Le frequenze di vibrazione dei sistemi elastici soggetti a sollecitazioni di punta.

Memoria di ERNESTO STAGNI (a Bologna).

È noto che nei problemi comunemente studiati nella Scienza delle Costruzioni, e cioè di stabilità lineare, il regime di vibrazione libera di un sistema elastico può essere studiato senza tener conto delle forze che agiscono staticamente sul sistema stesso. Per es., per una trave orizzontale soggetta a masse pesanti, il regime di vibrazione viene determinato tenendo bensì conto delle masse, ma non dei pesi, come cioè se il sistema fosse sottratto alla gravità. Ed infatti si dimostra che il regime di vibrazione, qualora si tenga conto dei pesi o, in generale, delle forze applicate, non cambia, salvo a computare gli spostamenti dei punti della trave considerata a partire dalla posizione d'equilibrio statico; ma restano in ogni caso le stesse, ciò che più interessa agli scopi pratici, le frequenze di vibrazione.

Questa proprietà costituisce una semplificazione notevolissima per i problemi di vibrazione: su tale argomento ci intratterremo nel Cap. I, richiamando concetti già noti e mettendo in evidenza, inoltre, la proprietà di minimo delle frequenze, proprietà che riesce particolarmente utile per la ricerca delle frequenze stesse con metodi approssimati, nella gran parte dei casi della tecnica.

Ma la semplificazione anzidetta non è più legittima qualora si esca dal campo della stabilità lineare, introducendo cioè nell'equazione dell'equilibrio termini di 2° ordine ed oltre. È il caso, per termini non superiori al 2° ordine, dei carichi di punta; per termini oltre il 2° ordine si hanno altri casi più complessi (strutture scatolari) che qui non tratteremo. In generale l'introduzione di termini superiori al 1° ordine caratterizza il caso dei sistemi elastici in cui può verificarsi, per un certo valore critico dei carichi applicati, *instabilità dell'equilibrio*.

Si noti, inoltre, che, nell'ambito della Scienza delle Costruzioni, si può trascurare il problema dell'instabilità se il verificarsi dell'instabilità stessa esce dal campo usuale di variabilità dei carichi; mentre nei problemi di vibrazione, anche nell'ambito di questo campo e pur rimanendo lontani dalle condizioni critiche, il valore delle forze applicate può influire sensibilmente sulle frequenze di vibrazione.

Con ciò i problemi di vibrazione si complicano enormemente, poichè si hanno regimi diversi per ogni diverso valore dei carichi agenti: è questo il caso dei portali, degli archi, delle lastre compresse, in generale di tutte le strutture soggette a flessione e sforzo normale.

Il problema stesso è però grandemente facilitato qualora si sia già risolto, per i sistemi in istudio, il problema dell'instabilità dell'equilibrio elastico.

I due problemi sono tra di loro intimamente legati: per questo ci dilungheremo, nel Cap. II, sul problema dell'instabilità, in parte trattando concetti noti, ma mettendo in luce, per il nostro scopo, alcuni aspetti particolari della ricerca. In particolare si rileverà come i carichi di punta non modifichino l'*armonicità* dei moti, e cioè la forma lineare delle equazioni del moto, malgrado l'introduzione dei termini di 2° ordine: condizione necessaria questa perchè possa ancora parlarsi di frequenze di vibrazione.

Si vedrà inoltre come alla proprietà di minimo delle frequenze di vibrazione corrisponda la proprietà di minimo dei carichi critici (si noterà l'analogia delle due dimostrazioni), quest'ultima deducibile, in definitiva, dalla prima.

Dalle considerazioni del Cap. II è facile trarre i risultati del Cap. III. La relazione lineare tra i quadrati delle frequenze ed il valore dei carichi è esatta soltanto per il caso dell'asta omogenea appoggiata, soggetta a sforzo normale costante, ma per moltissimi altri sistemi è talmente approssimata — almeno per la frequenza fondamentale — da poter essere usata come esatta; in ogni caso, ed in particolare per le frequenze superiori, è sempre possibile, qualora interessi, determinare in modo preciso i limiti di variabilità delle frequenze cercate.

In definitiva è ancora possibile, per la gran parte dei casi della tecnica, studiare il problema di vibrazione facendo astrazione dal valore delle forze applicate, ma è necessario però conoscere il valore critico delle forze stesse.

Questi risultati si prestano anche alle determinazioni sperimentali: a queste è necessario ricorrere (si tratti di prove su modelli o su strutture già costruite) qualora non sia possibile determinare per via analitica, nel caso di sistemi elastici molto complessi, la frequenza di vibrazione attorno alla configurazione naturale (cioè facendo astrazione delle forze) e la condizione critica di carico.

I. La ricerca delle frequenze di vibrazione per i problemi di stabilita lineare.

1. Abbiasi un sistema elastico, costituito da uno o più corpi elastici tali che in ogni punto materiale sia soddisfatta la legge di HOOKE generalizzata (dipendenza lineare tra tensioni interne σ e dilatazioni ε) e soggetto a vincoli qualsiasi non dipendenti dal tempo.

Quando il sistema elastico non è soggetto ad alcuna forza (comprese le forze di massa, cioè come se fosse sottratto all'azione della gravità) esso si dispone secondo la sua *configurazione naturale*. Si consideri ora il sistema in istato di vibrazione libera attorno alla sua configurazione naturale: scelte le condizioni iniziali del moto, resta determinato in funzione del tempo t lo spostamento $\overrightarrow{u}$, di componenti u_x, u_y, u_z, per ogni punto del sistema di coordinate x, y, z; cioè la configurazione del sistema in ogni istante t, che indichiamo genericamente con $\overrightarrow{u}(x, y, z; t)$.

Per ognuno di questi moti attorno alla configurazione naturale deve valere il principio di HAMILTON, scritto nella forma variazionale:

$$\int_{t_1}^{t_2}[\delta T_{(0,u)} - \delta V_{(0,u)}]dt = 0 \tag{1}$$

T essendo l'energia cinetica e V l'energia elastica, e dove le variazioni δT e δV corrispondono, secondo la definizione consueta, ad una variazione virtuale sincrona $\delta\overrightarrow{u}$ del moto nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$, ma nulla negli istanti iniziale e finale t_1 e t_2. Con l'indice $(0, u)$ vogliamo indicare che T e V si riferiscono ad un moto $\overrightarrow{u}(t)$ attorno alla configurazione naturale $\overrightarrow{u} = 0$, presa cioè per origine degli spostamenti u.

L'espressione dell'energia cinetica T è del tipo:

$$T = \frac{1}{2}\int_S \rho \left(\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right)^2 dS \tag{2}$$

(l'integrale essendo esteso a tutto lo spazio S occupato dal sistema elastico), mentre l'espressione dell'energia elastica V può scriversi:

$$V = \frac{1}{2}\int_S W(E\mu, \varepsilon^2)dS \tag{3}$$

l'integrale avendo lo stesso significato che nell'espressione precedente, e dove la $W(E\mu, \varepsilon^2)$ sta ad indicare genericamente una funzione quadratica omogenea delle dilatazioni lineari ε (funzioni, a lor volta, delle u_x, u_y, u_z), i cui coefficienti contengono E (modulo d'elasticità normale) e μ (modulo di POISSON).

Eventualmente vi sarà da aggiungere, nella (3), un termine $V_{(0)}$ indicante l'energia elastica corrispondente ad uno stato di costrizione interna del sistema preesistente alle deformazioni u.

2. Consideriamo ora lo stesso sistema elastico soggetto ad un sistema di forze $\mathfrak{F}$ costanti nel tempo, comunque distribuite (in esse comprese le forze di massa); supponiamo inoltre che tale sistema di forze, per qualsiasi valore delle forze stesse, si mantenga sempre simile ad un sistema unitario $\mathfrak{F}_1$, nel senso che tutte le forze siano proporzionali ad uno stesso fattore scalare K e siano sempre applicate negli stessi punti: potremo quindi scrivere simbolicamente $\mathfrak{F} = K\mathfrak{F}_1$.

Ad un certo valore del fattore K, il sistema si dispone in una certa configurazione d'equilibrio $\vec{u}_0(x, y, z)$ rispetto alla configurazione naturale. Per questa configurazione d'equilibrio deve valere il principio della minima energia potenziale:

$$\delta\mathcal{E}_{(u_0)} = \delta V_{(u_0)} - \delta L_{(u_0)} = 0 \tag{4}$$

dove, essendo L il lavoro compiuto dalle forze $\mathfrak{F}$ per gli spostamenti u_0, la variazione corrisponde ad uno spostamento virtuale $\delta\vec{u}$ della configurazione u_0.

L'espressione del lavoro esterno L è del tipo:

$$L = \Sigma\, \vec{F} \times \vec{u} + \int_A \vec{q} \times \vec{u}\, dA + \int_S \rho\, \vec{g} \times \vec{u}\, dS \tag{5}$$

dove $\vec{F}$ sono le forze concentrate, $\vec{q}$ le forze distribuite sull'area esterna A, $\rho\,\vec{g}$ le forze di massa, e dove $\vec{u}$ si riferisce, in ogni caso, ai punti d'applicazione delle forze che figurano nella (5) stessa.

Stante la proporzionalità di tutte le forze al fattore K, può scriversi:

$$L = KL_1 \tag{5-a}$$

L_1 essendo il lavoro che compete al sistema unitario $\mathfrak{F}_1$.

Per qualsiasi moto di vibrazione del nostro sistema attorno alla configurazione d'equilibrio u_0 definita dalla (4), deve valere l'equazione variazionale di HAMILTON in cui figura, oltre a T ed a V, il lavoro esterno L, e cioè:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta T_{(u_0,\,u)} - \delta V_{(u_0,\,u)} + \delta L_{(u_0,\,u)}\right] dt = 0 \tag{1-a}$$

dove con l'indice (u_0, u) si vuole indicare un qualsiasi moto $\overrightarrow{u}(t)$ attorno alla configurazione d'equilibrio u_0.

È questa la condizione più generale a cui deve soddisfare un moto vibratorio, e la (1-a) sarà quindi presa per base delle nostre considerazioni.

Come variabili dipendenti dalle x, y, z assumeremo le componenti di $\overrightarrow{u}$ secondo gli assi (si ometterà, da qui in avanti, la notazione vettoriale): per una data configurazione del sistema sono quindi determinate le funzioni

$$u_x(x, y, z); \quad u_y(x, y, z); \quad u_z(x, y, z).$$

Ma, in generale, queste tre funzioni non sono tra di loro indipendenti, in virtù delle relazioni che debbono intercorrere tra le u_x, u_y, u_z e le dilatazioni lineari ε. Per es., se si hanno vibrazioni di sola flessione, con spostamenti u_y e u_z, lo spostamento secondo la restante direzione, u_x, anzichè dipendere direttamente dalle x, y, z dipende dalle u_y e u_z; si ha cioè:

$$u_x(x, y, z) = u_x(u_y, u_z)$$

dove l'espressione al secondo membro può essere un'espressione integrale contenente le u_y, u_z, le loro derivate, ecc.. Così, in generale, per tutti gli stati di vibrazione che comprendono spostamenti in più direzioni.

Questa precisazione è essenziale, come vedremo, per l'espressione del termine δL, qualora in una delle u, per es. la u_x, figurino le u_y e u_z o le loro derivate in termini di grado superiore al primo.

3. Consideriamo dapprima i problemi di stabilità lineare, e cioè quei sistemi elastici per cui possa ammettersi una dipendenza lineare tra le ε e le u, nella nota forma:

$$\left\{\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ &\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Da queste relazioni non possono dedursi dipendenze tra le varie u che non siano lineari; per es. ([1]):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x}\, dy - \int_0^y \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\, dy.$$

Qualunque sia il moto vibratorio, si avrà quindi sempre, stante l'espressione lineare di qualsiasi u:

$$\delta L_{(u_0,\, u)} = K \Sigma \frac{\partial L_1}{\partial u} \delta u \tag{5-b}$$

(la sommatoria essendo estesa alle tre u_x, u_y, u_z). Ossia la variazione del lavoro corrispondente ad uno spostamento virtuale δu, è la stessa per qualsiasi posizione u attorno ad u_0, poichè ogni derivata $\frac{\partial L_1}{\partial u}$, rispetto allo spostamento di un punto, non è che la forza in quel punto (teor. di CASTIGLIANO inverso), col valore che compete al sistema unitario $\mathcal{F}_1$. In particolare sarà $\delta L_{(u_0,\, u)} = \delta L_{(u_0)}$, e, per il principio della minima energia potenziale (4), applicato alla posizione d'equilibrio u_0:

$$\delta L_{(u)} = \delta L_{(u_0)} = \delta V_{(u_0)} \tag{7}$$

(all'indice (u_0, u) abbiamo sostituito quello più semplice (u), poichè sia V che L dipendono soltanto dalla configurazione). Si ha quindi:

$$\delta \mathcal{E}_{(u)} = \delta V_{(u)} - \delta L_{(u)} = \delta V_{(u)} - \delta V_{(u_0)}.$$

A sua volta il δV può esprimersi:

$$\delta V = \int_S W'(E\mu,\, \varepsilon\delta\varepsilon) dS. \tag{3-a}$$

dove la $W'(E\mu, \varepsilon\delta\varepsilon) = \Sigma \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon$ (la sommatoria è estesa a tutte le ε) sta ad indicare una funzione lineare omogenea nelle $\varepsilon\delta\varepsilon$. Ma, stante la proporzionalità tra le ε e le derivate di u, secondo le (6), la W', per un dato spostamento δu, sarà pure lineare omogenea nelle u, e pertanto sarà legittimo scrivere (è indifferente mettere l'indice u oppure u', poichè ad ogni u' corrisponde una sola u, a meno di uno spostamento rigido):

$$\delta V_{(u)} - \delta V_{(u_0)} = \delta V_{(u-u_0)}$$

ossia:

$$\delta V_{(u)} - \delta L_{(u)} = \delta V_{(u-u_0)}.$$

([1]) Nel caso di una trave inflessa secondo y, quest'espressione dà lo spostamento secondo x dipendente dagli spostamenti (abbassamenti) secondo y (cfr. n.° preced. di questo Capitolo).

E poichè, stante l'espressione (2) dell'energia cinetica, il $\delta T_{(u_0, u)}$ è ovviamente uguale al $\delta T_{(0, u-u_0)}$, possiamo affermare che l'equazione di HAMILTON (1-a), scritta per i moti u attorno alla posizione d'equilibrio u_0, è formalmente identica alla (1) — priva cioè del termine δL — scritta per i moti $u - u_0$ attorno alla configurazione naturale. Da qui la proprietà notissima dei moti vibratori nei problemi di stabilità lineare, e cioè che le vibrazioni attorno ad una posizione d'equilibrio qualsiasi sono identiche alle vibrazioni attorno alla configurazione naturale, come cioè se sul sistema non agisse forza alcuna.

4. Questa proprietà permette dunque di determinare il regime di vibrazioni per un problema di stabilità lineare, una volta nota la posizione d'equilibrio u_0, mediante l'equazione:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta T - \delta V_{(u-u_0)}] dt = 0 \tag{1-b}$$

dove l'energia elastica V va calcolata, anzichè per gli spostamenti u, come sarebbe il suo proprio significato, per gli spostamenti $u - u_0$ attorno alla configurazione d'equilibrio statico.

È facile vedere come la (1-b) caratterizzi sempre vibrazioni armoniche. Si ritorni all'espressione (2) dell'energia cinetica e (3) dell'energia elastica, quest'ultima scritta per $u - u_0$:

$$T = \frac{1}{2}\int_S \rho \left(\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right)^2 dS; \quad V = \frac{1}{2}\int_S W(E\mu, (u' - u_0')^2) dS.$$

Separiamo ora le variabili x, y, z dalla variabile t, ponendo:

$$u - u_0 = f(x, y, z; t) = v(x, y, z) q(t) \tag{8}$$

essendo q funzione del tempo e v una configurazione di vibrazione spontanea del sistema; la posizione (8) corrisponde infatti alla ricerca delle condizioni di moto stazionario, tali cioè che tutti i punti del sistema vibrino sincronicamente. Si ha quindi:

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \int_S \rho \overrightarrow{v}^2 dS = \frac{1}{2} T^* \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \\ V &= \frac{1}{2} q^2 \int_S W(E\mu, v'^2) dS = \frac{1}{2} V^* q^2 \end{aligned} \right. \tag{9}$$

dove le quantità T^* e V^* sono indipendenti dal tempo, dipendendo soltanto dalla configurazione di vibrazione $v(x, y, z)$, ancora incognita. È chiaro allora che, qualunque sia la v, le (9) caratterizzano un moto armonico, di equazione:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{V^*}{T^*} q = 0 \tag{10}$$

il cui integrale generale è $q = a \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t$, essendo il quadrato della frequenza definito, a meno del fattore $4\pi^2$, da:

$$\omega^2 = \frac{V^*}{T^*} = \frac{\int_S W'(E\mu, v'^2) dS}{\int_S \rho v^2 dS} \tag{11}$$

quantità che pure dipende dalla configurazione $v(x, y, z)$.

Restano ora a determinarsi, tra tutte quelle possibili soddisfacenti alle condizioni agli estremi, le effettive configurazioni di vibrazione $v(x, y, z)$ nelle condizioni di moto stazionario.

Ricorriamo perciò ancora all'equazione di Hamilton ed esprimiamo le variazioni sotto il segno d'integrale. Si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T \, dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_S \rho \left(\frac{du_x}{dt} \frac{d\delta u_x}{dt} + \dots + \dots \right) dS \, dt$$

integrando per parti e tenendo conto che è, per il significato stesso dell'integrale di Hamilton, $\delta u = 0$ negli istanti t_1 e t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T \, dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_S \rho \left(\frac{d^2u_x}{dt^2} \delta u_x + \dots + \dots \right) dS \, dt$$

Per il termine δV, partendo dall'espressione (3-a):

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta V \, dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_S W'(E\mu, u'\delta u') dS \, dt.$$

In virtù della posizione (8) di separazione delle variabili e delle espressioni (9), si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T \, dt = -\int_{t_1}^{t_2} q \frac{d^2q}{dt^2} \delta T^* dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta V \, dt = \int_{t_1}^{t_2} q^2 \delta V^* dt$$

La (1-b) si traduce quindi nella condizione:

$$\frac{d^2q}{dt} + q\,\frac{\delta V^*}{\delta T^*} = 0. \tag{10-a}$$

Perchè dunque la $v(x, y, z)$ sia l'effettiva configurazione di vibrazione, occorre, dal confronto della (10) con la (10-a), che sia:

$$\frac{\delta V^*}{\delta T^*} = \frac{V^*}{T^*} \quad \text{ossia} \quad \delta V^* - \omega^2 \delta T^* = 0. \tag{12}$$

Ma ciò equivale alla condizione che la effettiva $v(x, y, z)$, tra tutte quelle possibili soddisfacenti ai vincoli, renda minimo ω^2: ed infatti la variazione dell'espressione (11), per una variazione δv della configurazione, è data da:

$$\delta(\omega)^2 = \frac{T^*\delta V^* - V^*\delta T^*}{T^{*2}} \tag{12-a}$$

espressione che si annulla se è verificata la (12).

Per dimostrare che l'annullarsi della variazione $\delta(\omega)^2$ in corrispondenza dell'effettiva $v(x, y, z)$ rende effettivamente minimo ω^2, si è ricondotti a dimostrare che la stessa v rende minimo l'integrale di HAMILTON.

È noto inoltre che l'equazione variazionale (12) ammette come soluzioni una successione infinita di configurazioni $v_1, v_2, \ldots$ (autofunzioni), a cui corrisponde una successione infinita di frequenze di vibrazione $\omega_1, \omega_2, \ldots$ (autovalori). Di queste, la prima autofunzione v_1 rende effettivamente minima la frequenza ω_1 (frequenza fondamentale); la seconda autofunzione v_2 rende minima ω_2 sotto la condizione di *ortogonalità* tra v_1 e la v_2, e cioè alla condizione che si annulli l'integrale:

$$\int_S v_1 v_2 \, dS$$

e così di seguito.

II. L'introduzione dei termini di secondo ordine. La ricerca delle condizioni critiche di carico.

1. E noto dalla teoria dell'elasticità che le espressioni (6) delle ε in termini lineari delle u corrispondono a considerare come quantità piccole del primo ordine lo spostamento u e le derivate delle sue componenti rispetto agli assi, trascurandone le potenze di 2° grado ed oltre ed i mutui prodotti.

Dalla fig. 1 si ha infatti che se, per es., un elemento dx dopo la deformazione assume la configurazione dx', l'espressione esatta della dilatazione lineare ε_{xx} è la seguente:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dx' - dx}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2} - 1$$

espressione che, sviluppata in serie fino ai termini di 2° ordine, equivale a [2]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{6-a}$$

Il considerare gli spostamenti u come quantità del primo ordine, trascurando quindi i termini di ordine superiore al 1° nell'espressione delle ε, corrisponde notoriamente a trascurare gli spostamenti u stessi agli effetti della distribuzione delle tensioni interne σ: tale distribuzione viene infatti valutata in base alla configurazione naturale, cioè non deformata. Ciò porta ad una relazione di linearità tra tensioni interne σ e forze F; quindi, in virtù della legge di HOOKE generalizzata e delle espressioni (6), ad una relazione di linearità tra le forze F, o meglio il fattore moltiplicativo K, e gli

---

(2) Infatti si sviluppi in serie fino ai termini di 2° ordine l'espressione

$$\varepsilon = [(1+p)^2 + q^2]^{\frac{1}{2}} - 1$$

$\left(\text{si pone } p = \frac{\partial u_x}{\partial x};\ q = \frac{\partial u_y}{\partial x}\right.$ e si omette $\frac{\partial u_z}{\partial x}$ perchè l'espressione è simmetrica rispetto a $\left.\frac{\partial u_y}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$.

Si ha:

$$\varepsilon = (\varepsilon_0) + p\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_0 + q\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q}\right)_0 + \frac{1}{2}\left[p^2\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p^2}\right)_0 + 2pq\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p \partial q}\right)_0 + q^2\left(\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial q^2}\right)_0\right];$$

$$(\varepsilon)_0 = 1 - 1 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_0 = [(1+p)^2 + q^2]^{-\frac{1}{2}}(1+p) = 1;$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p^2}\right)_0 = -[(1+p)^2 + q^2]^{-\frac{3}{2}}(1+p^2) + [(1+p)^2 + q^2]^{-\frac{1}{2}} = -1 + 1 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q}\right)_0 = [(1+p)^2 + q^2]^{-\frac{1}{2}} q = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q^2}\right)_0 = -[(1+p)^2 + q^2]^{-\frac{3}{2}} q^2 + \frac{1}{2}[(1+p)^2 + q^2]^{-\frac{1}{2}} = 0 + 1 = 1;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p \partial q} = -[(1+p)^2 + q^2]^{-\frac{3}{2}}(1+p)q = 0.$$

Quindi:

$$\varepsilon = p + \frac{1}{2}q^2.$$

Il primo termine successivo dello sviluppo non nullo è

$$\left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial p \partial q^2}\right)_0 = 1.$$

spostamenti u. Da qui il principio di sovrapposizione degli effetti, nonchè l'unicità e stabilità delle configurazioni d'equilibrio, caratteristiche queste dei problemi di *stabilità lineare*.

Tener conto dei termini d'ordine superiore al 1° nelle espressioni delle ε significa dunque prendere in considerazione la possibilità di configurazioni

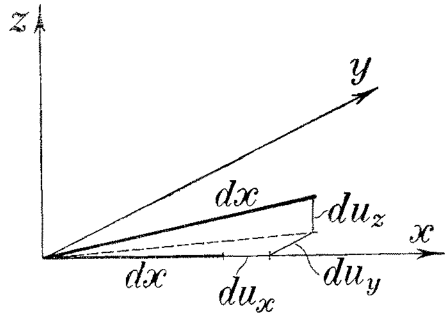

Fig. 1

d'equilibrio instabile, per cui cioè l'energia potenziale $\mathcal{E}$ del sistema elastico sia massima anzichè minima.

La stabilità o meno di una certa configurazione u_0 d'equilibrio — per cui dunque sia soddisfatta l'equazione (4) dell'energia potenziale: $\delta\mathcal{E}=0$ — può pertanto riconoscersi dal segno (positivo, se stabile) della variazione seconda $\delta_2\mathcal{E}$ dell'energia potenziale stessa (teorema di DIRICHLET). In particolare si ricercheranno quelle configurazioni di equilibrio indifferente, o critiche, u_{cr}, per cui è $\delta_2\mathcal{E}=0$, e che separano un campo di configurazioni d'equilibrio stabile da un campo di configurazioni instabili.

Nelle considerazioni che seguono noi ci porremo espressamente nel caso che nelle relazioni tra le ε e le u figurino soltanto termini di 1° e 2° ordine, escludendo quindi qualsiasi termine di 3° ordine ed oltre.

Prenderemo quindi per base la (6-b) ed analoghe, da cui risulta che il contributo di 2° ordine, per es. alle ε_{xx}, e quindi l'eventuale instabilità, può soltanto sussistere in virtù delle u_y e u_z; pertanto un sistema di forze o, più in generale, uno stato di sollecitazione che dia luogo a dilatazioni secondo una data direzione, per es. x, può provocare soltanto condizioni d'instabilità caratterizzate da spostamenti in direzione ortogonale, per es. y e z. È il caso tipico dei carichi di punta, e di tutti i casi d'instabilità che possono ricondursi a questo tipo.

In tutti questi casi non è più lecito, come per i problemi di stabilità lineare, ricondursi allo studio delle vibrazioni attorno alla configurazione naturale, come cioè se non agissero le forze.

2. Ciò posto, ricaviamo dalla (6-a):

$$u_x = \int_0^x \varepsilon_{xx} dx - \int_0^x \left[\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] dx \tag{6-b}$$

e scriviamo perciò, mettendo in evidenza i termini di secondo ordine:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \varepsilon_{xx}^{(2)}, \tag{6-a}$$

$$u_x = \int_0^x \varepsilon_{xx} dx - u_x^{(2)}. \tag{6-b}$$

È chiaro che i termini di 2° ordine non possono sussistere contemporaneamente nella (6-a) e nella (6-b): infatti se i vincoli sono tali da impedire gli spostamenti di 2° ordine secondo x, sparisce senz'altro il termine $u_x^{(2)}$ dalla (6-b), e rimane la (6-a). Se invece i vincoli permettono gli spostamenti $u_x^{(2)}$, resta la (6-b) che, a sua volta, sostituita nel termine $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ nella (6-a), fa sparire il termine $\varepsilon_{xx}^{(2)}$, in quanto questo è uguale a $\frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial x}$.

Ciò corrisponde, nel caso semplice dell'asta caricata di punta, che prenderemo sempre per guida delle nostre considerazioni, a due modi distinti di considerare i vincoli.

Nel primo caso gli appoggi sono a distanza invariabile (fig. 2-a), tale da costringere assialmente l'asta con uno sforzo di compressione P: sono dunque

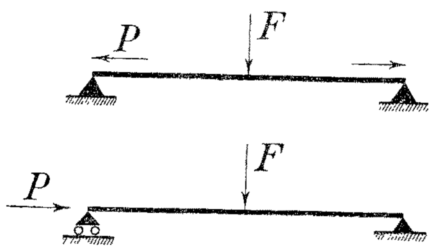

Fig. 2

nulli gli $u^{(2)}$, restando soltanto gli spostamenti di 1° ordine dei punti d'applicazione delle forze come F; per contro uno spostamento trasversale dell'asta dà luogo ad una dilatazione assiale $\varepsilon^{(2)}$ di 2° ordine. Nel secondo caso (fig. 2-b), uno degli appoggi è libero di spostarsi in senso assiale: il punto d'applicazione del carico di punta P può quindi avere, per uno spostamento trasversale, spostamenti $u^{(2)}$ di 2° ordine, ma non può esservi alcuna $\varepsilon^{(2)}$, poichè l'asta inflessa conserva la sua lunghezza accorciando la corda.

Il caso a) ha ragione di esser preso in considerazione soltanto nel caso di aste o lastre ad appoggi fissi, specie quando la sollecitazione di punta è data da azioni interne, per es. da azioni termiche, ritiro, ecc.: la corrispondente energia elastica è allora da riguardarsi come il termine $V_{(0)}$, afferente alla configurazione naturale, come si è visto al Cap. I, n. 1. In tutti gli altri problemi della pratica, come, per es., portali e telai di qualsiasi tipo, archi, ecc., si verifica normalmente il caso b).

3. Torniamo ora al problema dell'instabilità dell'equilibrio ed esprimiamo, in conformità del teorema di DIRICHLET, la variazione seconda $\delta_2\mathcal{E} = \delta_2 V - \delta_2 L$, per uno spostamento virtuale δu a partire da una posizione d'equilibrio u_0. Si ha, ricordando la (3) e la (5) del Cap. precedente (col solito significato per le sommatorie):

$$(13) \qquad \begin{cases} \delta_2 V_{(u_0)} = \int\limits_S \Sigma \dfrac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2}\left(\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial u}\delta u\right)^2 dS + \int\limits_S \Sigma \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon}\delta_2 \varepsilon^{(2)} dS \\ \delta_2 L_{(u_0)} = K\,\Sigma \dfrac{\partial L_1}{\partial u}\delta_2 u. \end{cases}$$

Mentre nel caso a) sparisce il termine $\delta_2 L$, non essendovi alcuno spostamento $u^{(2)}$ di 2° ordine, nel caso b) è nullo il secondo termine della $\delta_2 V$, essendo nulla ogni $\varepsilon^{(2)}$. D'ora in avanti prenderemo in considerazione soltanto il caso b), cioè supporremo che i vincoli consentano gli spostamenti di 2° ordine ([3]). Resta quindi:

$$(13\text{-a}) \qquad \delta_2\mathcal{E} = \int\limits_S \Sigma \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}\delta u\right)^2 dS - K\,\Sigma \frac{\partial L_1}{\partial u}\delta_2 u.$$

Per il primo termine basta ricordare l'espressione (2) dell'energia elastica, e derivare due volte la W rispetto alle ε, per avere:

$$(14) \qquad \delta_2 V = \int\limits_S W(E\mu,\, \delta\varepsilon^2)\, dS = V_{(\delta u)}$$

dove con $V_{(\delta u)}$ s'intende l'energia elastica calcolata, anzichè per le u, per le variazioni δu attorno ad u_0, termine, quindi, sempre positivo. Stante

([3]) È facile vedere che, a meno di termini di 3° ordine, il secondo termine della $\delta_2 V$ si identifica col termine $\delta_2 L$, ove si identifichi il carico di punta P con la risultante, cambiata di segno, delle $\sigma = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon}$ dovute alla costrizione dell'asta causata dai vincoli fissi.

l'esclusione dei termini di 2° ordine dalle espressioni delle ε, i $\delta\varepsilon^2$ non sono che i $\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}\right)^2$, quindi la $V_{(\delta u)}$ e, a parità di spostamenti δu, indipendente dalla posizione u_0 di partenza.

Analogamente si dimostra che il termine $\delta_2 L$ non è che il lavoro compiuto dalle forze $\mathfrak{F}$ per i soli spostamenti $\delta u^{(2)}$ di secondo ordine. Ed infatti si tenga presente l'espressione (5-b) della variazione prima δL, e si ricordi, come già osservato al n° 3 del Cap. I, che ogni derivata $\frac{\partial L_1}{\partial u}$ non è che la forza del sistema unitario $\mathfrak{F}_1$ nel punto di cui si valuta la u; si ha perciò:

(5-c) $$\delta_2 L = K\,\Sigma\frac{\partial L_1}{\partial u}\,\delta_2 u.$$

A sua volta la $\delta_2 u$ non può che riferirsi alle sole $u^{(2)}$ di 2° ordine, che sono sempre positive; se le forze del sistema unitario hanno senso concomitante con le $u^{(2)}$, i termini della sommatoria sono tutti positivi e la $\delta_2 L$ ha lo stesso segno di K; inoltre, poichè le $u^{(2)}$ sono quadratiche omogenee nelle $\frac{\partial u}{\partial x}$, la $\delta_2 u$ sarà pure quadratica omogenea nelle $\frac{\partial\delta u}{\partial x}$, cosicchè si potrà scrivere, per analogia con la $V_{(\delta u)}$ nella (14):

(5-c) $$\delta_2 L = K\,\Sigma\frac{\partial L_1}{\partial u}\,u^{(2)}_{(\delta u)} = KL^{(2)}_{1(\delta u)}$$

espressione ancora indipendente dalla u_0 di partenza, come già la $V_{(\delta u)}$.

Dunque la condizione critica di carico sarà data da:

$$\delta_2\mathscr{E}_{(u_0)} = V_{(\delta u)} - KL^{(2)}_{1(\delta u)} = 0,$$

da cui:

(15) $$K_{cr} = \frac{V_{(\delta u)}}{L^{(2)}_{1(\delta u)}}.$$

Poichè numeratore e denominatore del rapporto non contengono la u_0 di equilibrio statico, il K_{cr} — per una data δu — non può essere che unico; inoltre, poichè $V_{(\delta u)}$ e $L^{(2)}_{1(\delta u)}$ sono sempre positivi, il K_{cr} è sempre positivo, in quanto tale da dar luogo a forze concomitanti con le $u^{(2)}$ come si è presupposto: ma poichè le $u^{(2)}$ figurano sempre col segno meno nell'espressione della u totale (6-b), il K_{cr} sarà tale da dar luogo ad ε negative, cioè di compressione [4].

---

[4] Si comprende fin d'ora come non rientrino nella categoria di problemi da noi considerati quei sistemi che ammettono due valori di K_{cr} di segno diverso; per es. due valori simmetrici, come nel caso classico del tubo cilindrico inflesso (vedi BELLUZZI, « Ricerche d'Ingegneria », 1933, n. 3). Per questi problemi entrano in giuoco, nelle equazioni dell'equilibrio, termini di 3° ordine.

4. La (15) non è, di per sè, sufficiente, alla determinazione di K_{cr}. Occorre infatti considerare che lo spostamento δu è pure funzione di x, y, z, in quanto rappresenta la configurazione infinitamente vicina alla u_{cr} che il sistema tende ad assumere al sopraggiungere delle condizioni critiche, ossia la configurazione d'instabilità. Per ogni particolare funzione $\delta u(x, y, z)$ si ha, nella (15), un diverso valore di K_{cr}; ma soltanto l'effettiva configurazione d'instabilità δu darà, nella (15), il K_{cr} vero.

Occorre dunque un'ulteriore condizione variazionale che permetta di identificare, tra tutte quelle possibili soddisfacenti ai vincoli, le effettive configurazioni di instabilità $\delta u(x, y, z)$. Questa condizione è data dal fatto che, se u_{cr} è una configurazione di equilibrio indifferente, anche la configurazione infinitamente vicina $u_{cr} + \delta u$ è d'equilibrio: condizione questa che si esprime con l'equazione:

(15-a) $$\delta_{(\delta u)} \mathcal{E}_{(u_{cr}+\delta u)} = 0$$

dove la variazione va presa rispetto alle δu, che sono da considerarsi come le uniche variabili nell'espressione di $\mathcal{E}$.

Se sviluppiamo in serie di Taylor la $\mathcal{E}_{(u_0+\delta u)}$ fino ai termini di 2° ordine, abbiamo:

(16) $$\mathcal{E}_{(u_0+\delta u)} = \mathcal{E}_{(u_0)} + \Sigma \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u}\right)_{(u_0)} \delta u + \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial u^2}\right)_{(u_0)} \delta u^2.$$

La variazione è nulla per il primo termine, che non contiene le δu; il secondo termine è nullo per qualsiasi δu, poichè sono nulle tutte le $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial u}$ per ogni posizione d'equilibrio u_0; resta quindi la variazione rispetto alle δu del termine di 2° ordine: ma questo termine non è che la variazione seconda $\delta_2 \mathcal{E}_{(u_0)}$, che ha l'espressione (15). Dunque per $K = K_{cr}$ la (15-a) potrà scriversi:

(15-b) $$\begin{aligned} \delta_{(\delta u)} \mathcal{E}_{(u_{cr}+\delta u)} &= \delta_{(\delta u)}[\delta_2 \mathcal{E}_{(u_{cr})}] \\ &= \delta_{(\delta u)} V_{(\delta u)} - K_{cr} \delta_{(\delta u)} L^{(2)}_{1(\delta u)} = 0. \end{aligned}$$

E cioè, in corrispondenza del vero K_{cr}, l'effettiva δu deve essere tale da rendere la $\delta_2 \mathcal{E}$ nulla, per la (15), e, ad un tempo, minima rispetto a tutte le altre possibili δu, per la (15-b). Perchè la $\delta u(x, y, z)$ sia l'effettiva configurazione d'instabilità, dovrà dunque essere, dal confronto della (15) con la (15-b):

(15-c) $$\frac{\delta V_{(\delta u)}}{\delta L^{(2)}_{1(\delta u)}} = \frac{V_{(\delta u)}}{L^{(2)}_{1(\delta u)}}$$

ossia:

$$\delta V - K_{cr} \delta L^{(2)}_1 = 0$$

(è superfluo qui l'indice (δu) sotto il segno di variazione, poichè le δu sono le sole variabili che figurano nell'espressione).

Ma questo equivale alla condizione che l'effettiva $\delta u(x, y, z)$, tra tutte quelle possibili soddisfacenti ai vincoli, renda minimo il K_{cr}: ed infatti la (15-c) non è, in diversa forma, che il numeratore della variazione δK_{cr} dell'espressione (15) [5].

Analogamente a quanto si è visto per il minimo ω^2, al n.° 4 del Cap. I, per dimostrare che si tratti effettivamente di un minimo (in valore assoluto) per K_{cr}, si è ricondotti a dimostrare che l'energia potenziale $\mathcal{E}$ è effettivamente minima per l'effettiva configurazione δu attorno ad u_{cr}, rispetto a tutte le altre possibili δu, ossia che l'equazione variazionale (15-a) definisce un minimo [6].

Pure analogamente al caso degli ω^2, l'equazione variazionale (15-c), analoga alla (12), ammette una successione di infinite soluzioni $\delta u_1, \delta u_2, \dots$, a cui corrisponde una infinita successione di carichi critici $K_{cr1}, K_{cr2}, \dots$; anche in questo caso l'n-esima soluzione δu_n rende minimo il K_{crn} sotto la condizione di *ortogonalità* rispetto alle precedenti soluzioni $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_{n-1}$.

5. Poichè sia V che L sono quadratici nelle u, è nulla, dopo la seconda, ogni derivata successiva della $\mathcal{E}$ rispetto alle u stesse: pertanto lo sviluppo (16) rappresenta lo sviluppo completo della $\mathcal{E}$ anche se ad uno spostamento infinitesimo δu si sostituisce uno spostamento di ampiezza comunque finita $\bar{u} = u - u_{cr}$.

Nelle considerazioni svolte al n.° precedente può quindi sostituirsi legittimamente, alla variazione δu, uno spostamento finito $\bar{u} = u - u_{cr}$, in quanto, se una configurazione $u_{cr} + \delta u$ è d'equilibrio indifferente, lo è anche una configurazione $u_{cr} + \bar{u}$, comunque distante da u_{cr}, purchè la $\bar{u}(x, y, z)$ sia affine alla $\delta u(x, y, z)$, determinata dalla (15). In particolare la condizione (15-b) diventa: $\delta V_{(\bar{u})} - K\delta L^{(2)}_{1(\bar{u})} = 0$.

Ciò corrisponde ovviamente, p. es., nel caso dell'asta caricata di punta,

---

(5) Questa dimostrazione è dovuta al prof. Odone Belluzzi: *Sul criterio energetico per la determinazione dei carichi critici*, « R. Accademia delle Scienze », Bologna, 1942-43; e figurerà nel 2° volume, attualmente in preparazione, del libro: *Scienza delle costruzioni*, di cui è stato pubblicato recentemente il 1° volume (Prof. O. Belluzzi, *Scienza delle costruzioni*, vol. I, ed. Zanichelli, 1941, Bologna).

(6) A questo proposito si noti che mentre l'equazione $\delta_{(u)}\mathcal{E} = 0$ caratterizza una posizione d'equilibrio indifferente, la u_{cr}, l'equazione $\delta_{(\delta u)}\mathcal{E} = 0$ caratterizza una posizione d'equilibrio stabile, e cioè la δu effettiva configurazione d'equilibrio, rispetto a tutte le altre possibili δu.

a ritenere che, per il valore critico del carico, l'equilibrio si mantenga indifferente per ogni valore della freccia: errore che deriva notoriamente dal porre la curvatura della linea elastica uguale alla derivata seconda degli spostamenti, trascurando cioè termini d'ordine superiore al secondo.

Notiamo allora che $V_{(\bar{u})}$ e $KL^{(2)}_{1(\bar{u})}$ assumono il significato di aumento dell'energia elastica e, rispettivamente, lavoro compiuto dalle forze applicate, ma per i soli spostamenti di 2° ordine, corrispondentemente ad uno spostamento $\bar{u}$ rispetto alla configurazione d'equilibrio. Si deduce quindi dal teorema di DIRICHLET, attraverso le considerazioni precedenti, l'enunciato di BYRAN-TIMOSHENKO per la ricerca dei K_{cr} [7].

Alla proprietà per cui l'equilibrio indifferente si mantiene per uno spostamento $\bar{u}$ di ampiezza finita, ne corrisponde un'altra analoga nel campo dinamico, e cioè che le vibrazioni attorno ad una qualsiasi configurazione d'equilibrio restano armoniche, malgrado l'introduzione dei termini di 2° ordine.

Ed infatti, per l'esclusione delle $\varepsilon^{(2)}$ dall'espressione delle ε, il termine δV è lo stesso che nel caso della stabilità lineare, e si potrà scrivere ancora:

$$\delta V_{(u)} = \delta V_{(u-u_0)} + \delta V_{(u_0)}.$$

A sua volta, il $\delta L_{(u)}$ potrà esprimersi nella forma:

$$\delta L_{(u)} = \delta L^{(1)}_{(u)} + \delta L^{(2)}_{(u)}.$$

Limitatamente alla parte di 1° ordine, indipendente dalla configurazione u, sarà applicabile la (7), e cioè (v. n° 3, Cap. I): $\delta L^{(1)}_{(u)} = \delta L^{(1)}_{(u_0)}$. Per essere u_0 posizione d'equilibrio, e stante la proporzionalità del $\delta L^{(2)}_{(u)}$ alle u, si ha:

$$\delta V_{(u_0)} = \delta L^{(1)}_{(u)} + \delta L^{(2)}_{(u_0)}; \quad \delta L_{(u)} = \delta L^{(1)}_{(u)} + \delta L^{(2)}_{(u-u_0)} + \delta L^{(2)}_{(u_0)}$$

da cui, in definitiva:

$$\delta \mathcal{E}_{(u)} = \delta V_{(u)} - \delta L_{(u)} = \delta V_{(u-u_0)} - \delta L^{(2)}_{(u-u_0)}.$$

---

[7] Attraverso queste considerazioni si elimina un'apparente diversità tra il teorema di Dirichlet e l'enunciato di Byran-Timoshenko (detto anche « principio energetico »). Si deve però notare che, mentre il teorema di Dirichlet ha valore generale, l'enunciato Byran-Timoshenko vale soltanto ove si trascurino i termini oltre il 2° ordine (non vale quindi per il tubo cilindrico inflesso, volta Zeyss-Diwidagg e simili) e che il lavoro corrispondente allo spostamento $\bar{u}$ è, in ogni caso, il solo lavoro che compete alle $u^{(2)}$ di 2° ordine rispetto alle $\bar{u}$ stesse.

L'equazione di HAMILTON per questi moti si scriverà dunque nella forma:

$$\text{(1-c)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} [\delta T - \delta V_{(u-u_0)} + \delta L^{(2)}_{(u-u_0)}] dt = 0$$

che ovviamente definisce un moto armonico al pari della (1-b) poichè i termini δV e $\delta L^{(2)}$ sono entrambi lineari omogenei nelle $u - u_0$.

Valgono pertanto anche per questi moti le considerazioni svolte al n° 4 del Cap. I circa il minimo autovalore ω^2, ove si sostituisca alla $V_{(u-u_0)}$ l'espressione più completa, ma ancora quadratica omogenea nelle $u - u_0$:

$$V_{(u-u_0)} - L^{(2)}_{(u-u_0)}.$$

È pressochè superfluo rilevare che nella (1-c) figura soltanto il $\delta L^{(2)}$ e non il $\delta L^{(1)}$; pertanto influisce sul periodi di vibrazione solo il valore dei carichi che danno luogo a spostamenti di 2° ordine, mentre non ha alcuna influenza il valore dei carichi i cui punti d'applicazione subiscono soltanto spostamenti di 1° ordine.

All'armonicità dei moti si arriva, naturalmente, anche considerando il caso a) della fig. 2 (cfr. la nota ([2]) al n° 3).

III. La ricerca delle frequenze di vibrazione per un valore dei carichi tra zero ed il valore critico.

1. L'equazione di partenza per i moti che ora studiamo è dunque la (1-c), che qui riscriviamo introducendo il fattore K:

$$\text{(1-c)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} [\delta T - \delta V_{(u-u_0)} + K \delta L^{(2)}_{1(u-u_0)}] dt = 0$$

in cui i termini δV e $\delta L_1^{(2)}$ sono lineari omogenei nelle $u - u_0$.

Confrontando quest'equazione con la (1-b) valevole per i moti $u - u_0$ attorno alla configurazione naturale, ossia per $K = 0$, avremo che, mentre allora gli autovalori ω^2 erano dati dalla (11), come visto al n° 4 del Cap. I, nel caso attuale, cioè per $K \neq 0$, dovremo scrivere l'espressione più completa:

$$\text{(11-a)} \qquad \omega^2 = \frac{V^* - K L_1^{*(2)}}{T^*}$$

dove $L_1^{*(2)}$, mediante la solita posizione (8) di separazione delle variabili, non è che l'espressione del lavoro esterno compiuto dal sistema di forze unitario per i soli spostamenti di 2° ordine, dove alla $u - u_0$ si sostituiscano le v, funzioni solo delle x, y, z e non più del tempo t. Il valore di ω^2 dipende naturalmente dalla configurazione $v(x, y, z)$.

Osserviamo subito che le V^* ed $L_1^{*(2)}$ non sono che le V ed $L_1^{(2)}$ del n° 4 del cap. precedente, in quanto le v non sono che le $\bar{u}$ attorno ad u_0: e ciò perchè nelle considerazioni sull'instabilità non entrava in alcun modo la variabile tempo. Per questa stessa ragione d'ora in avanti useremo l'asterisco solo per T^*, omettendolo invece per V ed L_1, ed esprimeremo queste ultime indifferentemente nelle v o nelle $\bar{u}$.

Supponiamo ora di trovarci nelle condizioni critiche, considerando perciò la ω^2, conforme alla (11-a), in cui sia $K = K_{cr}$. Stante la proprietà di minimo degli autovalori ω^2, è facile rendersi conto che la configurazione di vibrazione per $K = K_{cr}$ non può che coincidere con l'effettiva configurazione d'instabilità $\bar{u}(x, y, z)$, in quanto questa rende nulla, per la (15) e, ad un tempo, minima rispetto a tutte le altre possibili v, per la (15-b), la $V - KL_1^{(2)}$, e quindi la ω^2. Ciò si è visto al n° 4 del cap. precedente, stante l'identità, per i sistemi elastici da noi considerati, tra la $\delta_2\mathcal{E}$ e la $V - KL_1^{(2)}$.

Si ha quindi che al primo carico critico, K_{cr1}, si annulla la frequenza fondamentale; al secondo carico critico, K_{cr2}, si annulla la 2ª frequenza, ecc.: all'n-esimo carico critico si annulla l'n-esima frequenza, essendo già nulle le frequenze da 1 a $n - 1$, e potendo sussistere soltanto le frequenze da $n + 1$ in avanti. Si può dare in questo senso una definizione più comprensiva dei carichi critici superiori, e cioè come quelle condizioni di carico che annullano la frequenza di vibrazione di un dato ordine.

Si ha inoltre che se le configurazioni d'instabilità $\bar{u}$ si considerano come non altro che le configurazioni che annullano la corrispondente frequenza, la proprietà delle $\bar{u}$ di rendere minimo il K_{cr} rientra nella proprietà generale di cui gode un'effettiva configurazione v di vibrazione (autofunzione), e cioè di rendere minimo il corrispondente ω^2. Sotto questo aspetto la dimostrazione per il minimo K_{cr} al n° 4 del Cap. II può dedursi direttamente dalla dimostrazione per il minimo ω^2, al n.° 4 del Cap. I, ove si ponga, naturalmente, $V - L_1^{(2)}$ al posto della sola V.

2. Se la configurazione di vibrazione $v(x, y, z)$ si mantenesse la stessa per ogni condizione di carico K, i termini V, $L_1^{(2)}$ e T^* conserverebbero lo stesso valore per ogni K, e quindi si avrebbe, per un K generico, come si deduce immediatamente dalla (11-a) del n.° precedente:

$$\omega_n^2 = \omega_{0n}^2 \left(1 - \frac{K}{K_{crn}}\right) \tag{16}$$

dove ω_0 è l'autovalore che compete alla configurazione naturale, cioè $K = 0$.

Ora si noti che le configurazioni di vibrazione v_0 attorno alla configurazione naturale sono definite, come già visto al n.° 4 del cap. I, dall'equazione variazionale (12), che qui riscriviamo nella forma:

$$\frac{\delta V}{\delta T^*} = \frac{V}{T^*} \tag{12}$$

mentre le v_k attorno ad una qualsiasi altra configurazione d'equilibrio, corrispondente ad un dato K, saranno definite da una equazione analoga:

$$\frac{\delta V - K\delta L_1^{(2)}}{\delta T^*} = \frac{V - KL_1^{(2)}}{T^*}. \tag{12-a}$$

Perchè le due equazioni siano formalmente identiche, basta che entrambi i membri siano variati nello stesso rapporto, e cioè che sia:

$$\frac{\delta L_1^{(2)}}{\delta V} = \frac{L_1^{(2)}}{V}. \tag{15-c}$$

Ma questa non è che l'equazione variazionale, già vista al n.° 4 del cap. I, che definisce la configurazione d'instabilità $\bar{u}$ attorno alla posizione u_{cr}. Abbiamo perciò che, se la configurazione v_0 attorno alla configurazione naturale coincide con la configurazione d'instabilità $\bar{u}$ attorno ad u_{cr}, sono pure uguali tutte le configurazioni di vibrazione v_k per valori di K intermedi.

Una stessa configurazione deve perciò soddisfare sia alla (12) che alla (15-c), e cioè rendere minimo sia il $K_{cr} = \frac{V}{L_1^{(2)}}$ che la $\omega^2 = \frac{V}{T^*}$. Ciò potrà verificarsi soltanto se T^* e $L_1^{(2)}$, e quindi anche δT^* e $\delta L_1^{(2)}$, hanno un'espressione formalmente identica, salvo tutt'al più una costante da portarsi fuori del segno d'integrale.

Limitiamoci a considerare il caso dell'asta, di lunghezza l, orientata secondo x e soggetta ad oscillazioni secondo y; non si tenga conto, al solito, delle deformazioni dovute al taglio (la semplificazione è tanto più lecita quanto più l'asta è sottile), ammettendo quindi la sezione piana.

Si ha (per v si sottintende v_y):

$$T^* = \frac{1}{2}\int_0^l mv^2 dx\,; \qquad \delta T^* = \int_0^l mv\delta v dx \tag{17}$$

e, per il lavoro $L_1^{(2)}$:

$$L_1^{(2)} = \frac{1}{2}\,\Sigma\, P_1 \int_0^{\bar{x}} v'^2 dx$$

dove $v' = \frac{dv}{dx}$; $\bar{x}$ è l'ordinata di ogni carico assiale P_1 (l'indice 1 significa, al solito, che ci si riferisce al sistema unitario $\mathfrak{F}_1$); m la massa per unità di lunghezza.

Introducendo lo sforzo normale N funzione di x:

$$L_1^{(2)} = \frac{1}{2}\int_0^l N_1 v'^2 dx; \qquad \delta L_1^{(2)} = \int_0^l N_1 v' \delta v' dx. \tag{18}$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{cases} L_1^{(2)} = \frac{1}{2}[N_1 v v']_0^l - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{d}{dx}(N_1 v') v dx, \\ \delta L_1^{(2)} = [N_1 v' \delta v]_0^l - \int_0^l \frac{d}{dx}(N_1 v') \delta v dx, \end{cases} \tag{18-a}$$

dove i primi termini rappresentano condizioni ai limiti per $x = 0$ e $x = l$.

Fermiamo ora l'attenzione sulle espressioni di T^* e di $L_1^{(2)}$: perchè siano formalmente identiche occorre in primo luogo che siano nulli i termini ai limiti, il che si verifica soltanto per estremi appoggiati ($v = 0$) o incastrati ($v' = 0$), ma non per estremi liberi in cui si ha sempre $v \neq 0$ e $v' \neq 0$; resta quindi fin d'ora escluso il caso della trave a mensola.

Inoltre i termini m nella (17) e N_1 nella (18-a) debbono potersi portare fuori del segno d'integrale, e cioè debbono essere costanti lungo l'asta la massa m per unità di lunghezza e lo sforzo normale N (ossia i carichi di punta debbono essere interamente applicati agli estremi dell'asta, non in punti intermedi). A queste condizioni risulta:

$$T^* = \frac{1}{2} m \int_0^l v^2 dx; \qquad L_1^{(2)} = \frac{1}{2} N_1 \int_0^l v v'' dx.$$

L'identità formale delle due espressioni è quindi ricondotta all'ulteriore condizione che sia, pure a meno di costanti, $v = v''$, e cioè:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \pm \gamma^2 v \tag{19}$$

dove γ è una costante opportuna.

Per quanto si è detto sopra, basta verificare la (19) per la configurazione di vibrazione attorno alla configurazione naturale. L'equazione di questa configurazione è la solita:

$$\delta V - \omega^2 \delta T^* = 0 \tag{12}$$

essendo: (J momento d'inerzia dell'asta)

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l EJv''^2 dx\,; \qquad \delta V = \int_0^l EJv''\delta v'' dx.$$

Si osserva subito che, per giungere ad un'equazione come la (19), cioè lineare a coefficienti costanti, nell'espressione di δV non deve figurare alcun termine espresso in termini delle variabili x; perciò anche la rigidità EJ, come già si è visto per la massa m e per lo sforzo normale N, non può che essere costante lungo l'asta.

Le soluzioni della (19) possono soltanto essere:

$$\left\{\begin{array}{l} v_0 = a \operatorname{sen} \gamma x + b \cos \gamma x\,; \\ \text{oppure} \\ v_0 = a \operatorname{senh} \gamma x + b \cosh \gamma x. \end{array}\right. \tag{20}$$

Una soluzione contenente i soli seno e coseno iperbolici non può mai soddisfare alle condizioni degli estremi $v = 0$ per $x = 0$ e $x = l$; o se potesse essere, per es. $v \neq 0$ per $x = l$ (trave a mensola) non potrebbe essere contemporaneamente $v = 0$ e $v' = 0$ per $x = 0$. A sua volta un'espressione v contenente i soli seno e coseno circolari, se deve essere in un estremo $v = 0$, esige anche che sia, in quello stesso estremo, $v' \neq 0$ e $v'' \doteq 0$.

Soltanto l'asta liberamente appoggiata od incernierata agli estremi soddisfa a queste condizioni ([8]); pertanto solo nel caso di un'asta liberamente

---

([8]) Ed infatti, partendo dall'equazione dell'asta omogenea:

$$\frac{d^4v}{dx^4} - \gamma^4 v = 0\,; \qquad \left(\gamma^4 = \frac{\omega^2 m}{EJ}\right) \tag{a}$$

si ha la soluzione generale:

$$v = a \operatorname{sen} \gamma x + b \cos \gamma x + c \operatorname{senh} \gamma x + d \cosh \gamma x.$$

Per l'asta appoggiata dev'essere $v = v'' = 0$ per $x = 0$ e $x = l$; quindi dev'essere $b = c = d = 0$; $v = a \operatorname{sen} \gamma x$, essendo $\gamma = \frac{n\pi}{l}$; da cui gli autovalori

$$\omega^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{m}.$$

Ove s'introduca nella (12) un termine $\delta L^{(2)}$, e quindi un termine $\frac{N}{EJ}\frac{d^2v}{dx^2}$ nella (a), è facile vedere che la soluzione è ancora $v = a \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x$ purchè sia:

$$\gamma^4 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 - \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \frac{N}{EJ},$$

appoggiata, omogenea (e cioè avente rigidità EJ costante e massa uniformemente distribuita), uno sforzo assiale costante non modifica le configurazioni di vibrazione, cosicchè tutte le frequenze, per un dato valore K della forza assiale, variano secondo la (16) e cioè (⁹):

$$\omega_n = \omega_{0n}\sqrt{1-\frac{K}{K_{crn}}}. \tag{16}$$

Per qualsiasi altra condizione di vincolo, la (16) non è più esatta, poichè uno sforzo normale N, sia pure costante lungo l'asta, modifica le autofunzioni $v(x)$; ed infatti è noto che nelle espressioni delle autofunzioni v_0 attorno alla configurazione naturale figurano sempre (salvochè nel caso dell'asta appoggiata) sia le funzioni circolari che le funzioni iperboliche, mentre queste ultime non figurano mai nelle espressioni delle configurazioni $\bar{u}$ d'instabilità.

A maggior ragione non vale la (16) se lo sforzo normale N non è costante lungo l'asta, oppure se l'asta stessa non è omogenea rispetto ai termini m ed EJ.

3. Se è vero che la relazione (16) tra le frequenze di vibrazione è esatta soltanto per l'asta appoggiata omogenea soggetta a sforzo normale costante, è pure vero che, per quasi tutti gli altri casi che interessano la tecnica, la (16) risulta — almeno per la frequenza fondamentale — talmente approssimata da poter essere usata con piena tranquillità.

Si consideri infatti un qualsiasi sistema elastico soggetto ad un determinato sistema di forze $\mathfrak{F}$, nel senso indicato ai nn. 1 e 2 del Cap. I, e supponiamo di far variare i valori delle forze fino ad una condizione di carico tale per cui si manifesti un'instabilità: si faccia cioè variare K da zero al valore K_{cr}, mentre restano invece invariate la forma del sistema e la distribuzione delle masse.

Tracciamo allora un diagramma (v. fig. 3) avente i valori di K in ascisse e i quadrati delle frequenze, ω^2, in ordinate: cerchiamo di determinare la curva delle frequenze $\omega^2 = f(K)$ nel campo di valori da zero a K_{cr}.

---

il che equivale a porre, per la (a):

$$\omega^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{m}\left(1-\frac{N}{N_{cr}}\right) \quad \text{dove} \quad N_{cr} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 EJ.$$

Per un'esauriente trattazione dei regimi di vibrazione dell'asta nelle varie condizioni di vincolo si veda: Krall, *Meccanica Tecnica delle Vibrazioni*, cap. XIII, (§ 1), pag. 279 e segg. del 2° volume.

(⁹) La proprietà vale anche per un'asta omogenea appoggiata, continua su campate di ugual luce, ma per le sole vibrazioni *antisimmetriche* rispetto ad un appoggio (v. Krall, op. cit., cap. XIII, § 3, pagg. 307 e segg. del 2° volume).

Prefissata una qualsiasi configurazione v', soddisfacente i vincoli, calcoliamo gli ω^2 mediante la relazione:

$$\omega^2 = \frac{V - KL_1^{(2)}}{T^*} \tag{11-b}$$

valutando V, $L_1^{(2)}$ e T^* in base alla configurazione v' per ogni valore di K: non sono questi i veri ω^2, ma degli ω'^2 fittizi, come cioè se il sistema fosse

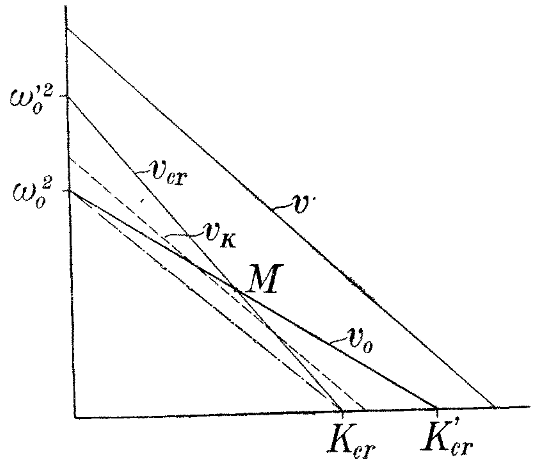

Fig. 3

costretto, da vincoli esterni, a vibrare secondo la configurazione v' anzichè secondo le vere configurazioni di vibrazione libera definite dalle equazioni variazionali (12) e (12-b). D'ora in avanti le v' ed ω' con l'apice staranno ad indicare delle frequenze o configurazioni fittizie, mentre le v o ω con un indice, per es. v_k, sono le vere configurazioni o frequenze.

Per questi ω'^2 fittizi la linea delle frequenze in funzione di K è dunque una retta, corrispondente ad un'equazione del tipo (16), retta che indichiamo semplicemente come retta v' (v. fig. 3).

Tra tutte le possibili v consideriamo quelle configurazioni che sono effettivamente configurazioni di vibrazione, cioè autofunzioni definite dalla (12-b), e che indichiamo con v_k, in corrispondenza di un certo valore di K, tra zero e K_{cr}. La curva $\omega^2 = f(K)$ cercata non è che l'inviluppo delle rette v_k.

Tra le rette v_k, consideriamo ora in primo luogo la retta v_0, corrispondente cioè all'autofunzione attorno alla configurazione naturale. Questa retta segnerà sull'asse delle ordinate il vero ω_0^2, ma segnerà sull'asse delle ascisse un K'_{cr} fittizio, maggiore del vero K_{cr}, per quanto visto al n° 4 del Cap. II. Analogamente la retta v_{cr}, corrispondente cioè all'autofunzione attorno alla configurazione critica, ossia alla configurazione d'instabilità che finora abbiamo indicato con $\bar{u}$, segnerà sull'asse delle ascisse il K_{cr} vero, ma segnerà sull'asse delle ordinate un ω'^2_0 fittizio, maggiore del vero ω^2_0. Perciò le due rette v_0 e v_{cr} dovranno incontrarsi in un punto M (v. fig. 3).

La curva cercata $\omega^2 = f(K)$ è certamente inferiore alla bilatera $\omega^2_0 M K_{cr}$, poichè questa, salvochè per $K = 0$ e $K = K_{cr}$, segna, per valori intermedi di K, dei valori ω'^2 fittizi, quindi maggiori dei veri ω^2.

D'altra parte una retta qualsiasi v_k, mentre segnerà, per un certo K intermedio, un valore ω^2 vero, quindi inferiore alla bilatera, dovrà segnare, per $K = 0$, un altro valore fittizio, quindi superiore al vero ω^2_0; e così pure per $K = K_{cr}$ segnerà un ω'^2 fittizio, quindi maggiore di zero, e perciò segnerà pure, sull'asse delle ascisse, un K' fittizio maggiore del K_{cr} vero ([10]). Perciò una retta v_k non potrà che avere un andamento simile a quello della retta tratteggiata in fig. 3, tale cioè da incontrare l'asse delle ordinate in un punto intermedio al segmento $\omega'^2_0 - \omega^2_0$, e l'asse delle ascisse in un punto intermedio al segmento $K'_{cr} - K_{cr}$. Non potrà quindi una retta v_k essere inferiore alla retta che congiunge il vero ω^2_0 col vero K_{cr} (segnata, nella fig. 3, a tratto e punto) e cioè alla retta che ha effettivamente per equazione la (16); retta che, è bene notarlo, non corrisponde ad alcuna configurazione v possibile.

Dunque la curva $\omega^2 = f(K)$ è certamente compresa nel triangolo $\omega^2_0 M K_{cr}$: il valore di ω^2 dato dalla (16) è pertanto approssimato in difetto per K intermedio tra zero e K_{cr}.

4. È chiaro che l'errore che si commette usando la (16) è tanto più piccolo quanto più sono piccole le differenze:

$$\Delta\omega^2_0 = \omega'^2_0 - \omega^2_0; \quad \Delta K_{cr} = K'_{cr} - K_{cr}$$

differenze che, nei casi particolari, non sono mai superiori al 10 °/₀ (almeno per la frequenza fondamentale). L'errore massimo sarà certamente minore del segmento verticale e (v. fig. 4) calato dal punto M fino ad incontrare la retta $\omega^2_0 K_{cr}$, cioè la (16). Riferendo questo errore al valore ω^2_0 si dimostra, con considerazioni elementari, che l'errore percentuale è certamente minore di: (nella fig. 4 si è posto $q = \omega^2_0$, $b = \Delta\omega^2$, $p = K_{cr}$, $a = \Delta K_{cr}$)

$$\frac{\Delta\omega^2}{\omega^2_0}\left(1 - \frac{\dfrac{\Delta\omega^2_0}{\omega^2_0}}{\dfrac{\Delta\omega^2_0}{\omega^2_0} + \dfrac{\Delta K_{cr}}{K_{cr}}}\right). \tag{21}$$

([10]) Si noti, in questo passaggio, la coincidenza delle proprietà di minimo degli ω^2 e dei K_{cr}.

È naturale che gli errori più notevoli potranno aversi, per quanto visto al n.° 2 di questo capitolo, quando le forze assiali non siano costanti lungo

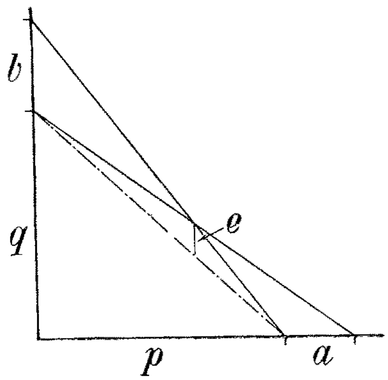

Fig. 4

l'asta, oppure il sistema non sia omogeneo per quanto riguarda la distribuzione delle masse o le caratteristiche elastiche.

Trattiamo perciò subito l'esempio di fig. 5, cioè dell'asta incernierata o appoggiata con carico di punta in mezzeria: si nota che, in questo caso, lo sforzo assiale rende asimmetriche le configurazioni di vibrazione.

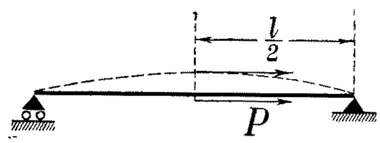

Fig. 5

Consideriamo la frequenza fondamentale: per l'autofunzione v_0 attorno alla configurazione naturale si ha:

$$v_0 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x ; \qquad \omega_0^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{m}$$

per questa v_0 si ha un valore fittizio del carico critico P_{cr}:

$$P'_{cr} = \frac{V}{L_1^{(2)}} = \frac{EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \int_0^l \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x\right)^2 dx}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{l} x\right)^2 dx} = 2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EJ.$$

Determiniamo ora la configurazione v_{cr} ponendo, secondo il metodo di RITZ:

(22) $$v_{cr} = a \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x + b \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} x.$$

Il minimo valore di P_{cr} si trova per $\frac{b}{a} = 0{,}066$; possiamo supporre che a questa configurazione corrisponda il P_{cr} vero, che risulta:

$$P_{cr} = 1{,}896 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EJ.$$

A questa stessa configurazione v_{cr} corrisponde, per la frequenza relativa alla configurazione naturale, un valore fittizio:

$$\omega'^2_0 = \frac{V}{T^*} = 1{,}017 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{m}.$$

Si ha dunque:

$$\frac{\Delta\omega_0^2}{\omega_0^2} = 1{,}7\,\%; \quad \frac{\Delta K_{cr}}{K_{cr}} = 5{,}2\,\%.$$

L'errore percentuale massimo è quindi, per la (21), minore di:

$$1{,}7 \left(1 - \frac{1{,}7}{1{,}7 + 5{,}2}\right) = 1{,}3\,\%$$

riducibile a circa la metà, cioè $0{,}65\,\%$, qualora si riferisca alla frequenza ω_0 anzichè al suo quadrato ω_0^2.

Facciamo ora il caso della prima armonica. In base all'autofunzione attorno alla configurazione naturale:

$$v_0 = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} x$$

si ha:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{m}; \quad K'_{cr} = 2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 EJ.$$

Per la determinazione del vero K_{cr} si scelga una configurazione ortogonale (v. n° 4, Cap. I) alla precedente (21), e cioè:

$$v_{cr} = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} x + b \operatorname{sen} \frac{3\pi}{l} x.$$

Per $\frac{b}{a} = 0{,}263$ si ha il valore minimo:

$$P_{cr} = 0{,}76\, P'_{cr} = 1{,}52 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 EJ$$

nonchè il valore fittizio:

$$\omega'^2 = 1{,}26 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{m}.$$

L'errore massimo è dunque minore di:

$$26\left(1 - \frac{24}{26+24}\right) = 13\ \%$$

riducibile a circa il 6,5 % qualora si riferisca alla frequenza anzichè al suo quadrato: errore 10 volte maggiore che nel caso della frequenza fondamentale. Per le verifiche di stabilità nei casi della tecnica quest'errore può essere ancora accettabile, trattandosi di un'armonica e, supratutto, di errore in difetto.

Occorre ora aggiungere che nell'esempio considerato il carico P agente sull'asta non è prodotto da una massa, od almeno è prodotto da una massa che non partecipa alle oscillazioni dell'asta. Se invece, come in molti casi dei problemi pratici, la forza P fosse prodotta da una massa partecipante integralmente alle oscillazioni dell'asta, occorrerebbe tener conto di questa massa nell'espressione della frequenza ω_0 in configurazione naturale.

È facile chiarire la questione con un esempio. Si consideri ancora un'asta incernierata, gravata da una massa M in mezzeria. Trascurando, per semplicità, la massa dell'asta in confronto della massa M, la frequenza in configurazione naturale, prescindendo dal peso Mg (e cioè per l'asta disposta orizzontalmente, nulla essendo così la forza di punta) è notoriamente:

$$\omega_0^2 = \frac{48EJ}{Ml^3}.$$

Se ora disponiamo l'asta verticalmente, agisce in mezzeria il carico di punta Mg. Dunque la frequenza dell'asta verticale si esprimerà con:

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{K}{K_{cr}}\right).$$

Ma il carico critico, per quanto già visto, è dato da:

$$(Mg)_{cr} = 1{,}896\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EJ = 18{,}7\ \frac{EJ}{l^2}.$$

Pertanto la frequenza è, salvo la nota approssimazione:

$$\omega^2 = \frac{48EJ}{Ml^3}\left(1 - \frac{Mgl^2}{18{,}7EJ}\right) = \frac{48EJ}{Ml^3} - \frac{48}{18{,}7}\,\frac{g}{l}.$$

Ovviamente, il non trascurare la massa ed il peso propri dell'asta porterebbe soltanto a maggiori difficoltà nella determinazione di ω_0 e K_{cr}.

5. Un altro sistema in cui può prevedersi un notevole scostamento dalla (16) è la trave a mensola caricata di punta (fig. 6): ciò in quanto la configurazione v_0 attorno alla configurazione naturale e la configurazione d'instabilità $\bar{u}$ ovvero v_{cr} non soddisfano alle stesse condizioni per quanto

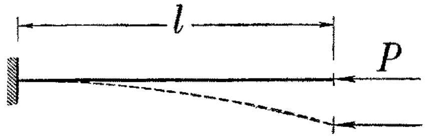

Fig. 6

riguarda l'estremo libero (si veda quanto già osservato a questo proposito al n° 2 di questo capitolo). Infatti mentre per la prima è $v'' = v''' = 0$, per la seconda è $v'' = 0$ ma $v''' \neq 0$.

Ciò posto, si tenga presente che la frequenza fondamentale in configurazione naturale è data da:

$$\omega_0^2 = \frac{12{,}5}{l^4} \frac{EJ}{m}$$

e la relativa configurazione di vibrazione:

$$v_0 = \operatorname{sen} 1{,}875 \frac{x}{l} - \operatorname{senh} 1{,}875 \frac{x}{l} -$$

$$- 1{,}365\left(\cos 1{,}875 \frac{x}{l} - \cosh 1{,}875 \frac{x}{l}\right).$$

Il carico critico vero è dato da:

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 EJ = 2{,}47 EJ$$

e la configurazione d'instabilità:

$$v_{cr} = 1 - \cos \frac{\pi}{2l} x.$$

La frequenza fittizia corrispondente alla v_{cr}:

$$\omega_0'^2 = \frac{13{,}2}{l^4} \frac{EJ}{m}$$

mentre il carico critico fittizio corrispondente alla v_0 è

$$K'_{cr} = \frac{2{,}61}{l^2} EJ.$$

Si ha quindi:

$$\frac{\Delta \omega_0^2}{\omega_0^2} = 5{,}6\,\%; \quad \frac{\Delta K_{cr}}{K_{cr}} = 5{,}7\,\%$$

per cui l'errore massimo è minore di:

$$5{,}6\left(1-\frac{5{,}6}{5{,}6+5{,}7}\right)=2{,}8\,\% \quad (1{,}4\,\% \text{ riferito a } \omega_0).$$

Vediamo ora il caso della stessa trave a mensola, ma con carico di punta a metà lunghezza (fig. 7). In questo caso lo sforzo normale non è costante

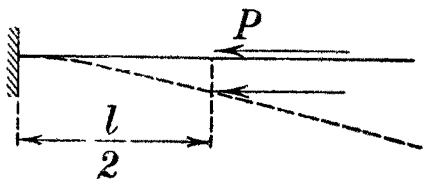

Fig. 7

lungo l'asta, ma le configurazioni v_0 e v_{cr} soddisfanno entrambe alla condizione $v'''=0$ per l'estremo libero.

La frequenza ω_0 e la configurazione v_0 sono ovviamente le stesse che nel caso precedente, mentre il carico critico è ora dato da:

$$K_{cr}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EJ=\frac{9{,}87}{l^2}EJ$$

e la configurazione d'instabilità:

$$v_{cr}=1-\cos\frac{\pi}{l}x, \quad \text{per} \quad 0<x<\frac{l}{2}$$

$$v_{cr}=1+\frac{\pi}{l}(x-l), \quad \text{per} \quad \frac{l}{2}<x<l.$$

La frequenza fittizia corrispondente a questa v_{cr} risulta:

$$\omega'^2_0=\frac{13{,}45}{l^2}\frac{EJ}{m}$$

mentre il carico critico fittizio corrispondente alla v_0:

$$P'_{cr}=\frac{10{,}05}{l^2}EJ.$$

È dunque:

$$\frac{\Delta\omega_0^2}{\omega_0^2}=7{,}5\,\%; \quad \frac{\Delta K_{cr}}{K_{cr}}=1{,}8\,\%$$

e l'errore massimo è minore di:

$$7{,}5\left(1-\frac{7{,}5}{7{,}5+1{,}8}\right)=1{,}4\,\% \quad (0{,}7\,\% \text{ se riferito ad } \omega_0).$$

Si ha quindi un errore minore che nel caso dello sforzo assiale costante: ciò evidentemente per le condizioni all'estremo libero che qui sono soddisfatte sia dalla v_0 che dalla v_{cr}.

Negli esempi sopra riportati l'errore afferente alla (16) è sempre contenuto in limiti tollerabili, tanto più se si considera l'errore relativo alla frequenza ω_0 anzichè al suo quadrato. Dal punto di vista delle applicazioni pratiche, il fatto che si tratti di errore in difetto non preoccupa eccessivamente per i casi della tecnica, in cui si tratta, per lo più, di assicurarsi che la frequenza delle azioni sollecitanti non raggiunga mai la frequenza propria delle strutture.