).

Si riduce il problema al calcolo degli sforzi in un involucro omogeneo indefinito soggetto a pressione p sul manto e pressione sui fondi soggetto a carichi X_i per unità di lunghezza periferica concentrati in corrispondenza alle ossature di cui essi sostituiscono gli effetti.

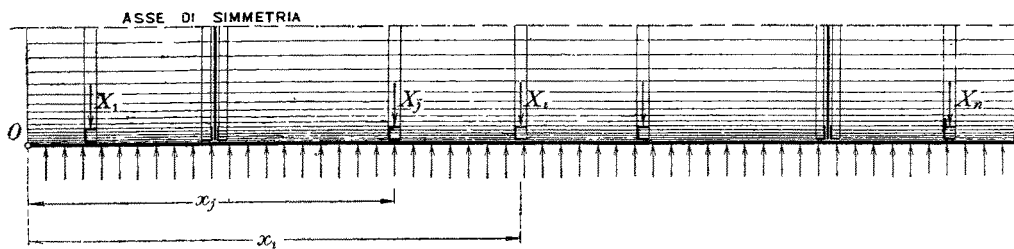


Fig. 2

Noti, nel modo appresso indicato, questi carichi X_i , gli sforzi, spostamenti ecc. si calcolano con l'ausilio di una *funzione di influenza* Φ che si passa a precisare nei termini del valore assoluto di una sola variabile differenza delle coordinate x_i del punto influenzato e x_j del punto influenzante.

Questa funzione, quando sia, come unicamente avviene nei casi pratici, $n^2 - 4\beta < 0$ è, con riguardo alle precedenti espressioni di η_1 e η_2 , ove si ponga

$$\xi = \frac{x_i - x_j}{r_0},$$

$$\Phi(\xi) = \frac{e^{-n_1|\xi|}}{2\sqrt{\beta}} \left\{ \frac{1}{\eta_1} \cos \eta_2 |\xi| + \frac{1}{\eta_2} \sin \eta_2 |\xi| \right\},$$

$$\Phi''(\xi) = \frac{1}{2} e^{-n_1|\xi|} \left(\frac{\sin \eta_2 |\xi|}{\eta_2} - \frac{\cos \eta_2 |\xi|}{\eta_1} \right).$$

Per $n = 0$ si à

$$\eta_1 = \eta_2 = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4}} = \eta_0$$

e

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4\eta_0^3} \varphi(\xi), \quad \frac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2} = \Phi''(\xi) = \frac{1}{2\eta_0} \psi(\xi),$$

con

$$\varphi(\xi) = e^{-\eta_0\xi} (\cos \eta_0\xi + \sin \eta_0\xi);$$

$$\psi(\xi) = e^{-\eta_0\xi} (\sin \eta_0\xi - \cos \eta_0\xi).$$

Introducendo la cosiddetta *lunghezza caratteristica*

$$s_0 = \frac{r_0}{\eta_0} = r_0 \sqrt[4]{\frac{1}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} \left(\frac{\delta}{r_0} \right)^2}$$

la φ e la ψ si scrivono anche, poichè

$$x = r_0 \cdot \xi,$$

$$\varphi\left(\frac{x}{s_0}\right) = e^{-\frac{x}{s_0}} \left(\cos \frac{x}{s_0} + \sin \frac{x}{s_0} \right),$$

$$\psi\left(\frac{x}{s_0}\right) = e^{-\frac{x}{s_0}} \left(\sin \frac{x}{s_0} - \cos \frac{x}{s_0} \right).$$

Per involucri per sommergibili, s è dell'ordine di uno o due decimetri; lo smorzamento di Φ , per gli ordinari valori di n , o di φ e ψ è quindi molto forte con riguardo ai valori che può assumere $|x|$.

Nota tale funzione Φ , simmetrica rispetto a $\xi = 0$, si calcolino i coefficienti

$$\Phi_{i,j} = \Phi(|\xi_i - \xi_j|)$$

essendo, ripetiamo,

$$\xi_i = \frac{x_i}{r_0}, \quad \xi_j = \frac{x_j}{r_0}$$

con x_i, x_j coordinate di due generiche ossature contate da un'origine qualunque, stabilita una volta per sempre.

Ciò posto, si sostituiscano alle X_j le incognite χ_j così definite

$$\frac{X_j}{E\delta} = \chi_j$$

e si valutino i termini

$$\begin{aligned} \frac{P_j}{E\delta} &= \pi_j \quad \text{con} \quad P_j = (p - \vec{p}_j) \cdot d^*, \\ d^* &= \frac{r_e}{r_i} d, \quad r_e = r_0 + \frac{\delta}{2}, \quad p^* = \frac{2m-1}{2m} p, \\ \Phi_0 &= -\frac{2m-1}{2m} \frac{pr_0^2}{E\delta^2} = \frac{p^*r_0^2}{E\delta^2}. \end{aligned}$$

Sia infine

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} < 1 & \text{per } i = j, \\ 0 & \text{» } i \neq j. \end{cases}$$

Il sistema nelle incognite X_j , cioè nelle χ_j , è dato allora da

$$\sum_j \chi_j \cdot \left(\omega \cdot \Phi_{i,j} + \alpha_{i,j} \frac{r_i'^2}{F_i'} \right) = -\pi_i \frac{r_i'^2}{F_i'} + \Phi_0$$

essendo

$$\omega = 6 \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^3.$$

In corrispondenza ad un compartimento stagno, porre $F' = \infty$.

Trovate le χ_j si à

Spostamenti in x

$$w(x) = w_m - \omega \cdot \delta \cdot \sum_j \chi_j \cdot \Phi(|\xi - \xi_j|)$$

con

$$w_m = \frac{2m-1}{2m} \frac{pr_0^2}{E\delta} = \Phi_0 \cdot \delta.$$

Sforzi nell'involucro

nel senso dei paralleli

$$s_t(x) = \frac{E\delta}{r_0} w(x),$$

nel senso delle generatrici

$$\sigma = \pm \frac{6m(x)}{\delta^2}$$

con

$$m(x) = -\frac{E \cdot \delta \cdot r_0}{2} \sum_j \chi_j \Phi''(|\xi - \xi_j|).$$

Caso per $n = 0$.

Per $n = 0$ conviene porre

$$\omega\Phi_{ij} = \omega_0\varphi_{ij}$$

con

$$\omega_0 = \frac{3}{2} \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\frac{s_0}{\delta} \right)^3.$$

Le equazioni nelle incognite

$$\chi_i = \frac{X_i}{E\delta}$$

si scrivono allora

$$\chi_i \cdot \frac{r'^2}{E'} + \omega_0 \sum_j \chi_j \varphi_{ij} = -\pi_i \frac{r_i'^2}{E'} + \Phi_0.$$

Mettendo invece in evidenza le X_j , come in tal caso è forse più pratico, si à anche

$$X_i \frac{r'^2}{E'} + \omega_0 \sum_j X_j \varphi_{ij} = - (p - \bar{p}) d \frac{r_i'^2}{E'} + \frac{2m - 1}{2m} \frac{p r_0^2}{\delta}.$$

Note le X_i risulta

$$w(x) = \frac{2m - 1}{m} \frac{p r_0^2}{E\delta} - \frac{\omega_0 \delta}{E} \sum_j X_j \varphi(|\xi - \xi_j|),$$

$$s_{it}(x) = \frac{E\delta}{r_0} w(x),$$

$$\sigma(x) = \pm \frac{6m(x)}{\delta^2}$$

con

$$m(x) = -\frac{s_0}{2} \sum_j X_j \psi(|\xi - \xi_j|).$$

OSSERVAZIONE I. — Se non si trascura la larghezza d dell'ala dell'osatura anzichè $\varphi_{ii} = \varphi(0) = 1$, porre

$$\varphi_{ii} = \varepsilon(\Delta)$$

con

$$\varepsilon(\Delta) = \frac{1 - e^{-\Delta} \cos \Delta}{\Delta}, \quad \Delta = \frac{d}{2s_0}.$$

Analogamente, anzichè $\psi_{ii} = \psi(0) = -1$ porre

$$\psi_{ii} = -\mu(\Delta)$$

con

$$\mu(\Delta) = \frac{e^{-\Delta} \sin \Delta}{\Delta}, \quad \Delta = \frac{d}{2s_0};$$

$\varepsilon(\Delta)$, $\mu(\Delta)$ sono appresso tabellate per

$$0,10 \leq \Delta \leq 0,30.$$

Per i valori di φ_{ij} e ψ_{ij} , per $i \neq j$, le correzioni sono inessenziali e possono essere senz'altro trascurate.

Δ	$\frac{1 - e^{-\Delta} \cos \Delta}{\Delta}$	$\frac{e^{-\Delta} \sin \Delta}{\Delta}$
0,10	0,9968	0,9033
0,11	0,9962	0,8940
0,12	0,9955	0,8848
0,13	0,9947	0,8756
0,14	0,9939	0,8665
0,15	0,9930	0,8575
0,16	0,9921	0,8485
0,17	0,9912	0,8396
0,18	0,9901	0,8308
0,19	0,9891	0,8220
0,20	0,9879	0,8133
0,21	0,9868	0,8046
0,22	0,9856	0,7961
0,23	0,9843	0,7875
0,24	0,9830	0,7791
0,25	0,9816	0,7707
0,26	0,9802	0,7624
0,27	0,9788	0,7541
0,28	0,9773	0,7459
0,29	0,9758	0,7378
0,30	0,9742	0,7298

OSSERVAZIONE II. — Nelle circostanze specifiche qui considerate (involucri per sommergibili, tubi con nervature ecc.) si à Φ_{ij} praticamente trascurabile per j anche poco diverso da i e, in ogni caso, $\Phi_{i,j+1}$ o $\Phi_{i,j-1}$ piccolo in raffronto a Φ_{ii} .

Pertanto le equazioni potranno ridursi a 3 sole incognite χ_{i-1} , χ_i , χ_{i+1} ognuna. Si ha allora in 1ª approssimazione

$$X_i^{(1)} = \frac{\Phi_0 - (p - \bar{p})d \frac{r'^2}{E_i'}}{\omega_0 \varepsilon(\Delta) + \frac{r'^2}{E_i'}};$$

in 2^a approssimazione

$$X_i^{(2)} = \frac{\Phi_0 - (p - \vec{p})d \frac{r'^2}{F'_i} - \omega_0 \sum_j' X_j^{(1)} \varphi_{ij}}{\omega_0 \varepsilon(\Delta) + \frac{r'^2}{F'_i}}$$

l'apice sul sommatorio stando ad indicare che vanno in esso contemplati i soli termini per $j \neq i$. Atteso il forte smorzamento, tale sommatorio potrà limitarsi ai due soli termini

$$j = i - 1 \quad \text{e} \quad j = i + 1.$$

§ 3. Esempi numerici.

N. 1. Caso particolare. — Poniamo per semplicità

$$r \cong r_0 \cong r' \cong r_e = 3000 \text{ mm}, \quad \delta = 20 \text{ mm}, \quad l = 2b = 550 \text{ mm},$$

$d = d^* = 90 \text{ mm}$ (intervallo d'ossatura $2b + d = 640 \text{ mm}$); *ossatura: ferro a bulbo* $\frac{250 \cdot 90}{12}$: $F' = 4700 \text{ mm}^2$; *pressione idrostatica: p = 100 m d'acqua = 0,1 kg/mm²; $\vec{p} = 0$,*

$$\frac{1}{m} = 0,3 \quad E = 21000 \text{ kg/mm}^2.$$

Valori notevoli diversi:

$$\frac{2m - 1}{2m} = 0,85 \quad \frac{m^2 - 1}{m^2} = 0,91$$

$$F = F' + d\delta = 6500 \text{ mm}^2, \quad \frac{b}{\delta} = 13,75, \quad p = 100 \text{ m} = 0,1 \text{ kg/mm}^2,$$

$$\frac{pr}{\delta} = 15 \text{ kg/mm}^2, \quad 0,85 \frac{pr}{\delta} = 12,75 \text{ kg/mm}^2, \quad p^* = 0,85 \cdot p = 0,085 \text{ kg/mm}^2,$$

$$n = 0,73734, \quad \beta = 17,34806, \quad \gamma = 1,57991.$$

Si à quindi

$$n^2 - 4\beta < 0$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta} - \frac{n}{2}}{2}} = \sqrt{1,89821} = 1,37776$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta} + \frac{n}{2}}{2}} = \sqrt{2,26688} = 1,50562$$

$$\begin{aligned}
\nu &= 0,02522 & \varepsilon &= 0,09755 & \frac{\gamma}{\beta} &= 0,09107 \\
\frac{\delta\gamma}{\beta} &= 1,82143 & \nu - \frac{\gamma}{\beta} &= -0,06585 \\
\eta_1 \eta_2 &= 2,07437 & \eta_1^2 + \eta_2^2 &= 4,16510 \\
\text{Sh } \eta_1 &= 1,85693 & \text{Ch } \eta_1 &= 2,10906 & \text{Sh}^2 \eta_1 &= 3,44817 \\
& & \text{Sh } \eta_1 \text{ Ch } \eta_1 &= 3,91639 \\
\text{sen } \eta_2 &= 0,99788 & \cos \eta_2 &= 0,065532 & \text{sen}^2 \eta_2 &= 0,99576 \\
& & \text{sen } \eta_2 \cos \eta_2 &= 0,06499 \\
\text{Sh } \eta_1 \cos \eta_2 &= 0,12095 & \text{sen } \eta_2 \text{ Ch } \eta_1 &= 2,10459 \\
2\varepsilon\eta_1\eta_2(\eta_1^2 + \eta_2^2)(\text{Sh}^2 \eta_1 + \text{sen}^2 \eta_2) &= 7,49098 \\
\frac{\left(\nu - \frac{\gamma}{\beta}\right)\delta}{2\varepsilon\eta_1\eta_2(\eta_1^2 + \eta_2^2)(\text{Sh}^2 \eta_1 + \text{sen}^2 \eta_2) + \eta_1 \text{sen } \eta_2 \cos \eta_2 + \eta_2 \text{Sh } \eta_1 \text{ Ch } \eta_1} &= \\
&= -\frac{1,31703}{13,47711} = -0,09772 \\
w(\xi) = \delta v(\xi) &= 1,82143 - 0,09772 \{ \text{Sh } \eta_1 [\eta_1 \text{Sh } \eta_1 (1 - \xi) \cdot \\
&\quad \cdot \text{sen } \eta_2 \xi + \eta_2 \text{Ch } \eta_1 (1 - \xi) \cos \eta_2 \xi] + \text{sen } \eta_2 \cdot \\
&\quad \cdot [\eta_1 \text{Ch } \eta_1 \xi \cos \eta_2 (1 - \xi) - \eta_2 \text{Sh } \eta_1 \xi \text{sen } \eta_2 (1 - \xi)] \} \\
w(0) = w(2b) &= 1,82143 - 0,09772 \cdot 5,98613 = \\
&= 1,82143 - 0,58499 = 1,23644 \text{ mm} \\
w(b) &= 1,82143 - 0,09772 \cdot 3,08771 = \\
&= 1,82143 - 0,30116 = 1,52027 \text{ mm} \\
w''(0) = w''(2b) &= \frac{\delta}{b^2} v''(0) = \frac{\delta}{b^2} v''(2) = +0,0^5 53823 \cdot \\
&5,80704 = 0,0^4 31255 \\
w''(b) &= \frac{\delta}{b^2} v''(1) = -0,0^4 14627,
\end{aligned}$$

per $n = 0$ si ha

$$\begin{aligned}
p^* &= 0,085 \text{ kg/mm}^2, & n &= 0, & \beta &= 17,34806, & \gamma &= 1,57991 \\
\eta = \eta_1 = \eta_2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{2}} = \sqrt{2,08255} = 1,44310 \\
\text{Sh } \eta &= 1,99881, & \text{Ch } \eta &= 2,23501, & \text{Sh}^2 \eta &= 3,99525 \\
& & \text{Sh } \eta \text{ Ch } \eta &= 4,46736 \\
\text{sen } \eta &= 0,99186 & \cos \eta &= 0,12735 & \text{sen}^2 \eta &= 0,98378 \\
& & \text{sen } \eta \cos \eta &= 0,12630
\end{aligned}$$

$$\text{Sh } \eta \cos \eta = 0,25454 \quad \text{sen } \eta \text{ Ch } \eta = 2,21681$$

$$\eta^2 = 2,08255 \quad \eta^3 = 3,00533$$

$$v = 0,02522 \quad \varepsilon = 0,09755 \quad \frac{\delta\gamma}{\beta} = 1,82143$$

$$\delta \left(v - \frac{\gamma}{\beta} \right) = -1,31703$$

$$4\varepsilon\eta^3(\text{Sh}^2 \eta + \text{sen}^2 \eta) = 5,83884$$

$$\text{Sh } \eta \text{ Ch } \eta + \text{sen } \eta \cos \eta = 4,58988$$

$$\frac{\left(v - \frac{\gamma}{\beta} \right) \cdot \delta}{4\varepsilon\eta^3(\text{Sh}^2 \eta + \text{sen}^2 \eta) + \text{sen } \eta \cos \eta + \text{Sh } \eta \text{ Ch } \eta} =$$

$$= -\frac{1,31703}{10,42873} = -0,12629$$

$$w(\xi) = 1,82143 - 0,12629 \cdot \{ \text{Sh } \eta [\text{Sh } \eta(1 - \xi) \text{sen } \eta \xi + \text{Ch } \eta(1 - \xi) \cdot \cos \eta \xi] +$$

$$+ \text{sen } \eta [\text{Ch } \eta \xi \cos \eta(1 - \xi) - \text{Sh } \eta \xi \text{sen } \eta(1 - \xi)] \}$$

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \delta v(1) = 1,82143 - 0,12629 \cdot 2,47135 =$$

$$= 1,82143 - 0,31210 = 1,50932$$

$$w(0) = w(l) = \delta v(0) = 1,82143 - 0,12629 \cdot 4,59357 =$$

$$= 1,82143 - 0,58012 = 1,24131$$

$$w''(0) = w''(l) = \frac{\delta}{b^2} v''(0) = +\frac{0,12629}{75625} \cdot 4,16510 \cdot 4,34105 =$$

$$= 0,0^5695 \cdot 4,34105 = 0,0^4302$$

$$w''\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\delta}{b^2} v''(1) = -0,0^5695 \cdot 1,96227 = -0,0^4136.$$

Confrontando i risultati troviamo, per $p = 100$ m d'acqua:

$n = 0$	$w(0) = w(l) = 1,241$	$w\left(\frac{l}{2}\right) = 1,509$	$w''(0) = w''(l) = 0,0^4302$	$w''\left(\frac{l}{2}\right) = -0,0^4136$
$n \neq 0$	$w(0) = w(l) = 1,236$	$w\left(\frac{l}{2}\right) = 1,520$	$w''(0) = w''(l) = 0,0^4313$	$w''\left(\frac{l}{2}\right) = -0,0^4146$

Come si constata, l'influenza dello sforzo assiale si rende sensibile, non raggiungendo però neanche il 10 % per i momenti flettenti. Considerando la pressione di 300 m, questa influenza si accentua.

Troviamo infatti

$$p = 0,3 \text{ kg/mm}^2, \quad n = 2,21203, \quad n^2 - 4\beta < 0;$$

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{p^* r_0^2}{E \delta^2} = 0,27321; \quad \nu = 0,07566$$

$$\nu - \frac{\gamma}{\beta} = -0,19755; \quad \varepsilon = 0,09755$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{3,05908}{2}} = \sqrt{1,52954} = 1,23675$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{5,27116}{2}} = \sqrt{2,63556} = 1,62344$$

$$\eta_1 \eta_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\beta - \frac{n^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{16,12478} = 2,00778$$

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = \sqrt{\beta} = 4,16510$$

$$\text{Sh } \eta_1 = 1,57703; \quad \text{Ch } \eta_1 = 1,86735; \quad \text{Sh}^2 \eta_1 = 2,48703$$

$$\text{sen } \eta_2 = 0,99861; \quad \text{cos } \eta_2 = -0,052619; \quad \text{sen}^2 \eta_2 = 0,99723$$

$$\text{Sh } \eta_1 \text{ Ch } \eta_1 = 2,94488 \quad \text{sen } \eta_2 \text{ cos } \eta_2 = -0,05255$$

$$2\varepsilon \eta_1 \eta_2 (\eta_1^2 + \eta_2^2) (\text{Sh}^2 \eta_1 + \text{sen}^2 \eta_2) = 5,68475.$$

Segue

$$\begin{aligned} v(\xi) = & 0,27321 - \frac{1,19755}{10,40061} \{ 1,57703 [1,23674 \text{Sh } \eta_1 (1 - \xi) \cdot \text{sen } \eta_2 \xi + \\ & + 1,62344 \text{Ch } \eta_1 (1 - \xi) \text{cos } \eta_2 \xi] + 0,99861 [1,23675 \cdot \\ & \cdot \text{Ch } \eta_1 \xi \text{cos } \eta_2 (1 - \xi) - 1,62344 \text{Sh } \eta_1 \xi \text{sen } \eta_2 (1 - \xi)] \} = \\ & = 0,27321 - \{ 0,03705 \text{Sh } \eta_1 (1 - \xi) \text{sen } \eta_2 \xi + 0,04863 \cdot \\ & \cdot \text{Ch } \eta_1 (1 - \xi) \text{cos } \eta_2 \xi + 0,02346 \text{Ch } \eta_1 \xi \text{cos } \eta_2 (1 - \xi) - \\ & - 0,03079 \text{Sh } \eta_1 \xi \text{sen } \eta_2 (1 - \xi) \} \end{aligned}$$

e quindi

$$w(0) = \delta v(0) = 5,46429 - 1,79151 = 3,67278 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} w(l) = \delta v(2) = & 5,46429 - 0,37989(0,32325 - 4,75436 - \\ & - 0,38823 + 9,53521) = 5,46429 - 1,79151 = 3,67278 \text{ mm} = w(0) \end{aligned}$$

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \delta v(1) = 5,46429 - 0,82495 = 4,63934 \text{ mm.}$$

Introducendo i valori numerici nelle espressioni di w'' otteniamo

$$w''(0) = \frac{20}{75625} v''(0) = + \frac{20 \cdot 0,19755 \cdot 4,1651}{75625 \cdot 10,40061} \{ 1,62344 \cdot$$

$$\cdot 2,94488 + 1,23674 \cdot 0,05255 \} = \frac{16,45672}{786545,375} \cdot$$

$$\cdot 4,845829 = 0,0^2093 \cdot 4,84583 = 0,0^31014$$

$$w''(l) = w''(0) = 0,0^31014$$

$$w''\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\delta}{b^2} v''(1) = -0,0^209 \cdot (0,13472 + 2,30625) = -0,0^45107.$$

Esaminiamo ora il caso limite $n = 0$. Si à

$$\eta = \frac{\sqrt[4]{\beta}}{\sqrt{2}} = 1,44310$$

$$\eta = 2,75 \frac{\sqrt[4]{273}}{\sqrt{60}} = 2,75 \cdot 0,52476 = 1,44310$$

$$\eta^2 = 2,08255 \quad \eta^3 = 3,00534$$

$$\text{sen } \eta = 0,99186 \quad \cos \eta = 0,12734 \quad \text{sen}^2 \eta = 0,98378$$

$$\text{Sh } \eta = 1,99881 \quad \text{Ch } \eta = 2,23500 \quad \text{Sh}^2 \eta = 3,99525$$

$$\text{Sh } \eta \text{ Ch } \eta = 4,46473 \quad \text{sen } \eta \cos \eta = 0,12631$$

$$\text{Sh } \eta \cos \eta = 0,25454 \quad \text{Ch } \eta \text{ sen } \eta = 2,216808$$

$$\text{Sh}^2 \eta + \text{sen}^2 \eta = 4,97903$$

$$w(0) = v(0)\delta = 5,46429 - \frac{1,97554 \cdot 2}{10,43250} \{4,46735 + 0,12631\} =$$

$$= 5,46429 - 0,37873 \cdot 4,59366 = 3,72453$$

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \delta v(1) = 5,46429 - 0,37873 \cdot 2,47135 = 4,52831$$

$$w''(0) = \frac{\delta}{b^2} v''(0) = w''(l) = - \frac{4,16510 \cdot 20 \cdot 0,19755}{75625 \cdot 10,43250} \cdot$$

$$\cdot \{-4,46735 + 0,12630\} = +0,0^208 \cdot 4,34105 = 0,0^29098$$

$$w''\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\delta}{b^2} v''(1) = -0,0^208 \cdot 1,96227 = -0,0^2409.$$

Raccogliendo i risultati otteniamo il seguente specchietto nel quale sono state riportate anche le calcolazioni fatte secondo le formole di V. SANDEN-VITERBO che naturalmente coincidono

	V. SANDEN-VITERBO	$n = 0$	$n \neq 0$
<i>spostamenti:</i>			
agli estremi	$w(0) = w(l) = 3,724$	$w(0) = w(2b) = 3,725$	$w(0) = w(2b) = 3,673 \text{ mm}$
in mezzeria	$w\left(\frac{l}{2}\right) = 4,528$	$w(b) = 4,528$	$w(b) = 4,639 \text{ mm}$
<i>momenti:</i>			
agli estremi	$w''(0) = w''(l) = +0,0^2911$	$w''(0) = w''(2b) = +0,0^2910$	$w''(0) = w''(2b) = +0,0^21013$
in mezzeria	$w''\left(\frac{l}{2}\right) = -0,0^2409$	$w''(b) = -0,0^2409$	$w''(b) = -0,0^2511$

Si constata che, effettivamente, nelle circostanze ordinarie quali sono quelle qui considerate, l'effetto dello sforzo assiale raggiunge al più il 25% sul valore dei momenti. Si constata anche che, per $n=0$, le nostre formole danno, naturalmente, i risultati di v. SANDEN-VITERBO. Per un maggior intervallo di ossatura l'influenza dello sforzo assiale diviene più sensibile e così pure ove venisse fatto di considerare pressioni più elevate.

N. 2. Caso generale. — Consideriamo, secondo il metodo generale indicato, a titolo di esempio e di controllo, il caso già trattato da v. SANDEN-VITERBO, cioè degli infiniti anelli eguali ed equidistanti. Allora si può affermare a priori che tutte le X_j saranno eguali e le equazioni nelle X_j , per $n=0$, porgono

$$X_i = X = p \frac{\frac{2m-1}{2m} \frac{r^2}{\delta} - \left(1 - \frac{\vec{p}}{p}\right) d \frac{r'^2}{F'}}{\omega_0 \Sigma \varphi_{ij} + \frac{r'^2}{F'}}$$

AmMESSO con riguardo all'esempio precedente

$$p = 0,30 \text{ kgmm}^{-2}, \quad \vec{p} = 0$$

$$r \cong r' \cong r_0 = 3000 \text{ mm}, \quad \delta = 20 \text{ mm}, \quad F' = 4700 \text{ mm}^2$$

$$l + d = 550 + 90 = 640 \text{ mm}, \quad E = 21000 \text{ kgmm}^{-2}$$

$$\frac{1}{m} = 0,3$$

troviamo

$$\frac{2m-1}{2m} \frac{r_0^2}{\delta} = 3,8250 \cdot 10^5 \text{ mm}, \quad d \frac{r'^2}{F'} = 1,7234 \cdot 10^5 \text{ mm}$$

$$\omega_0 = \frac{3}{2} \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\frac{s_0}{\delta}\right)^3 = 1,1807 \cdot 10^3, \quad \frac{r'^2}{F'} = 1,9149 \cdot 10^3$$

$$s_0 = \frac{r_0}{\eta_0} = r_0 \sqrt[4]{\frac{1}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^2} = 190,561 \text{ mm.}$$

Per calcolare poi i valori φ_{ij} poniamo, ordinatamente, nella funzione

$$\begin{aligned} \varphi &= e^{\eta \cdot \frac{x}{r_0}} \left(\cos \eta \frac{x}{r_0} + \sin \eta \frac{x}{r_0} \right) = \\ &= e^{-\frac{x}{s_0}} \left(\cos \frac{x}{s_0} + \sin \frac{x}{s_0} \right) \end{aligned}$$

$$x = 0, \quad x = 64,00 \text{ cm}, \quad x = 2 \cdot 64,00 \text{ cm}, \quad x = 3 \cdot 64,00 \text{ cm ecc.}$$

cioè

$$\frac{x}{s_0} = 0, \quad \frac{x}{s_0} = 3,3585, \quad \frac{x}{s_0} = 6,7170, \quad \frac{x}{s_0} = 10,075 \text{ ecc..}$$

Otteniamo, restando confermata l'asserzione che in generale è sufficiente accontentarsi del solo termine $\varphi_{i, i+1}$ o $\varphi_{i, i-1}$,

$$\begin{aligned} \varphi_{i_0} &= 1 \\ \varphi_{i_1} &= e^{-3,3585}[\sin 3,3585 + \cos 3,3585] = -0,04146 \\ \varphi_{i_2} &= e^{-6,7170}[\sin 6,7170 + \cos 6,7170] = 0,0^21606 \\ \varphi_{i_3} &= e^{-10,0755}[\sin 10,0755 + \cos 10,0755] = -0,0^45899 \\ \varphi_{i_4} &= e^{-13,4340}[\sin 13,4340 + \cos 13,4340] = +0,0^52064. \end{aligned}$$

Attesa la simmetria della φ rispetto a $x=0$, risulta

$$\Sigma_j \varphi_{ij} = \varphi_{i_0} + 2(\varphi_{i_1} + \varphi_{i_2} + \dots) = 0,92018.$$

Segue in conformità con questi valori

$$X_i = X = \frac{3,825 \cdot 10^5 - 1,7234 \cdot 10^5}{1,1807 \cdot 10^3 \cdot 0,9202 + 1,9149 \cdot 10^3} \cdot p = 70,0213 \cdot p.$$

Quindi, per $p = 0,30 \text{ kg/mm}^2$,

$$X = 70,0213 \cdot 0,30 = 21,00639 \text{ kg/cm.}$$

Lo spostamento risulta, ad es. in $x=0$,

$$\begin{aligned} w(0) &= \frac{2m-1}{m} \frac{pr^2}{E\delta} - \frac{\omega_0 \delta}{E} \cdot X \cdot \Sigma_j \varphi_{ij} = \\ &= 5,46439 - 1,18108 \cdot 0,9202 = 4,3776 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Se si tiene conto della ripartizione di X sul tratto $\langle d \rangle$ di ala del ferro a bulbo, poichè

$$\begin{aligned} \frac{d}{2s} &= \frac{9,00}{2 \cdot 19,056} = 0,236 \\ \varepsilon &\cong 0,983, \end{aligned}$$

e applicando il coefficiente ε addirittura all'intero valore di $w(0)$, risulta

$$w(0) = 0,983 \cdot 4,3776 = 4,303 \text{ mm.}$$

Confrontando questo valore con quello trovato secondo la teoria specifica si constata un buon accordo.

Va segnalato particolarmente che, secondo il metodo generale si possono ricavare altrettanto agevolmente i risultati nei casi più complessi praticamente non affrontabili per altre vie.

§ 4. Richiamo alla teoria di R. LORENZ per un cilindro isotropo senza nervature.

N. 1. **Equazione del problema.** — Consideriamo, con riferimento alla fig. 3, un elemento

$$dF = \rho_t dx d\varphi$$

di un involucro cilindrico di spessore δ soggetto a pressione esterna p .

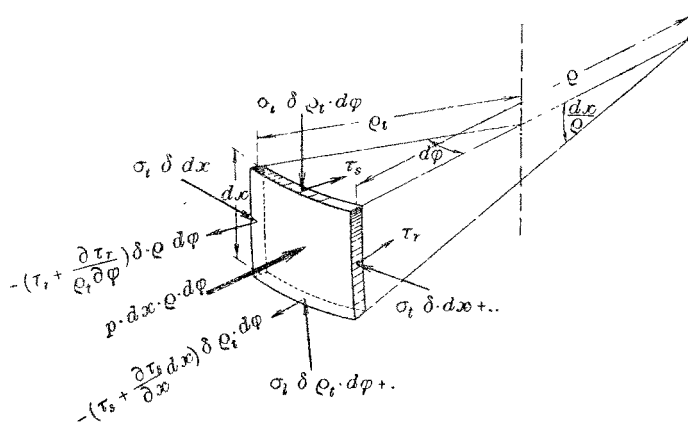


Fig. 3

Indichiamo con σ_t e σ_x le sollecitazioni normali secondo i paralleli rispettivamente secondo i meridiani (le generatrici si suppongono inflesse); con τ_s e τ_r le sollecitazioni di taglio sulle facce $\rho_t \cdot d\varphi \cdot \delta$ e $dx \cdot \delta$.

Per l'equilibrio alla traslazione dell'elemento dF si dovrà avere

$$(1) \quad \frac{p}{\delta} - \frac{\partial \tau_s}{\partial x} - \frac{\partial \tau_r}{\rho_t \partial \varphi} = \frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_x}{\rho}$$

Ora, se pensiamo questo elemento come appartenente ad una *piastra*, il che, se si escludono, come vogliamo fare, gli spostamenti tangenziali, è in ogni caso legittimo, possiamo rifarci senz'altro alle teoria di quell'importante sistema costruttivo.

Questa si esprime in una unica equazione; precisamente, se q è il carico normalmente diretto al piano mediano, w lo spostamento, misurato nel senso

di q , si à

$$(2) \quad R\Delta\Delta w = q$$

con

$$(2a) \quad R = \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E\delta^3}{12}$$

e

$$(2b) \quad \Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}.$$

Ciò posto, riandando al caso di cui si tratta, misuriamo w nel senso dei raggi crescenti; sarà allora

$$q = - \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial x} + \frac{\partial \tau_r}{\rho_t \partial \varphi} \right) \cdot \delta$$

e quindi in virtù della (1), posto $dy = \rho_t \cdot d\varphi$ la (2) diviene

$$(3) \quad R \cdot \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{\rho_t^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho_t^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = -p + \left(\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_x}{\rho} \right) \cdot \delta.$$

Rilevando che la curvatura $\frac{1}{\rho_t}$, in coordinate polari: r, φ , vale, con sufficiente approssimazione, almeno per r poco discosto da un valore costante r_0 ,

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2},$$

quindi, per $r = r_0 + w$, r_0 essendo il raggio del cilindro indeformato,

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{r_0} - \frac{w}{r_0^2} - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2};$$

ed infine che

$$\sigma_t = p \frac{r_0}{\delta}, \quad \sigma_x = - \frac{P}{2\pi r_0 \delta},$$

si ottiene, con facili trasformazioni della (3),

$$(3a) \quad R \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{r_0^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r_0^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = - \frac{p}{r_0} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{P}{2r_0 \pi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

È questa l'equazione del LORENZ che sintetizza il problema della stabilità dell'equilibrio elastico di un involucro isotropo.

N. 2. Ricerca di soluzioni della (3a). Valutazione delle pressioni critiche. — Per la ricerca di soluzioni della (3a) vien fatto spontaneo di porre

$$(4) \quad w(x, \varphi) = C \cdot v(x) \cdot \sin v\varphi$$

con $v = v(x)$ funzione della sola x e v numero intero.

Tale espressione (4) introdotta nella (3a) porge per la v l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$(3b) \quad R \left(\frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{2}{r_0^2} v^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{v^4}{r_0^4} v \right) = - \frac{p}{r_0} (1 - v^2) v - \frac{P}{2r_0 \pi} \frac{d^2 v}{dx^2}.$$

Di tale equazione si cercano soluzioni, soddisfacenti condizioni ai limiti tipiche per una trave elastica (corrente su un mezzo elastico) quindi:

(5) Per il cilindro indefinito: sforzi limitati all' ∞ ;
per il cilindro di lunghezza finita L ,

$$(5a) \quad v(0) = v(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=0, L} = 0,$$

quando è fissato a snodo (cerniera) sui diaframmi di chiusura agli estremi, oppure

$$(5b) \quad v(0) = v(L) = 0, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0, L} = 0$$

quando si considera l'incastro in luogo della cerniera.

Se il cilindro è indefinito, come ammette il LORENZ, si può porre $v(x) = \sin kx$ con k da determinare così che risulti minimo, per un assegnato valore intero di v , il valore di p per cui si hanno soluzioni non nulle.

Introducendo siffatta espressione nella (3b) otteniamo l'equazione in k e v ,

$$(6) \quad R \left(k^4 + 2 \frac{k^2 v^2}{r_0^2} + \frac{v^4}{r_0^4} \right) + p \frac{1 - v^2}{r_0} - P \frac{k^2}{2r_0 \pi} = 0.$$

Passando alla ricerca che abbiamo in vista, consideriamo ordinatamente i seguenti casi.

a) IL CILINDRO È SOGGETTO A SOLO SFORZO ASSIALE.

Dunque

$$p = 0, \quad P \neq 0.$$

La (6) porge

$$(6a) \quad P = \frac{R}{r_0} 2\pi \frac{k^4 r_0^4 + 2k^2 r_0^2 v^2 + v^4}{k^2 r_0^2}.$$

Quindi, posto

$$(7) \quad k^2 r_0^2 = \kappa,$$

$$(6b) \quad P = \frac{2\pi R}{r_0} \frac{(\kappa + \nu^2)^2}{\kappa}.$$

Il minimo di P rispetto a κ si à per

$$2(\kappa + \nu^2)\kappa - (\kappa + \nu^2)^2 = 0,$$

ovvero

$$(\kappa + \nu^2)(2\kappa - \kappa - \nu^2) = 0,$$

dunque per

$$(8) \quad \kappa = k^2 r_0^2 = \nu^2.$$

Segue, sostituendo nella (6b),

$$(9) \quad P_{cr.} = \frac{R}{r_0} 2\pi \frac{(\nu^2 + \nu^2)^2}{\nu^2} = \frac{R}{r_0} 8\pi\nu^2.$$

Escludendo il valore $\nu = 1$, cui corrisponde manifestamente una traslazione pura della sezione circolare, risulta, esplicitando R ,

$$(9a) \quad P_{cr.} = \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{2\pi E \delta^3}{3 r_0} \nu^2 \quad (\nu = 2, 3, \dots);$$

b) IL CILINDRO È SOGGETTO ALLA SOLA PRESSIONE SUL MANTO.

Dunque

$$p \neq 0 \quad \text{e} \quad P = 0.$$

La (6) porge

$$(6c) \quad p = R \frac{k^4 + 2 \frac{k^2 \nu^2}{r_0^2} + \frac{\nu^4}{r_0^4}}{\frac{\nu^2 - 1}{r_0}}$$

ovvero, per la posizione (7),

$$(6d) \quad p = \frac{R}{r_0^3} \frac{(\kappa + \nu^2)^2}{\nu^2 - 1}.$$

Qui conviene procedere nei termini seguenti:

Supponiamo che il cilindro abbia lunghezza finita eguale ad L .

Allora occorre assumere per il caso (5a) dello snodo agli estremi

$$(10) \quad k = \frac{\pi}{L},$$

per il caso (5b) dell'incastro, si può porre

$$v(x) = (1 - \cos kx)$$

con

$$(10a) \quad k = \frac{2\pi}{L}.$$

Per tali posizioni (10) e (10a) la (7) porge

$$(7a) \quad \alpha = \begin{cases} \frac{r_0^2 \pi^2}{L^2} \dots \text{per lo snodo,} \\ \frac{4r_0^2 \pi^2}{L^2} \dots \text{per l'incastro.} \end{cases}$$

Ed ora, minimizziamo rispetto a v^2 . Risulta

$$2(\alpha + v^2)(v^2 - 1) - (\alpha + v^2)^2 = 0$$

e quindi

$$v^2 = 2 + \alpha,$$

tale eguaglianza dovendosi intendere nel senso che v deve essere scelto come intero inferiormente più vicino a $\sqrt{2 + \alpha}$.

Segue in ogni caso la *limitazione inferiore* per la pressione critica

$$(10b) \quad p_{cr.} \geq \frac{R(2 + 2\alpha)^2}{r_0^3(\alpha + 1)} = \frac{4R}{r_0^3}(\alpha + 1)$$

ovvero, attesa l'espressione (7a) di α ,

$$(10c) \quad p_{cr.} \geq \frac{4R}{r_0^3} \cdot \begin{cases} \left(1 + \frac{r_0^2 \pi^2}{L^2}\right) \dots \text{per lo snodo,} \\ \left(1 + \frac{4r_0^2 \pi^2}{L^2}\right) \dots \text{per l'incastro;} \end{cases}$$

potendosi assumere il segno di eguaglianza a favore della stabilità.

Per il cilindro indefinito, passando al limite per $L \rightarrow \infty$, risulta

$$(10d) \quad p_{cr.} \geq \frac{4R}{r_0^3} = \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E\delta^3}{3r_0^3}.$$

c) IL CILINDRO È SOGGETTO ALLA PRESSIONE SUL MANTO $p \neq 0$ E AD UNA EGUALE PRESSIONE SUI FONDI, CHE DÀ QUINDI LUOGO AD UNO SFORZO ASSIALE

$$P = r_0^2 \pi p.$$

La (6) porge, con la solita posizione per α ,

$$(11) \quad p = \frac{R}{r_0^3} \frac{(\alpha + v^2)^2}{v^2 - 1 + \frac{\alpha}{2}}.$$

Ritenendo, per il cilindro finito, α dato dalla (7a), quindi non concorrente al minimo, deriviamo rispetto a ν^2 . Risulta

$$2(\alpha + \nu^2) \left(\nu^2 - 1 + \frac{\alpha}{2} \right) - (\alpha + \nu^2)^2 = 0$$

e quindi

$$\nu^2 = 2.$$

Segue con l'intesa fatta nella deduzione della (10b),

$$p_{cr.} \geq \frac{R}{r_0^3} \frac{(\alpha + 2)^2}{1 + \frac{\alpha}{2}} = \frac{2R}{r_0^3} (\alpha + 2),$$

dunque

$$(11a) \quad p_{cr.} \geq \frac{2R}{r_0^3} \cdot \begin{cases} \left(2 + \frac{r_0^2 \pi^2}{L^2} \right) \dots \text{per lo snodo,} \\ \left(2 + \frac{4r_0^2 \pi^2}{L^2} \right) \dots \text{per l'incastro;} \end{cases}$$

e per $L \rightarrow \infty$, cioè per il cilindro indefinito, ancora come in assenza di sforzo longitudinale,

$$p_{cr.} \geq \frac{4R}{r_0^3} = \frac{1}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E\delta^3}{r_0^3}.$$

Passando invece al limite nella (11), ponendo più propriamente $\nu = 2$ e quindi $\nu^2 = 4$ (anzichè $\nu^2 = 2$) si avrebbe il valore notevolmente superiore

$$p_{cr.} = \frac{R}{r_0^3} \frac{16}{3} = \frac{4}{9} \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E\delta^3}{r_0^3}.$$

N. 3. Estensione della teoria del Lorenz al caso dell'involucro cilindrico anisotropo (ortotropo) — Sia i_x il momento di inerzia della striscia unitaria nel senso di x , i_ϕ il valore medio del momento di inerzia nel senso delle basi, da ricavare come rapporto

$$(12) \quad i_\phi = \frac{J}{l}$$

tra il momento di inerzia J (da determinare eventualmente con riguardo all'effetto della curvatura θ) del complesso *nervatura + lastra*, e la distanza l tra le nervature stesse. Ciò posto ricordiamo che l'equazione per la superficie w d'inflessione di una *piastra ortotropa*, che interviene in particolare nelle costruzioni in cemento armato è, con riferimento a due assi cartesiani

x , y , se i_x ed i_y sono i momenti di inerzia della lastra nel senso di x , rispettivamente di y ,

$$(13) \quad \frac{m^2}{m^2 - 1} E \left[i_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (i_x + i_y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + i_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = q$$

essendo q , eventuale funzione del posto, il carico per unità di superficie.

Se si pone $i = i_x$, $j = \frac{i_y}{i_x}$, la (13) diviene

$$(13a) \quad \frac{m^2}{m^2 - 1} E i \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (1 + j) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + j \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = q.$$

In base a questa premessa l'equazione per lo spostamento radiale w di un cilindro soggetto a pressione esterna p si scrive senza difficoltà.

Si ha precisamente, convenendo di porre

$$(13b) \quad i = \frac{\delta^3}{12}, \quad \frac{i_\varphi}{i} = j, \quad R = \frac{m^2}{m^2 - 1} E i,$$

$$R \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (1 + j) \frac{\partial^4 w}{r_0^2 \partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{j}{r_0^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right] = -\frac{p}{r_0} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{P}{2r_0 \pi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Di questa equazione, generalizzata della (3a), cerchiamo soluzioni, *non assialsimmetriche*, del tipo (4), precisamente, separando le variabili,

$$w = C \cdot v(x) \cdot \sin v\varphi.$$

Tale posizione porta all'equazione in v

$$(14) \quad R \left[\frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{1}{r_0^2} v^2 (1 + j) \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{v^4}{r_0^4} j v \right] = -\frac{p}{r_0} (1 - v^2) \cdot v - \frac{P}{2r_0 \pi} \frac{d^2 v}{dx^2}.$$

Di questa si cercano soluzioni nelle condizioni (5), (5a), (5b) già considerate.

Posto ancora

$$v(x) = \sin kx$$

consideriamo i casi specificati per il cilindro isotropo. Risulta

a) $p = 0$, $P \neq 0$.

$$(15) \quad P = \frac{R}{r_0} 2\pi \frac{k^4 r_0^4 + (1 + j) k^2 r_0^2 v^2 + j v^4}{k^2 r_0^2}.$$

Con la posizione (7),

$$\alpha = k^2 r_0^2$$

siamo ridotti a cercare il minimo, rispetto a α , dell'espressione

$$\frac{\alpha^2 + (1 + j)\alpha v^2 + j v^4}{\alpha}.$$

La derivata prima rispetto a x posta egual zero dà

$$x^2 - jv^4 = 0$$

cioè

$$x = \sqrt{j}v^2.$$

Ne segue

$$(15a) \quad P_{cr.} = \frac{R}{r_0} 2\pi(1 + \sqrt{j})^2 \cdot v^2.$$

Per $j = 1$ si ricade naturalmente nella (9)

b) $p \neq 0$, $P = 0$.

Si ha

$$(16) \quad p = \frac{R}{r_0^3} \frac{x^2 + (1+j)xv^2 + jv^4}{v^2 - 1}.$$

Da qui segue, ritenendo k fisso, eguale a $\frac{\pi}{L}$ o $\frac{2\pi}{L}$ nei casi dello snodo o dell'incastro e quindi x espresso dalle (7a), con una derivazione rispetto a v^2 ed eguagliando a zero la derivata ottenuta,

$$[(1+j)x + 2jv^2](v^2 - 1) - x^2 - (1+j)xv^2 - jv^4 = 0$$

cioè, l'equazione algebrica, di 2° grado in v^2 ,

$$jv^4 - 2jv^2 - (1+j)x\left(1 + \frac{x}{1+j}\right) = 0.$$

Per $j = 1$ si ricade naturalmente nella $v^2 = 2 + x$. Tutto è ormai ridotto a ricercare la più piccola radice v_0^2 di tale equazione onde valutare quel numero intero, ≥ 2 che più è vicino, restandogli superiore, a v_0 .

Ma, accontentandoci di una limitazione inferiore, porremo senz'altro

$$(16a) \quad p_{cr.} \geq \frac{R}{r_0^3} \frac{x^2 + (1+j)xv_0^2 + jv_0^4}{v_0^2 - 1}$$

con

$$x = \begin{cases} \frac{r_0^2 \pi^2}{L^2} \dots \text{per lo snodo,} \\ \frac{4r_0^2 \pi^2}{L^2} \dots \text{per l'incastro.} \end{cases}$$

Per $L \rightarrow \infty$, cioè per il cilindro indefinito,

$$(16b) \quad p_{cr.} = \frac{R}{r_0^3} \frac{jv_0^4}{v_0^2 - 1}$$

con

$$v_0^2 = 2.$$

Si avrebbe quindi la radice $v_0 = \sqrt{2}$, da cui segue la limitazione inferiore

$$p_{cr.} \geq \frac{4R}{r_0^3} j = \frac{1}{3} \frac{E\delta^3}{r_0^3} j.$$

c) Si considera lo sforzo assiale dovuto alla pressione di fondo.

Risulta

$$(17) \quad p = \frac{R}{r_0^3} \frac{x^2 + (1+j)xv^2 + jv^4}{v^2 - 1 + \frac{x}{2}}.$$

Da qui segue, tenendo fisso x e derivando rispetto a v^2 ,

$$[(1+j)x + 2jv^2] \left(v^2 - 1 + \frac{x}{2} \right) - x^2 - (1+j)xv^2 - jv^4 = 0$$

ovvero l'equazione di 2° grado in v^2

$$jv^4 + jv^2(x-2) + (1+j)x \left(\frac{x}{2} - 1 - \frac{1}{1+j}x \right) = 0.$$

Si è così, indicandone con v_0^2 la minima radice, la limitazione inferiore,

$$(17a) \quad p_{cr.} \geq \frac{R}{r_0^3} \frac{x^2 + (1+j)xv_0^2 + jv_0^4}{v_0^2 - 1 + \frac{x}{2}}$$

con

$$x = \begin{cases} \frac{r_0^2 \pi^2}{L^2} & \dots \text{ per lo snodo,} \\ \frac{4r_0^2 \pi^2}{L^2} & \dots \text{ per l'incastro.} \end{cases}$$

§ 5. Sollecitazioni in un involucro con nervature di rinforzo soggetto a sforzo assiale ed a pressione sul manto.

N. 1. **Equazione del problema.** — Dopo aver esaminata globalmente la *stabilità dell'equilibrio* dell'involucro cilindrico isotropo od ortotropo di cui si tratta, occorre considerare le condizioni particolari di cimento a cui è sotto-

posto il sistema, anche se tale stabilità risulta largamente assicurata. Conviene precisamente, come già si è detto nelle premesse, abbandonare il criterio della riduzione delle nervature ad una semplice ortotropia d'una lastra per una impostazione che tenga *separatamente* conto dei due componenti il complesso, lastra e nervatura, sintetizzate ognuna da una o più equazioni differenziali, la congruenza essendo espressa attraverso il concatenamento delle corrispondenti soluzioni. La trattazione che segue mira, non già alla valutazione più o meno rigorosa delle pressioni critiche ma a quella, altrettanto importante, delle sollecitazioni specifiche che misurano il cemento a cui è sottoposto il materiale, cemento che risulta sensibile particolarmente all'attacco tra lamiera e nervatura e tanto da portare soventemente al pericolo assai prima d'arrivare alla instabilità dell'equilibrio.

In merito esiste, ben nota, una ampia trattazione, già citata, di v. SANDEN-GÜNTHER ed una, di VITERBO, nello stesso indirizzo e molto esauriente.

In queste ricerche però, si considerano gli anelli ad intervallo costante e tutti egualmente dimensionati. La trattazione generale, per intervalli e nervature quali si vogliono, compreso il caso del forzamento artificiale e la valutazione, sino ad ora trascurata, della flessione dovuta allo sforzo assiale conseguente alla pressione sui fondi, è scopo specifico dei seguenti §§.

Il criterio di v. SANDEN è, sostanzialmente, quello che molto sovente adottano i tecnici nel calcolo dei sistemi elastici a due dimensioni, criterio che sta nello scomporre il sistema, (nel caso nostro, il cosiddetto *fasciame* se si tratta di un sommergibile), in due sottosistemi trattabili come lineari (unidimensionali) indipendenti ma così sollecitati da portare a configurazioni congruenti o pressochè. Nel caso di una piastra, ad esempio rettangolare, i due sistemi si identificano con una doppia serie ortogonale di travi solidali nei nodi, poggiate sui lati perimetrali; nel caso di un cilindro, si à una serie di travi elementari, con asse coincidente con le generatrici, correnti su anelli sovrapposti.

Gli anelli essendo elastici realizzano per ogni trave un vero *suolo elastico*, ad elasticità diffusa e costante se non ci sono anelli irrigidenti, ad elasticità variabile con discontinuità a tratti nel caso diverso, usuale nei sommergibili, in cui si àno sempre ossature irrigidenti o nei tubi in pressione preventivamente cerchiati. Istituire le equazioni cui soddisfano le deformate degli anelli (paralleli) e delle travi (le generatrici) riesce immediato.

Se il cilindro ha raggio r , la pressione è p , δ lo spessore, E il modulo di elasticità, m il coefficiente di POISSON, il raggio varia, come si sà, per due contributi di segno opposto.

Il primo è dovuto allo sforzo $S_t = pr_0$, nei paralleli e vale

$$(18) \quad w' = \frac{S_t \cdot 2r_0 \pi}{E \delta} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{pr_0^2}{E \delta}.$$

Il secondo, prodotto dal raccorciamento specifico nel senso delle generatrici e conseguente allo sforzo assiale, vale

$$(18a) \quad w'' = -\frac{pr_0^2 \pi}{2r_0 \pi} \cdot \frac{1}{E \delta \cdot m} \cdot 2r_0 \pi \cdot \frac{1}{2\pi} = -\frac{pr_0^2}{2Em\delta}.$$

Così si ha per la variazione totale del raggio

$$(18b) \quad w = w' + w'' = \frac{2m - 1}{2m} \frac{pr_0^2}{E \delta}.$$

Da qui consegue, confrontando con l'espressione di w' , che, per la presenza dello sforzo assiale, la variazione del raggio è quella che si avrebbe in assenza dello sforzo suddetto ma, anziché per la pressione p effettivamente agente sul manto, per la pressione virtuale, ridotta,

$$p^* = \frac{2m - 1}{2m} p.$$

E qui, scostandoci dalla trattazione ordinaria notiamo che una tale conclusione *non* deve portare ad inferire che le cose vadano come se lo sforzo

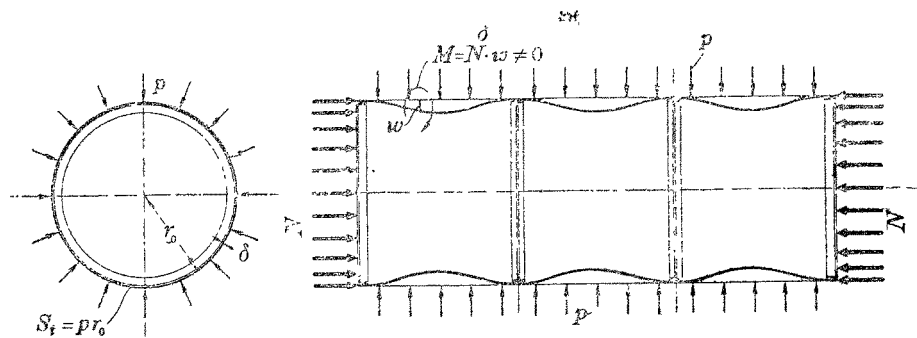


Fig. 4

longitudinale più non sussistesse. Agli effetti della valutazione delle σ ridotte ciò è legittimo, ma non agli effetti dell'ulteriore comportamento del complesso. Infatti; la presenza di nervature irrigidenti genera, anche in condizioni di equilibrio stabile, uno stato di flessione lungo le generatrici che porta ad eccentricità dello sforzo e quindi a momenti flettenti, di cui è bene sapere valutare l'effetto (cfr. fig. 4).

L'equazione per la deformata di una striscia lungo le generatrici è manifestamente ancora quella di una lastra elastica corrente su suolo elastico (costituito dagli anelli) soggetta a sforzo assiale di compressione N ; agli effetti della deformazione, alla pressione p^* .

Tale equazione si scrive

$$(19) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{E\delta^3}{12} \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + N \frac{d^2 w}{dx^2} = -\mu w + p^*$$

essendo μ il coefficiente di elasticità del suolo elastico suddetto.

Tale coefficiente è caratterizzato dalla pressione che produce la variazione unitaria del raggio; si à quindi, poichè la pressione p varia il raggio di

$$\Delta = \frac{pr_0^2}{E\delta},$$

$$\mu = \frac{E\delta}{r_0^2}.$$

L'equazione (19), che differisce da quella di v. SANDEN-VITERBO per il termine

$$N \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

diviene in definitiva

$$(19a) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{12}{E\delta^3} N \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{12}{r_0^2 \delta^2} w = p^* \frac{12}{E\delta^3} \frac{m^2 - 1}{m^2}.$$

A titolo di illustrazione della necessità, almeno concettuale, di introdurre il termine

$$N \frac{d^2 w}{dx^2}$$

si consideri il sistema indicato a fig. 5.

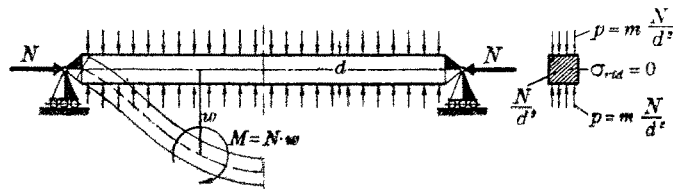


Fig. 5

Un'asta di lunghezza l a sezione quadrata di lato d è soggetta ad uno sforzo assiale di compressione N . Su due facce opposte di quest'asta parallelopipeda, per tutta la lunghezza l , agisca una pressione p . Se $\frac{1}{m}$ è il coef-

ficiente di contrazione o di POISSON, basterà scegliere p così che sia

$$p \cdot \frac{1}{m} = -\sigma_l \quad \text{con} \quad \sigma_l = \frac{N}{d^2}$$

perchè la σ assiale *ridotta*, cioè $\sigma_{ria} = \sigma_l - p \frac{1}{m}$, risulti addirittura nulla su tutta la sezione e venga fatto d'inferire, usando ad es. un deformometro, che non vi è presenza di sforzo assiale.

Ora, se l'asta viene inflessa secondo una qualunque deformata

$$w = w(x) \quad \text{in} \quad 0 \leq x \leq l = 2b$$

il momento flettente in x sarà sempre $N \cdot w$ e darà luogo a sollecitazioni longitudinali agisca o no sull'involucro la pressione p .

Ciò posto, riandiamo alla (19a) e consideriamo le seguenti posizioni

$$(20) \quad x = \xi \cdot b, \quad w = v \cdot \delta, \quad n = 12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{N b^2}{E \delta \delta^2}, \quad 2b = l,$$

$$12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{b^4}{\delta^2 r_0^2} = \beta, \quad \gamma = 12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\frac{b}{\delta}\right)^4 \cdot \frac{p^*}{E},$$

e notiamo che, se lo sforzo N deriva dalla pressione sui fondi, si à

$$n = 6 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p r_0}{E \delta} \left(\frac{b}{\delta}\right)^2.$$

La (19a) diviene allora

$$(19b) \quad \frac{d^4 v}{d\xi^4} + n \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \beta v = \gamma.$$

N. 2. Digressione sulla (19b) nel caso dello snodo sulle ossature; espressioni analitiche per gli autovalori n_k . — Prima di passare alla scrittura delle soluzioni della (19b) corrispondenti alle non semplici condizioni di vincolo del problema in esame, soluzioni che avranno un aspetto diverso a seconda che il discriminante $n^2 - 4\beta$ dell'equazione caratteristica è ≥ 0 , soffermiamoci a considerare le soluzioni corrispondenti al caso dello snodo sulle ossature che riterremo, per ora, anche completamente rigide, cioè prive di deformazione radiale.

Dapprima consideriamo, per le condizioni di vincolo conformi alle ipotesi fatte, precisamente le

$$v(0) = v(2) = 0; \quad v'(0) = v'(2) = 0;$$

quei valori n_k di n per cui si àno soluzioni non nulle delle (19b) per $j=0$.

Con questo intento poniamo

$$v = C \sin \frac{k\pi}{2b} x, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

C essendo una costante moltiplicativa.

Si constata agevolmente che C risulta diverso da zero solo e soltanto se n corrisponde ad uno dei valori, *autovalori* della (19b),

$$n_k = \frac{\beta + \left(\frac{k\pi}{2}\right)^4}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2} = \frac{4}{k^2\pi^2} \beta + \frac{k^2\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} \left(k^2 + \frac{\beta}{k^2} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2 \right), \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Interesse pratico è naturalmente il minimo tra tutti gli n_k ($k = 1, 2, \dots$) qui caratterizzati in funzione dell'intero k .

Derivando n_k rispetto a k si à

$$k - \frac{\beta}{k^3} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2 = 0$$

e quindi

$$(21) \quad k^4 = \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2 \beta.$$

Introducendo addirittura siffatto valore — anzichè l'intero ad esso più prossimo — nella espressione di n_k risulta

$$n_{cr} = \frac{\pi^2}{4} \cdot 2 \cdot \sqrt{\beta \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2} = 2 \sqrt{\beta}$$

e quindi, per le posizioni (20)

$$N_{cr} = \sqrt{\frac{m^2}{3(m^2 - 1)}} E \delta \left(\frac{\delta}{r_0}\right).$$

Le sollecitazioni specifiche longitudinali critiche sono in conformità

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{\delta} = \sqrt{\frac{m^2}{3(m^2 - 1)}} E \frac{\delta}{r_0}$$

e, se N deriva dalla pressione sui fondi, la pressione idrostatica critica risulta, poichè

$$N\delta = \frac{r_0^2\pi}{2r_0\pi} p = \frac{pr_0}{2},$$

$$p_{cr} = 2 \sqrt{\frac{m^2}{3(m^2 - 1)}} E \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^2.$$

Posto

$$\begin{aligned}
 E &= 2,1 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^{-2}, & r &= 300 \text{ cm}, & s &= 2,0 \text{ cm}, \\
 l = 2b &= 55,0 \text{ cm}, & m &= \frac{10}{3}, & \frac{m^2 - 1}{m^2} &= 0,91, \\
 \sigma_{cr} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{0,91} \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{2,0}{300} = 7709 \text{ kgcm}^{-2} \\
 p_{cr} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{0,91} \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{2,0}{300}\right)^2 = 102,79 \text{ kgcm}^{-2}.
 \end{aligned}$$

A titolo di ragguaglio sull'interesse che può avere questo valore critico di p_k , desunto in condizioni di simmetria assiale, in raffronto ad altri valori critici, ad esempio per *ovalizzazione* del fasciame, o delle ossature, riportiamo qui alcuni dati numerici.

La pressione critica del fasciame è, secondo la formola di LORENZ

$$\begin{aligned}
 p_{cr} &\geq \frac{2 \cdot 0,91 \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2,0^3}{12}}{300^3} \cdot \left(2 + \frac{300^2 \cdot \pi^2}{55^2}\right) = \\
 &= \frac{7,644}{32,4} \cdot (2 + 293,9) = 69,73 \text{ kgcm}^{-2}.
 \end{aligned}$$

Una nota formola di v. MISES dà

$$p_{cr} \geq 52,00 \text{ kgcm}^{-2}.$$

L'ossatura, indipendente dal fasciame, si ovalizza secondo FÖPPL, poichè il momento di inerzia è $J = 5800 \text{ cm}^4$, per un carico di 1430 kgcm^{-1} quindi ad una pressione

$$p_{cr} = \frac{1430}{64} = 22,34 \text{ kgcm}^{-2}.$$

Secondo la formola (16c) del cilindro ortotropo, poichè

$$j = \frac{i_c}{i} = \frac{\frac{5800}{64}}{\frac{2^3}{12}} = \frac{69,600}{0,512} = 135,9$$

l'ovalizzazione dell'ossatura + fasciame corrisponderebbe ad una pressione

$$p_{cr} = \frac{1}{3} \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2^3}{300^3} \cdot 135,9 = \frac{2283,1}{81} = 28,18 \text{ kgcm}^{-2}.$$

Infine, lo sfibramento dell'ossatura si avrebbe, se con σ_s indichiamo la σ corrispondente, per

$$p \cdot (2b + d) \cdot r_0 \cong \sigma_s \cdot r \cdot (F' + b\delta).$$

Avendosi

$$(F' + b\delta) = 47,0 + 9,0 \cdot 2 = 65,0 \text{ cm}^2, \quad r \cong 289,7 \text{ cm},$$

$$2b + d = 64,0 \text{ cm}, \quad \sigma_s = 4100 \text{ kgcm}^{-2}$$

risulta

$$p_s = 4100 \frac{65,0}{300,0 \cdot 64,0} = 13,88 \text{ kgcm}^{-2}.$$

Molti sono quindi i pericoli che dovrebbero essere superati perchè quello corrispondente alla p_{cr} dianzi specificata, possa presentarsi. Ma ciò è del resto nella natura delle cose, in quanto *i carichi critici di un involucro per configurazione assialsimmetriche sono di gran lunga superiori a quelli in condizioni assimetriche (ovalizzazioni)*, anche tenendo conto delle ossature che praticamente vien fatto di considerare.

Tuttavia la nozione del valore critico n_k testè trovato à interesse formale notevole come già è stato messo in rilievo da TIMOSHENKO nello studio della trave su suolo elastico assialmente caricata.

Consideriamo infatti un carico distribuito

$$\gamma = \gamma_0 \sin \frac{k\pi}{2} \xi \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Per $n = 0$ si à immediatamente dalla (19b),

$$v = v_0 \sin \frac{k\pi}{2} \xi$$

con

$$v_0 = \frac{\gamma_0}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^4 + \beta}.$$

Per $n \neq 0$ si à invece un v_0^*

$$v_0^* = \frac{\gamma_0}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^4 + \beta - n\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2} = \frac{v_0}{1 - \frac{n}{n_{cr}}} = \frac{v_0}{1 - \frac{p}{p_{cr}}};$$

da qui segue che, per $n \ll n_k$ l'influenza su v dovuta allo sforzo assiale è piccola.

Ad una profondità di 100 m, il corrispondente fattore di amplificazione risulta

$$\frac{1}{1 - \frac{p}{p_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{10}{102,8}} = 1,108.$$

Considerando una profondità tre volte superiore il fattore di amplificazione diviene

$$\frac{1}{1 - \frac{30}{102,8}} = 1,412.$$

Consegue da quanto detto che, se in condizioni ordinarie la flessione dovuta allo sforzo assiale è poco rilevante, può non esser così nelle condizioni di snervamento.

Naturalmente, questi dati sono riferiti alle condizioni dello snodo anziché dell'incastro, per il quale la sensibilità (allo sforzo assiale) risulta attenuata, più grande essendo il valore di p_k almeno se l'increspamento nelle condizioni critiche à luogo su una lunghezza d'onda λ non piccola in raffronto a $2b$. (Non vi è dubbio che, in linea asintotica, per $\frac{2b}{\lambda} \rightarrow \infty$ cioè per un finissimo increspamento la pressione critica p_k risulta indipendente dalle condizioni agli estremi).

Per valutare λ basta osservare che deve essere, per l'ovvia definizione di λ ,

$$\sin \frac{k\pi}{2b} x = \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

dovendosi porre per k il valore dato dall'espressione (21) o, più precisamente, l'intero ad esso più prossimo. Si à quindi, con la prima posizione,

$$\lambda = \frac{4b}{k} = 4b \cdot \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{12} \frac{m^2}{m^2 - 1}} \sqrt{\delta \cdot r_0}.$$

Questa dà, nel caso attuale

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{1}{12 \cdot 0,91}} \sqrt{300 \cdot 2,0} = 84,5 \text{ cm,}$$

lunghezza non adattabile alla distanza $2b = 55 \text{ cm}$.

L'intero k' più prossimo a k è, poichè

$$k = \frac{2}{\pi} \sqrt[4]{12 \frac{m^2 - 1}{m^2}} \frac{b}{\sqrt{r_0 \delta}} = \frac{2}{\pi} \sqrt[4]{12 \cdot 0,91} \frac{27,5}{\sqrt{300 \cdot 2}} = 1,3,$$

$$k' = 1,$$

quindi

$$\lambda = \frac{4b}{1} = 110 \text{ cm.}$$

La lunghezza d'onda è dunque il doppio dell'interasse sicchè, l'increspamento dell'involucro a luogo adirittura senza nodo; l'influenza dell'incastro è quindi sicuramente notevole; il carico critico si può elevare, almeno ragionando con il criterio usuale, a 4 volte il valore corrispondente alle cerniere agli estremi, con chè si può presumere, pur non sussistendo più l'espressione trovata per il fattore di aumento, una attenuazione dell'effetto flessionale, ora calcolato, dovuto allo sforzo assiale. Gli esempi numerici delle premesse confortano queste conclusioni. Tuttó ciò considerato, anche se per i materiali e le pressioni di collaudo attualmente considerate la flessione per sforzo assiale non risulta presumibilmente molto rilevante (incondizioni di snervamento un aumento del 25 %, sui momenti flettenti in mezzzeria, il 12 % su quelli all'incastro), per completezza riportiamo qui le soluzioni della (19b) per $n \neq 0$; da queste si hanno immediatamente, per $n = 0$, salvo qualche cambiamento di variabili le formole di v. SANDEN-VITERBO.

N. 3. Trattazione specifica di alcuni casi. — Consideriamo dapprima il caso del cilindro indefinito con pressione sui fondi e nervature equidistanti, eventualmente tutte impresse cioè, soggette ad uno sforzo preliminare periferico rivolto verso l'esterno (centrifugo).

A questo caso effettivamente possono pensarsi ridotti quelli che intervengono nella realtà almeno più frequentemente.

Si è così portati a considerare il solo tratto fra due nervature con condizioni ai limiti particolarmente semplici per ovvie ragioni di simmetria. Tali condizioni sono:

Lo spostamento in $\xi = 0$ vale la variazione del raggio dell'anello-nervatura. Questo spostamento è, se r ne è il raggio,

$$2 \cdot \frac{Pr^2}{EF}$$

con P carico per unità di lunghezza (misurata sulla circonferenza di raggio r)

agente sull'anello, F area della corrispondente sezione resistente, data come somma dell'area F' del profilato più quella della lamiera solidale con l'ala.

Ora questo carico P risulta dalla somma di due o al più tre termini; precisamente:

1) dal valore del taglio, cambiato di segno, in $\xi = 0$: valore che dà la misura dell'azione esercitata dalla trave (si intende su suolo elastico) a cui, sostanzialmente, è ridotta la generatrice. Per le due travi contigue ed eguali poggianti sulla nervatura si avrà quindi, per unità di circonferenza, un carico

$$2 \cdot \frac{m^2}{m^2 - 1} EJ \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=0};$$

2) dalla pressione esterna *direttamente* agente sull'ala del profilato che costituisce l'anello, quindi, se d ne è la larghezza, dal termine pd ;

3) se sull'anello si applica, (cfr. fig. 1) centrifugo, cioè agente verso l'esterno, uno sforzo $-\vec{p}d = \vec{P}$, basterà porre $(p - \vec{p}) \cdot d$ in luogo di $p \cdot d$.

Si rilevi infine che per d converrà sostituire il valore $d^* = d \cdot \frac{r_e}{r}$ con che si riferisce alla circonferenza di raggio r la pressione p agente sulla circonferenza esterna di raggio r_e . Naturalmente sarà d'uopo riferire allora la pressione artificiale \vec{p} a r_e .

Sommando le azioni 1), 2), 3) otteniamo per il valore P , da introdurre nella espressione di w ,

$$P = -2 \frac{m^2}{m^2 - 1} EJ \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=0} + (p - \vec{p})d^*.$$

Si dovrà avere quindi

$$(22) \quad w(0) = \frac{-2 \frac{m^2}{m^2 - 1} EJ \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=0} + (p - \vec{p})d^*}{EF} \cdot r^2.$$

Ovvero, ricordando le posizioni (20), esprimendosi in termini di v e ξ ,

$$(22a) \quad v(0) = \frac{(p - \vec{p})d^*}{EF\delta} r^2 - \frac{2 \frac{m^2}{m^2 - 1} \delta^3 r^2 \left. \frac{d^3 v}{d\xi^3} \right|_{\xi=0}}{12 b^3 F}.$$

Convenendo di porre

$$(22b) \quad \frac{(p - \vec{p})d^*}{E\delta} \cdot \frac{r^2}{F} = v, \quad \frac{1}{6} \frac{m^2}{m^2 - 1} \left(\frac{\delta}{b}\right)^3 \frac{r^2}{F} = \varepsilon,$$

$$d^* = d \cdot \frac{r_e}{r}$$

la (22a) diviene in definitiva

$$(22c) \quad v(0) = v - \varepsilon \frac{d^3 v}{d\xi^3} \Big|_{\xi=0}.$$

Questa condizione va associata a quella di tangente nulla spettante alla circostanza delle (praticamente) infinite (eguali ed egualmente caricate) cam-pate contigue, dunque alla

$$(23) \quad \frac{dv}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0.$$

In $\xi = 2$, cioè all'altro estremo, sussistono le stesse condizioni. Ma, per simmetria del sistema e del carico, si possono sostituire in $\xi = 1$, cioè in mezziera, le condizioni di tangente e taglio nulli, dunque

$$(24) \quad \frac{dv}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = 0, \quad \frac{d^3 v}{d\xi^3} \Big|_{\xi=1} = 0.$$

Ciò posto occorre considerare le 3 circostanze in cui risulta

$$(25) \quad n^2 - 4\beta \geq 0$$

cioè, con riguardo alle posizioni (20),

$$\left(\frac{12N}{E\delta}\right)^2 \left(\frac{b}{\delta}\right)^4 \left(\frac{m^2 - 1}{m^2}\right)^2 - 4 \cdot 12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{b^3}{r_0^3 \delta^2} \geq 0$$

ovvero

$$(25a) \quad \sigma = \frac{N}{\delta} \geq \sqrt{\frac{1}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E\delta}{r_0}},$$

od anche, ponendo per N il suo effettivo valore derivante dalla pressione sui fondi, dato da

$$(25b) \quad N = \frac{pr_0^2 \pi}{2r_0 \pi} = \frac{pr_0}{2},$$

$$\frac{p}{E} \geq \sqrt{\frac{4}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^2}.$$

Per $m = \frac{10}{3}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ kgcm}^{-2}$, $\delta = 2,00 \text{ cm}$, $r_0 = 300 \text{ cm}$ si à dalla (25a)

$$\sigma \geq \sqrt{\frac{1}{3} \frac{100}{91}} \cdot \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 2}{300} = 8500 \text{ kgcm}^{-2}.$$

Come si vede, è ampiamente sufficiente considerare per i materiali attuali e per le costruzioni di cui si tratta la sola eventualità

$$n^2 - 4\beta < 0.$$

Tuttavia, per completezza, onde tenere conto di circostanze speciali, sperimentali ad es., fuori dall'ambito specifico qui considerato riportiamo le soluzioni per tutti i 3 casi.

Per

$$n^2 - 4\beta > 0$$

posto

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{n^2 - 4\beta}},$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{n^2 - 4\beta}},$$

si ha per l'espressione di v ,

$$(26) \quad v(\xi) = \frac{\gamma}{\beta} + \frac{v - \frac{\gamma}{\beta}}{\eta_2 \cotg \eta_1 - \eta_1 \cotg \eta_2 - \varepsilon \eta_1 \eta_2 (\eta_1^2 - \eta_2^2)} \cdot \left\{ \frac{\eta_2 \cos \eta_1 (1 - \xi)}{\sin \eta_1} - \frac{\eta_1 \cos \eta_2 (1 - \xi)}{\sin \eta_2} \right\},$$

e della sua derivata seconda

$$(27) \quad \frac{d^2 v}{d\xi^2} = \frac{\eta_1 \eta_2 \left(v - \frac{\gamma}{\beta} \right)}{\eta_2 \cotg \eta_1 - \eta_1 \cotg \eta_2 - \varepsilon \eta_1 \eta_2 (\eta_1^2 - \eta_2^2)} \cdot \left\{ -\frac{\eta_1 \cos \eta_1 (1 - \xi)}{\sin \eta_1} + \frac{\eta_2 \cos \eta_2 (1 - \xi)}{\sin \eta_2} \right\},$$

che in $\xi = 0$ diviene

$$\left. \frac{d^2 v}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} = \frac{\eta_1 \eta_2 \left(v - \frac{\gamma}{\beta} \right) (\eta_2 \cotg \eta_2 - \eta_1 \cotg \eta_1)}{\eta_2 \cotg \eta_1 - \eta_1 \cotg \eta_2 - \varepsilon \eta_1 \eta_2 (\eta_1^2 - \eta_2^2)}.$$

Per

$$n^2 - 4\beta = 0,$$

ovvero per

$$\frac{p}{E} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1}} \left(\frac{\delta}{r_0} \right)^2,$$

posto

$$\eta = \sqrt{\frac{n}{2}},$$

$$(26a) \quad v(\xi) = \frac{\gamma}{\beta} + \left(v - \frac{\gamma}{\beta} \right) \frac{\sin \eta \cos \eta (1 - \xi) + \eta \cos \eta \cos \eta (1 - \xi) + \eta (1 - \xi) \sin \eta \sin \eta (1 - \xi)}{\eta + 2\varepsilon \eta^3 \sin^2 \eta + \sin \eta \cos \eta}$$

$$(27a) \quad \frac{d^2 v}{d\xi^2} = \frac{\left(v - \frac{\gamma}{\beta} \right) \eta^2}{\eta + 2\varepsilon \eta^3 \sin^2 \eta + \sin \eta \cos \eta} \cdot$$

$$\cdot [\sin \eta \cos \eta (1 - \xi) - \eta \cos \eta \cos \eta (1 - \xi) - \eta (1 - \xi) \sin \eta \cdot \sin \eta (1 - \xi)]$$

e quindi

$$\left. \frac{d^2 v}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} = \frac{\left(\nu - \frac{\gamma}{\beta} \right) \eta^2}{\eta + 2\varepsilon \eta^3 \sin^2 \eta + \sin \eta \cos \eta} [\sin \eta \cos \eta - \eta].$$

Infine, per

$$n^2 - 4\beta < 0,$$

ovvero per

$$\frac{p}{E} < \sqrt{\frac{4}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} \left(\frac{\delta}{r_0} \right)^2}$$

posto

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta} - \frac{n}{2} \right)}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta} + \frac{n}{2} \right)}$$

$$(26b) \quad v(\xi) = \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\nu - \frac{\gamma}{\beta}}{2\varepsilon \eta_1 \eta_2 (\eta_1^2 + \eta_2^2) (\text{Sh}^2 \eta_1 + \sin^2 \eta_2) + \eta_1 \sin \eta_2 \cos \eta_2 + \eta_2 \text{Sh} \eta_1 \text{Ch} \eta_1} \cdot$$

$$\cdot \{ \eta_1 \text{Sh} \eta_1 \text{Sh} \eta_1 (1 - \xi) \sin \eta_2 \xi + \eta_1 \sin \eta_2 \text{Ch} \eta_1 \xi \cos \eta_2 (1 - \xi) - \eta_2 \sin \eta_2 \cdot$$

$$\cdot \text{Sh} \eta_1 \xi \sin \eta_2 (1 - \xi) + \eta_2 \text{Sh} \eta_1 \text{Ch} \eta_1 (1 - \xi) \cos \eta_2 \xi \},$$

$$(27b) \quad \frac{d^2 v}{d\xi^2} = \frac{\left(\nu - \frac{\gamma}{\beta} \right) (\eta_1^2 + \eta_2^2)}{2\varepsilon \eta_1 \eta_2 (\eta_1^2 + \eta_2^2) (\text{Sh}^2 \eta_1 + \sin^2 \eta_2) + \eta_1 \sin \eta_2 \cos \eta_2 + \eta_2 \text{Sh} \eta_1 \text{Ch} \eta_1} \cdot$$

$$\cdot \{ \eta_1 \text{Sh} \eta_1 \text{Sh} \eta_1 (1 - \xi) \sin \eta_2 \xi - \eta_2 \text{Sh} \eta_1 \text{Ch} \eta_1 (1 - \xi) \cos \eta_2 \xi +$$

$$+ \eta_1 \sin \eta_2 \text{Ch} \eta_1 \xi \cos \eta_2 (1 - \xi) + \eta_2 \sin \eta_2 \text{Sh} \eta_1 \xi \sin \eta_2 (1 - \xi) \}.$$

In $\xi = 0$, cioè all'attacco,

$$\left. \frac{d^2 v}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} = \frac{\left(\nu - \frac{\gamma}{\beta} \right) (\eta_1^2 + \eta_2^2) (\eta_1 \sin \eta_2 \cos \eta_2 - \eta_2 \text{Sh} \eta_1 \text{Ch} \eta_1)}{2\varepsilon \eta_1 \eta_2 (\eta_1^2 + \eta_2^2) (\text{Sh}^2 \eta_1 + \sin^2 \eta_2) + \eta_1 \sin \eta_2 \cos \eta_2 + \eta_2 \text{Sh} \eta_1 \text{Ch} \eta_1}.$$

Per $n = 0$ (caso di v. SANDEN-VITERBO) basta porre

$$(28) \quad \eta_1 = \eta_2 = \sqrt{\frac{\beta}{4}} = \sqrt[4]{3 \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2}.$$

Noto $v(\xi)$ e $\frac{d^2 v}{d\xi^2}$ si à quanto occorre per i calcoli successivi.

Precisamente:

1) *Gli sforzi negli anelli irrigidenti sono*

$$(29) \quad S_t = \frac{v(0) \cdot \delta \cdot EF}{r} = EF \frac{\delta}{r} v(0)$$

con che la σ specifica risulta in conformità

$$\sigma_t = \frac{S_t}{F} = E \frac{\delta}{r} v(0),$$

a meno di non usare formole più precise che diano i valori delle sollecitazioni specifiche al bordo di intradosso e di estradosso corrispondentemente a una variazione $v(0) \cdot \delta$ del raggio medio (anzi esterno), formole ben note sulle quali non vogliamo insistere.

2) *Gli sforzi s_t nei paralleli dell'involucro propriamente detto*, sono

$$(30) \quad s_t = \frac{v(\xi) \cdot \delta \cdot E \delta}{r_0} = E \delta \cdot \frac{\delta}{r_0} \cdot v(\xi)$$

e quindi, quasi con rigore, poichè $\delta \ll r_0$,

$$(31) \quad \sigma_t = \frac{s_t}{\delta} = E \frac{\delta}{r_0} v(\xi).$$

3) *I momenti flettenti lungo le generatrici*, sono infine

$$(32) \quad m_x(\xi) = - \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E \delta^3}{12} \frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E \delta^3}{12} \left(\frac{\delta}{\bar{b}} \right)^2 \frac{d^2 v}{d\xi^2}.$$

Attese le espressioni (26), (27), di v , $\frac{d^2 v}{d\xi^2}$ in un punto generico e in $\xi = 0$, $\xi = 1$, il nostro problema risulta completamente risolto.

N. 4. Problema generale, nervature comunque intervallate a caratteristiche differenti una dall'altra. — Se l'intervallo tra le ossature non è più costante e se queste si ammettono tra loro diverse, si può procedere nei termini seguenti.

Indicate con $i-1$, i , $i+1$ tre campate contigue ed applicati tali indici ad ogni ente che ad esse si riferisce (ascisse x contate dall'inizio, a sinistra di ogni campata, spostamenti w , spessori δ) si avrà, indicando con $F_{i-1, i}$, $d_{i-1, i}$, $r_{i-1, i}$, l'area, l'ala, il raggio baricentrico, della sezione dell'ossatura comune a $i-1$ ed i , in luogo della (22),

$$(22d) \quad w_{i-1}(2b_{i-1}) = w_i(0) = \\ = \frac{Em^2}{12(m^2 - 1)} \left[\delta^3 \frac{d^3 w_{i-1}}{dx^3} \Big|_{x_{i-1} = 2b_{i-1}} - \delta^3 \frac{d^3 w_i}{dx^3} \Big|_{x_i = 0} \right] + (p - \bar{p}) d_{i-1, i}^* \cdot r_{i-1, i}^2.$$

Se le ossature si ammettono *rigide alla torsione*, sarà ancora:

$$\frac{dw_i}{dx_i} \Big|_{x_i=0} = \frac{dw_i}{dx_i} \Big|_{x_i=2b_i} = 0.$$

In tal guisa, dunque, le 4 costanti arbitrarie $C_1^i, C_2^i, C_3^i, C_4^i$ che intervengono nella soluzione generale w_i relativa alla campata i^{ma} si concatenano con quelle delle 2 campate contigue $(i-1)^{ma}$ e $(i+1)^{ma}$.

Ma i calcoli cui si va incontro sono estremamente complessi per le applicazioni numeriche. Convien perciò procedere per una via diversa che passo ad esporre.

Consideriamo un involucro cilindrico indefinito, rinforzato da ossature comunque intervallate, soggetto alla pressione idrostatica p sul manto e sui fondi.

Conveniamo di dare ora l'indice i non alla campata, ma all'ossatura; sia quindi F_i l'area della sezione resistente, r_i il raggio misurato al baricentro, $p d_i$ il carico per unità di lunghezza periferica derivante dalla pressione p sull'ala di larghezza d_i , $-\vec{p} \cdot d_i$ il carico centrifugo eventuale provocato con forzamento dell'ossatura nell'involucro; infine con

$$P_i = (p - \vec{p}) d_i$$

il carico risultante per unità di lunghezza periferica sull'ossatura. Ciò posto, cerchiamo la deformata che corrisponde ad un carico lineare, $P_i = 1$ per unità di lunghezza periferica, applicato su tutto il parallelo $x_i = \text{cost.}$ dell'involucro, liberato da tutte le ossature.

Indichiamo con $w(x, x_i)$ tale deformata (di cui calcoleremo tra un momento l'espressione esplicita), con

$$(33) \quad \lambda_i = \frac{r_i'^2}{EF_i'}$$

la variazione del raggio prodotta dalla forza radiale $P = 1$ per unità di lunghezza periferica sull'ossatura i^{ma} (¹).

Sia al solito w_m il raccorciamento del raggio r_0 dell'involucro considerato indefinito, privo di nervature, prodotto dalla pressione p sul manto e sui fondi. Indichi (cfr. fig. 2) X_i la forza radiale esercitata sull'involucro dall'anello i^{mo} (cui corrisponde l'ascissa $x_i = \text{cost.}$). Sarà allora $P_i + X_i$ la forza (per unità

(¹) che penseremo ora, con riguardo alla schematizzazione fatta, costituita dal solo profilo F_i' anzichè da $F_i = F_i' + d \cdot \delta$ anche se, praticamente, può venir fatto di ritenere pur sempre collaborante il tratto $d \cdot \delta$ con F_i' .

di lunghezza) agente sull'anello di cui, se $P_i < 0$ (è cioè centrifugo per virtù di *sforzi artificiali preventivi sistematici*) l'espansione è ostacolata, attraverso X_i , dall'involucro.

La condizione di congruenza impone che sia, contando come positivi gli spostamenti radiali centripeti,

$$(34) \quad w_m - \sum_j X_j w(x_i, x_j) = \lambda_i (X_i + P_i).$$

È questo un sistema di equazioni algebriche, lineari, non omogenee nelle incognite X_j , per il quale, salvo la condizione eccezionale critica in cui si annulla il discriminante, si ha sicuramente una univoca soluzione.

Trovate le X_j , la deformata della generatrice e gli sforzi in ogni sezione generica restano senz'altro caratterizzati. Precisamente:

La deformata è espressa, per il principio della *sovrapposizione degli effetti*, dalla relazione

$$(35) \quad w(x) = w_m - \sum_j X_j w(x, x_j).$$

Da qui si calcolano gli sforzi tangenziali nell'involucro con la relazione

$$(36) \quad s_t = \frac{E\delta}{r_0} w(x),$$

ed i momenti flettenti, nel senso delle generatrici, con la

$$(37) \quad m_x(x) = -\frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E\delta^3}{12} \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Per arrivare a formole adimensionali, conviene operare opportunamente sulle (34).

All'uopo osserviamo che con le posizioni (20) in cui, ora, possiamo assumere in luogo di b una base qualunque, ad esempio il raggio r_0 ,

$$(20a) \quad \begin{aligned} x &= \xi \cdot r_0, & w(x) &= \delta \cdot v(\xi) \\ \lambda_i &= \frac{r_i'^2}{EF_i'} \end{aligned}$$

$$w_m = v_m \cdot \delta = \frac{2m - 1}{2m} \frac{pr_0^2}{E\delta}, \quad \beta = 12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{r_0^2}{\delta^2}$$

potremo scrivere le (34) nella forma

$$(34a) \quad v_m - \sum_j X_j v(\xi, \xi_j) = \frac{\lambda_i}{\delta} (X_i + P_i),$$

ovvero anche, raccogliendo a sinistra le incognite X_i , a destra i termini noti,

$$(34b) \quad \Sigma_j X_j \left[v(\xi_i, \xi_j) + \alpha_i^j \frac{\lambda_i}{\delta} \right] = - P_i \frac{\lambda_i}{\delta} + v_m$$

con

$$\alpha_i^j = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j, \\ 1 & \text{per } i = j, \end{cases} \quad P_i = (p - \vec{p}_i) d_i^*,$$

$$d_i^* = \frac{r_e}{r_i} d_i.$$

Per la scrittura dei coefficienti occorre calcolare la $w(x, x_j) = \delta \cdot v(x, x_j)$, $v(x, x_j)$ essendo soluzione dell'equazione (19b), precisamente, nella variabile $\xi = x : r_0$, della

$$(19c) \quad \frac{d^4 v}{d\xi^4} + n \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \beta v = 0$$

con

$$n = 12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{N}{E\delta} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2 = 6 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p r_0}{E \delta} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2.$$

La $w(x, x_i)$ deve soddisfare alle condizioni limiti seguenti:

In $x = x_j$, cioè nel punto di applicazione della forza, si deve avere:

1) tangente nulla, cioè

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_j} = 0.$$

2) una discontinuità nel taglio eguale all'unità.

Per ragioni di simmetria, tale condizione si esprime compendiosamente scrivendo che

$$\frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E\delta^3}{12} \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=x_j} = \frac{1}{2}.$$

Infine, deve essere limitata all' ∞ .

In termini di v , le condizioni 1), 2), divengono:

$$\left. \frac{dv}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_j} = 0, \quad \left. \frac{d^3 v}{d\xi^3} \right|_{\xi=\xi_j} = \frac{\omega}{E\delta}$$

dove, con riguardo alle (20a),

$$(20b) \quad \omega = 6 \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_0}{\delta} \cdot \beta$$

ferma restando la condizione di limitazione all' ∞ .

Introducendo la variabile $\xi' = \xi - \xi_1$, tali condizioni ai limiti si esprimono anche con

$$\frac{dv}{d\xi'} \Big|_{\xi'=0} = 0, \quad \frac{d^3v}{d\xi'^3} \Big|_{\xi'=0} = \frac{\omega}{E\delta},$$

e $v(\infty)$ limitato.

Passando al calcolo della soluzione cercata (cfr. fig. 6) che indicheremo con $v = v(\xi, \xi_1)$, risultano per le radici $\alpha_{1,2,3,4}$ dell'equazione caratteristica le seguenti espressioni

$$\alpha_{1,2,3,4} = \pm i \sqrt{\frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - \beta}} \quad \text{per } n^2 - 4\beta > 0 \quad \text{cioè } \frac{p}{E} > \sqrt{\frac{4m^2}{3(m^2-1)}} \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^2,$$

$$\alpha_{1,2,3,4} = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta} - \frac{n}{2} \right)} \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta} + \frac{n}{2} \right)} \right] \quad \text{per } n^2 - 4\beta < 0,$$

$$\alpha_{1,2,3,4} = \pm i \sqrt{\frac{n}{2}} = \pm i \sqrt[4]{\beta}, \quad \text{per } n^2 - 4\beta = 0.$$

Da qui si riconosce agevolmente che, nella circostanza e, come vedremo subito, soltanto in questa, in cui

$$n^2 - 4\beta < 0$$

si ha una soluzione soddisfacente le condizioni volute. Essa è data, ove si ponga

$$(38) \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta} - \frac{n}{2} \right)}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta} + \frac{n}{2} \right)}$$

e per semplicità si assuma adirittura

$$\xi_1 = 0,$$

dall'espressione

$$(39) \quad v(\xi, 0) = \frac{\omega}{E\delta} \cdot \Phi(\xi),$$

con

$$(39a) \quad \Phi(\xi) = \frac{e^{-\eta_1 \xi}}{2\sqrt{\beta}} \left\{ \frac{1}{\eta_1} \cos \eta_2 \xi + \frac{1}{\eta_2} \sin \eta_2 \xi \right\},$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = \Psi(\xi) = \frac{e^{-\eta_1 \xi}}{2} \left(\frac{\sin \eta_2 \xi}{\eta_2} - \frac{\cos \eta_2 \xi}{\eta_1} \right).$$

Per $n^2 \geq 4\beta$, cioè nelle condizioni per le quali la pressione p agente sui fondi (di area $r_0^2\pi$) è tale che

$$\frac{p}{E} \geq \sqrt{\frac{4}{3} \frac{m^2}{m^2-1}} \cdot \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^2,$$

non si possono soddisfare le condizioni volute poichè restano a disposizione le sole soluzioni particolari ad esponente immaginario, quindi le sole funzioni trigonometriche. Viene quindi meno il procedimento indicato.

Si rilevi che tale impossibilità si identifica con condizioni manifeste di *instabilità* spettanti a tali valori di p . È infatti notissimo che ad uno sforzo assiale

$$P_{cr} = p_{cr} r_0^2 \pi = 2\pi \sqrt{\frac{m^2}{3(m^2 - 1)}} \cdot E \varepsilon^2$$

corrispondono configurazioni instabili *assialsimmetriche* di un cilindro di lunghezza praticamente infinita, ma queste, praticamente, non interessano nel caso nostro.

Per $\mu = 0$ si à

$$\eta_1 = \eta_2 = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4}} = \eta_0$$

e le (39a) divengono

$$(40) \quad \begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{1}{4\eta_0^3} \varphi(\xi), \\ \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} &= \frac{1}{2\eta_0} \psi(\xi) \end{aligned}$$

con

$$(41) \quad \begin{aligned} \varphi(\xi) &= e^{-\eta_0 \xi} (\cos \eta_0 \xi + \sin \eta_0 \xi), \\ \psi(\xi) &= e^{-\eta_0 \xi} (\sin \eta_0 \xi - \cos \eta_0 \xi). \end{aligned}$$

Poichè

$$\xi = \frac{x}{r_0}$$

si potrà porre

$$\eta_0 \xi = \frac{x}{s_0}$$

con

$$(42) \quad s_0 = \frac{r_0}{\eta_0} = r_0 \sqrt[4]{\frac{1}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} \left(\frac{\beta}{r_0}\right)^2}$$

definente una lunghezza che chiameremo *lunghezza caratteristica* richiamandoci, come è qui spontaneo, alla teoria della trave elastica su suolo elastico secondo ZIMMERMANN.

Le φ e ψ si possono scrivere in conformità per x

$$(41a) \quad \begin{aligned} \varphi\left(\frac{x}{s}\right) &= e^{-\frac{x}{s}} \left(\cos \frac{x}{s} + \sin \frac{x}{s} \right), \\ \psi\left(\frac{x}{s}\right) &= e^{-\frac{x}{s}} \left(\sin \frac{x}{s} - \cos \frac{x}{s} \right). \end{aligned}$$

La lunghezza s_0 è particolarmente significativa in quanto caratterizza immediatamente lo smorzamento delle φ e ψ e, per gli ordinari valori di n , di Φ e Ψ col crescere di x . Ad es. se $s_0 = 20$ cm e la distanza tra le ossature è di 60 cm si constata subito che il coefficiente di indici diversi, poniamo Φ_{12} è dell'ordine di $e^{-3} \cdot \Phi_{11}$; Φ_{13} dell'ordine di $e^{-6} \cdot \Phi_{11}$ ecc.. Ora s_0 è in generale, per gli involucri di sommergibili, dell'ordine di grandezza indicato; per $r_0 = 300$ cm, $m = \frac{10}{3}$, $\delta = 2,0$ cm si à ad esempio

$$s_0 = 300 \sqrt[4]{\frac{1}{3} \frac{100}{91} \left(\frac{2,00}{300}\right)^2} = 19,10 \text{ cm.}$$

Ciò posto, riprendiamo il sistema (34b) e applichiamo le posizioni (20a).

Otteniamo

$$(34c) \quad \Sigma_j \frac{X_j}{E\delta} \left(\omega \cdot \Phi(|\xi_i - \xi_j|) + \alpha_i^j \frac{r_i^2}{F_i} \right) = - \frac{P_i r_i^2}{E\delta F_i} + \frac{2m-1}{2m} \frac{pr_0^2}{E\delta^2}$$

che, attraverso le posizioni

$$(20c) \quad \frac{X_j}{E\delta} = \chi_j, \quad \frac{P_i}{E\delta} = \pi_i, \quad P_i = (p - \vec{p})d_i, \quad \Phi(|\xi_i - \xi_j|) = \Phi_{ij},$$

$$\Phi_0 = \frac{2m-1}{2m} \frac{pr_0^2}{E\delta^2} = \frac{p^*}{E} \left(\frac{r_0}{\delta}\right)^2$$

si riduce all'espressione adimensionale cercata

$$(34d) \quad \Sigma_j \chi_j \left(\omega \cdot \Phi_{ij} + \alpha_i^j \frac{r_i'^2}{F_i'} \right) = - \pi_i \frac{r_i'^2}{F_i'} + \Phi_0.$$

È importante rilevare che gli sviluppi che precedono si riferiscono ad ossature ideali, lineari. In realtà l'appoggio che queste costituiscono diffonde la loro reazione sulla larghezza d . Questa circostanza porta a modificare sensibilmente i coefficienti di influenza Φ_{ii} e Ψ_{ii} di egual indicè. Infatti, ove si osservi l'andamento della Φ e particolarmente della Ψ nel punto $x = |x_i - x_i| = 0$ si constata che, se la larghezza d non è piccola in raffronto alla lunghezza $\frac{r_0}{\eta}$ che misura lo smorzamento, il valore Φ_{ii} e Ψ_{ii} deve sostituirsi con

il valor medio della Φ , rispettivamente della Ψ , nell'intervallo $-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$.

Si viene a sostituire quindi Φ_{ii} e Ψ_{ii} con

$$\Phi_{ii}^* = \frac{2 \int_0^{\frac{d}{2}} \Phi(x) dx}{d}, \quad \Psi_{ii}^* = \frac{2 \int_0^{\frac{d}{2}} \Psi(x) dx}{d}.$$

Per $n = 0$ si à

$$\Phi_{ii}^* = \varepsilon(\Delta)\varphi_{ii}, \quad \Psi_{ii}^* = \mu(\Delta)\psi_{ii}$$

con

$$\varepsilon(\Delta) = \frac{1 - e^{-\Delta} \cos \Delta}{\Delta}, \quad \mu(\Delta) = \frac{e^{-\Delta} \sin \Delta}{\Delta},$$

$$\Delta = \frac{d}{2s}$$

essendo, come risulta dalle (40) e (41)

$$\varphi_{ii} = \frac{1}{4\eta_0^3}, \quad \psi_{ii} = \frac{1}{2\eta_0}.$$

Per quanto riguarda i dati definitivi $w(x)$, $s(x)$, $m(x)$ cioè spostamenti, sforzi negli anelli e momenti flettenti lungo le generatrici si à, per le (35), (36), (37) in termini di χ , essendo $x = \xi \cdot r_0$,

$$(35a) \quad w(x) = w_m - \omega \cdot \delta \sum_j \chi_j \Phi(|\xi - \xi_j|)$$

con

$$w_m = \frac{2m - 1}{2m} \frac{E\delta}{pr_0^2} = \Phi_0 \cdot \delta,$$

$$(36a) \quad s_t(x) = \frac{E\delta}{r_0} w(x)$$

$$m(x) = -\frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E\delta^3}{12} \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\frac{r_0}{\delta}\right)^3 \cdot \delta \sum_j \chi_j \frac{1}{r_0^2} \Psi(|\xi - \xi_j|),$$

dunque

$$(37a) \quad m(x) = -\frac{E \cdot \delta \cdot r_0}{2} \sum_j \chi_j \Psi(|\xi - \xi_j|).$$

OSSERVAZIONE. — È importante rilevare che, ⁽¹⁾ i coefficienti Φ_{ij} e Ψ_{ij} si attenuano fortemente col differire di i da j , piccola essendo la lunghezza $\frac{r_0}{\eta_i}$ in raffronto agli intervalli $|x_i - x_j|$.

Ne consegue l'utilità del metodo di iterazione per risolvere il sistema (34b) o una delle sue varianti (34c, d).

Si à in prima approssimazione, prendendo riguardo al sistema (34d)

$$\chi_i^{(1)} = \frac{\Phi_0 - \pi_i \frac{r_i'^3}{E_i'}}{\omega \Phi_{ii}^* + \frac{r_i'^3}{E_i'}}.$$

⁽¹⁾ per gli ordinari valori di n per i quali è ampiamente soddisfatta la condizione $n^2 \ll 4\beta$, sicchè praticamente si può porre anzi $n = 0$,

In seconda, e in ogni caso sufficiente, approssimazione,

$$\chi_i^{(2)} = \frac{\Phi_0 - \pi_i \frac{r_i'^2}{F_i'} - \sum_j' \chi_j^{(1)} \Phi_{ij}}{\omega \Phi_{ii}^* + \frac{r_i'^2}{F_i'}}$$

l'accento ' sul sommatorio stando ad indicare che in esso va escluso il termine per $i = j$.

Atteso lo smorzamento fortissimo si potrà porre

$$\sum_j' \chi_j^{(1)} \Phi_{ij} \simeq \chi_{i-1}^{(1)} \Phi_{i, i-1} + \chi_{i+1}^{(1)} \Phi_{i, i+1}.$$

Note le χ_i si à

$$\begin{aligned} n(x) &\simeq n_1 - \omega \cdot \delta \cdot (\chi_{i-1}^{(1)} \Phi_{i, i-1} + \chi_i^{(1)} \Phi_{ii}^* + \chi_{i+1}^{(1)} \Phi_{i, i+1}), \\ m(x) &\simeq -\frac{E\delta r_0}{2} (\chi_{i-1}^{(2)} \Phi_{i, i-1}'' + \chi_i^{(2)} \Phi_{ii}^{*''} + \chi_{i+1}^{(2)} \Phi_{i, i+1}''). \end{aligned}$$

OSSEVAZIONI. — Si rilevi che la risolubilità del sistema (34d) implica che sia $\neq 0$ il discriminante corrispondente. Perciò occorre e basta che n sia diverso dalle radici n_k dell'equazione trascendente in n che interviene nei coefficienti Φ_{ij} , precisamente

$$\left\| \omega \cdot \Phi_{ij}(n) + \alpha_i^j \frac{r_i'^2}{F_i'} \right\| = 0, \quad \alpha_i^j = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j, \\ 0 & \text{per } i \neq j. \end{cases}$$

Queste radici n_k , $k = 1, 2, \dots$, sono sicuramente — come è facile provare in base a generali teoremi sugli autovalori — eguali o superiori al limite $\sqrt{4\beta}$ prima precisato.

Rileviamo ancora che se si volessero considerare condizioni agli estremi prefissanti anche il valore della tangente alle generatrici occorrerebbe introdurre i momenti flettenti iperstatici, M_1 ed M_N (ove gli indici 1 ed N si riferiscano, per ipotesi, agli anelli estremi), tali da portare gli estremi suddetti, associati a tutto il complesso di forze agenti, a spostamenti e rotazioni prefissate, quindi nulle se si tratta di attacco per incastro.

Ma rileviamo subito che non appare troppo remunerativa una tale ulteriore complicazione dell'originario sistema (34b), e ciò, in quanto la condizione che gli spostamenti sieno nulli ai fondi è già sufficiente per ottenere una buona approssimazione della realtà,

Infatti, l'incastro elastico realizzato dalla continuità (il tubo si suppone indefinito) approssima le condizioni effettive pressapoco come l'incastro perfetto.

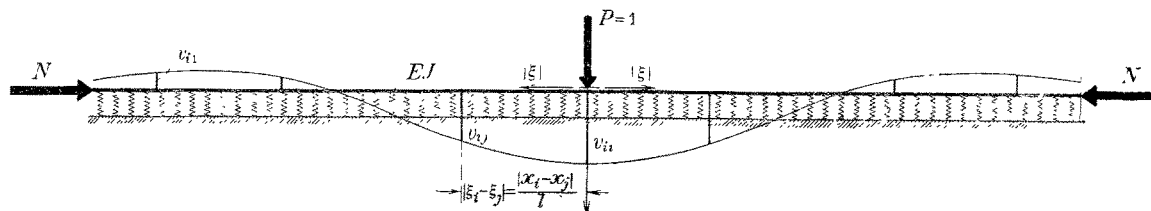


Fig. 6

Osserviamo ancora, concludendo, che è possibile considerare anche il caso in cui gli anelli sopportano la torsione.

È questa sostanzialmente una questione analoga a quella, ben elementare nell'aspetto, dell'asta su suolo elastico, soggetta a sforzo assiale, corrente su appoggi elastici reagenti alla torsione che è più generale, manifestamente, di quella (riportata su fig. 6) che qui abbiamo risolta in cui la reazione a tale torsione non si considera.

BIBLIOGRAFIA

1. - H. LORENZ, « Techn. Mechanik », Bd. IV. § 61, pag. 592.
2. - K. v. SANDEN u. P. TOELKE, « Ing. Archiv. », 1932, pag. 24.
3. - W. FLUEGGE, « Ing. Archiv. », 1932, pag. 463.
4. - S. TIMOSHENKO, « Z. Math. Phys. », 1910, pag. 378.
5. - R. V. SOUTHWELL, « Philos. Trans. Roy. Soc. London », A. 1914, pag. 187.
6. - R. v. MISES STODOLA-FESTSCHRIFT, Zuerich u. Leipzig 1929, pag. 418.
7. - F. VIPERBO, Ingegnere 1930, pag. 446 e pag. 631.
8. - K. v. SANDEN e GUENTHER, Werff Reed. Hafen 1920, pag. 219.
9. - G. KRALL, *Infestamento della lastra collaborante*, « Rend. Mat. », Roma 1943, pag. 1.

Roma, Istituto Nazionale di Alta Matematica. Gennaio 1944.