Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica.

Memoria di FRANCESCO SEVERI (a Roma).

Sunto. - *La Memoria tratta del teorema concernente la completezza della serie caratteristica di un sistema continuo di curve sopra una superficie. Avvertito che il teorema non vale per tutti i sistemi continui, l'A. lo dimostra per le curve emiregolari. La Memoria si chiude con ampie riflessioni critiche sulle ragioni che hanno in passato indotto ad affermare l'assoluta validità del teorema.*

Dopo la mia Memoria del 1941 sulla teoria dei sistemi continui di curve d'una superficie [1], qualche critica di F. ENRIQUES accompagnata da un tentativo di semplificare la dimostrazione del teorema fondamentale [2], m'indusse a tornare sull'annosa e delicatissima questione, sia per rispondere alle critiche, come per provare l'insussistenza dell'accennata semplificazione [3].

M'accorsi però allora d'un fatto ben più grave: e cioè che la dimostrazione data da B. SEGRE [4] del teorema fondamentale sui sistemi regolari (ch'io avevo cercato in M di estendere ai sistemi sovrabbondanti), cadeva (come scrissi) in seguito « a inaspettati fenomeni infinitesimali, che si manifestan quando si ha da fare con rami o falde analitiche non lineari o tangenti, quali si presentano in un più profondo riesame della questione ».

Ne deducevo che la questione rimaneva al punto ove l'aveva lasciata un mio lavoro del 1921 [5] e cioè la sicura acquisizione del teorema fonda-

(1) F. SEVERI, *La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica* (« Memorie della R. Acc. d'Italia », vol. XII, 1941, pp. 337-430). Questa Memoria vien in seguito designata con M.

(2) F. ENRIQUES, *Sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (« Commentarii mathematici helvetici », vol 15, 1942, p. 226).

(3) F. SEVERI, *Intorno ai sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica* (« Commentarii mathematici helvetici », vol. 15, 1943, p. 238).

(4) B. SEGRE, *Un teorema fondamentale della geometria sulle superficie algebriche ed il principio di spezzamento* (« Annali di Matematica », 1938).

(5) F. SEVERI, *Sulla teoria degl'integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica* (Nota V) (« Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », 1° sem. 1921, p. 297).

mentale, concernente la completezza della serie caratteristica d'un sistema continuo completo di curve, soltanto nel caso della curva generica C, irriducibile, priva di punti multipli e *aritmeticamente effettiva*, di un sistema continuo completo $\{C\}$. Tra i sistemi di questo tipo rientrano in particolare i sistemi regolari.

Adducevo anche esempi di sistemi continui completi a serie caratteristica effettiva (di ordine ≥ 0) *incompleta*. Ma si trattava di sistemi ∞^0 (ridotti cioè ad una sola curva), onde si poteva sperare che qualche ipotesi lievemente restrittiva mettesse a posto tutto.

Continuando le mie riflessioni sull'argomento, che in più di quaranta anni ha richiamato tante volte la mia attenzione, mi convinsi che ulteriori eccezioni dovevan presentarsi anche per sistemi continui propriamente detti (e cioè almeno ∞^1) ed in tal senso mi espressi in una nota aggiunta alle bozze di stampa della mia comunicazione ai « Commentarii Helvetici » (ved. p. 248 della citata comunicazione). Richiamata l'attenzione del valente mio discepolo e assistente Prof. GUIDO ZAPPA sulla opportunità di cercare esempi significativi in proposito, gli manifestai l'opinione che essi potessero rintracciarsi anche sulle superficie rigate (irrazionali), che meglio si conoscono e si dominano. Così fu nel fatto. Il primo esempio trovato da ZAPPA è già pubblicato [1] e l'eccezione è relativa, com'io supponevo, ad una curva che è bensì irriducibile e priva di punti multipli, al pari della generica curva del sistema, ma è (entro questo) in un senso ben precisato, un elemento singolare.

Però la mia presunzione che a casi simili si dovessero limitare le eccezioni non fu confermata dalle indagini ulteriori di ZAPPA, il quale trovò sopra una rigata un fascio completo come sistema continuo ed il cui gruppo base sulla generica curva del sistema individua una serie lineare infinita; sicchè la serie caratteristica di questo sistema completo ∞^1 è incompleta sulla generica curva [2].

In seguito a ciò ho tentato di delimitare per via algebrico-geometrica il campo di validità del teorema e di acquisirlo intanto pei sistemi regolari, pei quali esso fu rigorosamente stabilito, come ho accennato nel mio lavoro del 1921, sul fondamento di un teorema d'esistenza dimostrato da POINCARÉ (1910-11), coll'uso degli integrali semplici di prima specie appartenenti alla superficie.

(1) G. ZAPPA, *Sull'esistenza di curve algebricamente non isolate a serie caratteristica non completa, sopra una rigata algebrica* (« Acta della Pontificia Academia Scientiarum », vol. VII, 1943, p. 1).

(2) Rinvio in proposito ad una breve prossima Nota di ZAPPA.

Ma alla sostituzione di questo elemento trascendente con un elemento algebrico-geometrico non son potuto per ora pervenire. Credo istruttivo d'indicare alcune delle difficoltà che mi hanno sbarrato la via: lo farò in ultimo.

Ho però potuto intanto conseguire un risultato positivo: la deduzione cioè del teorema per le curve *emiregolari* (a serie caratteristica effettiva) a partire dal teorema stesso pei sistemi regolari.

Chiamo *emiregolare* una curva C (per ora mi limito alle curve irriducibili, prive di punti multipli) sulla quale le curve canoniche (impure) K della superficie data F seghino una serie lineare completa; e ciò tanto se la C è speciale, come non speciale. Dato un sistema lineare $|C|$ regolare [1] a curva generica irriducibile, priva di punti multipli, ogni sua C irriducibile priva di punti multipli è emiregolare.

Una curva C è o no emiregolare in sè, indipendentemente cioè dalla conoscenza del sistema lineare completo $|C|$ da essa individuato, che potrebbe essere anche ∞^0; mentre la regolarità di C implica la regolarità di $|C|$, perchè fa entrare in giuoco l'intera serie caratteristica di $|C|$.

Per le curve emiregolari vale inoltre il teorema di unicità e di esistenza contenuto nella mia Memoria M: nel senso cioè che basta sapere che sopra una C emiregolare esistè la serie caratteristica effettiva (di ordine ≥ 0) per poter concludere che C appartiene ad uno e ad un solo sistema continuo completo $\{C\}$, la cui serie caratteristica su C è completa e che passa per C con una falda lineare.

L'estensione alle curve con nodi o comunque riducibili sarà ripresa in esame in altro lavoro, insieme ad una revisione delle proprietà che richiedono l'impiego del teorema fondamentale, il quale resta così oggi conosciuto soltanto nel caso delle curve emiregolari e delle curve aritmeticamente effettive (le curve regolari sono comuni alle due categorie).

Prime proprietà generali dei sistemi continui di curve del piano.

1. Innanzi di affrontare la questione della completezza della serie caratteristica d'un sistema continuo completo di curve algebriche sopra una

[1] Io son solito di chiamar *regolare* un sistema lineare $|C|$ di curve irriducibili, prive di punti multipli, sulla cui C generica le K seghino una serie completa e la cui serie caratteristica abbia la deficienza (massima) uguale all'irregolarità q di F; e ciò tanto se C è speciale, come se non lo è.

superficie algebrica, convien approfondire alcune semplici proprietà differenziali dei sistemi continui di curve d'un piano o d'una superficie.

Ci riferiremo ai sistemi analitici di curve algebriche, ma molte delle proprietà si trasportan facilmente ai sistemi analitici di curve analitiche.

2. Anzitutto qualche richiamo sui rami analitici in uno spazio lineare proiettivo (complesso) S_r (1). Son proprietà note, presentate in forma utile alle successive applicazioni, che richiedono coordinate omogenee. Sia

$$x_i = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + \dots \qquad (i = 0, 1, \dots, r), \tag{1}$$

ove $x_0, x_1, \dots, x_r$ son coordinate omogenee di punto in S_r, la rappresentazione parametrica d'un ramo analitico ξ, di origine $O(a_{00}, a_{10}, \dots, a_{r0})$. I secondi membri son serie di potenze di t aventi un comune cerchio di convergenza di centro $t = 0$ e di raggio non nullo. Il carattere algebroide del ramo nell'intorno di O (cioè la presenza in ξ soltanto d'un numero finito di punti multipli successivi ad O dei vari ordini) assicura l'esistenza di trasformazioni birazionali di S_r in un altro spazio proiettivo, mutanti ξ in un *ramo lineare*: ossia in un ramo tagliato in un sol punto da un iperpiano qualunque abbastanza prossimo all'origine O, ma non alla tangente in O; un ramo insomma avente in O un punto semplice.

E siccome un ramo lineare si parametrizza subito regolarmente (p. es. segandolo con un fascio generico d'iperpiani), in guisa che il parametro t sia funzione *uniforme* del punto del ramo, per un ramo qualunque si può sempre intendere che t sia un parametro regolare: anzi, se si vuole, una funzione razionale del punto variabile sul ramo.

I rami analitici costituiscon pertanto una sola classe rispetto alle trasformazioni birazionali o più generalmente pseudoconformi, biunivoche senza eccezione fra gl'intorni delle origini di due rami corrispondenti: son cioè, secondo il concetto da me altrove introdotto in generale, di ordine invariantivo 1.

Il fatto analogo non sussiste per le falde analitiche a due o più dimensioni (reali o complesse), di cui parleremo in seguito.

---

(1) Ved. per es. SEVERI e SCORZA, *Lezioni di Analisi* (Bologna, Zanichelli, 1942-XX), vol. II, parte I, pagg. 82-87 e più specialmente, per ciò che concerne i rami analitici nel campo complesso, SEVERI, *Trattato di geometria algebrica* (Bologna, Zanichelli, 1926), vol. I, parte I, pag. 78 e segg., pag. 309 e segg.. Ivi trovansi definiti anche i caratteri proiettivi di un ramo (ordine e ranghi).

3. Com'è noto, i caratteri proiettivi di un ramo ξ, del quale supponiamo d'ora innanzi che (1) costituisca una rappresentazione regolare, si ottengono considerando la molteplicità d'intersezione, via via crescente fino a che è possibile, di ξ, con un iperpiano:

$$\Sigma \lambda_i x_i = 0 \tag{2}$$

passante per l'origine, cioè avente le λ_i legate dall'equazione lineare

$$\Sigma \lambda_i a_{i0} = 0 ; \tag{3}$$

e si sa altresì, in base al teorema di continuità delle funzioni analitiche, che quella molteplicità d'intersezione eguaglia il numero delle intersezioni distinte del ramo con un iperpiano abbastanza prossimo al considerato.

Sostituendo in (2) gli sviluppi (1) si ha l'equazione analitica in t:

$$\Sigma \lambda_i a_{i0} + t \Sigma \lambda_i a_{i1} + t^2 \Sigma \lambda_i a_{i2} + \ldots = 0.$$

L'ordine α di ξ, molteplicità d'intersezione di ξ con un iperpiano generico per O, è espresso dall'esponente della prima potenza di t che ha il coefficiente non nullo, qualunque sieno le λ, sotto la condizione (3). Ciò equivale a dire che le equazioni:

$$\Sigma \lambda_i a_{i1} = 0, \ \Sigma \lambda_i a_{i2} = 0, \ldots, \ \Sigma \lambda_i a_{i,\alpha-1} = 0$$

son conseguenze della (3), sicchè i coefficienti di ciascuna di queste equazioni son proporzionali alle a_{i0} (o in particolare son tutti nulli).

Se ne trae intanto che:

La condizione necessaria e sufficiente, perchè un ramo rappresentato regolarmente da (1) *sia superlineare, è che i coefficienti* a_{i1} *della prima potenza di t sieno proporzionali ai termini* a_{i0} *indipendenti da t (in particolare sieno tutti nulli).*

OSSERVAZIONE 1ª. — Se qualcuna delle a_{i1} è non nulla la rappresentazione (1) è certo regolare, perchè, se per un dato i, a_{i1} è diverso da zero, la serie (1) è invertibile e se ne ricava t funzione analitica di x_i.

OSSERVAZIONE 2ª. — Se nell'origine del ramo è x_0 una delle x non nulle, posto $y_i = \frac{x_i}{x_0}$ si ottiene la rappresentazione parametrica del ramo in coordinate non omogenee. Trattasi sempre d'una rappresentazione regolare e in tal caso la condizione che il ramo sia superlineare è espressa dall'annullarsi in $t = 0$ di tutte le $\frac{dy_i}{dt}$.

4. La retta tangente al ramo ξ nell'origine O, definita al modo consueto come posizione limite d'una retta secante per O, congiunge i due punti distinti $O(a_{00}, a_{10}, \dots, a_{r0})$, $O_\alpha(a_{0\alpha}, a_{1\alpha}, \dots, a_{r\alpha})$ e un iperpiano (2) generico fra quelli passanti per la tangente, le cui λ_i verifican dunque soltanto le equazioni indipendenti

$$\Sigma \lambda_i a_{i0} = 0, \quad \Sigma \lambda_i a_{i\alpha} = 0, \tag{4}$$

ha con ξ in O molteplicità d'intersezione $\alpha + \alpha_1$, ove $\alpha_1 \geq 1$ è il primo rango di ξ. Questa molteplicità d'intersezione eguaglia l'esponente della prima potenza di t, successiva a t^α, che ha il coefficiente non nullo, qualunque sieno le λ, sotto le condizioni (4).

Ciò equivale a dire che le equazioni

$$\Sigma \lambda_i a_{i,\alpha+1} = 0, \dots, \Sigma \lambda_i a_{i,\alpha+\alpha_1-1} = 0$$

son conseguenza delle (4), sicchè i coefficienti di ciascuna di queste son combinazioni lineari dei corrispondenti coefficienti delle (4).

Il piano osculatore al ramo ξ in O, definito al modo consueto come posizione limite di un piano passante per la tangente e per un punto del ramo che tenda ad O, congiunge i tre punti indipendenti

$$O(a_{00}, a_{10}, \dots, a_{r0}), \quad O_\alpha(a_{0\alpha}, a_{1\alpha}, \dots, a_{r\alpha}), \quad O_{\alpha+\alpha_1}(a_{0,\alpha+\alpha_1}, \dots, a_{r,\alpha+\alpha_1}).$$

E così proseguendo, nei riguardi dei ranghi successivi $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ connessi agli $S_3, S_4, \dots$ osculatori a ξ in O, fino all'ultimo rango α_{r-1}. L'iperpiano osculatore al ramo in O ha con ξ molteplicità d'intersezione $\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_{r-1}$.

Siccome i punti successivi ad O sul ramo ξ, negli intorni infinitesimali dei vari ordini, hanno le coordinate:

$$a_{i0} + dx_i, \quad a_{i0} + dx_i + d^2x_i, \quad a_{i0} + dx_i + d^2x_i + d^3x_i, \dots$$

e i differenziali dx_i, d^2x_i, $d^3x_i, \dots$ son proporzionali ai coefficienti di $t, t^2, t^3, \dots$ nello sviluppo (1), le proprietà precedenti si posson esprimere, con linguaggio infinitesimale abbreviato, così:

Se $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ sono i caratteri proiettivi di un ramo, i punti degli ordini $1, 2, \dots, \alpha - 1$ infinitamente vicini all'origine O, coincidon con questa; i punti degli ordini $\alpha, \alpha + 1, \dots, \alpha + \alpha_1 - 1$ stanno sulla tangente; i punti degli ordini $\alpha + \alpha_1, \dots, \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 - 1$ sul piano osculatore; e così via.

Condizione necessaria e sufficiente perchè il ramo sia superlineare ($\alpha > 1$) è che il successivo ad O del primo ordine coincida con O (o sia indeterminato, se le a_{i1} son tutte nulle).

5. Passiamo a considerare un ramo analitico ξ di curve algebriche piane d'ordine m, concepite come punti dello spazio proiettivo $S_N \left(N = \dfrac{m(m+3)}{2}\right)$, in cui son coordinate omogenee di punto gli $N+1$ coefficienti X di un polinomio di ordine m in x, y.

I coefficienti X di una curva variabile in ξ son funzioni olomorfe $X(t)$ di un parametro t, che supponiamo regolare, per guisa che l'equazione della curva stessa presentasi sotto la forma:

$$f(x, y; t) = 0, \tag{5}$$

le curve del sistema essendo in corrispondenza biunivoca coi valori del parametro attorno a $t=0$, cui corrisponde la curva $f(x, y; 0)=0$, origine del ramo.

Segue immediatamente da quanto si è detto sui rami analitici in uno spazio proiettivo che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il ramo analitico (5), *di origine* $f(x, y; 0) = 0$, *entro lo* S_N *delle curve d'ordine* m, *sia superlineare, è che* $f_t'(x, y; 0)$ *differisca da* $f(x, y; 0)$ *per un fattore costante (eventualmente nullo).*

Invero, allora e soltanto allora i coefficienti $X'(0)$ di $f_t'(x, y; 0)$ cioè i coefficienti della prima potenza di t negli sviluppi in serie dei coefficienti $X(t)$, attorno a $t=0$, son proporzionali agli $X(0)$.

Osservazione 1ª. — Si avvertirà che *la proprietà è indipendente dalla scelta del parametro regolare* t, giacchè se da t si passa ad un altro parametro regolare τ, in guisa dunque che negl'intorni di $t=0$, $\tau=0$ ognuno dei due parametri è funzione olomorfa dell'altro, necessariamente a derivata non nulla, risulta $f_\tau'(x, y; t) = f_t'(x, y; t)\dfrac{dt}{d\tau}$, donde segue che i polinomii $f_\tau'(x, y; 0)$, $f_t'(x, y; 0)$ si annullano o no insieme su $f(x, y; 0)=0$.

Osservazione 2ª. — *Perchè il ramo* (5) *sia lineare occorre dunque e basta che il polinomio* $f_t'(x, y; 0)$ (1) *non sia divisibile per* $f(x, y; 0)$; *e ciò anche se i due polinomii non sono primi ossia se hanno qualche fattore comune d'ordine* > 0. Resta naturalmente escluso con questo che $f_t'(x, y; 0)$ sia identicamente nullo.

Si aggiunga che quando si sa che $f_t'(x, y; 0)$ non si annulla su $f(x, y; 0)$, *il parametro t riesce automaticamente regolare*, perchè qualcuna delle $X'(0)$ è certo diversa da zero (n. 2, Oss.).

6. Diciamo C_t una curva variabile nel ramo lineare o superlineare ξ. Il ramo ha su C_0 *un* determinato *gruppo caratteristico*, nell'accezione introdotta da Severi nel 1904: è il limite del gruppo (C_t, C_0) per $t \to 0$ (2).

---

(1) Che è sempre d'ordine m in coordinate omogenee di punto nel piano.

(2) Questo limite esiste sempre, perchè, come è già stato esplicitamente notato da Severi, *I fondamenti della geometria numerativa*, « Annali di Matematica », XIX (1940), pagg. 153-242,

È facile trovare questo gruppo. Sia

$$f(x, y; t) = f(x, y; 0) + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} f_t^{(\nu)}(x, y; 0),$$

lo sviluppo di $f(x, y; t)$ in serie di TAYLOR-CAUCHY attorno a $t=0$. Il ramo ξ sia d'ordine α, epperò le derivate $f_t'(x, y; 0), \ldots, f_t^{(\alpha-1)}(x, y; 0)$ (a norma del n. 3) differiscano ciascuna da $f(x, y; 0)$ per un fattore costante. Risulta allora:

$$(6) \qquad f(x, y; t) = f(x, y; 0)[1 + k_1 t + k_2 t^2 + \ldots + k_{\alpha-1} t^{\alpha-1}] + \sum_{\nu=\alpha}^{+\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} f_t^{(\nu)}(x, y; 0)$$

l'equazione di C_t. E poichè il gruppo (C_t, C_0) sta per ogni $t \neq 0$ sulla curva:

$$\frac{f(x, y; t) - f(x, y; 0)[1 + k_1 t + k_2 t^2 + \ldots + k_{\alpha-1} t^{\alpha-1}]}{t^\alpha} = 0,$$

la quale ha per limite la curva

$$f_t^{(\alpha)}(x, y; 0) = 0,$$

che non svanisce identicamente nè coincide con C_0, così *il gruppo* $(C_0, C_0) = \lim_{t \to 0} (C_t, C_0)$ *è comune alle curve*:

$$(7) \qquad f(x, y; 0) = 0, \qquad f_t^{(\alpha)}(x, y; 0) = 0$$

e coincide anzi col gruppo delle loro intersezioni, perchè le due curve sono (proiettivamente) d'ordine m.

Questo, nell'ipotesi che le (7) non abbiano una componente comune, il che, nel caso in esame, non può avvenire se non quando C_0 è riducibile. Lasciamo in disparte questa possibilità che non ha interesse pel seguito (1).

Nel caso in cui il ramo ξ è lineare il gruppo caratteristico di C_0, come curva di ξ, è segato su C_0 dalla $f_t'(x, y; 0) = 0$. Ricordando l'enunciato finale del n. 4, si conclude altresì che: *Le equazioni del fascio tangente, della rete*

---

un ente variabile in un ramo analitico tende ognora ad un limite determinato, quando il parametro che lo individua nel ramo tende al valore corrispondente all'origine. Ciò deriva essenzialmente dal fatto che una funzione analitica d'un parametro t, olomorfa o meromorfa attorno a $t=0$, possiede limite determinato, finito o infinito, per $t \to 0$. Se si tratta invece di una funzione analitica di due variabili t_1, t_2, meromorfa attorno a $t_1 = t_2 = 0$, essa può non tendere a limite per $(t_1, t_2) \to (0, 0)$, perchè il punto di cui trattasi può esser d'indeterminazione.

(1) Non è difficile determinare (C_0, C_0) anche quando C_0 è riducibile. Non può invero darsi che una parte di C_0 stia su $f_t^{(\nu)}(x, y; 0) = 0$ per qualunque ν, senza che quella parte giaccia su C_t per ogni t; il che possiamo escludere, facendo astrazione delle parti fisse di C_t. Si determina in conseguenza facilmente la parte di (C_0, C_0) che sta su ogni componente di C_0.

osculatrice, del sistema ∞^3 *osculatore,... ad un ramo* (5) *di curve algebriche sono*:

$$f(x, y; 0) + \lambda f_t^{(\alpha)}(x, y; 0) = 0, \quad f(x, y; 0) + \lambda f_t^{(\alpha)}(x, y; 0) + \mu f_t^{(\alpha+\alpha_1)}(x, y; 0) = 0,$$
$$f(x, y; 0) + \lambda f_t^{(\alpha)}(x, y; 0) + \mu f_t^{(\alpha+\alpha_1)}(x, y; 0) + \nu f_t^{(\alpha+\alpha_1+\alpha_2)}(x, y; 0) = 0, \ldots$$

ove α, α_1, α_2,... *son l'ordine e i ranghi successivi del ramo.*

7. Le proprietà del n. 5 sono state considerate nel campo proiettivo; ma è agevole ed essenziale pel seguito di rendersi conto del loro carattere invariante rispetto alle trasformazioni cremoniane piane, per le quali la curva C_0 origine del ramo ξ non sia nè tutta nè in parte (se è riducibile) fondamentale, e non contenga punti fondamentali diversi dagli eventuali punti base di ξ. Invero, allora la curva trasformata di C_0 è la curva *totale* origine del ramo trasformato di ξ e tra il sistema (5) e il sistema trasformato, considerati come rami nello S_N e nello $S_{N'}$, rappresentativi delle curve d'ordine m' trasformate di quelle d'ordine m, nasce una corrispondenza pseudoconforme, perchè subordinata da una corrispondenza algebrica, biunivoca senza eccezione. L'equazione della trasformata di (5) si ottiene mediante la sostituzione razionale invertibile:

$$x' = x'(x, y), \qquad x = x(x', y')$$
$$y' = y'(x, y), \qquad y = y(x', y'). \tag{8}$$

Risulta anzitutto:

$$f(x, y; t) = \frac{F(x', y'; t)}{\varphi(x', y'; t)}, \tag{9}$$

ove F è un polinomio d'ordine m' in x', y' e $\varphi(x', y'; 0)$ un polinomio non identicamente nullo, sicchè per $|t|$ abbastanza piccolo, anche $\varphi(x', y'; t')$ non è identicamente nullo. Ciò traduce l'ipotesi che C_0 non sia neanche in parte fondamentale. Il sistema trasformato di (5) mediante (8) è dunque:

$$F(x', y'; t) = 0 \tag{10}$$

e il parametro t è regolare anche rispetto a questo sistema. Calcolata $f_t'(x, y; t)$ mediante la (9) essa viene espressa su (10) da

$$\frac{F_t'(x', y'; t)}{\varphi(x', y'; t)};$$

e questa mostra che $F_t'(x', y'; 0)$ s'annulla sulla (10) allora e soltanto allora che $f_t'(x, y; 0)$ si annulla su C_0.

Ripetendo il calcolo per le derivate successive si giunge ad analoga conclusione qualunque sia l'ordine di derivazione. Sicchè:

L'ordine di un ramo analitico di curve algebriche piane è invariante di *fronte alle trasformazioni cremoniane per le quali la curva origine del ramo si muta nella curva totale origine del ramo trasformato.*

8. Un espressivo significato geometrico dell'ordine d'un ramo analitico di curve algebriche piane, ne mostra a priori il carattere invariante di fronte alle trasformazioni cremoniane. Proviamo invero che:

L'ordine α d'un ramo analitico di curve algebriche piane è uguale all'indice (in piccolo) del ramo.

Sia (5) il ramo di cui si tratta. Il suo fascio tangente nell'origine C_0 ha (n. 6) l'equazione:

$$f(x, y; 0) + \lambda f_t^{(\alpha)}(x, y; 0) = 0$$

e il gruppo base di questo fascio, supposta C_0 irriducibile, cade nel gruppo caratteristico (C_0, C_0), definito dal ramo ξ.

Perciò il sistema lineare ∞^{N-1} delle curve d'ordine m passanti per un punto O di C_0, non appartenente al gruppo (C_0, C_0), contiene l'origine C_0 del ramo, ma non il fascio tangente ed ha dunque col ramo nell'origine, entro lo spazio S_N, molteplicità d'intersezione α.

Ne deriva che il sistema lineare ∞^{N-1} delle curve d'ordine m passanti per un punto $\bar{O}$ vicinissimo ad O ha comune con ξ esattamente α curve distinte vicinissime a C_0, perchè trattasi di un iperpiano di S_N prossimo all'origine, ma non alla tangente al ramo. Insomma *per un punto vicinissimo a C_0, ma non al gruppo caratteristico del sistema ∞^1 di cui C_0 è origine, passano α curve di questo, che tendono a C_0 quando il punto va in C_0*: è l'*indice* (in piccolo) e insieme l'ordine del ramo.

Se la curva C_0 è riducibile, può darsi che $f_t^{(\alpha)}(x, y; 0)$ si annulli sopra una parte di C_0, ma non su tutta la curva, se no, a norma del n. 3, l'ordine del ramo sarebbe maggiore di α. Le parti di C_0 su cui $f_t^{(\alpha)}(x, y; 0)$ si annulla, si distaccan come componenti fisse dalle curve del fascio tangente. Vi è però almeno una parte non fissa pel fascio, sulla quale esiste dunque un numero finito di punti del gruppo caratteristico virtuale (C_0, C_0), appartenente ad $f_t^{(\alpha)}(x, y; 0) = 0$. Un punto O di una componente non fissa pel fascio tangente e diverso dai punti caratteristici sostituisce, a tutti gli effetti, il punto O, che abbiamo sopra considerato nel caso di una C_0 irriducibile; onde l'*indice* (in piccolo) *del ramo ξ, anche quando C_0 è riducibile, coincide coll'ordine del ramo, purchè, nel caso di una C_0 riducibile s'intenda di assumere il punto, con cui si determina l'indice del sistema, vicino ad una posizione non caratteristica sopra una componente di C_0, non fissa pel fascio tangente in C_0 al sistema.*

Il teorema dimostrato conduce senz' altro di nuovo alla conclusione finale del n. prec., perchè una trasformazione cremoniana che muti C_0 nella curva *totale* origine del ramo trasformato, conserva le proprietà infinitesimali del ramo ξ nell' intorno di un punto generico di ogni componente di C_0.

9. Passiamo a considerare i sistemi analitici più volte infiniti di curve algebriche piane.

Occorre all' uopo qualche osservazione preliminare sulle falde analitiche.

Una *falda analitica* ∞^d, avente l'*origine* in un punto dato O di uno spazio proiettivo complesso S_r, è, nella più generale accezione, una varietà analitica di dimensione d, contenente O, irriducibile in piccolo, attorno ad O. Essa è insomma un insieme di punti di S_r, che si proietta genericamente, da un S_{r-d-2} di S_r in un S_{d+1}, nella totalità degli zeri di una funzione olomorfa, irriducibile attorno al punto O' proiezione di O.

Se $d = 1$, l'insieme considerato non è altro che un ramo di curva analitica, già definito al n. 2 con una rappresentazione parametrica regolare. Diversamente procedon le cose per $d > 1$.

È ben noto che già per $d = 2$ una falda analitica superficiale non può sempre esser rappresentata parametricamente uguagliando le coordinate omogenee $x_0, x_1, \ldots, x_r$ de' suoi punti a funzioni olomorfe (funzionalmente indipendenti) di due parametri t_1, t_2. Perchè ciò sia possibile occorre che il cono (algebrico) tangente alla falda nell' origine sia razionale: il che, anche per una falda di superficie algebrica, si verifica in casi molto particolari [1].

Ma anche quando la falda ammette una rappresentazione parametrica, nel senso espresso, se questa rappresentazione non è regolare, se cioè un gruppo di valori dei parametri proviene da più di un punto della falda, non è detto che si possa sempre ottenere una rappresentazione regolare, come per $d = 1$. Già nel caso banale di un punto doppio conico O (necessariamente isolato) di una superficie algebrica di S_3, l'intorno di O sulla superficie costituisce una falda, che ammette una rappresentazione parametrica per funzioni olomorfe di t_1, t_2, ma non una rappresentazione regolare [2].

---

[1] Si ricordi però che (come risulta dalla risoluzione delle singolarità d'una superficie algebrica) l'intorno di un punto d'una tal superficie si può ottenere con un numero finito di rappresentazioni parametriche del tipo indicato: anzi così posson ottenersi addirittura tutti i punti della superficie.

[2] Cfr. per es. ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni* (Bologna, Zanichelli, 1918), vol. II, pagg. 649-653. Ved. anche il n.° successivo.

10. Pel nostro scopo basta considerare le falde ammettenti rappresentazioni parametriche regolari ([1]), tra cui rientran senz'altro tutte le falde lineari.

Sia dunque:

$$x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_d), \qquad (i = 0, 1, \dots, r), \tag{11}$$

la rappresentazione parametrica regolare d'una falda Σ, ∞^d, di origine $O(x_0^0, x_1^0, \dots, x_r^0)$ in S_r. L'origine corrisponda al punto $O'(t_1 = t_2 = \dots = t_d = 0)$ nello S_d rappresentativo dei parametri. Le x_i, è superfluo dirlo, son serie di potenze intere di $t_1, \dots, t_d$ convergenti in un comune campo a d dimensioni (complesse) attorno ad O'.

Contrariamente a quel che avviene per $d = 1$, quando $d > 1$ può benissimo accadere che la corrispondenza fra Σ e l'intorno di O' sia generalmente biunivoca, e che vi sieno eccezioni alla biunivocità, in relazione a punti di Σ e di S_d situati in varietà subordinate dei rispettivi ambienti ∞^d. Allorchè queste eccezioni si presentano diremo che la rappresentazione è *generalmente regolare,* mentre la diremo *assolutamente regolare* se la biunivocità della corrispondenza non ammette eccezioni.

Conviene a questo punto passare a coordinate non omogenee. Poichè non tutte le x_i si annullano in O', sia p. es. $x_0(0, 0, \dots, 0) \neq 0$ e quindi $x_0(t_1, \dots, t_d) \neq 0$ in tutto un intorno di O'. Assumeremo allora a coordinate non omogenee $y_i = \dfrac{x_i}{x_0}$, $(i = 1, \dots, r)$. Con ciò la rappresentazione parametrica di Σ resta regolare e le

$$y_i = y_i(t_1, \dots, t_d), \qquad (i = 1, \dots, r), \tag{12}$$

son ancora serie di potenze intere di $t_1, \dots, t_d$, convergenti in un intorno di O', le quali assumono in O' i valori $y_1^0, \dots, y_r^0$ delle coordinate non omogenee di O.

Ad un ramo ξ' di origine O' tracciato in S_d corrisponde un ramo ξ di origine O tracciato in Σ e, se il ramo ξ' è generico, la corrispondenza fra ξ, ξ' è biunivoca, anche se la (12) è generalmente regolare. Perciò un parametro τ regolare su ξ' è regolare su ξ e il ramo ξ è lineare soltanto se non si annullano in $\tau = 0$ (cui corrisponda su ξ' l'origine O') tutte le $\dfrac{dy_i}{d\tau}$ (n. 2, Oss. 2ª). Questo implica che in O' non si annullino tutte le $\dfrac{\partial y_i}{\partial t_j}$ e tutte le $\dfrac{dt_j}{d\tau}$, onde ξ' è lineare.

Viceversa, se in O' non si annullano tutte le $\dfrac{\partial y_i}{\partial t_j}$ è possibile costruire sopra Σ un ramo ξ di origine O, lineare, corrispondente ad un ramo lineare ξ'

[1] Cfr. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921), p. 309.

di S_d. Invero, con una sostituzione lineare e omogenea a modulo non nullo, sulle t, si può ottenere, senza venir meno a nessuna delle ipotesi, che sia diversa da zero in O' p. es. $\frac{\partial y_i}{\partial t_1}$ e che la retta $t_2 = t_3 = \ldots = t_d = 0$ non appartenga alla eventuale varietà dei punti di S_d che fanno eccezione alla biunivocità della corrispondenza. Ad un intorno ξ' di O' su quella retta risponde allora su Σ un ramo lineare ξ. Concludendo:

Affinchè sopra Σ esista qualche ramo lineare ξ di origine O trasformato di un ramo lineare ξ' di S_d e in corrispondenza biunivoca con questo, occorre e basta che in O' non si annullino tutte le $\frac{\partial y_i}{\partial t_j}$.

Si verifica poi agevolmente che:

Una falda Σ, di cui la (12) *costituisca una rappresentazione generalmente regolare colle $\frac{\partial y_i}{\partial t_j}$ non tutte nulle nell'origine, è segata da un iperpiano generico per l'origine secondo una sola falda* [1].

Sia

$$\Sigma \lambda_i (y_i - y_i^0) = 0 \tag{13}$$

un iperpiano per O. Il luogo dei punti di S_d imagini delle intersezioni di Σ con (13) costituisce, attorno ad O', un'ipersuperficie la cui equazione è data dalla (13) ove al posto delle y_i si pongano le (12).

Dico che, se (13) è generico, quest'ipersuperficie ha in O' una sola falda lineare Φ', in quanto passa per O' semplicemente. Infatti le derivate in O' del primo membro della (13) rispetto ai parametri t, uguagliate a zero, dànno un sistema di d equazioni lineari omogenee fra le λ, la cui matrice non svanisce identicamente, essendo non nullo in O' qualcuno de' suoi termini $\frac{\partial y_i}{\partial t_j}$.

D'altronde, attesa la genericità di (13), la sezione di (13) con Σ non può neppure coincidere con qualcuno di quei luoghi eccezionali (in numero finito) di dimensione $\leq d-1$, ove vien meno la biunivocità della corrispondenza fra Σ ed S_d. Si conclude che alla falda lineare Φ' risponde in Σ *una sola* falda sezione di Σ coll'iperpiano (13).

Le considerazioni di questo n.° non sono necessarie pel seguito. Ci siamo su esse fermati soltanto per sottolineare la delicatezza e molteplicità delle questioni concernenti le falde superlineari.

---

[1] Si ritrova così, in particolare, che la rappresentazione parametrica dell'intorno di un punto doppio conico d'una superficie non può esser regolare.

11. D'ora innanzi ci riferiremo ad una falda lineare Σ rappresentata dalle (11) o dalle (12).

Si può supporre che la rappresentazione sia *assolutamente regolare,* perchè ogni falda lineare, in quanto si proietta biunivocamente senza eccezioni sopra un S_d da un S_{r-d-1}, generico di S_r, ammette rappresentazioni assolutamente regolari.

Dimostriamo che:

Nella corrispondenza biunivoca senza eccezioni che la rappresentazione assolutamente regolare (11) *o* (12) *pone tra la falda lineare* Σ, ∞^d, *e l'intorno di un punto di* S_d *due rami corrispondenti hanno lo stesso ordine.*

Come si è visto nel n.° prec. l'equazione (13) rappresenta una falda lineare Φ' di origine O' dello S_d, semprechè le λ non soddisfacciano al sistema:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)_0 = 0 \qquad (j = 1, \dots, d), \tag{14}$$

ove $\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)_0$ denota il valore di $\frac{\partial y_i}{\partial t_j}$ in O'.

Gl'iperpiani i cui coefficienti λ verificano (14) son quelli passanti per lo S_d tangente a Σ in O $\left(\text{cosicchè la matrice } \left\| \left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)_0 \right\| \text{ risulta diversa da zero in conseguenza delle ipotesi}\right)$.

Ciò posto, siano ξ, ξ' due rami omologhi di Σ, S_d e α, α' denotino i loro ordini. Un iperpiano (13) non tangente a ξ non tocca Σ ed ha con ξ in O molteplicità d'intersezione α. Ad esso risponde in S_d una falda lineare Φ' non tangente a ξ', per la continuità della corrispondenza, sicchè Φ' ha con ξ' in O' molteplicità d'intersezione uguale al prodotto del suo ordine per l'ordine del ramo, cioè ad α'.

Spostando leggermente l'iperpiano (13) in guisa che non passi per O, l'ipersuperficie omologa Φ' non passa più per O' e l'iperpiano e Φ' segano ξ. ξ' in un egual numero di punti vicini ad O, O', a causa dell'assoluta biunivocità della corrispondenza. Onde $\alpha = \alpha'$.

In particolare *son omologhi i rami lineari di* Σ *e di* S_d.

12. Premesse queste generalità sulle falde ∞^d, consideriamo nel piano il sistema analitico Σ, ∞^d:

$$f(x, y; t_1, t_2, \dots, t_d) = 0 \tag{15}$$

di curve d'ordine m, costituente una falda lineare ∞^d nello spazio S_N delle curve d'ordine m. I coefficienti della curva variabile, coordinate omogenee di punto in S_N, son funzioni olomorfe di $t_1, \dots, t_d$ attorno ad $O'(t_1 = t_2 = \dots = t_d = 0)$, non tutte nulle in O'. Intenderemo che $t_1, \dots, t_d$ sieno parametri d'una rappresentazione assolutamente regolare di Σ. C'è insomma corrispondenza biunivoca continua senza eccezioni fra i gruppi di valori dei parametri e le curve C del sistema, attorno alla curva origine C_0 di equazione:

$$f(x, y; 0, 0, \dots, 0) = 0. \tag{16}$$

Dimostriamo che:

Se il sistema analitico Σ di curve (15) *d'ordine m costituisce, nello S_N delle curve d'ordine m, una falda lineare attorno alla curva origine* (16) *e i gruppi di valori $t_1, \dots, t_d$ dei parametri attorno a $t_1 = t_2 = \dots = t_d = 0$ son in corrispondenza biunivoca senza eccezioni colle curve di Σ, il sistema lineare*

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \left(\frac{\partial f}{\partial t_i}\right)_0 = 0 \tag{17}$$

ha la dimensione $d - 1$ e nessuna delle sue curve coincide colla (16).

Invero, supposto che per convenienti valori non tutti nulli delle λ la (17) sia identicamente soddisfatta sulla curva C_0, costruiscasi in S_d un ramo *lineare* ξ' di origine O', la cui tangente abbia i parametri direttori proporzionali a $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ e sia τ un parametro regolare in ξ'. A ξ' risponde in Σ un sistema analitico ξ, ∞^1, di origine C_0, a parametro regolare τ, pel quale

$$\left(\frac{df}{d\tau}\right)_0 = k \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \left(\frac{\partial f}{\partial t_i}\right)_0, \qquad (k \text{ costante } \neq 0),$$

e siccome $\left(\frac{df}{d\tau}\right)_0$ si annulla sopra C_0, il ramo ξ è superlineare (n. 5). Ma ciò contrasta (n. 11) coll'ipotesi che Σ sia una falda lineare.

Il teorema dimostrato può anche enunciarsi sotto la forma seguente:

Se la falda (15) *è lineare, le curve infinitamente vicine del 1° ordine all'origine C_0 son linearmente indipendenti e distinte da C_0.*

Ne discende senz'altro il carattere invariante della linearità della falda non soltanto di fronte alle trasformazioni proiettive, il che è ovvio, ma anche di fronte ad ogni trasformazione cremoniana del piano per la quale la curva origine della falda si muti nella curva origine *totale* della falda trasformata (cfr. anche col n. 7). Ritorneremo su questa proprietà nel successivo n. 14.

13. Conserviamo l'ipotesi che il sistema (15) sia una falda lineare attorno a C_0 e supponiamo inoltre che C_0 sia irriducibile. Dal n. 6 segue allora che il gruppo caratteristico di Σ sulla curva C_0, in quanto la curva C di Σ si muova descrivendo un ramo *lineare* ξ di origine C_0, su cui τ sia un parametro regolare, è il gruppo staccato su C_0 dalla curva $\left(\frac{df}{d\tau}\right)_0 = 0$, cioè da una curva ben determinata del sistema (17), per la quale i parametri λ assumon i valori $\lambda_i = \left(\frac{dt_i}{d\tau}\right)_0$, non tutti nulli, appunto per l'ipotesi della linearità di ξ. Cioè:

La serie caratteristica di Σ su C_0, in quanto si consideri come luogo dei limiti dei gruppi (C, C_0) allorchè C si muove in rami lineari di Σ, è staccata su C_0 dal sistema (17) ed ha la dimensione $d-1$.

Osservazione 1ª. — Se ci si muove invece con C verso C_0 sopra un ramo superlineare di origine C_0, poichè la C infinitamente vicina del 1° ordine a C_0 sul ramo, coincide con C_0, per trovare il gruppo caratteristico, che esiste ben determinato anche in tal caso, bisogna prender in considerazione derivate di ordine superiore. Precisamente: Se il ramo ξ di origine C_0 su cui ci si muove per avvicinarsi con C a C_0, è d'ordine α, designato ancora con τ un parametro regolare su ξ, il limite di (C, C_0) per $\tau \to 0$ è staccato su C_0 da $\left(\frac{d^\alpha f}{d\tau^\alpha}\right)_0 = 0$ (n. 6). Però il gruppo caratteristico così ottenuto risulta fra quelli ottenibili colla variabilità di C in rami lineari per ξ. Basta invero scegliere in Σ un ramo lineare ξ' tangente a ξ in C_0, cioè un ramo lineare tale che se τ' è parametro regolare in ξ' risulti $\left(\frac{df}{d\tau'}\right)_0 \equiv \left(\frac{d^\alpha f}{d\tau^\alpha}\right)_0$, perchè si ottenga, con C variabile su ξ', verso C_0, lo stesso gruppo caratteristico di quello ottenibile con C variabile sopra ξ.

Osservazione 2ª. — Si noti che *il sistema lineare tangente alla falda lineare* (15) *nell'origine C_0 è:*

$$f(x, y;\ 0, \dots, 0) + \Sigma\lambda_i \left(\frac{\partial f}{\partial t_i}\right)_0 = 0,$$

perchè esso contiene tutti i fasci tangenti ai rami lineari di origine C_6 appartenenti a Σ (nn. 6, 8).

14. Anche pei sistemi Σ a più dimensioni vale una proprietà che estende quella del n. 8 pei sistemi ∞^1 e dà più intima ragione dell'invarianza cui s'è accennato alla fine del n. 12.

L'ordine di una falda analitica qualunque ∞^d, di curve piane d'ordine m, uguaglia l'indice (in piccolo) della falda.

Indice in piccolo d'una falda Σ, ∞^d, di curve d'ordine m è naturalmente il numero α delle curve della falda che passano per d punti vicinissimi a d punti generici $O_1, \dots, O_d$ dell'origine C_0. Le curve d'ordine m passanti per

$O_1, O_2, \ldots, O_d$ formano in S_N un sistema lineare Σ', ∞^{N-d}, che contiene C_0. D'altronde il sistema algebrico luogo dei fasci tangenti a Σ in C_0, ha la dimensione d, sicchè esso stacca su C_0 una serie algebrica di gruppi di punti, avente al più la dimensione $d-1$, in quanto ogni gruppo è staccato da tutto un fascio di curve del predetto sistema algebrico.

Pei punti $O_1, \ldots, O_d$ non passa dunque alcun fascio tangente a Σ in C_0; epperò la molteplicità d'intersezione della falda Σ col sistema lineare Σ' uguaglia l'ordine α' della falda. Questo vuol dire che il sistema lineare $\bar{\Sigma}'$ delle curve d'ordine m passanti pei punti $\bar{O}_1, \ldots, \bar{O}_d$, fuori di C_0, ma vicinissimi ad $O_1, \ldots, O_d$, ha comune con Σ esattamente α' curve distinte; onde $\alpha' = \alpha$.

In particolare, se Σ è una falda lineare, basta assumere i punti $O_1, \ldots, O_d$ in guisa che per essi non passi alcun gruppo della serie caratteristica ∞^{d-1} considerata nel n. prec., perchè pei punti $\bar{O}_1, \ldots, \bar{O}_d$ passi una sola curva di Σ.

Trasporto alle superficie delle proprietà infinitesimali dei sistemi continui di curve piane.

15. Le proprietà infinitesimali sviluppate pei sistemi di curve piane si trasportano ai sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica irriducibile F d'ordine n [1], mediante la proiezione generica di F sopra un piano n-plo.

Si tratta dello studio delle proprietà infinitesimali di un sistema continuo Σ_f di curve $\bar{C}_f$, nell'intorno di una sua curva particolare C_f, che supporremo (per semplicità e perchè questo ci basta) dotata di soli nodi. Siccome F può imaginarsi proveniente per proiezione generica da una superficie di un iperspazio priva di singolarità, possiamo supporre che la curva C_f non coincida (nè in tutto nè in parte, se è riducibile) colla linea doppia di F. La scelta generica del centro di proiezione P della F sul piano multiplo consente poi di supporre C_f non coincidente (nè tutta nè in parte) col contorno apparente di F rispetto a P, perchè, variando P, questo contorno descrive su F un sistema lineare ∞^3, privo di componenti fisse (anzi irriducibile).

Ne deriva che l'intorno su F di un punto generico di C_f si proietta biunivocamente, senza eccezione, nell'intorno del punto del piano proiezione di quello, e che la falda di F su cui giace C_f proiettasi biunivocamente nell'in-

(1) Che supponiamo, senza essenziale restrizione, immersa in S_3 e dotata di singolarità ordinarie, cioè linea doppia e punti tripli e cuspidali ordinari.

torno piano della curva C proiezione di C_f. Eccezioni alla biunivocità della corrispondenza tra C e C_f si hanno soltanto nei punti doppi di C che non provengon da nodi di C_f: cioè nei nodi di C proiezioni dei punti doppi apparenti di C_f. Questi nodi li chiameremo i *nodi apparenti* di C, in quanto i due rami di C che s'incrociano in uno di essi appartengono a due fogli diversi del piano n-plo e, in questo senso, un nodo apparente non è intersezione effettiva di due rami di C.

La biunivocità della corrispondenza fra gl'intorni dei punti di C sul piano e gl'intorni omologhi dei punti di C_f su F viene altresì a mancare negl'intorni dei punti di contatto di C colla curva di diramazione Δ del piano, proiezione del contorno apparente di F. Però la biunivocità non cessa, in questo caso, se si limita agl'intorni sopra C e sopra C_f di due punti omologhi siffatti.

Una *falda* Σ_f di curve $\overline{C}_f$ di F, avente l'origine C_f, si rappresenta così biunivocamente, senza eccezione, in una falda Σ di curve piane $\overline{C}$, avente l'origine C. Designata con d la dimensione delle due falde, tante son le curve di Σ_f che passan per d punti di F vicinissimi a d punti generici di C_f, quante le curve $\overline{C}$ passanti per d punti del piano vicinissimi a d punti generici di C: cioè le due falde hanno lo stesso indice in piccolo.

Questo comune valore dell'indice, che è poi l'ordine della falda Σ (n. 14), si assumerà come *ordine della falda* Σ_f *su* F. Il carattere così definito è manifestamente invariante per trasformazioni birazionali di F, che mutino la curva C_f nella curva *totale* origine della falda trasformata, in guisa che vi sia corrispondenza biunivoca senza eccezioni fra le due falde. In particolare si hanno su F le falde del 1° ordine o *falde lineari di curve* e, se $d = 1$, i *rami lineari*.

Il gruppo $(\overline{C}_f, C_f)$ segato dalla generica $\overline{C}_f$ di Σ_f, si proietta in una parte del gruppo $(\overline{C}, C)$ e precisamente in quella che non contiene punti degl'intorni dove vien meno la biunivocità della corrispondenza; e ciò per la genericità della proiezione di F rispetto alla falda Σ_f da studiarsi.

Se $\overline{C}_f$ tende a C_f lungo un ramo di Σ_f (il quale si può supporre lineare; n. 13, Oss. 1ª), il gruppo $(\overline{C}_f, C_f)$ tende ad un gruppo (C_f, C_f) della serie caratteristica di Σ_f su C_f ed il gruppo $(\overline{C}, C)$ ad un gruppo della serie caratteristica di C in Σ, il quale si scinde nella proiezione del gruppo caratteristico (C_f, C_f), nel gruppo delle coppie assorbite dai nodi apparenti di C, che si dovranno considerare *intersezioni apparenti* di C con una curva infinitamente vicina (in quanto C si riguardi come curva *sul piano multiplo*), e nei punti di contatto di C con Δ, che sono altre intersezioni apparenti di C colla predetta curva infinitamente vicina.

Il gruppo proiezione di (C_f, C_f) si assumerà a *gruppo caratteristico di C, come curva del piano multiplo.*

La conclusione è che:

Le proprietà infinitesimali d'una falda Σ_f di curve C_f d'una superficie F si rispecchiano in proprietà identiche d'una falda Σ dello stesso ordine di curve piane C, proiezione generica di Σ_f, fatta esclusione delle intersezioni apparenti di due curve C infinitamente vicine.

Proprietà d'un sistema lineare di curve sopra una superficie, considerato come differenza di due altri.

16. Alle premesse finora esposte occorre aggiungerne altre di carattere algebrico, innanzi di passare alla dimostrazione del teorema fondamentale. Riprendiamo con qualche essenziale complemento gli sviluppi dei nn. 16, 17 della mia Memoria M.

Riferiamoci ad una curva irriducibile C, priva di punti multipli sopra la superficie F, pur essa priva di punti multipli nello spazio lineare S cui appartiene Supponiamo che C sia dotata di *serie caratteristica effettiva* (nel senso di Severi), pur non escludendo che il sistema lineare completo $|C|$ possa essere ∞^0.

Le forme d'ordine l abbastanza alto dello spazio S segan su F un sistema lineare completo regolare $|E|$, senza punti base, che contiene parzialmente C e sega ivi una serie completa non speciale, sicchè il sistema residuo $|D| = |E - C|$ è pur esso regolare, senza punti base.

Indichiamo con n, p grado e genere (virtuali = effettivi) di C; con ν, π; N, P i caratteri analoghi di D, E; con $\delta = [C, D]$ il numero dei punti del gruppo $\Gamma = (C, D)$ comune a C e ad una D (irriducibile e priva di punti multipli) genericamente fissata in $|D|$; con i l'indice di specialità d'un gruppo (C, C); con j l'indice di specialità di C. A norma del teorema di Riemann-Roch sulla F, le dimensioni r, ρ, R di $|C|$, $|D|$, $|E|$ sono espresse da

$$r = n - p + p_a + 1 - j + \sigma \qquad (\sigma \geq 0), \tag{18}$$

$$\rho = \nu - \pi + p_a + 1, \tag{19}$$

$$R = N - P + p_a + 1, \tag{20}$$

ove p_a è il genere aritmetico di F e σ la sovrabbondanza di $|C|$.

Le E per Γ segan su C, fuori di Γ, la serie caratteristica completa $|(C, C)|$ e su D una serie lineare contenuta totalmente nella serie caratteristica completa $|(D, D)|$ o coincidente con questa. Il gruppo Γ presenta alle E $\delta_1 = \delta - i$ condizioni distinte di passaggio e può ripartirsi in due gruppi Γ_1 e Γ_2, di δ_1

e di i punti, il primo dei quali offre alle E tutte le δ_1 condizioni indipendenti di passaggio offerte da Γ e le E per Γ_1 contengon in conseguenza Γ_2. Ne deriva che la serie $|(C, C) + \Gamma_2|$, segata su C dalle E per Γ_1, fuori di Γ_1, è completa non speciale ed *ha il gruppo fisso* Γ_2.

17. Cerchiamo ora la dimensione della serie lineare completa $|(D, D) + \Gamma_2|$ contenente totalmente quella segata su $\dot{D}$, fuori di Γ_1, dalle E per Γ_1. Quest'ultima serie ha, per quanto precede, il gruppo fisso Γ_2, ma non perciò questo gruppo è fisso per la serie completa $|(D, D) + \Gamma_2|$.

Per trovar la dimensione della serie completa $|(D, D) + \Gamma_2|$, che ha l'ordine $\nu + i$, occorre conoscerne l'indice di specialità. Supponiamo in primo luogo che esistan su F curve canoniche impure K, effettive. Pel gruppo Γ_2 passano intanto le $j(\geq 0)$ curve K indipendenti che contengono C. Dico che vi passan soltanto queste. Sia invero, se è possibile, $\overline{K}$ una K passante per Γ_2 diversa dalle precedenti; $\overline{D}$ una generica D, che stacchi su C il gruppo $(C, \overline{D})$ non avente punti comuni con Γ; $\overline{E}$ una generica E passante per $(C, \overline{D})$ e G il gruppo (C, C) staccato su C da $\overline{E}$ fuori di $(C, \overline{D})$. Risulta allora

$$(\overline{E} + \overline{K}, C) - (\overline{D}, C) = G + (\overline{K}, C),$$

cioè $\overline{E} + \overline{K}$ sega su C, fuori di $(\overline{D}, C)$, un gruppo canonico $G + (\overline{K}, C)$, che contiene dunque $G + \Gamma_2$, contrariamente alla non specialità della serie $|(C, C) + \Gamma_2|$. L'ipotesi dell'esistenza di $\overline{K}$ è perciò assurda.

Se su F non esiston curve K effettive (sicchè è $p_g = 0$), la conclusione rimane immutata ($j = 0$).

Ne deriva che un gruppo $(D, D) + \Gamma_2$ ha sopra D l'indice di specialità j. Infatti le K segan su D, a causa della regolarità di $|D|$, la serie lineare *completa* residua di (D, D) rispetto alla serie canonica di D; onde i gruppi canonici indipendenti per $(D, D) + \Gamma_2$ son tanti quante le K per Γ_2. Se $p_g = 0$ la serie $|(D, D) + \Gamma_2|$ è non speciale, perchè lo è $|(D, D)|$.

Concludendo: la serie completa $|(D, D) + \Gamma_2|$, d'ordine $\nu + i$ e d'indice di specialità j, ha la dimensione $\nu - \pi + i + j$, sicchè la serie segata su D dalle E per Γ_1 — o ciò che è lo stesso per (C, D) — ha la dimensione

$$\nu - \pi + i + j - \chi \tag{21}$$

ove χ è la sua deficienza.

E siccome la dimensione del sistema delle E per Γ_1 è uguale ad $R - \delta + i$ e le E per Γ_1 segan su D una serie di dimensione (21) e fra esse quelle che contengon D lascian come resto il sistema $|C|$ di dimensione r, tenuto conto delle (20), (21) e delle:

$$N = n + \nu + 2\delta, \qquad P = p + \pi + \delta - 1$$

risulta:

$$r = n - p + p_a + 1 - j + \chi,$$

cioè, in virtù della (18):

$$\chi = \sigma.$$

In conclusione:

L'indice di specialità e la deficienza della serie segata su D, fuori di Γ_1, dalle E per Γ_1, uguaglian rispettivamente l'indice di specialità e la sovrabbondanza di $|C|$.

Ne deriva che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le E per Γ_1 seghin su D, fuori di Γ_1, una serie lineare completa (avente il gruppo fisso Γ_2) è che il sistema $|C|$ sia regolare ($\sigma = 0$).

18. Pel seguito interessa determinare più generalmente quand'è che il gruppo Γ_2 è fisso per la serie lineare completa $|(D, D) + \Gamma_2|$, a prescinder dalla completezza o meno della serie segata su D, fuori di Γ_1, dalle E per Γ_1.

Definiremo all'uopo come *emiregolare* una curva C, irriducibile, priva di punti multipli, quando su essa il sistema canonico impuro $|K|$ di F sega una serie lineare completa (residua della serie caratteristica di C rispetto alla serie canonica della stessa curva, cosicchè, se $p_g = 0$, l'essere emiregolare equivale per C al fatto che la sua serie caratteristica è non speciale).

Una curva C è o non è emiregolare in sè, indipendentemente dal sistema lineare $|C|$ da essa individuato; mentre una curva C è regolare se tale è $|C|$. Comunque, una curva C regolare è una particolare curva emiregolare, perchè su essa K sega una serie completa, ma di più, nel caso di una curva regolare, $|C|$ sega su C una serie avente la deficenza massima, uguale all'irregolarità q di F.

Una curva emiregolare C può, al pari di una curva regolare, essere *speciale* o *non speciale*, secondo che è $j > 0$ o $j = 0$. Una curva non emiregolare si dirà *irregolare*; mentre si dirà *sovrabbondante* una curva non regolare.

Ciò premesso, proviamo che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie completa $|(D, D) + \Gamma_2|$ individuata dai gruppi staccati su D, fuori di Γ_1, dalle E per Γ_1, abbia il gruppo fisso Γ_2, è che C sia emiregolare.

Designata invero con $\tau (\geq 0)$ la deficienza della serie staccata da $|K|$ sopra una C anche irregolare, poichè la serie medesima ha la dimensione

$p_g - j - 1$, mentre la serie completa che la contiene ha la dimensione $i - 1$, risulta:

$$i = p_g - j + \tau, \quad \text{cioè} \quad i + j = p_g + \tau.$$

Onde la dimensione della serie completa $|(D, D) + \Gamma_2|$, che, secondo quanto sopra provammo è $\nu - \pi + i + j$, è altresì espressa da $\nu - \pi + p_g + \tau$. E siccome la serie completa $|(D, D)|$, attesa la regolarità di $|D|$, ha la dimensione $\nu - \pi + p_g$, il gruppo Γ_2 è fisso per la serie completa $|(D, D) + \Gamma_2|$ allora e soltanto allora che $\tau = 0$.

OSSERVAZIONE. — Poichè, come subito si vede e com'è ben noto,

$$\sigma = \lambda + \tau,$$

ove $q' = q - \lambda (\lambda \geq 0)$, è la deficienza della serie caratteristica di $|C|$, per un sistema emiregolare la sovrabbondanza viene uguale a λ.

Il teorema fondamentale.

19. Proiettiamo genericamente la superficie F, supposta priva di punti multipli in un iperspazio, sopra un S_3, in modo che la proiezione della curva $E_0 = C + D$ non coincida nè tutta nè in parte colla linea doppia della superficie proiezione F' (cosa del resto non essenziale!) e proiettiamo indi F' da un punto generico O sopra un piano multiplo, in guisa che la proiezione di E_0 su F' non coincida nè tutta nè in parte col contorno apparente di F' dal centro O (cosa essenziale!).

Così son soddisfatte le condizioni del n. 15 nei riguardi della corrispondenza fra l'intorno di un punto di E_0 sopra F e l'intorno del punto corrispondente della curva proiezione sul piano multiplo.

Assumeremo addirittura il piano multiplo a modello di F, conservando per le curve proiezioni le notazioni usate per le curve obiettive. La C ha d_1 nodi apparenti, il cui gruppo indicheremo con Ω_1; e similmente D ha d_2 nodi apparenti, formanti il gruppo Ω_2. Le intersezioni delle C, D si ripartiscono nel gruppo $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ e nel gruppo Ω di $m\mu - \delta$ intersezioni apparenti (m, μ ordini di C, D).

Inoltre C, D toccan la curva di diramazione Δ del piano multiplo rispettivamente nei gruppi Q_1, Q_2 (di q_1, q_2 contatti semplici, distinti).

20. *Suppongasi che C sia una curva emiregolare* (irriducibile, priva di punti multipli).

Se C è emiregolare, d'indice di specialità j, il gruppo Γ_2 consta di $i = p_g - j$ pnnti e la serie completa $|(D, D) + \Gamma_2|$, ha l'indice di specialità j.

Ciò posto, ricordiamo che i nodi della curva riducibile E_0, d'ordine $m+\mu$, presentano condizioni indipendenti alle curve d'ordine $m+\mu$ [1]. In particolare il gruppo $\Omega+\Omega_2+\Gamma_1$, che comprende alcuni nodi di E_0, presenta alle dette curve condizioni indipendenti. Ora le curve d'ordine $m+\mu$ passanti per $\Omega+\Omega_2+\Gamma_1$, son aggiunte a D e passano inoltre per un gruppo $\Omega+\Gamma_1$, di punti semplici di D. Esse segnan pertanto su D, fuori del gruppo base, una serie completa, che è poi non speciale, appunto perchè il gruppo $\Omega+\Omega_2+\Gamma_1$ offre alle curve d'ordine $m+\mu$ condizioni indipendenti.

La serie segata su D, fuori del gruppo base assegnato, è la serie completa $|(D,D)+\Gamma_2+Q_2|$. Poichè $(D,D)+\Gamma_2$ ha l'indice di specialità j, mentre $(D,D)+\Gamma_2+Q_2$ è non speciale, ciò significa che Q_2 presenta alle curve d'ordine $m+\mu$, passanti per $\Omega+\Omega_2+\Gamma_1$, q_2-j condizioni indipendenti, invece di q_2; ed è quindi possibile trovare in Q_2 un gruppo R_2 di q_2-j punti offrenti condizioni indipendenti, in guisa che le curve d'ordine $m+\mu$ per $\Omega+\Omega_2+R_2+\Gamma_1$, passan in conseguenza per $S_2=Q_2-R_2$ e la serie segata su D fuori del gruppo base ha il gruppo fisso S_2

La serie residua, tolto S_2, è $|(D,D)+\Gamma_2|$, che, per esser C emiregolare, ha il gruppo fisso Γ_2. Perciò le curve d'ordine $m+\mu$ passanti per $\Omega+\Omega_2+R_2+\Gamma_1$, passan in conseguenza per $S_2+\Gamma_2$.

Nel sistema lineare di queste curve quelle che passano per $Q_1+\Omega_1$, forman un sistema subordinato al quale appartengono curve spezzate in D e nelle curve di ordine m aggiunte a C passanti per Q_1. Onde le curve d'ordine $m+\mu$ passanti per $\Omega+\Omega_1+\Omega_2+Q_1+R_2+\Gamma_2$ e quindi anche per $S_2+\Gamma_2$, segan su C, fuori dei punti fissi, una serie completa, che ha l'indice di specialità $i=p_g-j$, come la serie segata su C dalle curve aggiunte di ordine m, passanti per Q_1.

E siccome la serie segata su C da tutte le aggiunte d'ordine m è non speciale, esiste in Q_1 un gruppo R_1 di q_1-p_g+j punti tali che il gruppo

$$\Omega+\Omega_1+\Omega_2+R_1+R_2+\Gamma_1 \tag{22}$$

presenta alle curve di ordine $m+\mu$ condizioni indipendenti, cioè

$$\begin{aligned}(m\mu-\delta)+d_1+d_2+(q_1-p_g+j)+(q_2-j)+\delta_1=\\=q_1+q_2+d_1+d_2+m\mu-2p_g+j\end{aligned} \tag{23}$$

---

[1] Ved. le mie Lezioni sulle *Serie, sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (raccolte da F. Conforto ed E. Martinelli, Roma, Cremonese, 1942, vol. I, p. 183). Dicendo che più punti presentan condizioni indipendenti alle curve di un certo ordine, intendiamo che essi presentino tante condizioni indipendenti di passaggio quant'è il loro numero.

condizioni (tenuto conto che $\delta - \delta_1 = i = p_g - j$) e le curve d'ordine $m + \mu$ passanti pel gruppo (22) passan in conseguenza pei gruppi $S_1 = Q_1 \quad R_1, S_2, \Gamma_2$.

Valutiamo la dimensione del sistema lineare Σ delle curve d'ordine $m + \mu$ soddisfacenti alle predette condizioni. Per evitare lungaggini nei calcoli, osserviamo che le curve di ordine $m + \mu$, in quanto posson derivarsi dalla curva $C + D$ considerando virtualmente inesistenti tutti i suoi nodi, hanno il genere $p + \pi + d_1 + d_2 + m\mu - 1$ e forman quindi un sistema lineare di dimensione

$$3(m + \mu) + (p + \pi + d_1 + d_2 + m\mu - 1) - 1.$$

Il sistema Σ ha in conseguenza la dimensione

$$\begin{aligned} s = 3(m + \mu) + (p + \pi + d_1 + d_2 + m\mu - 1) - 1 \\ - (q_1 + q_2 + d_1 + d_2 + m\mu - 2p_g + j) = \\ = (3m + p - 1 - q_1 + p_g - j) + (3\mu + \pi - 1 - q_2 + p_g). \end{aligned}$$

21. Consideriamo per ogni nodo di E_0, nel gruppo $\Omega + \Omega_1 + \Omega_2 + \Gamma_1$, la totalità delle curve $\bar{E}$, d'ordine $m + \mu$, prossime ad E_0 ed aventi un nodo prossimo a quello considerato; e, per ogni contatto di E_0 con Δ nel gruppo $R_1 + R_2$, la totalità delle $\bar{E}$, d'ordine $m + \mu$, prossime ad E_0 ed aventi un contatto con Δ prossimo al considerato. Si ottengon in tal guisa nello spazio lineare S_N delle $\bar{E}$ d'ordine $m + \mu$ tante falde lineari ∞^{N-1} quanti sono i punti del gruppo (22); e gl'iperpiani tangenti a queste falde nell'origine E_0 sono linearmente indipendenti, perchè si segano in uno spazio lineare Σ di dimensione normale. Perciò quelle falde s'incontrano in una falda *lineare* Ψ (¹) di dimensione s, avente per origine E_0 e per spazio tangente ivi il sistema Σ.

22. Osserviamo ora che il sistema delle curve d'ordine μ prossime a D con nodi prossimi a quelli di D e q_2-tangenti alla curva di diramazione in punti prossimi ai punti di Q_2, formano una falda lineare Φ_2 di dimensione

$$3\mu + \pi - 1 - q_2 + p_g = \nu - \pi + p_g + 1,$$

appunto perchè D, essendo regolare, appartiene ad un sistema continuo completo $\{D\}$ di dimensione $\nu - \pi + p_g + 1$, la cui curva generica D è origine d'una falda lineare ed ha come curva di $\{D\}$, la serie caratteristica completa.

La falda lineare Φ_2 sul piano multiplo non è che la proiezione della falda lineare con cui $\{D\}$ passa per D.

(¹) Cfr. le mie citate *Vorlesungen*, pag. 309.

Inoltre Φ_2 coincide colla falda lineare Φ_2' di tutte le curve prossime a D che hanno nodi prossimi a quelli di D e toccano Δ in un gruppo prossimo ad un gruppo T di $q_2 - p_g$ punti di Q_2 che presentino condizioni indipendenti alle aggiunte a D d'ordine μ. La Φ_2' è lineare, perchè le condizioni di passaggio delle curve di ordine μ per $\Omega_2 + T$ sono indipendenti. La sua dimensione. che subito si calcola, risulta uguale alla dimensione di Φ_2, e siccome questa falda, per la sua stessa definizione è contenuta in Φ_2', così Φ_2' coincide con Φ_2. Insomma: le curve di Φ_2' toccano in conseguenza Δ anche nei punti di un gruppo prossimo a $Q_2 - T$.

Alla sua volta C appartiene similmente ad una falda lineare Φ_1 di curve d'ordine m ad essa vicine con nodi prossimi a quelli di Ω_1 e tangenti a Δ in punti vicini a quelli di R_1. La dimensione di questa falda è $3m + p - 1 - - q_1 + p_g - j$.

Le curve risultanti dall'accoppiare a due a due le curve di Φ_1, Φ_2 costituiscono una falda lineare Φ [1] di dimensione s. Si osserverà che le curve di Φ hanno automaticamente nodi prossimi ai punti di $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Omega$. Esse insomma costituiscono una falda contenuta nella totalità delle curve d'ordine $m + \mu$ con nodi prossimi a quelli di $\Omega + \Omega_1 + \Omega_2 + \Gamma_1$ e tangenti a Δ in punti prossimi a quelli di $R_1 + R_2$, la quale è la falda lineare Ψ, di egual dimensione s. Ne deriva che Φ e Ψ coincidono.

Riassumendo: le curve di Ψ son tutte spezzate; hanno nodi prossimi a quelli di Γ_2 e toccano in conseguenza Δ in punti prossimi a quelli di S_2.

Ora, attesa la regolarità di E, le curve del sistema lineare $|E|$ appartengono ad un sistema continuo $\{E\}$ di dimensione:

$$3(m + \mu) + (p + \pi + \delta - 1) - 1 - (q_1 + q_2 - p_g), \tag{24}$$

e quelle tra esse che son dotate di δ_1 nodi prossimi a Γ_1 formano un sistema continuo di dimensione inferiore esattamente di δ_1 unità, e non meno, alla (24), e ciò perchè il gruppo Γ_1 presenta condizioni indipendenti alle E di F.

Ne deriva che sul piano multiplo il sistema delle E di $\{E\}$ prossime ad E_0 con δ_1 nodi prossimi ai punti di Γ_1, le quali hanno automaticamente nodi prossimi ai punti di $\Omega + \Omega_1 + \Omega_2$ e son tangenti a Δ in punti prossimi a punti di $Q_1 + Q_2$ [2], formano un sistema Φ' di dimensione inferiore di δ_1

---

[1] La linearità di Φ risulta subito dalla rappresentazione analitica delle falde lineari o dal fatto che Φ ha l'indice (in piccolo) 1 come Φ_1, Φ_2.

[2] Una E di $\{E\}$ tocca Δ in tanti punti quanti la E_0, che è una particolare E di $\{E\}$ ed ha $d_1 + d_2 + (m\mu - \delta)$ nodi apparenti, quanti ne ha E_0.

unità a (24). Tenuto conto che $\delta - \delta_1 = i = p_g - j$, si trova che la dimensione del sistema Φ' è ancora s.

Ma le curve di Φ' soddisfanno alla definizione delle curve di Ψ cioè di Φ: dunque Φ' è contenuto in Φ e coincide pertanto con Φ.

La conclusione è che le curve d'ordine m vicine a C con nodi prossimi a quelli di Ω_1, e contatti con Δ prossimi a quelli di R_1, toccano in conseguenza Δ in punti prossimi a quelli di S_1 e, per quanto già dicemmo, formano una falda lineare Φ_1 di dimensione

$$3m + p - 1 - q_1 + p_g - j = n - p + p_g + 1 - j.$$

Sopra C la serie caratteristica di Φ_1 risulta così di dimensione $n - p + p_g - j$ e, poichè ha l'indice di specialità $p_g - j$, essa è completa. Si può pertanto enunciare il seguente *teorema fondamentale di unicità, di esistenza e di completezza:*

Una curva emiregolare C (irriducibile e priva di punti multipli) a serie caratteristica effettiva (d'ordine ≥ 0) tracciata sopra una superficie F, individua ivi un sistema continuo completo $\{C\}$, che passa per C con una falda lineare. La serie caratteristica di questo sistema su C è completa.

Riflessioni critiche.

23. Le riflessioni che seguono non riguardano quel che finora si è esposto, ma si riferiscono ad alcuni tentativi per eliminar dalla dimostrazione l'elemento trascendente ricordato nell'introduzione.

La conoscenza delle difficoltà e delle insidie che sbarrano la via, deve giovare, nel mio intendimento, ad orientar meglio qualche lettore, che voglia riprender l'argomento così attraente ed importante.

24. Il concetto di B. SEGRE è quello di dimostrare (almeno nel caso di curve regolari C e ragionando direttamente sulla superficie F) la riducibilità delle curve E prossime ad $E_0 = C + D$ e con δ_1 nodi prossimi ai punti di Γ_1 (ci riferiamo alle notazioni del n. 16) provando che la dimensione della serie caratteristica completa g sopra una di quelle curve E, supposta irriducibile, nel passaggio al limite per $E \to E_0$, dovrebbe diminuire: cosa assurda. E perciò egli cerca di provare (in parte nella Memoria originaria ed in parte mediante un lemma complementare, come ho accennato in M) che ogni gruppo limite, quando C è regolare, contiene il gruppo $\Gamma_2 = [(C, D) - \Gamma_1]$ una volta su C e una volta su D, tanto se il limite è staccato su E_0 da una curva H_0 (limite di una H che la E variabile si trascini dietro) non avente alcuna parte comune con E_0, quanto se H_0 contiene C o D.

Nella prima alternativa la deduzione è sicura ed ovvia; nella seconda delicata e inefficiente. È appunto quest' inefficienza che la mia critica ha accertato, come ora dirò.

25. Passo sopra alla necessità, già segnalate in M, che le curve E, H, del cui gruppo comune (E, H) si cerca il limite, sieno funzioni olomorfe di una medesima variabile t, senza di che non si può parlare del limite di (E, H), che potrebbe esser anche indeterminato: ho già mostrato come a questa cautela si possa in ogni caso ottemperare.

Un ulteriore esame prova però (e qui affermo, senza indugiarmi sulle precisazioni) che non tutti i gruppi della serie limite di g son conseguibili con tali passaggi al limite, ma che occorre tener conto altresì dei gruppi definibili come elementi di accumulazione e non come limiti; i quali gruppi non può affatto affermarsi che sieno anche elementi di accumulazione di gruppi limiti.

È istruttivo che nel campo algebrico, il quale sembra il dominio della piena validità dell'operazione di limite, si affaccino difficoltà di questo genere!

26. Constatato ciò, io cercai, in una trattazione inedita, che non ha sboccato nella conclusione desiderata, di pervenire all'assurdo dell'irriducibilità delle E, attuando in altro modo il tentativo di B. Segre. Ed ecco come.

La dimensione di g è espressa da

$$u = N - P + p_g - \delta_1 = (n - p + \delta - \delta_1) + (\nu - \pi + p_g) + 1$$

ossia, tenuto conto che $\delta - \delta_1 = i$, indice di specialità di (C, C) su C, da

$$u = r' + \rho' + 1,$$

ove r', ρ' son le dimensioni delle serie caratteristiche complete su C, D.

Se la E generica con δ_1 nodi si suppone irriducibile, poichè esiste in essa un gruppo caratteristico passante per $r' + \rho' + 1$ punti generici, qualora si assuma E funzione olomorfa di t e si riesca a fissare in E (cosa agevolmente attuabile) un gruppo di $r' + \rho' + 1$ punti generici, pur esso funzione olomorfa di t, e che abbia come limite, per $E \to E_0$, un gruppo X di $r' + 1$ punti generici di C ed un gruppo Y di ρ' punti generici di D, ci si dovrà imbatter nell'assurdo cercato, determinando il limite del gruppo di g, che passa per quegli $r' + \rho' + 1$ punti di E.

Anche così non si evita di cercar il limite del gruppo (E, H), comune ad E e ad un'altra curva H, funzione olomorfa di t, che serva a staccarlo; ma l'impostazione non contraddice a priori all'essenza della ricerca. Tutto riducesi insomma, in piena legittimità, alla ricerca del limite di (E, H) quando le curve limiti E_0, H_0 hanno una parte comune. In questo senso cercai di spinger l'indagine.

Una prima fallace circostanza infinitesimale indicai in una breve Nota [1]; ma essa non era la sola apparenza ingannevole. Trattandosi d'una questione infinitesimale relativa a curve analitiche (algebriche), che dunque faceva intervenire i termini soltanto fino ad un certo ordine, pareva lecito di sostituire alle E, H, nell'intorno di un punto comune alle curve limiti, due coniche nell'intorno d'un punto del loro piano, comune alle coniche limiti. L'elementare calcolo fu svolto nel caso in cui i coefficienti delle equazioni delle due coniche soddisfanno solamente a condizioni compatibili colla genericità delle E, H ed il risultato è, da questo punto di vista, ineccepibile.

Ma, così limitato, non basta, perchè non si riesce a vedere se la genericità delle E, H, intesa in questo senso, sia compatibile cogli altri dati della questione; e d'altronde non è possibile limitarsi al « caso generale » per applicarne poi le conclusioni ad ogni « caso particolare », perchè nell'infinitesimo si presenta il fatto paradossale che non spettano ad ogni caso particolare tutte le proprietà valevoli in generale. E la ragione intima è questa.

Della genericità delle E, H o per meglio dire dei sistemi ∞^1 in cui esse variano, non si può parlare finchè questi sistemi non dipendono alla lor volta da un parametro (almeno); sicchè in fondo (E, H) non è più funzione di una, ma di due variabili (almeno) e il passaggio al limite può pertanto dar luogo ad indeterminazioni, in ordine alle singolarità inessenziali di 2ª specie delle funzioni analitiche di più variabili.

Occorreva dunque riprender la questione del limite del gruppo (E, H) non trascurando a priori nessun termine delle equazioni delle E, H, che frattanto avevo ricondotto, in modo pienamente rigoroso (indicato nei nn. 15, 19), a due curve piane; e ciò senza alterare i termini sostanziali del problema.

Non occorre insistere, dopo le precisazioni della prima parte di questa Memoria, sulla necessità che la curva E varii in un ramo lineare ε, avente per origine E_0 e per fascio tangente ivi un fascio irriducibile del sistema $|E|$. Senza di questo non si potrebbe asserire, come occorre, che la E infinitamente vicina ad E_0 in ε non contiene nè C nè D. Comunque a queste condizione si può nel fatto soddisfare, senza indebite limitazioni.

---

[1] « Rendiconti della R. Accademia d'Italia », 16 gennaio 1942, p. 1.

27. Vediamo dunque che cosa può dirsi di preciso del limite di (E, H), quando non si trascuri alcun termine delle equazioni

$$\varepsilon(x, y; t) \equiv \gamma\delta + t\varphi(x, y; t) = 0 \tag{25}$$
$$\eta(x, y; t) \equiv \gamma\lambda + t\psi(x, y; t) = 0, \tag{26}$$

delle E, H, funzioni olomorfe del parametro t. L'ipotesi è che la curva infinitamente vicina all'origine $E_0 = C + D$ nel ramo ε ($\gamma = 0$, $\delta = 0$ son le equazioni di C, D e $t = 0$ dà l'origine del ramo) non contenga nè C nè D, sicchè $\varphi(x, y; 0)$ non s'annulla identicamente nè su C nè su D e il ramo ε è lineare; e inoltre si suppone che la curva H per $t = 0$ riducasi alla curva $H_0 = C + L$ ($\lambda = 0$ equazione di L).

Il gruppo (E, H) sta nella curva

$$\frac{\lambda\varepsilon - \delta\eta}{t} = \lambda\varphi - \delta\psi = 0,$$

onde al limite esso giace sulla curva N:

$$\lambda\varphi(x, y; 0) - \delta\psi(x, y; 0) = 0; \tag{27}$$

e si può dunque facilmente determinare la parte del limite che sta su C se N non contiene alla sua volta C. Qualora potessimo escluder questa particolarità, tenuto conto che su C non è identicamente $\varphi(x, y; 0) = 0$, si sboccherebbe senz'altro nell'assurdo cui si alluse al principio del n. 26 e la ricerca sarebbe compiuta. Ma è proprio la difficoltà di escluder questa particolarità — perfino quando C appartiene ad un sistema regolare — che non rende lecita la deduzione circa la struttura del gruppo limite, fatta « in generale » quando N non contiene C. B. SEGRE nei fogli manoscritti (ricordati in M) a complemento della sua Memoria, si limitava in proposito ad un'affermazione equivalente all'esclusione dell'indicata particolarità; e ciò sulla base della « generica » scelta di certe curve da lui considerate. Ma in realtà non era dimostrato che da quella certa genericità di scelta conseguisse la desiderata esclusione.

Si può aggiungere qui che, se non accade che la curva

$$\lambda\varphi(x, y; t) - \delta\psi(x, y; t) = 0$$

contenga C per ogni valore di t (il che, nel nostro caso, potrà forse escludersi senza grande difficoltà) esiste, in forza dello sviluppo di MAC LAURIN, un *primo* valore di l tale che

$$\lambda\varphi^{(l)}(x, y; 0) - \delta\psi^{(l)}(x, y; 0)$$

non si annulla identicamente su C, onde il gruppo limite sta sulla curva:

$$\lambda\varphi^{(l)}(x, y; 0) - \delta\psi^{(l)}(x, y; 0) = 0,$$

ove $\varphi^{(l)}$, $\psi^{(l)}$ denotan simboli di derivazione rispetto a t. Però la determinazione della parte del gruppo limite situata su C, cessa di esser significativa ai fini della nostra ricerca, non appena si debban far intervenire derivate d'ordine $l \geq 1$; sicchè neppur questa considerazione permette di conseguire lo scopo.

28. Prima d'indicare qualche ulteriore aspetto della questione, ci fermeremo sopra talune circostanze paradossali a cui dànno luogo i rapporti infinitesimali che entrano in giuoco.

Supposto che i rami (25), (26) sieno ambedue lineari, posson le due curve E_1, H_1 infinitamente vicine alle origini E_0, H_0, incontrarsi in un punto della curva C, senza che questo punto appartenga al limite di (E, H)?

A priori parrebbe di poter risponder negativamente; ma questa risposta è illusoria. E valga il vero. Dire che E_1, H_1 s'incontrano in un punto O di C, equivale a dire che in quel punto si taglian le curve

$$\varphi(x, y; 0) = 0, \quad \psi(x, y; 0) = 0,$$

le quali non svaniscono per la linearità dei due rami. Ebbene, se il polinomio (27) non svanisce su C, si conclude giustamente che O fa parte del limite di (E, H); ma se (27) si annulla su C la conclusione non è generalmente vera.

Consideriamo invero le (25), (26) come equazioni di due superficie analitiche nello spazio $S_3(x, y, t)$; e sieno $x = y = t = 0$ le coordinate di O. In un punto $P(x, y)$ di C, che è sezione parziale delle due superficie col piano $t = 0$, è

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \gamma_x'(x, y)\delta(x, y), \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial y} = \gamma_y'(x, y)\delta(x, y), \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \varphi(x, y; 0),$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \gamma_x'(x, y)\lambda(x, y), \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \gamma_y'(x, y)\lambda(x, y), \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \psi(x, y; 0).$$

Onde, se O è semplice per C, come supporremo, e non sta su $D + L$, le due superficie passan semplicemente per O. I loro piani tangenti in P sono:

$$(X - x)\gamma_x'\delta - (Y - y)\gamma_y'\delta + T\varphi(x, y; 0) = 0$$
$$(X - x)\gamma_x'\lambda - (Y - y)\gamma_y'\lambda + T\psi(x, y; 0) = 0,$$

e siccome, a causa dell'annullarsi di (27) su C, la prima di queste equazioni moltiplicata pel fattore λ, non nullo in O, si riduce alla seconda moltiplicata pel fattore non nullo δ, le due superficie si toccano in O, come in ogni altro generico punto di C. Non si può pertanto concludere che le (25), (26) s'incontrino in O lungo una curva diversa da C, perchè C è già loro intersezione doppia. Anzi in generale esse non s'incontreranno fuori di C, nell'intorno di O, come accadrebbe se O stesse sul limite di (E, H).

29. Ecco ora un'altra circostanza paradossale: un sistema di curve sopra una superficie o sopra un piano, può goder della proprietà che sono spezzate tutte le sue curve infinitamente vicine ad una curva spezzata del sistema, senza che la generica curva del sistema sia spezzata.

Un esempio del genere si ottiene subito riprendendo la falda lineare Φ del n. 22, costituita dalle coppie di curve delle falde lineari Φ_1, Φ_2, riempite dalle curve prossime a C, D, che hanno nodi vicini a quelli di C, D e toccan Δ in gruppi rispettivamente vicini a Q_1, $\bar{Q}_2$. La Φ ha la dimensione s, uguale a quella del proprio sistema lineare tangente Σ, che è irriducibile, contenendo esso le proiezioni delle curve irriducibili E di F, passanti pel gruppo Γ_1. D'altronde, poichè Φ è lineare, tutte le curve in essa infinitamente vicine ad $E_0 = C + D$, stanno in Σ ed esse abbraccian la totalità delle curve di Σ infinitamente vicine ad E_0, le quali dunque risultano ciascuna spezzata in una curva infinitamente vicina a C ed in una curva infinitamente vicina a D.

La circostanza apparisce paradossale, perchè, essendo Σ irriducibile, le sue curve spezzate formano una varietà subordinata, che ha dunque meno che ∞^{s-1} curve infinitamente vicine ad E_0; onde presa in Σ una curva infinitamente vicina ad E_0, fuori di quella varietà subordinata, essa deve risultare irriducibile. E così è nel fatto.

La spiegazione del paradosso è questa: La condizione di spezzamento non è esprimibile in termini infinitesimali. Si può cioè dire che una curva infinitamente vicina ad E_0, come curva di un *dato* sistema continuo, è spezzata soltanto se ci si può avvicinare ad E_0 entro un sistema di curve spezzate, subordinate al dato. Onde una curva infinitamente vicina ad E_0 può essere spezzata come curva di un dato sistema continuo e irriducibile come curva di un altro.

Così accade di una curva generica di Σ, infinitamente vicina ad E_0, che *è irriducibile come curva di* Σ (in quanto ad essa non ci si può approssimare in Σ entro un sistema subordinato di curve spezzate) e *spezzata come curva di* Φ.

30. Per la ricerca del limite della serie g (n. 24) si può tentare quest'altra via. Essendosi ridotta la questione a sistemi continui di curve piane, si può osservare che la serie g è contenuta parzialmente nella serie caratteristica $\bar{g}$, segata dalle curve di ordine $m+\mu$ sulla curva E virtualmente priva di nodi e precisamente g è il resto, rispetto a $\bar{g}$, del gruppo dei q_1+q_2 contatti di E con Δ e delle coppie di punti assorbite dagli $m\mu-\delta+d_1+d_2+\delta_1$ nodi di E.

Il passaggio al limite sembra in tal modo debba riescir più agevole, essendo ben determinato il gruppo $\Omega+\Omega_1+\Omega_2+\Gamma_1+Q_1+Q_2$ limite del gruppo dei nodi di E e del gruppo dei contatti di E con Δ.

Ma appena si comincia a muoversi su questa via ci si accorge di un'altra anomalia: ed è che per trovare il limite della serie $\bar{g}$ (e quindi di g) non si può far nessuna utile leva sul limite (facilmente determinabile) del sistema lineare segante la serie variabile! E vediamo perchè.

La dimensione della serie lineare (neutra, virtualmente completa) $\bar{g}$ è espressa da

$$e=(m+\mu)^2-(\bar{p}+\bar{\pi}+m\mu-1),$$

ove

$$\bar{p}=\frac{(m-1)(m-2)}{2},\quad \bar{\pi}=\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}.$$

La dimensione e_0 della serie di equivalenza segata su $E_0=C+D$ dal sistema limite di quello che sega $\bar{g}$, e che è il sistema lineare *fisso* S di tutte le curve d'ordine $m+\mu$, si valuta senz'altro osservando che queste curve segano su C una serie virtualmente completa di dimensione $m(m+\mu)-\bar{p}$ e che quelle fra esse che contengono un gruppo (C, E) dipendono da $\frac{\mu(\mu+3)}{2}+1$ parametri. Si riconosce così che $e_0=e$.

Naturalmente nella serie di equivalenza limite $\bar{g}_0$ si contano anche i gruppi di accumulazione di quelli staccati su E_0 da S. Essi, come risulta dalla teoria delle serie d'equivalenza, son tutti e soli i gruppi eccezionali di $\bar{g}_0$. La serie $\bar{g}_0$ non è però completa (tranne il caso $m=\mu=1$), come serie d'equivalenza sulla E_0 (ove C, D si considerino virtualmente privi di nodi), in quanto la serie completa che la contiene ha la dimensione

$$m(m+\mu)-\bar{p}+\mu(m+\mu)-\bar{\pi}=e+m\mu-1.$$

Quel che rende impraticabile la via che si vorrebbe seguire non è però l'incompletezza di $\bar{g}_0$, ma il fatto che la serie $\bar{g}_0$ determinata dal sistema S, non costituisce da sola per $E\to E_0$ il limite della serie $\bar{g}$ determinata su E dallo stesso sistema.

Basta per convincersene ricorrere ad un esempio banale. Suppongasi invero che E sia una conica irriducibile e C, D sieno due rette. Su E la $\bar{g}$

segata dalle coniche comprende tutte le ∞^4 quaderne di punti di E. Su $C+D$ la $\bar{g}_0$ segata dalle coniche comprende soltanto le quaderne di punti di E_0 ottenute associando le coppie di punti di C alle coppie di punti di D (ivi comprese le quaderne di accumulazione) e costituisce perciò soltanto una parte del limite, che si spezza in cinque serie ∞^4. In questo caso il limite di $\bar{g}$ è a priori visibile, perchè la serie è definibile intrinsecamente su E, indipendentemente dal sistema segante.

Quest'esempio mostra come la questione del limite di g sia notevolmente più complessa di quel che non apparisce nel programma originario di ricerca, fissato da B. SEGRE. Io resto persino dubbioso che la conoscenza completa di questo limite possa condurre all'assurdo cercato, secondo il concetto di questo autore; e credo che valga meglio concentrare gli sforzi sopra una dimostrazione algebrica o topologica del principio generale di spezzamento dovuto appunto a B. SEGRE.