Limessätze bei geometrischen Ordnungen.

Herrn CONSTANTIN CARATHÉODORY zum siebenzigsten Geburtstag gewidmet.

Von OTTO HAUPT in (Erlangen).

EINLEITUNG

In einer früheren Note (¹) wurden gewisse Vollständigkeitsprobleme bei geometrischen Ordnungen besprochen und Sätze über den Ordnungswert des Limes einer Folge von Kontinuen mit gegebenen Ordnungswerten (im euklidischen $R^{(n)}$) aufgestellt. Diese Sätze (vgl. nachstehend Nr. 4.5. und Nr. 5.1.) sollen zusammen mit einem Struktursatz (vgl. Nr. 3.1.) in Folgenden bewiesen werden (²). Indem wir im übrigen auf die Auseinandersetzungen allgemeinerer Natur in der oben genannten Note sowie auf weitere dort angeschnittene Fragen (³) verweisen, bemerken wir hier nur Folgendes:

Die nachstehend behandelten Sätze beziehen sich nur auf Kontinua (⁷); sie liessen sich indes auch auf gewisse (unbeschränkte) abgeschlossene Punktmengen ausdehnen (⁴).

Bei den in Rede stehenden Sätzen handelt es sich um sogenannte « schwache » Ordnungen, d. h.. die Ordnungswerte der betrachteten Gebilde (Kontinuen) werden nicht für *alle* Ordnungscharakteristiken des zu Grunde gelegten Systems **m** von Ordnungscharakteristiken vorgeschrieben, sondern jeweils nur bis auf eine in **m** nirgends dichte Ausnahmemenge. Dass diese Fassung des Ordnungsbegriffes die unseren Sätzen nagemessene ist, wurde seinerzeit (¹) an Beispielen dargetan.

Ordnungscharakteristiken sind hier stets die Hyperebenen des $R^{(n)}$. Verallgemeinerungen der Sätze hinsichtlich der Ordnungscharakteristiken

---

(¹) HAUPT, *Vollständigkeitsprobleme bei geometrischen Ordnungen*, « Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. math.-naturw. Abt. », Jahrg. 1941, 57 ff., insbes. Nr. 3.1.1. und 3.4. bzw. 3.1.2.

(²) Der Satz in Nr. 4.5 des Textes stellt eine Verallgemeinerung der a. a. 0. (¹), Nr. 3.1.1. und 3.4. angegebenen Sätze dar.

(³) Vgl. a. a. 0. (¹) z. B. Nr. 3.3.2. und 4.2. Es kommen ferner Anwendungen auf reelle Funktionen in Betracht. Eine Untersuchung zu Nr. 3.3.2. wird demnächst veröffentlicht werden.

(⁴) Vgl. etwa HAUPT, *Ueber die Struktur gewisser abgeschlossener Punktmengen*, « Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt. », Iahrg. 1932, 71 ff..

(hier der Hyperebenen) sowie hinsichtlich des Grundraumes (hier der $R^{(n)}$) liegen nahe, sollen aber in vorliegender Arbeit noch unerörtert bleiben.

Dagegen sei auf einen Zusammenhang hingewiesen, welcher zwischen Spezialfällen des einen unserer Sätze (Nr. 5.1.) und dem bekannten Konvergenzsatz von Herrn BLASCHKE für konvexe Körper besteht.

Der Einfachheit wegen beschränken wir uns dabei auf den $R^{(3)}$.

Die Begrenzung eines konvexes Körpers lässt sich, wenn man die ebenen Flächenstücke einbezieht, kennzeichnen als « Fläche », deren schwacher (Punkt)-Ordnungswert ([5]) bezüglich des Systems der Geraden als Ordungscharakteristiken nicht grösser ist als Zwei. Dabei ist der Ordnungswert Zwei der absolut kleinste für nicht-ebene Flächen. Der Blaschke'sche Satz besagt also: Der Limes einer konvergenten Folge von Flächen mit schwachen (Punkt)-Ordnungswerten ≤ 2 (bezüglich der Geraden) besitzt selbst einen schwachen Ordnungswert ≤ 2. Fragt man nach einem Gegenstück zu diesem Satze etwa für Kurven, so hat man die Geraden (als Ordnungscharaktersitiken) zu ersetzen durch die Ebenen; der absolut kleinste, nicht-triviale Ordnungswert für Kurven ist dann Drei. Daher wird ein Gegenstück der gewünschten Art geliefert durch den Satz der Nr. 5.1. für $n = 3$, welcher speziell für Kurven besagt: Der Limes einer konvergenten Folge von Kurven mit schwachen (Punkt)-Ordnungswerten ≤ 3 (bezüglich der Ebenen) besitzt einen schwachen Ordnungswert ≤ 3.

§ 1. Vorbereitende Bemerkungen.

1.1. Allem Folgenden zu Grunde gelegt ist ein euklidischer, n-dimensionaler Raum $R^{(n)}$ mit $n \geq 2$. Als *q-Ebenen* im $R^{(n)}$ bezeichnen wir die q-dimensionalen, linearen Mannigfaltigkeiten des $R^{(n)}$ mit $1 \leq q \leq n-1$, und speziell als *Hyperebenen* die $(n-1)$-Ebenen.

Da unsere Betrachtungen sich sämtlich innerhalb eines festen, abgeschlossenen, n-dimensionalen Würfels $W^{(n)}$ des $R^{(n)}$ abspielen, brauchen nur die Durchschnitte der q-Ebenen mit $W^{(n)}$ in Betracht gezogen zu werden; diese Durchschnitte können als Punkte eines Kompaktums ([6]) $E^{(q)}$ gedeutet werden, indem man die Abweichung zweier Punktmengen aus $W^{(n)}$ als Entfernung zu Grunde legt. Der Kürze wegen sprechen wir statt vom Durchschnitt einer q-Ebene mit $W^{(n)}$ meist von der q-Ebene schlechthin. Wenn künftig z. B. von

([5]) Bezügl. des Begriffes « Punkt-Ordnungswert » vgl. im Text Nr. 1.4.

([6]) Unter einem Kompaktum wird eine metrische, in sich kompakte Punktmenge verstanden.

abgeschlossenen, offenen, nirgends dichten u. s. w. Mengen von q-Ebenen sowie von *Ebenen-Umgebungen* einer q-Ebene die Rede ist, bezieht sich dies stets auf $E^{(q)}$. Die q-Ebenen, welche sämtlich ein festes Teilkompaktum des $W^{(n)}$ treffen, bilden ihrerseits ein Kompaktum im $E^{(q)}$.

1.2. Unter der Konvergenz einer Mengenfolge $\{\mathbf{M}_i\}$ ist die topologische zu verstehen, welche gekennzeichnet wird durch die Uebereinstimmung derjenigen beiden Mengen aller Punkte, gegen welche Punkte aus schliesslich allen bzw. aus unendlich vielen $\mathbf{M}_i$ sich häufen. $\mathbf{M}_0 = \lim\limits_i \mathbf{M}_i$ ist dann diese Häufungsmenge. Da wir es stets mit Kompakten zu tun haben, ist die Konvergenz zugleich metrisch; auch ist dann der Limes einer konvergenten Folge von Kontinuen (7) selbst ein Kontinuum, falls dieser Limes *mehrpunktig* ist (28).

1.3. Es sei $\mathbf{A}$ eine (nicht leere) Punktmenge (des $R^{(n)}$). Ferner sei $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_r$, wobei die $\mathbf{A}_\rho$ abgeschlossen in $\mathbf{A}$ und paarweise fremd sind, $\rho = 1, \ldots, r$; $r \geq 2$. Dann bezeichne man jedes nicht leere unter den $\mathbf{A}_\rho$ als ein Stück von $\mathbf{A}$ und die Darstellung $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_r$ als eine Zerstückelung von $\mathbf{A}$ oder als eine Spaltung von $\mathbf{A}$ in Stücke $\mathbf{A}_\rho\,(\neq 0)$. Es soll $\mathbf{A}$ selbst als *triviales* Stück von $\mathbf{A}$ gelten. Eine Teilmenge $\mathbf{T}$ von $\mathbf{A}$ ist also ein (nicht-triviales) Stück von $\mathbf{A}$ dann und nur dann, wenn $\mathbf{T}$ und $(\mathbf{A} - \mathbf{T})$ beide nicht leer, abgeschlossen in $\mathbf{A}$ sowie zueinander fremd sind.

Ist $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_r$ eine Zerstückelung von $\mathbf{A}$ und sind mindestens zwei der (8) $\mathbf{A}_\rho\mathbf{B}$ nicht leer, so ist $\mathbf{AB} = \mathbf{A}_1\mathbf{B} + \ldots + \mathbf{A}_r\mathbf{B}$ eine nicht-triviale Zerstückelung von $\mathbf{AB}$; ist weiter $\mathbf{A}_\rho = \mathbf{A}_{\rho 1} + \ldots + \mathbf{A}_{\rho t_\rho}$ eine Zerstückelung von $\mathbf{A}_\rho$, so ist auch $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{11} + \ldots + \mathbf{A}_{1t_1} + \mathbf{A}_{21} + \ldots + \mathbf{A}_{rt_r}$ eine Zerstückelung von $\mathbf{A}$.

Ist $\mathbf{A}$ ein Kompaktum, so besitzen die Stücke einer Spaltung von $\mathbf{A}$ positiven Abstand von einander.

1.3.1. Es ist $\mathbf{A}$ zusammenhängend dann und nur dann, wenn $\mathbf{A}$ nicht in zwei (oder mehr) Stücke spaltbar ist. Jede Komponente (9) eines Stückes von $\mathbf{A}$ ist Komponente auch von $\mathbf{A}$.

Ist $\mathbf{A}$ *in* q *Stücke spaltbar, so besitzt* $\mathbf{A}$ *mindestens* q *Komponenten* $(q \geq 2)$.

(7) Als Kontinuum wird jedes *mehrpunktige* (d. h. mehr als einen Punkt enthaltende) zusammenhängende Kompaktum bezeichnet.

(8) Mit $\mathbf{AB}$ oder auch $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ wird der Durchschnitt der beiden Punktmengen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ bezeichnet, mit $\overline{\mathbf{A}}$ bzw. mit $\mathring{\mathbf{A}}$ die abgeschlossene Hülle bzw. der offene Kern von $\mathbf{A}$.

(9) Komponente einer Punktmenge $\mathbf{A}$ ist jede nicht leere, grösste, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbf{A}$. Jede Komponente von $\mathbf{A}$ ist abgeschlossen in $\mathbf{A}$. Vgl. z. B. F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, 3. Aufl., Berlin 1935, 152.

Umgekehrt gilt:

Besitzt **A** *(mindestens)* q *verschiedene Komponenten* $\mathbf{K}_\lambda$, $\lambda = 1,\dots, q$, wo $q \geq 2$ *eine natürliche Zahl ist, so ist* **A** *in* q *Stücke spaltbar.*

In der Tat: Jedenfalls ist **A** nicht zusammenhängend ([10]), also in zwei Stücke spaltbar: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$. Die Beh. ist daher richtig für $q = 2$. Nun lässt sich vollständige Induktion anwenden. Es sei nämlich die Beh. schon bewiesen für $q = 2,\dots, q'$ und es sei $q = q' + 1$ gesetzt. Wir betrachten die Zerstückelung $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$. Da jede der $\mathbf{K}_\lambda$, $\lambda = 1,\dots, q' + 1$, in genau einem der $\mathbf{A}_j$, $j = 1, 2$, enthalten sein muss, so gilt: Entweder sind alle $\mathbf{K}_\lambda$ in einem der $\mathbf{A}_j$ enthalten, etwa in $\mathbf{A}_1$; dann sind die $\mathbf{K}_\lambda$ Komponenten auch von $\mathbf{A}_1$, sodass nach Induktionsannahme $\mathbf{A}_1$ in q' Stücke spaltbar ist, woraus (gemäss Nr. 1.3.) die Beh. folgt. Oder es sind in $\mathbf{A}_j$ genau q_j der $\mathbf{K}_\lambda$ enthalten, wobei $q_j \geq 1$, $j = 1, 2$, und $q_1 + q_2 = q$; dann ist nach Induktionsannahme $\mathbf{A}_j$ in q_j Stücke spaltbar, woraus die Beh. folgt.

Besitzt **A** endlich viele Komponenten, so ist **A** in seine Komponenten zerstückelbar, also jede ein Stück von **A** ([11]).

1.3.2. Ist **C** eine Komponente von **A** und ist **CB** nicht leer, so ist in **CB** (mindestens) eine Komponente von **AB** enthalten; und jede Komponente von **CB** ist Komponente von **AB**.

1.3.3. Es sei **L** eine (beschränkte) Punktmenge, deren offener Kern ganz auf der einen Seite ([12]) der Hyperebene **E** liegt (und deren abgeschlossene Hülle nicht fremd ist zu **E**). Ferner besitze $(\mathbf{L} - \mathbf{E})$ mindestens $r \geq 2$ Komponenten, welche in **E** münden ([13]).

Beh. Für jede, zu **E** hinreichend benachbarte Hyperebene $\mathbf{E}'$ besitzt $\mathbf{LE}'$ mindestens r Komponenten sofern *Erstens* $\mathbf{LE}'$ nicht leer ist, *Zweitens* $\overline{\mathbf{L}}\mathbf{E}$ in **E** ganz auf der einen Seite von $\mathbf{EE}'$ liegt; dabei gilt « Zweitens » als erfüllt insbesondere dann, wenn **E** und $\mathbf{E}'$ parallel sind.

Bew. Die in **E** mündenden Komponenten $\mathbf{K}_1,\dots, \mathbf{K}_r$ von $(\mathbf{L} - \mathbf{E})$ sind paarweise fremd und nicht leer. Für *jede*, zu **E** (im $E^{(n-1)}$) hinreichend benachbarte Hyperebene $\mathbf{E}'$ von der in der Beh. geforderten Art enthält

---

([10]) Weil mindestens zwei Komponenten vorhanden sind.

([11]) Vgl. HAUSDORFF, a. a. O. ([9]).

([12]) Unter einer Seite einer Hyperebene **E** verstehe man einen der beiden offenen (untereinander fremden zusammenhängenden Halbräume, in welche $(R^{(n)} - \mathbf{E})$ zerstückelbar ist.

([13]) Eine Punktmenge **P** mündet in der Punktmenge **Q**, wenn $\mathbf{Q}\overline{\mathbf{P}} \neq 0$, d. h. wenn Häufungspunkte von **P** zu **Q** gehören.

jede $\mathbf{K}_\rho$ Punkte auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{E}'$. Daher [14] ist $\mathbf{K}'_\rho = \mathbf{K}_\rho \mathbf{E}' \neq 0$, $\rho = 1, \ldots, r$. Mit Hilfe von Nr. 1.3.2. folgt jetzt die Beh.

1.3.4. Ein Kompaktum ist diskontinuierlich [15] dann und nur dann, wenn es punkthaft [15] ist. Ein Kompaktum mit genau bzw. mit höchstens m Komponenten, enthält daher, wenn es diskontinuierlich ist, genau bzw. höchstens m Punkte.

1.4. Erklärungen. Es sei $\mathbf{M}$ eine Punktmenge (im $W^{(n)}$) und $\mathbf{E}$ eine $(n-1)$-Ebene. Unter dem Komponenten-$\mathbf{L}_{n-1}$-Ordnungswert von $\mathbf{M}$ bezüglich $\mathbf{E}$, kurz K-Ordnungswert, verstehen wir die Anzahl (Kardinalzahl) der Komponenten von $\mathbf{ME}$. Ist $\mathbf{ME}$ punkthaft, so wird der K-Ordnungswert als Punkt-$\mathbf{L}_{n-1}$-Ordnungswert, kurz P-Ordnungswert, von $\mathbf{M}$ bezüglich $\mathbf{E}$ bezeichnet.

1.4.1. Jetzt sei $\mathbf{m}$ eine (beliebige) Menge von $(n-1)$-Ebenen. Existiert dann das Maximum der K-Ordnungswerte von $\mathbf{M}$ bezüglich *aller* $(n-1)$-Ebenen aus $\mathbf{m}$, so wird dieses Maximum als starker Komponenten-Ordnungswert von $\mathbf{M}$ bezüglich $\mathbf{m}$ bezeichnet, kürzer starker $(K|\mathbf{m})$-Ordnungswert oder st. $(K|\mathbf{m})$-Ord. Ist $\mathbf{ME}$ *punkthaft für jede* $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{m}$, so wird das Maximum der P-Ordnungswerte von $\mathbf{M}$ bezüglich aller $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{m}$ (falls dieses Maximum existiert) als starker $(P|\mathbf{m})$-Ordnungswert von $\mathbf{M}$, kürzer st. $(P|\mathbf{m})$-Ord., bezeichnet.

1.4.2. Hingegen bezeichne man als schwachen $(K|\mathbf{m})$-Ordnungswert von $\mathbf{M}$, kürzer schw. $(K|\mathbf{m})$-Ord., die kleinste (Kardinal)-Zahl z derart, dass die Menge der Hyperebenen aus $\mathbf{m}$, bezüglich deren $\mathbf{M}$ einen K-Ordnungswert grösser als z besitzt, nirgends dicht ist in $\mathbf{m}$. Existiert eine in $\mathbf{m}$ nirgends dichte Teilmenge $\mathbf{n}$ von $\mathbf{m}$ derart, dass $\mathbf{ME}$ punkthaft ist für jede $\mathbf{E} \varepsilon (\mathbf{m}-\mathbf{n})$, so werde als schwacher $(P|\mathbf{m})$-Ordnungswert von $\mathbf{M}$, kürzer schw. $(P|\mathbf{m})$-Ord., bezeichnet die kleinste Zahl z, für welche die Menge derjenigen Hyperebenen $\mathbf{E} \varepsilon (\mathbf{m}-\mathbf{n})$ nirgends dicht ist in $(\mathbf{m}-\mathbf{n})$, bezüglich deren $\mathbf{M}$ einen P-Ordnungswert grösser als z besitzt; im Falle $\mathbf{M}$ ein Kompaktum ist, kann « diskontinuierlich » an Stelle von « punkthaft » treten. Ist ein starker oder schwacher Ordnungswert eine natürliche Zahl, so sprechen wir kurz von beschränktem Ordnungswert.

---

[14] Vgl. Hausdorff, a. a. O. [9], 153.

[15] Vgl. Hausdorff, a. a. O [9], 152 und 160. Eine Punktmenge heisst diskontinuierlich bzw. punkthaft, wenn sie kein Kontinuum enthält bzw. wenn alle ihre Komponenten einpunktig sind.

1.5. Die Definition des schwachen $(P \mid \mathbf{m})$-Ordnungswertes ist (wegen des Auftretens der Menge $\mathbf{n}$) nicht symmetrisch zu der des schwachen $(K \mid \mathbf{m})$-Ordnungswertes. Daher ist folgende Bemerkung nicht ganz selbstverständlich:

Besitzt $\mathbf{M}$ den starken bzw. schwachen $(P \mid \mathbf{m})$-Ordnungswert k, so auch den starken bzw. schwachen $(K \mid \mathbf{m})$-Ordnungswert k.

Bew. Die Beh. braucht nur bezüglich des schw. Ord. bewiesen zu werden. Dazu genügt der Nachweis, dass die Menge aller Hyperebenen $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{m}$ mit ([16]) $M(\mathbf{ME}) \geq k+1$ nirgends dicht ist in ϑ $\mathbf{m}$, nicht aber die Menge q aller $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{m}$ mit $M(\mathbf{ME}) = k$. Nun ist aber $\mathbf{n}$ nirgends dicht in $\mathbf{m}$, ferner ist die Menge $\mathbf{p}$ aller Hyperebenen $\mathbf{E} \varepsilon (\mathbf{m} - \mathbf{n})$ mit $M(\mathbf{ME}) > k$ nirgends dicht in $(\mathbf{m} - \mathbf{n})$; daher ist $(\mathbf{n} + \mathbf{p})$ nirgends dich in $\mathbf{m}$. Wäre ferner nirgends dicht in $\mathbf{m}$, so wäre ϑ $(\mathbf{m} - \mathbf{n})\mathbf{q}$ nirgends dicht in $(\mathbf{m} - \mathbf{n})$ für in $\mathbf{m}$ nirgends dichtes $\mathbf{n}$. Dies ist nicht möglich, wenn $\mathbf{M}$ den schw. $(P \mid \mathbf{m})$-Ord. k besitzen soll.

Da, wie eben gezeigt, $\mathbf{q}$ nirgends dicht ist in $\mathbf{m}$, so folgt noch: Besitzt $\mathbf{M}$ den schw. $(P \mid \mathbf{m})$-Ordnungswert k, so gibt es eine in $\mathbf{m}$ offene Menge $\mathbf{O}$ derart, dass die Hyperebenen $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{m}$ mit $M(\mathbf{ME}) = k$ dicht liegen in $\mathbf{O}$. Entsprechendes gilt für den Fall schw. $(K \mid \mathbf{m})$-Ord..

§ 2. Komponentenordnung eines Kontinuums.

2.1. Die Punktmenge $\mathbf{M}$ des $W^{(n)}$, deren Ordnungswerte bezüglich der Menge $\mathbf{m}$ von Hyperebenen betrachtet wird, sei fortan *stets ein Kontinuum* $\mathbf{K}$. Ist $\mathbf{E}$ eine Hyperebene, so sind folglich die Komponenten von $\mathbf{KE}$ entweder einpunktig oder Kontinua, *falls* $\mathbf{KE} \neq 0$, was wir *stets annehmen, soweit nicht ausdrücklich anderes bemerkt* wird. Ist $\mathbf{K}$ in $\mathbf{E}$ enthalten, so ist der Komponenten-bzw. der Punktordnungswert von $\mathbf{K}$ bezüglich $\mathbf{E}$ bekannt, nämlich gleich Eins bzw. gleich Unendlich. Wir brauchen daher und werden im Folgenden *bei der Untersuchung von* $\mathbf{KE}$ *immer* nur den Fall *ins Auge fassen, dass* $\mathbf{KE} \neq \mathbf{K}$.

Zu jedem Stück $\mathbf{S}$ *von* $\mathbf{KE}$ *gibt es (mindestens) eine Komponente von* $(\mathbf{K} - \mathbf{E})$, *welche in* $\mathbf{S}$ *mündet* ([13]). In der Tat: Ist $\mathbf{KE} - \mathbf{S} = \mathbf{S}' \neq 0$, so existiert eine Komponente von $\mathbf{K} - \mathbf{E} = \mathbf{K} - \mathbf{S} - \mathbf{S}'$, welche in $\mathbf{S}$ (und zugleich in $\mathbf{S}'$) mündet ([17]). Falls $\mathbf{KE} - \mathbf{S} = 0$ ist, folgt die Beh. aus einem entsprechenden Satz ([18]).

([16]) Mit $M(\mathbf{A})$ werde die Mächtigkeit von $\mathbf{A}$ bezeichnet.

([17]) Zufolge des sogen. speziellen Brückensatzes. Vgl. HAUPT-NÖBELING-PAUC, *Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen*, « Journ. f. d. r. u. angew. Math. ». 182 (1940), 118.

([18]) Nämlich aus dem sogen. Randsatz von JANISZEWSKI, vgl. auch HAUSDORFF, a. a. O. ([9]), 161. Der Randsatz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Brückensatz.

2.1.1. Erklärung. Es sei $\mathbf{S}$ ein Stück von $\mathbf{KE}$. Da $\mathbf{S}$ einen positiven Abstand $4a > 0$ von $\mathbf{S}' = \mathbf{KE} - \mathbf{S}$ besitzt (der Fall $\mathbf{S}' = 0$ sei einbegriffen), so gibt es im $R^{(n)}$ Umgebungen $\mathbf{U}$ von $\mathbf{S}$, deren abgeschlossene Hüllen fremd sind zu $\mathbf{S}'$ und die von $\mathbf{S}'$ positiven Abstand besitzen; wegen $\mathbf{KE} \neq \mathbf{K}$ kann und soll $\mathbf{U}$ zugleich so gewählt werden, dass die Begrenzung $\mathbf{U}_g = \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{U}$ von $\mathbf{U}$ nicht fremd ist zu $\mathbf{K}$. Jede solche $\mathbf{U}$ werde als eine Normalumgebung $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{S})$ von $\mathbf{S}$ (bezüglich $\mathbf{E}$) bezeichnet. Als Mass für die Flachheit einer Normalumgebung diene der grösste Abstand der Punkte aus $\bar{\mathbf{p}}$ von $\mathbf{E}$.

Als n-dimensionale (Parallel)-Schicht im $R^{(n)}$ werde eine zusammenhängende, offene oder abgeschlossene, Punktmenge bezeichnet, deren Begrenzung gebildet wird von zwei parallelen $(n-1)$-Ebenen $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$.

Ist, wie oben, $\mathbf{p}$ eine Normalumgebung von $\mathbf{S} \subset \mathbf{KE}$, so gibt es wegen $(\mathbf{KE} - \mathbf{S})\bar{\mathbf{p}} = 0$ eine $\mathbf{E}$ enthaltende, offene Schicht $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{E})$ von folgender Beschaffenheit: Ist $\mathbf{p}_g = \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}$ die Begrenzung von $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{S})$, so ist $\mathbf{p}_g\mathbf{s}$ fremd zu $\mathbf{K}$. Dann ist $\mathbf{K}\mathbf{p}_g$ ganz in $(\mathbf{p}_g - \mathbf{s})$ enthalten und $(\mathbf{p}_g - \mathbf{s})$ ist spaltbar in zwei Stücke $\mathbf{d}_0'$, $\mathbf{d}_0''$ derart, dass $\mathbf{d}_0'$ alle auf der einen und $\mathbf{d}_0''$ alle auf der anderen Seite ([12]) von $\mathbf{E}$ gelegenen Punkte aus $(\mathbf{p}_g - \mathbf{s})$ enthält. Wir bezeichnen dann irgend zwei abgeschlossene Teile $\mathbf{d}'$ bzw. $\mathbf{d}''$ von $\mathbf{d}_0'$ bzw. $\mathbf{d}_0''$, für welche $(\mathbf{d}' + \mathbf{d}'')\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{p}_g$ $(\neq 0)$ ist, als zwei Deckel der Normalumgebung $\mathbf{p}(\mathbf{S})$. Unter den Normalumgebungen von $\mathbf{S}$ gibt es immer solche mit zwei Deckeln $\mathbf{d}'$, $\mathbf{d}''$ derart, dass $\mathbf{d}'$ sowohl als $\mathbf{d}''$ je ganz in einer Hyperebene liegt; solche $\mathbf{p}(\mathbf{S})$ sollen als Normalumgebungen (von $\mathbf{S}$) im engeren Sinne (i. e. s.) bezeichnet werden.

2.1.2. Es sei $\mathbf{S}$ ein Stück von $\mathbf{KE}$ und $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{S})$ eine Normalumgebung von $\mathbf{S}$ (bezüglich $\mathbf{E}$) mit Deckeln $\mathbf{d}'$, $\mathbf{d}''$. Dann mündet jede Komponente von $\mathbf{Kp}$ in $(\mathbf{d}' + \mathbf{d}'')$ (gemäss des Randsatzes ([18])); insbesondere gilt dies also für jede, einen Punkt von $\mathbf{S}$ enthaltende Komponente von $\mathbf{Kp}(\mathbf{S})$.

2.1.2.1. Ist $\mathbf{K}$ von st. oder schw. beschränktem $(K \mid \mathbf{f})$-Ordnungswert, ist ferner $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{f}$ (mit $\mathbf{KE} \neq \mathbf{K}$) und ist $\mathbf{p}$ eine Normalumgebnung eines Stückes von $\mathbf{KE}$, so besitzt jede Komponente $\mathbf{T}$ von $\mathbf{Kp}$ oder von $\mathbf{K}\bar{\mathbf{p}}$ beschränkten st. oder schw. $(K \mid \mathbf{f}_u)$-Ordnungswert, wobei $\mathbf{f}_u$ eine Umgebung von $\mathbf{E}$ in $\mathbf{f}$ bezeichnet. (Folgt aus Nr. 1.3.2. und 1.3.1).

2.1.3. Erklärung. Nachdem (in Nr. 2.1.) die bei der Definition der Ordnungswerte betrachteten Mengen $\mathbf{M}$ spezialisiert wurden (nämlich zu Kontinuen), soll jetzt eine *Spezialisierung auch der* Hyperebenenmengen $\mathbf{m}$ vorgenommen werden. Als *Hyperebenenmengen* $\mathbf{f} \subset E^{(n-1)}$, auch $\mathbf{f}$-Mengen bezüglich $\mathbf{K}$, seien von jetzt ab solche bezeichnet, welche folgende Eigenschaften besitzen: 1) Zu jeder $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{f}$ mit $\mathbf{KE} \neq 0$ gibt es beliebig benachbarte $\mathbf{E}^* \varepsilon \mathbf{f}$, deren Durchschnitt mit $\mathbf{E}$ fremd ist zu einer festen, der Menge $\mathbf{f}$ zugeordneten Umgebung [19] von $\mathbf{K}$ (im $R^{(n)}$); 2) unter diesen $\mathbf{E}^*$ gibt es immer zu $\mathbf{E}$ beliebig benachbarte $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$ derart. dass $\mathbf{KE}$ in der Summe der beiden, von $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{E}''$ gebildeten Winkelräume $\mathbf{w}^{(j)} = \mathbf{w}^{(j)}(\mathbf{E}', \mathbf{E}'')$, $j = 1, 2$, beliebig kleiner Oeffnung liegt [20].

Beispiele solcher Hyperebenenmengen $\mathbf{f}$ sind: *a)* Jede im $E^{(n-1)}$ dichte Hyperebenenmenge; *b)* Jede in einem Büschel von Hyperebenen dichte Hyperebenenmenge, falls die Büschelachse fremd ist zu $\mathbf{K}$. Dabei wird eine Menge $\mathbf{b}$ von Hyperebenen als Büschel bezeichnet, wenn $\mathbf{b}$ aus genau allen Hyperebenen besteht welche entweder eine feste $(n-2)$-Ebene, die sogenannte Achse des Büschels, als gemeinsamen Durchschnitt enthalten oder welche zu einer Hyperebene parallel sind (wenn die Büschelachse uneigentlich ist).

Als *Hyperebenenmenge* $\mathbf{g}$ werde jede Teilmenge von $E^{(n-1)}$ bezeichnet, welche die beiden folgenden (gegenüber den an die Mengen $\mathbf{f}$ gestellten Forderungen etwas verschärften) Eigenschaften besitzt: I) Zu jeder $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{g}$ gibt es beliebig benachbarte $\mathbf{E}' \varepsilon \mathbf{g}$ derart, dass $\mathbf{KE}$ in der $(n-1)$-Ebene $\mathbf{E}$ ganz auf *einer* Seite der $(n-2)$-Ebene $\mathbf{EE}'$ liegt; II) unter diesen $\mathbf{E}'$ gibt es immer zu $\mathbf{E}$ beliebig benachbarte $\mathbf{E}_1' \varepsilon \mathbf{g}$, $\mathbf{E}_2' \varepsilon \mathbf{g}$ derart, dass $\mathbf{KE}$ ganz in einem der beiden, von $\mathbf{E}_1'$ und $\mathbf{E}_2'$ gebildeten Winkelräume $\mathbf{w}^{(j)}(\mathbf{E}_1', \mathbf{E}_2')$ von beliebig kleiner Oeffnung liegt, $j = 1, 2$.

Beispiele solcher Hyperebenenmengen $\mathbf{g}$ sind: *a)* jede im $E^{(n-1)}$ dichte Menge von Hyperebenen; *b)* jede in einem Büschel von Hyperbenen dichte Hyperebenenmenge, falls die Büschelachse fremd ist zur abgeschlossenen konvexen Hülle von $\mathbf{K}$.

2.1.4. Nunmehr kann folgendes behauptet werden:

Vor. Es besitze $\mathbf{K}$ den schwachen $(K \mid \mathbf{f})$-Ordnungswert k.

Beh. In keiner Hyperebene $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{f}$ können mehr als $2k$ Komponenten von $(\mathbf{K} - \mathbf{E})\mathbf{U}$ münden, wobei unter $\mathbf{U}$ eine beliebige Umgebung von $\mathbf{E}$ im $R^{(n)}$ bzw. im $W^{(n)}$ verstanden wird. Daher kann $\mathbf{KE}$ für keine Hyperebene $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{f}$ mehr als $2k$ Komponenten besitzen.

---

(19) Ist $\mathbf{E}$ eine Hyperebene aus einer $\mathbf{f}$-Menge, so sind im Folgenden etwa benötigte Normalumgebungen für Stücke von $\mathbf{KE}$ immer so zu wählen, dass sie ganz in derjenigen Umgebung von $\mathbf{K}$ enthalten sind, welche $\mathbf{f}$ zugeordnet ist. Dies ist mit der Definition der Normalumgebungen vereinbar.

(20) Aus der Definition von $\mathbf{f}$ (Nr. 2.1.3.) folgt, dass $\mathbf{K}$ nicht in allen Hyperebenen aus $\mathbf{f}$ enthalten sein kann. Wenn für *jede* Hyperebene $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{f}$ entweder $\mathbf{KE} = \mathbf{K}$ oder $\mathbf{KE} = 0$ gilt, so ist der $(K \mid \mathbf{f})$-Ordnungswert von $\mathbf{K}$ gleich Eins oder Null; dieser Fall kann daher im Folgenden stets ausgegeschlossen werden.

1. Zusatz. Ist $\mathbf{A}$ eine abgeschlossene Menge, deren Rand $\mathbf{A}_r$ völlig in t Hyperebenen aus $\mathfrak{f}$ liegt, dann besitzt $\mathbf{K}\overline{\mathbf{A}}$ nicht mehr als $2kt$ Komponenten (diese münden sämtlich in $\mathbf{A}_r$), wenn der Durchschnitt je zweier der t Hyperebenen fremd ist zu $\mathbf{AK}$; diese Einschränkung hinsichtlich $\mathbf{AK}$ ist jedenfalls dann überflüssig, wenn $\mathbf{K}$ sogar den schw. $(P\,|\,\mathfrak{f})$-Ordnungswert k besitzt. Ferner besitzt $\mathbf{Kp}$ für eine Normalumgebung i. e. S., deren Deckel auf Hyperebenen aus $\mathfrak{f}$ liegen, nicht mehr als $4k$ Komponenten.

2. Zusatz. Besitzt $\mathbf{K}$ spezieller den schwachen $(K\,|\,\mathfrak{g})$-Ordnungswert k, so können nicht mehr als k Komponenten von $(\mathbf{K}-\mathbf{E})$ auf der gleichen Seite von $\mathbf{E}$ münden.

Bew. 1. Es seien $\mathbf{H}^+$, $\mathbf{H}^-$ die beiden offenen, fremden Halbräume, in welche $(R^{(n)}-\mathbf{E})$ zerstückelbar ist. Angenommen, es münden in $\mathbf{E}$ mehr als $2k$ Komponenten von $(\mathbf{K}-\mathbf{E})\mathbf{U}$. Es seien dann $\mathbf{C}_1,\ldots, \mathbf{C}_h$ derartige Komponenten, wobei $h=2k+1$. Je nachdem $\mathbf{C}_\varkappa\mathbf{H}^+\neq 0$ oder $=0$ setzen wir $\mathbf{P}_\varkappa=\mathbf{C}_\varkappa$ bzw. $\mathbf{M}_\varkappa=\mathbf{C}_\varkappa$, $\varkappa=1,\ldots, h$.

2. Wir betrachten nun die Hyperebenenpaare $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$ aus $\mathfrak{f}$, für welche $\mathbf{KE}\subset\mathfrak{w}^{(1)}(\mathbf{E}', \mathbf{E}'')+\mathfrak{w}^{(2)}(\mathbf{E}', \mathbf{E}'')=\mathfrak{w}_1+\mathfrak{w}_2$ (gemäss Eigenschaft 2) von $\mathfrak{f}$ in Nr. 2.1.3.). Die Anzahl der $\mathbf{P}_\varkappa$ bzw. $\mathbf{M}_\varkappa$ mit $\mathbf{P}_\varkappa\mathfrak{w}_j\neq 0$ bzw. mit $\mathbf{M}_\varkappa\mathfrak{w}_j\neq 0$ sei $\bar{p}_j=\bar{p}_j(\mathbf{E}', \mathbf{E}'')$ bzw. $\bar{m}_j=\bar{m}_j(\mathbf{E}', \mathbf{E}'')$, $j=1, 2$. Es ist dann $\bar{p}_1+\bar{m}_2+\bar{p}_2+ +\bar{m}_1=h>2k$. Aus der Gesamtheit aller derartigen Hyperebenenpaare kann man (gemäss Eigenschaft 2) von $\mathfrak{f}$) eine unendliche Folge (von Paaren, von $\mathbf{E}$ verschiedener Hyperebenen) herausgreifen derart, dass die $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$ dieser Folge gegen $\mathbf{E}$ konvergieren. In dieser Folge ist daher eine (unendliche) Teilfolge $\{\mathbf{E}_i', \mathbf{E}_i''\}$ enthalten, für welche $\bar{p}_j(\mathbf{E}_i', \mathbf{E}_i'')=p_j$, $\bar{m}_j(\mathbf{E}_i', \mathbf{E}_i'')=m_j$, $j=1, 2$, unabhängig von i ist und für welche $\mathbf{P}_\varkappa\mathfrak{w}^{(j)}(\mathbf{E}_i', \mathbf{E}_i'')\neq 0$ bzw. $\mathbf{M}_\varkappa\mathfrak{w}^{(j)}(\mathbf{E}_i', \mathbf{E}_i'')\neq 0$, $j=1, 2$, für genau die gleichen $P_\varkappa$ bzw. $M_\varkappa$ unabhängig von i. Wegen $(p_1+m_2)+(p_2+m_1)>2k$ kann dabei o. B. d. A. $p_1+m_2>k$ angenommen werden.

3. Für alle hinreichend grossen i, etwa für $i=q$, hat $\mathbf{E}_q'$ oder $\mathbf{E}_q''$, etwa $\mathbf{E}_q'$, die folgende Eigenschaft: Jede $\mathbf{P}_\varkappa$ mit $\mathbf{P}_\varkappa\mathfrak{w}^{(1)}(\mathbf{E}_q', \mathbf{E}_q'')\neq 0$ und jede $\mathbf{M}_\varkappa$ mit $\mathbf{M}_\varkappa\mathfrak{w}^{(2)}(\mathbf{E}_q', \mathbf{E}_q'')\neq 0$ enthält Punkte auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{E}_q'$. und gleiches gilt dann überhaupt für jede Hyperebene $\mathbf{E}^*$, welche einer passenden Umgebung $\mathfrak{u}$ von $\mathbf{E}_q'$ im $\mathbf{E}^{(n-1)}$ angehört. Daher ist $\mathbf{P}_\varkappa\mathbf{E}^*\neq 0$ und $\mathbf{M}_\varkappa\mathbf{E}^*\neq 0$ für jede der in Rede stehenden $\mathbf{P}_\varkappa$ und $\mathbf{M}_\varkappa$ sowie für jede solche $\mathbf{E}^*\in\mathfrak{u}$. Gemäss Nr. 1.3.2. besitzt daher $\mathbf{KE}^*$ mindestens $(k+1)$ Komponenten. Andererseits kann $\mathfrak{u}\mathfrak{f}$ nur eine in $\mathfrak{f}$, also auch in $\mathfrak{u}\mathfrak{f}$ und in $\mathfrak{u}$

nirgends dichte Menge $\mathfrak{n}$ von Hyperebenen $\mathbf{E}$ enthalten, für welche $\mathbf{KE}$ mehr als k Komponenten besitzt; denn der schwache $(K \mid \mathfrak{f})$-Ordnungswert von $\mathbf{K}$ ist kleiner als $(k+1)$.

4. Es können also in jeder Hyperebene $\mathbf{E} \varepsilon \mathfrak{f}$ höchstens $2k$ Komponenten von $(\mathbf{K}-\mathbf{E})\mathbf{U}$ münden. Würde nun $\mathbf{KE}$ für irgend eine $\mathbf{E} \varepsilon \mathfrak{f}$ mehr als $2k$ Komponenten besitzen, so zerspalte man $\mathbf{KE}$ in $h = 2k+1$ Stücke $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_h$ (gemäss Nr. 1.3.1.) und konstruiere zu jedem $\mathbf{S}_\varkappa$ eine Normalumgebung $\mathfrak{p}_\varkappa = \mathfrak{p}(\mathbf{S}_\varkappa)$ mit $\overline{\mathfrak{p}}_\varkappa \overline{\mathfrak{p}}_\tau = 0$ für $\varkappa \neq \tau$; $\varkappa, \tau = 1, \ldots, h$. Dann gibt es eine Umgebung $\mathbf{U}$ von $\mathbf{E}$ im $R^{(n)}$ derart, dass $\mathbf{KU} = \mathbf{K}\mathfrak{p}_1 + \ldots + \mathbf{K}\mathfrak{p}_h$ eine Zerstückelung von $\mathbf{KU}$ ist. Gemäss Nr. 2.1. besitzt jetzt $(\mathbf{K}-\mathbf{E})\mathbf{U}$ mindestens h in $\mathbf{E}$ mündende Komponenten im Widerspruch zu dem vorhin Bewiesenen.

5. Der 1. Zusatz braucht nur für den Fall begründet zu werden, dass $\mathbf{K}$ den schw. $(P \mid \mathfrak{f})$-Ord. k besitzt und bass die Einschränkung hinsichtlich $\mathbf{AK}$ nich gefordert ist. Angenommen, es würden auf dem Durchschnitt von $\mathbf{A}_r$ mit einer der t Hyperebenen mindestens $(2k+1)$ Komponenten $\mathbf{Z}_i$ von $\underline{\mathbf{A}}\mathbf{K}$ münden. Gemäss Ziff. 3 des vorangehenden Beweises existiert dann eine Hyperebene $\mathbf{E}_q'$, sodass $(k+1)$ der $\mathbf{Z}_i$, etwa $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_{k+1}$ Punkte auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{E}_q'$ besitzen. Gleiches gilt für eine Umgebung $\mathfrak{u}$ von $\mathbf{E}_q'$ im $E^{(n-1)}$. Da aber die $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_{k+1}$ paarweise fremd sind, enthält jede $\mathbf{E} \varepsilon \mathfrak{u}$ mindestens $(k+1)$ Punkte von $\mathbf{K}$. Widerspruch damit, dass $\mathbf{K}$ den schw. $(P \mid \mathfrak{f})$-Ord. k besitzen soll. Der Bew. des 2. Zusatzes ergibt sich mit Hilfe von Nr. 1.3.3., wenn man die Eigenschaften von $\mathfrak{g}$ (Nr. 2.1.3.) berücksichtigt.

2.2. Aus Nr. 2.1.4. entnimmt man ohne weiteres folgende Beziehung zwischen starkem und schwachem $(K \mid \mathfrak{f})$-Ordnungswert.

Satz. *Besitzt das Kontinuum* $\mathbf{K}$ *den* schwachen $(\mathrm{K} \mid \mathfrak{f})$-*Ordnungwert* k, *so besitzt* $\mathbf{K}$ *zugleich einen* starken $(\mathrm{K} \mid \mathfrak{f})$-*Ordnungswert, der nicht grösser ist als* 2k.

2.2.1. Mit Hilfe von Nr. 2.2. folgt unter anderem:

Besitzt $\mathbf{K}$ *den schwachen* $(\mathrm{K} \mid \mathfrak{f})$-*oder* $(\mathrm{P} \mid \mathfrak{f})$-*Ordnungswert* k, *so enthält* $\mathbf{KE}$ *für jede* $\mathbf{E} \varepsilon \mathfrak{f}$ *mit diskontinuierlichem (nicht leerem)* $\mathbf{KE}$ *nicht mehr als* 2k *Punkte; enthält* $\mathbf{KE}$ *mehr als* 2k *Punkte, so enthält* $\mathbf{KE}$ *sogar Kontinua.*

Bew. Gemäss Nr. 1.5. besitzt $\mathbf{K}$ in jedem Falle den schwachen $(K \mid \mathfrak{f})$-Ord. k, also (gemäss Nr. 2.2.) einen starken $(K \mid \mathfrak{f})$-Ord. $\leq 2k$. Für diskontinuierliche $\mathbf{KE}$ folgt daher die Beh. aus Nr. 1.3.4.

2.3. In dieser und den folgenden Nummern des gegenwärtigen Paragraphen stellen wir, in Weiterführung verschiedener, bereits gemachter Feststellungen, noch einige, für später erforderliche Bemerkungen zusammen.

Es besitze **K** einen beschränkten schwachen $(K|\mathbf{f})$-Ordnungswert. Gemäss Nr. 2.2. besitzt dann **KE** für jede **E** ε **f** nur beschränkt viele Komponenten **S**, deren jede also ein Stück von **KE** ist (Nr. 1.3.1). Mündet nun für mindestens eine Normalumgebung **p** von **S** die Komponente $\mathbf{S}^*$ von **Kp** mit $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}^*$ *gleichzeitig* auf beiden Deckeln von **p**, so heisse **S** eine Schnitt*komponente* von **KE**; zu jeder in **p** enthaltenen (flacheren) Normalumgebung von **S** existiert dann ebenfalls eine derartige $\mathbf{S}^*$. Ist daher **S** *nicht* Schnittkomponente, so mündet für jede beliebig flache Normalumgebung **p** von **S** die Komponente $\mathbf{S}^*$ von **Kp** mit $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}^*$ je nur in *einem* der Deckel von **p**. Somit ist dann für alle (hinreichend flachen) **p** der Durchschnitt von $\mathbf{K}\bar{\mathbf{p}}$ mit der *einen* Seite von **E** leer. Denn sonst gäbe es jedenfalls eine konvergente Folge von Komponenten von $\mathbf{K}\bar{\mathbf{p}}$, welche ganz auf dieser einen Seite von **E** liegen und deren Abstände von **S** schliesslich alle beliebig klein sind; der Limes dieser Komponentenfolge würde dann zu einer in **S** mündenden Komponente von $(\mathbf{K} - \mathbf{E})\mathbf{p}$ führen, welche ganz auf der fraglichen Seite von **E** liegt. In dem soeben besprochenen Fall heisse **S** eine Stützkomponente von **KE**. Bei beschränktem schw. $(K|\mathbf{f})$-Ord. ist also jede Komponente von **KE** entweder Schnitt-oder Stützkomponente. Ist die betrachtete Komponente **S** insbesondere einpunktig, so spricht man auch von einem Schnitt-bzw. Stützpunkt.

2.4. Hilfsbemerkung. Vor. Es sei **K** ein Kontinuum von beschränktem schwachen $(K|\mathbf{f})$-Ordnungswert. Ferner sei **E** eine Hyperebene aus **f** derart, dass auf beiden Seiten von **E** Punkte aus **K** liegen.

Beh. Es enthält **KE** mindestens eine *Schnitt*komponente.

Bew. Zunächst jedenfalls ist **KE** nicht leer und enthält nur beschränkt viele Komponenten (Nr. 2.2.), welche sämtlich Stücke von **KE** sind. Es seien $\mathbf{S}_\rho$, $\rho = 1,\dots, r$ alle diese Komponenten. Da für $r = 1$ nichts zu beweisen ist, sei $r \geq 2$. Wären nun die $\mathbf{S}_\rho$ sämtlich Stützkomponenten, $\rho = 1,\dots, r$, so gäbe es zu jeder $\mathbf{S}_\rho$ eine Normalumgebung $\mathbf{p}_\rho$ derart, dass **K** innerhalb $\mathbf{p}_\rho$ ganz auf einer Seite von **E** liegt. Da $(\mathbf{K} - \mathbf{p}_1 - \dots - \mathbf{p}_r)$ in zwei Stücke $\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}''$ spaltbar ist, die auf verschiedenen Seiten von **E** liegen, und da nun jedes $\mathbf{K}\bar{\mathbf{p}}_\rho$ mit nur einem der $\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}''$ Punkte gemeinsam hätte, ergäbe sich eine (nicht triviale) Zerstückelung von **K**, was unmöglich ist.

2.5.1. Es sei **K** ein Kontinuum von beschränktem schwachem $(K|\mathbf{f})$-Ordnungswert. Ferner sei **S** eine *Schnitt*komponente von **KE** für **E** ε **f** und $\mathbf{p}'$ eine Normalumgebung von **S**. Dann gibt es eine Hyperebenenumgebung **u** von **E** in **f** derart, dass $\mathbf{KE}'$ für jede $\mathbf{E}'$ ε **u** mindestens eine, in $\mathbf{p}'$ enthaltene *Schnitt*komponente besitzt.

Bew. Nach Vor. gibt es eine, in $\mathbf{p}'$ enthaltene Normalumgebung $\mathbf{p}$ von $\mathbf{S}$ derart, dass diejenige Komponente $\mathbf{S}^*$ von $\mathbf{Kp}$, in welcher $\mathbf{S}$ enthalten ist, in *beiden* Deckeln $\mathbf{d}'$, $\mathbf{d}''$ von $\mathbf{p}$ mündet. Da somit Punkte von $\mathbf{S}^*$ auf beiden Seiten einer jeden, zu $\mathbf{E}$ hinreichend benachbarten (und zu $(\mathbf{d}' + \mathbf{d}'')$ fremden) Hyperebene $\mathbf{E}'$ liegen, da ferner das Kontinuum $\bar{\mathbf{S}}^*$ von beschränktem K-Ordnungswert bezüglich jeder solchen $\mathbf{E}'$ ist, soweit sie zu $\mathbf{f}$ gehört (Nr. 2.1.2.1.), so folgt die Beh. aus Nr. 2.4.

2.5.2. Es sei $\mathbf{K}$ Kontinuum von beschränktem schwachem $(K|\mathbf{f})$-Ordnungswert. Ferner sei $\mathbf{S}$ eine (Schnitt-oder Stütz-)Komponente von $\mathbf{KE}$ mit $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{f}$ und $\mathbf{p}$ eine Normalumgebung von $\mathbf{S}$. Dann gibt es (in $E^{(n-1)}$) in beliebiger Nähe von $\mathbf{E}$ eine in $\mathbf{f}$ offene Menge $\mathbf{u}$ von Hyperebenen $\mathbf{E}' \varepsilon \mathbf{f}$ derart, dass für jede $\mathbf{E}' \varepsilon \mathbf{u}$ gilt: Es besitzt $\mathbf{KE}'$ (mindestens) eine, innerhalb $\mathbf{p}$ gelegene *Schnitt*komponente.

Bew. Gemäss der Definition von $\mathbf{f}$ (Nr. 2.1.3.) gibt es zu $\mathbf{E}$ beliebig benachbarte Hyperebenen $\mathbf{E}_0 \varepsilon \mathbf{f}$ derart, dass Punkte der in $\mathbf{S}$ mündenden Komponente $\mathbf{S}^*$ von $\mathbf{Kp}$ gleichzeitig auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{E}_0$ liegen, während $\mathbf{S}$ ganz auf der einen Seite von $\mathbf{E}_0$ gelegen ist. Gemäss Nr. 2.4. folgt die Beh.

2.6. Als Abschluss des gegenwärtigen § 2 bringen wir einige, später gebrauchte Betrachtungen über gewisse Mengen von Hyperebenen $\mathbf{E}$, für welche $\mathbf{KE}$ *nicht-diskontinuierlich* ist; dabei ist $\mathbf{K}$ als von *beschränktem schwachem* $(K\ E^{(n-1)})$-*Ordnungswert* angenommen.

2.6.1. Erklärung. Unter einer 1-Schar von Hyperebenen (im $R^{(n)}$ für $n \geq 2$) mit der Zentrale $\mathbf{z}$ verstehe man die Menge aller Hyperebenen, deren Durchschnitt die 1-Ebene (Gerade) $\mathbf{z}$ ist. Da für $n = 2$, d. h. im $R^{(2)}$, die Geraden mit den Hyperebenen (1-Ebenen) zusammenfallen, so enthält für $n = 2$ eine 1-Schar ausser der Zentrale keine weitere Hyperebene; für $n = 3$ sind die 1-Scharen identisch mit den Hyperebenenbüscheln (vgl. Nr. 2.1.3.).

Nun sei $\mathbf{Q}$ eine Punktmenge im $R^{(n)}$ mit $n \geq 2$. Man bezeichne dann als $\mathbf{Q}$-Menge von Hyperbenen eine Menge von überabzählbarvielen, abgekürzt: « ü. a. », Hyperebenen von folgender Beschaffenheit: Die $\mathbf{Q}$-Menge besitzt keine Teilmenge von ü. a. Hyperebenen derart, dass die Hyperebenen der Teilmenge enthalten sind in einer Summe von *endlich vielen 1-Scharen mit zu* $\mathbf{Q}$ *nicht fremden Zentralen.* Die Eigenschaft, $\mathbf{Q}$-Menge zu sein, ist *erblich,* d. h. jede ü. a. Teilmenge von Hyperebenen aus einer $\mathbf{Q}$-Menge ist selbst $\mathbf{Q}$-Menge.

2.6.2. Beispiele von $\mathbf{Q}$-Mengen werden, wenigstens für den Fall [24] *beschränkter* $\mathbf{Q}$, geliefert durch sogenannte *Büschelmengen* $\mathbf{N}(\mathbf{E}_0, \mathfrak{u}) = \mathbf{N}(\mathbf{E}_0, \mathfrak{u}, \mathbf{Q})$ bezüglich $\mathbf{Q}$ welche folgendermassen erklärt sind ($n \geq 2$): Es sei $\mathbf{E}_0$ eine beliebig vorgegebene Hyperebene, ferner sei $\mathfrak{u}$ eine beliebige Umgebung von $\mathbf{E}_0$ im $E^{(n-1)}$. In $\mathbf{E}_0$ seien *ü. a., zu* $\mathbf{Q}$ *fremde* $(n-2)$-Ebenen $\mathbf{A}$ gewählt, von denen je n linear unabhängig [22] sind; solche ü. a. $\mathbf{A}$ gibt es. Unter einer $\mathbf{N}(\mathbf{E}_0, \mathfrak{u})$ soll nun verstanden werden die Gesamtheit $\mathfrak{v}$ aller zu $\mathfrak{u}$ gehörigen Hyperebenen, welche in den ü. a. Büscheln mit den Achsen $\mathbf{A}$ enthalten sind (oder gelegentlich auch eine Teilmenge $\mathfrak{v}'$ von Hyperebenen aus $\mathfrak{u}$ derart, dass in jedem der ü. a. Büschel ü. a. Hyperebenen aus $\mathfrak{v}'$ enthalten sind und dass diese dicht liegen im Büschel).

Dass diese $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{E}_0, \mathfrak{u}, \mathbf{Q})$ wirklich $\mathbf{Q}$-Mengen sind, sieht man so: Für $n = 2$ existiert nach dem oben (Nr. 2.6.1.) Bemerkten keine ü. a. Teilmenge von $\mathbf{N}$, die sich auf endlich viele 1-Scharen verteilt. Für $n \geq 3$ kann man indirekt schliessen. Angenommen nämlich, es existiere in $\mathbf{N}$ eine ü. a. Teilmenge $\mathbf{N}'$ von Hyperebenen, welche enthalten ist in einer Summe endlich vieler 1-Scharen $\mathbf{N}_j$, $j = 1, \ldots, I$, wobei die Zentrale $\mathbf{z}_j$ von $\mathbf{N}_j$ nicht fremd ist zu $\mathbf{Q}$. Wir setzen $\mathbf{N}_j' = \mathbf{N}'\mathbf{N}_j$. Mindestens eine der $\mathbf{N}_j'$, etwa $\mathbf{N}_1'$, müsste dann ü. a., untereinander und von $\mathbf{E}_0$ verschiedene Hyperebenen $\mathbf{E}', \mathbf{E}'', \ldots$ enthalten. Diese $\mathbf{E}', \mathbf{E}'', \ldots$ müssten überdies je zu verschiedenen Büscheln bzw. Achsen $\mathbf{A}$ gehören, etwa $\mathbf{E}'$ zu $\mathbf{A}'$, $\mathbf{E}''$ zu $\mathbf{A}''$, u. s. w.; würden nämlich z. B. $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{E}''$, wobei $\mathbf{E}' \neq \mathbf{E}''$, beide zu $\mathbf{A}'$ gehören so wäre $\mathbf{E}'\mathbf{E}'' = \mathbf{A}'$ und deswegen sowie wegen $\mathbf{Q}\mathbf{A}' = 0$ wäre jede in $\mathbf{E}'\mathbf{E}''$ enthaltene Gerade fremd zu $\mathbf{Q}$, was der Existenz von $\mathbf{z}_1 \subset \mathbf{E}'\mathbf{E}''$ mit $\mathbf{z}_1\mathbf{Q} \neq 0$ widersprechen würde. Nun hat $\mathbf{z}_1$ *entweder* mit $\mathbf{E}_0$ genau einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt gemeinsam *oder* $\mathbf{z}_1$ ist in $\mathbf{E}_0$ enthalten. Die erstere Möglichkeit scheidet aus, weil unter den, den $\mathbf{E}', \mathbf{E}'', \ldots$ entsprechenden, ü. a. $\mathbf{A}', \mathbf{A}'', \ldots$ je n linear unabhängig, also höchstens $(n-1)$ nicht fremd sind zu $\mathbf{z}_1\mathbf{E}_0$ und weil andererseits $\mathbf{z}_1\mathbf{E}_0$ im Durchschnitt einer jeden der $\mathbf{E}', \mathbf{E}'', \ldots$ mit $\mathbf{E}_0$, also in einer jeden der $\mathbf{A}', \mathbf{A}'', \ldots$ liegen müsste, da die $\mathbf{E}', \mathbf{E}'', \ldots$ sämtlich von $\mathbf{E}_0$ verschieden sein sollten. Ebenso ist der Fall $\mathbf{z}_1 \subset \mathbf{E}_0$ unmöglich; denn $\mathbf{z}_1$ kann nur in endlich vielen der $\mathbf{A}', \mathbf{A}'', \ldots$ enthalten sein und für die übrigen wäre jede, $\mathbf{z}_1$ und z. B. $\mathbf{A}''$ enthaltende Hyperebene gleich $\mathbf{E}_0$.

---

[24] Da als Mengen $\mathbf{Q}$ im Folgenden nur Kontinua auftreten, genügt die Betrachtung beschränkter $\mathbf{Q}$.

[22] Um den Fall der Büschel mit uneigentlicher Achse $\mathbf{A}$ (Büschel paralleler Hyperebenen) mitzuerfassen, wird man den Begriff des linearen Unabhängigkeit entsprechend erweitern.

2.7. Nunmehr beweisen wir den folgenden:

Hilfssatz. Vor. Es sei **K** ein Kontinuum von beschränktem schwachem $(K \mid E^{(n-1)})$-Ordnungswert ([23]) ($n \geq 2$). Ferner sei **KE** nicht-diskontinuierlich für jede Hyperebene **E** aus einer fest vorgegebenen **K**-Menge **m**.

Beh. 1. Es gibt eine Menge **b**′ von *überabzählbarvielen* parallelen Hyperebenen **B** und eine offene Schicht **s**, deren Begrenzungshyperebenen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ auf den **B** senkrecht stehen derart, dass **KB** für *jede* **B** ε **b**′ ein Kontinuum $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{B})$ enthält, dessen Durchschnitt mit jeder, ganz in **s** gelegenen (zu $\mathbf{P}_1$ parallelen) Hyperebene **P** nicht leer ist. Für jede solche **P** enthält also **KP** insbesondere überabzählbarviele Punkte.

2. Zu jeder der in 1. genannten Hyperebenen **P** gibt es eine Umgebung **v** im $E^{(n-1)}$ derart, dass auch jede (nicht notwendig zu **P** parallele) Hyperebene **P**′ ε **v** mit *jedem* **T(B)** einen nicht leeren Durchschnitt hat. Für jede solche **P**′ enthält also auch **KP**′ inbesondere überabzählbarviele Punkte.

Der Beweis kann so geführt werden.

2.7.1. Aus der Vor. folgt die Existenz von ü. a. Hyperebenen **E** ε **m**, für welche **KE** ein Kontinuum **C(E)** enthält, dessen Durchmesser grösser ist als eine, für alle diese **E** gleiche Zahl $a > 0$. Entsprechend folgt, dass es unter diesen **E** ü. a. solche Hyperebenen $\mathbf{E}_w$ gibt, für welche die Endpunkte T_w', T_w'' eines Durchmessers von $\mathbf{C}_w = \mathbf{C}(\mathbf{E}_w)$ je in einer, für alle $\mathbf{C}_w$ festen, offenen Kugel W' hzw. W'' liegen, deren Radius kleiner ist als $2^{-3}a$. Wir bezeichnen den Mittelpunkt von W' bzw. W'' mit M' bzw. M'', ferner ihre Verbindungsstrecke mit $\overline{M'M''}$.

2.7.2. Es sei jetzt **b** die Menge aller Hyperebenen **B**, welche senkrecht stehen auf $\overline{M'M''}$ und welche von $\overline{M'M''}$, aber weder von W' noch von W'' getroffen werden. Behauptet wird, dass **KB** *für alle* **B** ε **b** *mit höchstens einer Ausnahme ein Kontinuum* $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{B})$ *enthält*. In der Tat: Ist **KB** diskontinuierlich, so enthält **KB** höchstens $2k$ Punkte, wenn k der schw. $(K \mid E^{(n-1)})$-Ord. von **K** (Nr. 2.2.1.). Ferner ist $\mathbf{C}_w\mathbf{B} \neq 0$ für *jedes* $\mathbf{C}_w$ und *für* jede **B**, weil $\mathbf{C}_w$ Punkte auf verschiedenen Seiten einer jeden **B** enthält. Wegen $\mathbf{C}_w \subset \mathbf{E}_w$ muss also, für den Fall eines diskontinuierlichen **KB**, eine *jede* der $\mathbf{E}_w$ mindestens einen der (höchstens $2k$) Punkte von **KB** enthalten. Gäbe es nun noch eine zweite unter den Hyperebenen **B**, etwa **B**′, mit diskontinuierlichem **KB**′, so müsste ebenso jede $\mathbf{E}_w$ durch einen der (höchstens $2k$) Punkte von **KB**′ gehen. Daher gäbe es höchstens $4k^2$ zu **K** nicht fremde

([23]) Bezüglich der Bezeichnung $E^{(n-1)}$ vgl. Nr. 1.1.

Geraden derart, dass in jeder der $\mathbf{E}_{w}$ mindestens eine dieser Geraden enthalten wäre. Die ü. a. Hyperebenen $\mathbf{E}_{w} \varepsilon \mathbf{m}$ würden also keine **K**-Menge bilden entgegen der Vor. über **m**.

2.7.3. Zufolge Nr. 2.7.2. gibt es jedenfalls ü. a. zu einander parallele Hyperebenen **B**, nämlich eine ganze Schicht von solchen, für deren jede in **KB** ein Kontinuum $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{B})$ enthalten ist; diese $\mathbf{T}(\mathbf{B})$ sind insbesondere paarweise fremd. Unter diesen **B** gibt es nun zu beliebig vorgegebenem δ mit $0 < \delta < 2^{-4}$ ü. a. $\mathbf{B}_{w}$ von folgender Eigenschaft: Es existiert eine Zahl $h > 0$ derart, dass die Durchmesserlänge eines jeden $\mathbf{T}_{w} = \mathbf{T}(\mathbf{B}_{w})$ zwischen $(1 + \delta)h$ und $(1 - \delta)h$ liegt, ferner dass die Endpunkte eines Durchmessers von $\mathbf{T}_{w}$ je in einer offenen, von $\mathbf{T}_{w}$ unabhängigen Kugel $\mathbf{V}'$ bzw. $\mathbf{V}''$ vom Radius δh liegen. Es gibt dann eine zu den $\mathbf{B}_{w}$ parallele Strecke s, deren Endpunkte je in $\mathbf{V}'$ bzw. $\mathbf{V}''$ liegen. Zwei geeignete Hyperebenen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, von welchen $\mathbf{V}'$ bzw. $\mathbf{V}''$ berührt werden und welche senkrecht stehen auf s, bilden dann die Begrenzung einer Schicht **s** von der in Beh. 1. und 2. genannten Art. Und die Menge der $\mathbf{B}_{w}$ ist die in der Beh. erwähnte Menge $\mathbf{b}'$.

2.8. Aus Nr. 2.7. ergibt sich jetzt folgende, später nützliche B e m e r k u n g:

Es sei **K** ein Kontinuum von beschränktem schwachem $(K \mid E^{(n-1)})$-Ordnungswert. Ferner sollen die Hyperebenen **E** mit diskontinuierlichem, also (Nr. 2.2.1.) nur beschränkt viele Punkte enthaltendem, **KE** dicht liegen im Raum $E^{(n-1)}$ aller Hyperebenen. Dann enthält jede **K**-Menge von Hyperebenen, insbesondere also jede Büschelmenge **N** bezüglich **K**, höchstens *abzählbar viele* Hyperebenen $\mathbf{E}'$ mit nicht-diskontinuierlichem $\mathbf{KE}'$.

B e w. Andernfalls würde aus Beh. 2. in Nr. 2.7. folgen: Es gibt eine im $E^{(n-1)}$ offene Menge von Hyperebenen $\mathbf{P}'$, deren jede mit **K** ü. a. Punkte gemeinsam hat. Nach Vor. liegen andererseits die Hyperebenen **E** mit beschränktpunktigem **KE** dicht im $E^{(n-1)}$. Widerspruch.

2.8.1. Speziell für Kontinua mit beschränktem schw. *Punkt*-Ordnungswert folgt aus Nr. 2.8. und Nr. 2.2.1.:

Es sei **K** ein Kontinuum von beschränktem schwachem $(P \mid E^{(n-1)})$-Ordnungswert k. Dann gibt es in jeder **K**-Menge von Hyperebenen höchstens abzählbar viele Hyperebenen $\mathbf{E}'$, für welche $\mathbf{KE}'$ mehr als $2k$ Punkte enthält.

§ 3. Punktordnung eines Kontinuums.

3.1. Mit Hilfe der in Nr. 2.8. gemachten Bemerkung ergibt sich hinsichtlich der S t r u k t u r d e r K o n t i n u a v o n b e s c h r ä n k t e m s c h w a c h e m $(P \mid E^{(n-1)})$-O r d n u n g s w e r t Folgendes:

Jedes Kontinuum **K** *von beschränktem schwachem* $(P \mid E^{(n-1)})$-*Ordnungswert ist eine reguläre Kurve* [24] *und darstellbar als erbliche Bogensumme* [25] (Die einzelnen (einfachen) Bogen dieser Summe sind rektifizierbar; ferner können irgend zwei Punkte von **K** durch einen, in **K** liegenden, einfachen, rektifizierbaren Bogen verbunden werden).

Der Beweis hierfür kann so geführt werden.

3.1.1. Es genügt, folgende Beh. zu beweisen: Es existieren mindestens n Hyperebenenbüschel mit linearunabhängigen und zu **K** fremden Achsen derart, dass **K** von beschränktem starkem Punkt-Ordnungswert ist bezüglich eines jeden dieser Büschel. In der Tat: Aus der Existenz mindestens eines solchen Büschels folgt [26], dass **K** reguläre Kurve und erbliche Bogensumme ist, während die auf die rektifizierbaren Teilbogen von **K** sich beziehende Behauptung Folge der Existenz von n derartigen Büscheln ist [27].

3.1.2. Zum Beweise der Beh. in Nr. 3.1.1. wähle man eine Hyperebene $\mathbf{E}_0$ fremd zum (beschränkten) Kontinuum **K** und eine Büschelmenge $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{E}_0, \mathbf{u}, \mathbf{K})$, wobei $\mathbf{u}$ der $E^{(n-1)}$ ist. Da nach Vor. **K** von beschränktem schw. $(P \mid E^{(n-1)})$-Ord. ist, so enthält **N**, abgesehen von höchstens abzählbar vielen Ausnahmehyperebenen, lauter Hyperebenen **E** mit beschränktpunktigem **KE** (N. 2.8.1.). Nach Definition ist andererseits **N** Summe von ü. a. Hyperebenenbüscheln $\mathbf{b}$ mit Achsen $\mathbf{G}$ in $\mathbf{E}_0$ (vgl. Nr. 2.6.2.). Es seien nun $\mathbf{b}_{w}$ diejenigen Büschel, in welchen je (mindestens) eine Hyperebene $\mathbf{E}_{w}$ mit *nicht*-beschränktpunktigem $\mathbf{KE}_{w}$ enthalten ist; wegen $\mathbf{KE}_0 = 0$ ist dabei $\mathbf{E}_w \neq \mathbf{E}_0$ und es sind die in verschiedenen $\mathbf{b}_w$ gelegenen $\mathbf{E}_w$ sämtlich verschieden (weil die $\mathbf{G}$ sämtlich verschieden

---

[24] Im Sinne der topologischen Kurventheorie. Vgl. K. Menger, *Kurventheorie*, Leipzig, 1932.

[25] Ein Kontinuum C wird als Bogensumme bezeichnet, wenn C darstellbar ist als Vereinigung von abzählbar vielen einfachen Bogen. Alsdann ist C darstellbar sogar als Vereinigung abzählbar vieler einfacher Bogen, welche paarweise höchstens Endpunkte gemeinsam haben. (Vgl. Chr. Pauc (en collaboration avec A. Vazsony) « *Sur les sommes d'arcs* « Revue scientifique (Rose) », Paris 1940, 101-103). Ein im Kleinen zusammenhängendes Kontinuum C heisst erbliche Bogensumme, wenn jedes Teilkontinuum, einschliesslich C selbst, Bogensumme ist.

[26] Haupt, *Ueber Kontinua von endlicher Relativordnung*, « Journ. f. d. r. u. angew Math. ». 167 (1931), S. 30 ff. (dort für jedes Kontinuum mit endlichem starkem Punkt-Ordnungswert bezüglich nur eines Büschels mit zum Kontinuum fremder Achse bewiesen). - Da jede reguläre Kurve zusammenhängend im Kleinen ist und da jedes Teilkontinuum von **K** zugleich mit **K** beschränkten starken Punkt-Ordnungswert besitzt bezüglich der nämlichen Büschel wie **K**, so ist **K** sogar erbliche Bogensumme. Vgl. Pauc, a. a. O. [25], 102.

[27] A. Marchaud, *Sur les contiuus d'ordre borné*, « Acta Math. », 55 (1930), 67 ff. insbes. 76. Dort ist auch schon die Darstellbarkeit als Bogensumme bewiesen.

sind). Daher gibt es höchstens abzählbar viele $\mathfrak{b}_w$ und folglich ü. a. viele n-tupel von Büscheln der in Nr. 3.1.1. geforderten Art.

3.2. Für spätere Zwecke nützlich ist folgende (hinreichende) Bedingung dafür, dass bei beschränktem swchwachem $(K|E^{(n-1)})$-Ordnungswert sogar auf beschränkten schwachen $(P|E^{(n-1)})$-Ordnungswert geschlossen werden kann. Es gilt nämlich der.

S a t z. *Ein Kontinuum* $\mathbf{K}$ *vom schwachen* $(\mathrm{K}|\mathrm{E}^{(n-1)})$*-Ordnungswert* k *besitzt (sogar) den schwachen* $(\mathrm{P}|\mathrm{E}^{(n-1)})$*-Ordnungswert* k *dann (und nur dann), wenn die Hyperbenen* $\mathbf{E}$ *mit diskontinuierlichem* $\mathbf{KE}$ *dicht liegen im* $\mathrm{E}^{(n-1)}$.

B e w. Es genügt, Folgendes zu beweisen.

3.2.1. H i l f s s a t z **A.** V o r. Es sei $\mathbf{K}$ vom schw. $(K|E^{(n-1)})$-Ord. k. Ferner sollen die Hyperebenen $\mathbf{E}$ mit diskontinuierlichem $\mathbf{KE}$ dicht liegen im $E^{(n-1)}$.

B e h. Die Hyperebenen $\mathbf{E}'$ mit nicht-diskontinuierlichem $\mathbf{KE}'$ liegen nirgends dicht im $E^{(n-1)}$.

In der Tat folgt aus dem Hilfssatz **A.** und aus Nr. 2.2.1., dass $\mathbf{KE}$ höchstens $2k$ Punkte enthält für jede Hyperebene $\mathbf{E}$, ausgenommen höchstens eine im $E^{(n-1)}$ nirgends dichte Hyperebenenmenge $\mathbf{n}$. Und da $\mathbf{K}$ den schw. $(K|E^{(n-1)})$-Ord. k besitzt, liegen die $\mathbf{E}'$ mit mehr als k-punktigem $\mathbf{KE}'$ nirgends dicht in $(E^{(n-1)} - \mathbf{n})$ (vgl. die Ueberlegung in Nr. 1.5.). Gemäss Nr. 1.4.2. besitzt daher $\mathbf{K}$ einen schw. $(P|E^{(n-1)})$-Ord. $\leq k$, welcher genau gleich k sein muss, da sich andernfalls ein Widerspruch mit dem vorausgesetzten schw. $(K|E^{(n-1)})$-Ord. k ergeben würde.

3.2.2. Zum Beweise von Hilfssatz **A.** (Nr. 3.2.1.) bedienen wir uns des folgenden, hinterher (Nr. 3.3.) zu begründenden

H i l f s s a t z e s **B.** V o r. Es sei $\mathbf{K}$ von beschränktem schw. $(K|E^{(n-1)})$-Ordnungswert. Ferner mögen die Hyperebenen $\mathbf{E}$ mit diskontinuierlichem $\mathbf{KE}$ dicht liegen im $E^{(n-1)}$.

B e h. Ist $\mathbf{S}$ eine *mehr*punktige Komponente (Kontinuum) von $\mathbf{KE}$ (wobei $\mathbf{K}$ nicht in der Hyperebene $\mathbf{E}$ enthalten sein soll) und ist $\mathbf{p}$ eine Normalumgebung (bezüglich $\mathbf{E}$) dieses Stückes $\mathbf{S}$ von $\mathbf{KE}$, so gibt es im $E^{(n-1)}$ in beliebiger Nähe von $\mathbf{E}$ solche Hyperebenen $\mathbf{E}'$, für welche $\mathbf{p}$ mindestens *zwei Schnitt*komponenten von $\mathbf{KE}'$ enthält.

Aus dem Hilfssatz **B.** ergibt sich nämlich Hilfssatz **A.** folgendermassen: Angenommen, der Hilfssatz **A.** sei nicht richtig, wohl aber Hilfssatz **B.** Dann existiert (mindestens) eine Hyperebene $\mathbf{E}_0$, in deren Umgebung im $E^{(n-1)}$ die Hyperebenen $\mathbf{E}$ mit nicht-diskontinuierlichem $\mathbf{KE}$ dicht liegen; dabei ist also insbesondere $\mathbf{KE} \neq 0$. Wir können o. B. d. A. $\mathbf{KE} \neq \mathbf{K}$ annehmen für diese $\mathbf{E}$;

denn die $\mathbf{E}'$ mit $\mathbf{KE}=\mathbf{K}$ liegen nirgends dicht im $E^{(n-1)}$, weil im Durchschnitt aller dieser Hyperebenen $\mathbf{E}$ eine feste 1-Ebene (Gerade) enthalten sein muss. Somit gibt es beliebig nahe (im $E^{(n-1)}$) bei $\mathbf{E}_0$ eine Hyperebene $\mathbf{E}_1$, für welche in $\mathbf{KE}_1 \neq \mathbf{K}$ eine mehrpunktige Komponente $\mathbf{S}_1$ enthalten ist. Beliebig nahe bei $\mathbf{E}_1$ gibt es dann (gemäss Hilfssatz **B.**) eine Hyperebene $\mathbf{E}_2'$, für welche eine Normalumgebung $\mathfrak{p}_1$ von $\mathbf{S}_1$ bezüglich $\mathbf{E}_1$ mindestens zwei Schnittkomponenten enthält. Beliebig nahe bei $\mathbf{E}_2'$ gibt es aber, gemäss unserer Beweisannahme, eine Hyperebene $\mathbf{E}_2$, für welche $\mathbf{KE}_2 \neq \mathbf{K}$ eine mehrpunktige Komponente enthält. Gleichzeitig enthält $\mathbf{KE}_2$, gemäss Nr. 2.5.1., mindestens zwei Schnittkomponenten (von denen ev. eine die genannte mehrpunktige Komponente ist). In gleicher Weise ergibt sich die Existenz einer Hyperebene $\mathbf{E}_3$ beliebig nahe bei $\mathbf{E}_2$, für welche $\mathbf{KE}_3$ mindestens drei verschiedene Schnittkomponenten und mindestens eine mehrpunktige Komponente enthält. Fortsetzung dieser Schlüsse führt zu einer Hyperebene $\mathbf{E}_{2k+1}$ (beliebig nahe bei $\mathbf{E}_0$) mit mindestens $(2k+1)$ Komponenten von $\mathbf{KE}_{2k+1}$. Gemäss Nr. 2.2. widerspricht dies der Vor., dass $\mathbf{K}$ den schw. $(K|E^{(n-1)})$-Ord. k besitzt. (Nr. 3.2.2.).

3.3 Nachzutragen ist noch die *Begründung für Hilfssatz* **B.** (Nr. 3.2.2.).

Vorausgesetzt wird dabei: Es besitzt $\mathbf{K}$ beschränkten schw. $(K|E^{(n-1)})$-Ord. Die Hyperebenen $\mathbf{E}$ mit diskontinuierlichem $\mathbf{KE}$ liegen dicht im $E^{(n-1)}$. Schliesslich sei $\mathbf{S}$ eine mehrpunktige Komponente von $\mathbf{KE}_0$ mit $\mathbf{KE}_0 \neq \mathbf{K}$ und $\mathfrak{p}$ eine Normalumgebung von $\mathbf{S}$ bezüglich $\mathbf{E}_0$. *Behauptet* wird die Existenz von Hyperebenen $\mathbf{E}'$ beliebig nahe bei $\mathbf{E}_0$, für welche $\mathbf{KE}'$ mindestens zwei, in $\mathfrak{p}$ enthaltene *Schnitt*komponenten besitzt.

Der Beweis kann so geführt werden.

3.3.1. Es genügt, zu beweisen, dass *unter den Vor. von Hilfssatz* **B.** die folgende Beh. **B'.** gilt: In beliebiger Nähe von $\mathbf{E}_0$ im $E^{(n-1)}$ gibt es Hyperebenen $\mathbf{E}'$ mit diskontinuierlichem $\mathbf{KE}'$ und mindestens zweipunktigem $\mathbf{KE}'\mathfrak{p}$.

Wir zeigen zunächst, dass die Beh. des Hilfssatzes **B.** aus der Beh. **B'.** folgt. Ist nämlich diese Beh. **B'.** richtig, so sei $\mathbf{E}'$ eine der in Beh. **B'.** genannten, zu $\mathbf{E}_0$ benachbarten Hyperebenen. Da $\mathbf{K}$ nach Vor. bzw. Nr. 2.2. von beschränktem starken $(K|E^{(n-1)})$-Ordnungswert, etwa $\leq 2k$, ist, enthält $\mathbf{KE}'$ nicht mehr als $2k$ und (nach Annahme) mindestens zwei Punkte. Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte von $\mathbf{KE}'\mathfrak{p}$ mit Normalumgebungen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ bezüglich $\mathbf{E}'$, wobei $\bar{\mathfrak{p}}_1\bar{\mathfrak{p}}_2=0$ vorausgesetzt werden kann und soll. Wir unterscheiden nun die folgenden drei, alle Möglichkeiten erschöpfenden Fälle. I. Fall: Mindestens einer der P_1, P_2 ist ein Schnittpunkt (vgl. Nr. 2.3.). Dann gibt es Hyperebenen $\mathbf{E}''$ beliebig nahe bei $\mathbf{E}'$, für welche $\mathbf{KE}''\mathfrak{p}_1$ sowohl als $\mathbf{KE}''\mathfrak{p}_2$ je mindestens eine Schnittkomponente liefert (Nr. 2.5.1. und 2.5.2.), wie behauptet.

Liegt der I. Fall nicht vor, so sind P_1 und P_2 beide Stützpunkte und es verläuft **K** in hinreichend kleiner Umgebung von P_1 und von P_2 entweder (Fall II) ganz auf einer, für beide Punkte gleichen, Seite von **E**′ oder (Fall III) auf für beide Punkte verschiedenen Seiten. In beiden Fälle ergibt sich wieder die Existenz von zu **E**′ beliebig benachbarten **E**″ mit Schnittkomponenten in $\mathbf{KE}''\mathbf{p}_1$ und in $\mathbf{KE}''\mathbf{p}_2$. Im Falle III kann man so schliessen: Es sei i die Verbindungsstrecke von P_1 und P_2, ferner sei M der Mittelpuukt von i und **g** die in **E**′ gelegene, auf i in M senkrechte $(n-2)$-Ebene. Für hinreichend kleine $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ mit $\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2 = 0$ ist $\mathbf{g}\bar{\mathbf{p}}_1 = 0$ und $\mathbf{g}\bar{\mathbf{p}}_2 = 0$. Weiter sei $\mathbf{S}_1{}^*$ bzw. $\mathbf{S}_2{}^*$ diejenige Komponente von $\mathbf{Kp}_1$ bzw. von $\mathbf{Kp}_2$, in welcher P_1 bzw. P_2 enthalten ist und wobei $\mathbf{S}_1{}^*$ bzw. $\mathbf{S}_2{}^*$ im Deckel $\mathbf{d}_1$ bzw. $\mathbf{d}_2$ von $\mathbf{p}_1$ bzw. $\mathbf{p}_2$ mündet, während $\mathbf{S}_1{}^*\mathbf{S}_2{}^* = 0$ ist. Es liegen $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}_2$ auf verschienen Seiten von **E**′. Nun gibt es Hyperebenen **E** mit folgenden Eigenschaften: Es ist **g** in **E** enhalten, $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}'$ und **E** beliebig benachbart zu **E**′, ferner ist $(\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2)\mathbf{E} = 0$ und $\mathbf{Ep}'_1$ bzw. $\mathbf{Ep}'_2$ liegt auf der entgegengesetzten Seite von **E** wie $\mathbf{d}_1$ bzw. wie $\mathbf{d}_2$. Aus Nr. 2.4. folgt dann die Beh. Den Fall II erledigt man entsprechend, indem man M durch einen nicht auf i, aber auf der Verbindungsgeraden von P_1 und P_2 gelegenen (passenden) Punkt ersetzt.

3.3.2. Die *Beh.* **B**′. *in* Nr. 3.3.1. *kann folgendermassen bewiesen werden.* Wegen $\mathbf{KE}_0 \neq \mathbf{K}$ existiert eine Komponente **T** von $(\mathbf{Kp} - \mathbf{S})$, welche einen Punkt P von **S** als Häufungspunkt besitzt (Nr. 2.1.). Da **S** mehrpunktig sein, soll, gibt es einen, von P verschiedenen Punkt Q in **S**. Es sei M der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke i von P und Q. Weiter sei **b** dasjenige Hyperebenenbüschel, dessen Achse **A** die auf i senkrechte, in $\mathbf{E}_0$ gelegene $(n-2)$-Ebene durch M ist. Es liegt Q in $\mathbf{E}_0$ auf der entgegengesetzten Seite von **A** wie P. Nun gibt es eine (nötigenfalls durch Auswahl herstellbare) Folge von Punkten P_i aus **T**, welche gegen P konvergieren, sämtlich auf der gleichen Seite von $\mathbf{E}_0$ liegen und folgende Eigenschaften besitzen: Zu P_i existiert eine von $\mathbf{E}_0$ verschiedene Hyperebene $\mathbf{E}_i' \varepsilon \mathbf{b}$, welche 1) fremd ist zu den Deckeln von **p** aber nicht zu **p**, ferner 2) fremd zu allen P_μ, $\mu = 1, 2, \ldots$, und schliesslich so beschaffen, dass 3) die P_i und P_{i+1} sowie 4) die Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{E}_i'$ liegen. Da nach Vor. die Hyperebenen **E** mit diskontinuierlichem **KE** dicht liegen im $E^{(n-1)}$, so gibt es (für jedes i) Hyperebenen $\mathbf{E}_i$, welche zu $\mathbf{E}_i'$ beliebig benachbart sind, aber nicht notwendig zu **b** gehören, welche die gleichen Eigenschaften 1)–4) besitzen wie $\mathbf{E}_i'$ und für welche $\mathbf{KE}_i$ diskontinuierlich ist.

Da P und Q dem Kontinuum $\mathbf{S} \subset \mathbf{KE}_0\mathbf{p}$ angehören, so folgt aus Eigenschaft 4), dass $\mathbf{KE}_0\mathbf{pE}_i$ nicht leer ist, dass also ein Punkt Q_i von $\mathbf{KE}_i\mathbf{p}$ in

$\mathbf{S} \subset \mathbf{E}_0$ liegt. Weil andererseits P_i und P_{i+1} auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{E}_i$ liegen (Eigenschaft 3)) und weil $P_i \varepsilon \mathbf{T}$, $P_{i+1} \varepsilon \mathbf{T}$, so muss die zusammenhängende Menge $\mathbf{T}$ mit $\mathbf{E}_i$ einen nicht leeren Durchschnitt haben; wegen $\mathbf{T} \subset \mathbf{Kp}$ und $\mathbf{TS} = 0$ enthält daher $\mathbf{KE}_i\mathbf{p}$ einen von Q_i verschiedenen Punkt, woraus die Beh. $\mathbf{B}'$. folgt.

Anmerkung. In Nr. 3.2. ff. ist als Hyperebenenmenge, bezüglich deren die Ordnungswerte von $\mathbf{K}$ betrachtet wurden, der $E^{(n-1)}$ zu Grunde gelegt. Es hätte aber der $E^{(n-1)}$ in diesen Betrachtungen auch durch gewisse seiner Teilmengen, etwa nach Art der in Nr. 2.1.3. erklärten Hyperebenenmengen $\mathbf{f}$ bzw. $\mathbf{g}$, ersetzt werden können.

§ 4. Komponentenordnung eines Limes von Kontinuen.

4.1. Es sei jetzt $\mathbf{K} = \lim\limits_{i \to \infty} \mathbf{K}_i$, wobei die $\mathbf{K}_i$ eine konvergente Folge von gleichmässig beschränkten Kontinuen ([28]) mit gleichmässig beschränkten schwachen $(K \mid \mathbf{f})$-Ordnungswerten, etwa $\leq k$, bilden. Es soll im Folgenden eine Schranke für den schwachen $(K \mid \mathbf{f})$-Ordnungswert von $\mathbf{K}$ bestimmt werden.

Zunächst (Nr. 4.2. und 4.3.) seien einige vorbereitende Bemerkungen zusammengestellt. Wir können und wollen dabei *vom Falle absehen*, dass der *Limes* $\mathbf{K}$ *einpunktig* ist; denn alsdann ist der Ordnungswert von $\mathbf{K}$ bekannt, nämlich gleich 1.

4.2. Es sei $\mathbf{S}$ ein Stück von $\mathbf{KE}$, wobei $\mathbf{K}$ nicht in der Hyperebene $\mathbf{E}$ enthalten sein soll, und $\mathbf{p}$ eine Normalumgebung von $\mathbf{S}$ (vgl. Nr. 2.1.1.). Dann gibt es in beliebiger Nähe von $\mathbf{S}$ Punkte aus $(\mathbf{K} - \mathbf{E})$. Ferner besitzen die Abstände der Hyperebene $\mathbf{E}$ von schliesslich allen $\mathbf{K}_i\mathbf{p}_g$ eine, von i unabhängige positive untere Schranke; denn andernfalls wäre $\mathbf{Kp}_g\mathbf{E} \neq 0$ und es wäre $\mathbf{p}$ nicht Normalumgebung von $\mathbf{S} \subset \mathbf{KE}$. Wir können daher und wollen $\mathbf{p}$ so flach wählen, dass 1) sämtliche Punkte nicht nur von $\mathbf{Kp}_g$ sondern auch von schliesslich allen $\mathbf{K}_i\mathbf{p}_g$ ganz auf den Deckeln $\mathbf{d}'$, $\mathbf{d}''$ von $\mathbf{p}$ liegen und dass 2) weder $(\mathbf{d}' + \mathbf{d}'')\mathbf{K} = \mathbf{Kp}_g$ noch schliesslich alle $(\mathbf{d}' + \mathbf{d}'')\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_i\mathbf{p}_g$ leer sind. Dass 2) erzwungen werden kann, folgt so: Für hinreichend flache $\mathbf{p}$ ist $(\mathbf{d}' + \mathbf{d}'')\mathbf{K}$ nicht leer, sodass schliesslich alle $\mathbf{K}_i$ Punkte in beliebiger Umgebung von $(\mathbf{d}' + \mathbf{d}'')\mathbf{K}$ besitzen. Da ferner $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$, so gehört auch $\mathbf{S}$ zur Häufungsmenge der $\mathbf{K}_i$. Für eine hinreichend flache Normalumgebung $\mathbf{p}$ von $\mathbf{S}$

([28]) Der Limes einer Folge von gleichmässig beschränkten (d. h. sämtlich in einem festen Würfel enthaltenen) Kontinuen ist entweder einpunktig oder selbst ein Kontinuum. Vgl. Hausdorff, a. a. O. ([9]), 164.

gibt es daher auf schliesslich jedem $\mathbf{K}_\iota$ ebenso wie auf $\mathbf{K}$ Punkte sowohl ausserhalb als innerhalb $\mathbf{p}$. Daraus folgt die Beh. Eine Normalumgebung von $\mathbf{S}$ mit den Eigenschaften 1) und 2) heisse ausgezeichnet, kürzer a. N.-Umgebung (von $\mathbf{S}$ bezüglich der Folge $\{\mathbf{K}_\iota\}$).

4.3. Hinsichtlich des Verhaltens der $\mathbf{K}_i$ in der Nähe eines Stückes $\mathbf{S}$ von $\mathbf{KE} \neq \mathbf{K}$ (vgl. Nr. 2.1.) ist folgendes zu bemerken: Gemäss der Definition der a. N.-Umgebungen $\mathbf{p}$ von $\mathbf{S}$ bezüglich $\{\mathbf{K}_\iota\}$ und wegen $\mathbf{K} = \lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{K}_i$ gibt es zu einer derartigen, im übrigen beliebigen $\mathbf{p}$ für schliesslich alle i eine Komponente von $\mathbf{C}_\iota^*$ von $\mathbf{K}_\iota\mathbf{p}$, welche in (mindestens) einem der Deckel $\mathbf{d}'$, $\mathbf{d}''$ von $\mathbf{p}$ mündet (wobei $\overline{\mathbf{C}}_\iota^*\mathbf{p}_g = \overline{\mathbf{C}}_\iota^*\mathbf{d}' + \overline{\mathbf{C}}_\iota\mathbf{d}''$) und welche von $\mathbf{S}$ beliebig kleinen Abstand hat. Daher lässt sich bei gegebener $\mathbf{p}$ eine Teilfolge $\{\mathbf{K}_{i_\rho}\}$ aus $\{\mathbf{K}_\iota\}$ auswählen und dieser Teilfolge ein Deckel von $\mathbf{p}$ zuordnen, etwa $\mathbf{d}'$, mit folgender Eigenschaft: Zu jedem ρ exitiert eine Komponente $\mathbf{C}_\rho$ von $\mathbf{pK}_{i_\rho}$, welche in $\mathbf{d}'$ mündet und deren Abstand von $\mathbf{S}$ mit $\rho \to +\infty$ gegen Null konvergiert; ferner konvergieren die (Kontinua) $\overline{\mathbf{C}}_\rho$ gegen ein Kontinuum $\mathbf{C}'$. Aus den soeben angeführten Eigenschaften der $\mathbf{C}_\rho$ folgt, dass $\mathbf{C}'$ in $\overline{\mathbf{p}}$ enthalten ist und Punkte sowohl von $\mathbf{d}'$ als von $\mathbf{S}$ enthält, ferner dass die $\overline{\mathbf{C}}_\rho$ schliesslich alle in einer beliebig kleinen Umgebung (im $R^{(n)}$) von $\mathbf{C}'$ liegen. Gleiches (wie für $\mathbf{C}'$) gilt dann für diejenige Komponente $\mathbf{C}(\mathbf{S})$ von $\overline{\mathbf{p}}\mathbf{K}$. in welcher $\mathbf{C}'$ enthalten ist. Wir sagen, eine *Teilfolge* $\{\mathbf{K}_{i_\rho}\}$ bzw. eine *Komponentenfolge* $\{\mathbf{C}_\rho\}$ der beschriebenen Art gehöre (sei zugehörig) *zu* $\mathbf{S}$ (*bezüglich* $\mathbf{p}$ *und* $\mathbf{d}$); ferner bezeichnen wir $\mathbf{C}(\mathbf{S})$ als eine *der Teil*folge bzw. *Komponentenfolge* zugeordnete *Komponente von* $\mathbf{K}$ (bezüglich $\mathbf{d}'$). (Ist $\mathbf{S}$ eine *Komponente* von $\mathbf{KE}$, so ist $\mathbf{C}(\mathbf{S})$ eindeutig durch $\overline{\mathbf{p}}$ bestimmt). Zu jedem $\mathbf{S}$ und $\mathbf{p}$ gibt es zugehörige Teilfolgen und zugeordnete $\mathbf{C}(\mathbf{S})$.

4.4. Nach diesen Vorbemerkungen zeigen wir zunächst ([29]), dass $\mathbf{K} = \lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{K}_i$ einen starken $(K|\mathbf{f})$-Ordnungswert $< 2k+1$ besitzt, falls die schwachen $(K|\mathbf{f})$-Ordnungswerte der $\mathbf{K}_i$ sämtlich kleiner sind als $(k+1)$; dabei soll $\mathbf{f}$ eine $\mathbf{f}$-Menge von Hyperebenen bezüglich $\mathbf{K}$ und bezüglich schliesslich aller $\mathbf{K}_i$ sein, d. h. es sollen die in Nr. 2.1.3 geforderten Eigenschaften 1) und 2) für $\mathbf{K}$ sowohl als für schliesslich alle $\mathbf{K}_\iota$ erfüllt sein.

Anmerkung. Damit eine Hyperebenenmenge $\mathbf{f}$-Menge bezüglich $\mathbf{K}$ und schliesslich aller $\mathbf{K}_\iota$ sei, ist hinreichend, dass sie $\mathbf{f}$-Menge sei bezüglich $\mathbf{K}$.

([29]) Der Beweis des Satzes in Nr. 4.5. könnte auch ohne die vorherigen Feststellungen in vorliegender Nr. 4.4. geführt werden. Indes wird vermöge dieser Feststellungen die Darstellung in Nr. 4.5.2. vereinfacht.

Sind nämlich die Eigenschaften 1) und 2) der Nr. 2.1.3. für **K** erfüllt, so auch für schliesslich alle $\mathbf{K}_i$; denn wegen $\mathbf{K} = \lim \mathbf{K}_i$ liegen schliesslich alle $\mathbf{K}_i$ in einer beliebig kleinen Umgebung von **K** (im $R^{(n)}$).

Bew. Besässe **KE**, mit $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{f}$ und $\mathbf{KE} \neq \mathbf{K}$, mehr als $2k$ Komponenten, so liesse sich **KE** (gemäss Nr. 1.3.1.) in $(2k+1)$ Stücke $\mathbf{S}_\varkappa$ spalten, $\varkappa = 1, \ldots, h = 2k+1$. Zu jedem der $\mathbf{S}_\varkappa$ konstruiere man eine a. N.-Umgebung $\mathbf{p}_\varkappa$; o. B. d. A. können dabei und sollen die $\bar{\mathbf{p}}_\varkappa$ als paarweise fremd angenommen werden. Durch Auswahl erhält man aus $\{\mathbf{K}_i\}$ eine Teilfolge $\{\mathbf{K}_\varrho'\}$, welche gleichzeitig jedem der $\mathbf{S}_\varkappa$ bezüglich $\mathbf{p}_\varkappa$ und bezüglich eines Deckels von $\mathbf{p}_\varkappa$ zugehört (im Sinne der N. 4.3.), welche ferner für jedes k eine zugehörige Komponentenfolge $\{\mathbf{C}_{\varkappa\varrho}\}$ und eine dieser zugeordnete Komponente $\mathbf{C}_\varkappa = \mathbf{C}(\mathbf{S}_\varkappa)$ von $\mathbf{p}_\varkappa\mathbf{K}$ liefert. Man konstruiere nun nach dem beim Beweis in Nr. 2.1.4. benützten Verfahren eine Hyperebene $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_q' \varepsilon \mathbf{f}$ derart, dass mindestens $(k+1)$ unter den $\mathbf{C}_\varkappa$, etwa $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_{k+1}$, Punkte gleichzeitig auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{E}'$ enthalten, dass also $\mathbf{C}_\varkappa\mathbf{E}'$ nicht leer ist; dieses Verfahren ist hier anwendbar, weil **f** eine **f**-Menge bezüglich **K** ist. Daher ist $\mathbf{E}'\mathbf{C}_{\varkappa N} \neq 0$ gleichzeitig für $\varkappa = 1, \ldots, k+1$, falls N nur hinreichend gross gewählt wird; da die $\bar{\mathbf{p}}_\varkappa$ paarweise fremd sind, ist ferner $\mathbf{K}'_N\mathbf{E}'\mathbf{p}_\varkappa$ für hinreichend grosses N ein Stück von $\mathbf{K}'_N\mathbf{E}'$ und enthält (Nr. 2.4.) eine Schnittkomponente für jedes $\varkappa = 1, \ldots, k+1$. Gleiches gilt aber für *jede* Hyperebene, welche einer passenden Umgebung **u** von $\mathbf{E}'$ in **f** angehört (vgl. Nr. 2.5.1.). Somit wäre die Menge aller Hyperebenen aus **f**, deren Durchschnitt mit $\mathbf{K}'_N$ mehr als k Komponenten besitzt, dicht in **u**, während doch $\mathbf{K}'_N$ nach Vor. einen schw. $(K|\mathbf{f})$-Ord. $< k+1$ besitzen sollte.

4.5. Wir zeigen jetzt.

Satz: *Es sei* **K** *Limes einer konvergenten Folge von gleichmässig beschränkten* [28] *Kontinuen* $\mathbf{K}_i$. *Es sei* [20] **f** *eine* **f**-*Hyperebenenmenge bezüglich* **K** *und es besitzes jedes* $\mathbf{K}_i$ *einen schwachen* $(\mathbf{K}|\mathbf{f})$-*Ordnungswert* $\leq$ k. *Dann besitzt auch* **K** *einen schwachen* $(\mathbf{K}|\mathbf{f})$-*Ordnungswert* $\leq$ k [30].

Zusatz. Zu den **f**-Mengen gehören speziell die *Büschel mit zu* **K** *fremden Achsen*. Der vorstehende Satz gilt also insbesondere für schwache Komponentenordnungen bezüglich solcher Büschel.

---

[30] Folgendes sei noch hervorgehoben: In die Definition des schw. $(K|\mathbf{f})$-Ord. von $\mathbf{K}_i$ geht eine in **f** nirgends dichte Ausnahmemenge $\mathbf{n}_i$ ein, $i = 1, 2, \ldots$ (vgl. 1.4.2.) Ueber das Verhalten dieser $\mathbf{n}_i$ für $i \to \infty$ braucht im Satze des Textes keine besondere Annahme gemacht zu werden. Dieses Verhalten wird vielmehr durch die Forderung der Konvergenz der $\mathbf{K}_i$ schon festgelegt und kann auch aus unserem Beweise entnommen werden. Entsprechendes gilt für den Konvergenzsatz in Nr. 5.1.

Der Beweis läst sich so führen: Ist $\mathbf{K}$ einpunktig, so ist nichts zu beweisen. Es sei daher im Folgenden stets vorausgesetzt, dass $\mathbf{K}$ mehrpunktig, also ein Kontinuum ist.

4.5.1. Unter den im Satze (Nr. 4.5.) gemachten Vor. und mit Rücksicht auf Nr. 4.4. gilt die in Nr. 2.5.2. angestellte Betrachtung entsprechend auch hier. Es kann demgemäss behauptet werden:

Es sei $\mathbf{S}$ eine der (gemäss Nr. 4.4.) höchstens $2k$ Komponenten von $\mathbf{KE}$ für $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{f}$, wobei $\mathbf{KE} \neq \mathbf{K}$; ferner sei $\mathbf{p}$ eine a. N.-Umgebung von $\mathbf{S}$. Dann gibt es eine zu $\mathbf{S}$ bezüglich $\mathbf{p}$ gehörige Teilfolge $\{\mathbf{K}_{i_\rho}\}$ von $\{\mathbf{K}_i\}$ sowie eine zugehörige Komponentenfolge $\{\mathbf{C}_\rho\}$ und zugeordnete Komponente $\mathbf{C}(\mathbf{S})$, ferner in beliebiger Umgebung von $\mathbf{E}$ in $\mathbf{f}$ eine in $\mathbf{f}$ offene Menge $\mathbf{u}'$ von Hyperebenen $\mathbf{E}'$ von folgender Beschaffenheit: Es besitzt $\mathbf{KE}'$ bzw. $\mathbf{K}_{i_\rho}\mathbf{E}'$ (mindestens) eine innerhalb $\mathbf{pE}'$ gelegene Schnittkomponente $\mathbf{S}' = \mathbf{S}(\mathbf{E}', \mathbf{K})$ bzw. $\mathbf{S}_\rho' = \mathbf{S}(\mathbf{E}', \mathbf{K}_{i_\rho})$ für *jede* $\mathbf{E}' \varepsilon \mathbf{u}'$ und für jedes ρ. Die $\mathbf{S}_\rho'$ liegen in $\mathbf{u}'$ schliesslich alle *gleichmässig beliebig nahe* bei $\mathbf{S}'$; das soll heissen: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $R = R(\varepsilon)$ derart, dass für $\rho > R$ die $\mathbf{S}_\rho'$ in der ε-Umgebung (im $R^{(n)}$) von $\mathbf{C}(\mathbf{S})$ liegen gleichzeitig für alle $\mathbf{E}' \varepsilon \mathbf{u}'$.

Der Beweis verläuft entsprechend wie in Nr. 2.5.2., wobei die Feststellungen in Nr. 4.3. zu benützen sind.

4.5.2. Den Beweis des Satzes in Nr. 4.5. führen wir jetzt indirekt, nehmen also an, es besitze $\mathbf{K}$ einen schw. $(\mathbf{K} \mid \mathbf{f})$-Ord. $r > k$, wobei $k + 1 \leq r \leq 2k$ (gemäss Nr. 4.4.). Dann gibt es (gemäss Nr. 1.5.) eine in $\mathbf{f}$ offene Menge $\mathbf{U}_1$ von Hyperebenen, in welcher die Menge $\mathbf{D}$ derjenigen Hyperebenen $\mathbf{E}$ dicht liegt, für welche $\mathbf{KE}$ genau r Komponenten besitzt. Es sei $\mathbf{E}_1$ eine Hyperebene aus $\mathbf{U}_1\mathbf{D}$, ferner $\mathbf{S}_1$ eine (beliebige) der r Komponenten von $\mathbf{KE}_1$ und $\mathbf{p}_1^{(1)}$ eine a. N.-Umgebung von $\mathbf{S}_1$ bezüglich $\{\mathbf{K}_i\}$. Dann gibt es (gemäss Nr. 4.5.1.) eine zu $\mathbf{S}_1$ bezüglich $\mathbf{p}_1^{(1)}$ gehörige Teilfolge $\{\mathbf{K}_i^{(1)}\}$ und dazu in beliebiger Nähe von $\mathbf{E}_1$ eine in $\mathbf{f}$ offene Menge $\mathbf{U}_2 \subset \mathbf{U}_1$ von Hyperebenen $\mathbf{E}_2$ derart, dass $\mathbf{KE}_2$ für jede $\mathbf{E}_2 \varepsilon \mathbf{U}_2$ (mindestens) eine in $\mathbf{p}_1^{(1)}$ gelegene Schnittkomponente $\mathbf{S}_1^{(1)}$ von $\mathbf{KE}_2$ bzw. $\mathbf{S}_{i1}^{(1)}$ von $\mathbf{K}_i^{(1)}\mathbf{E}_2$ für alle i besitzt.

Wegen $\mathbf{U}_2 \subset \mathbf{U}_1$ ist $\mathbf{DU}_2$ dicht in $\mathbf{U}_2$. Wir wählen $\mathbf{E}_2 \varepsilon \mathbf{DU}_2$. Dann seien $\mathbf{S}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{S}_r^{(2)}$ die r Komponenten von $\mathbf{KE}_2$; unter diesen ist eine gleich $\mathbf{S}_1^{(1)}$, etwa $\mathbf{S}_1^{(2)} = \mathbf{S}_1^{(1)}$. Wir trennen die $\mathbf{S}_\rho^{(2)}$, ϑ, $\rho = 1, \ldots, r$, durch a. N.-Umgebungen $\mathbf{p}_\rho^{(2)}$ bezüglich $\{\mathbf{K}_i^{(1)}\}$ von einander, wobei die abgeschlossenen Hüllen dieser a. N.-Umgebungen paarweise fremd sein sollen. Da die $\mathbf{S}_{i1}^{(1)}$ schliesslich alle gleichmässig beliebig nahe bei $\mathbf{S}_1^{(1)}$ liegen, liegen sie auch in $\mathbf{p}_1^{(2)}$. Gemäss Nr. 4.5.1. gibt es jetzt eine zu $\mathbf{S}_2^{(2)}$ bezüglich $\mathbf{p}_2^{(2)}$ gehörige Teilfolge $\{\mathbf{K}_i^{(2)}\}$

von $\{K_\iota^{(1)}\}$ und dazu eine offene Teilmenge $U_3 \subset U_2$ von f von folgender Beschaffenheit: Es besitzt KE_3 für jede Hyperebene $E_3 \varepsilon U_3$ (mindestens) eine in $p_j^{(2)}$ gelegene Schnittkomponente $S_j^{(2)}$ bzw. $S_{\iota j}^{(2)}$ von KE_3 bzw. von $K_\iota^{(2)}E_3$, $j=1, 2$. Wieder liegt DU_3 dicht in U_3. Wählen wir daher $E_3 \varepsilon DU_3$, so erhalten wir bei Wiederholung der Schlüsse eine offene Teilmenge $U_4 \subset U_3$ von f, sodass KE_4 bzw. $K_\iota^{(3)}E_4$ (für eine Teilfolge $\{K_i^{(3)}\}$ von $\{K_i^{(2)}\}$) mindestens drei Schnittkomponenten besitzen für alle $E_4 \varepsilon U_4$. Die Fortsetzung dieser Schlüsse führt zu einer in f offenen Menge U_{r+1} derart, dass jede Hyperebene $E_{r+1} \varepsilon U_{r+1}$ mit schliesslich allen $K_\iota^{(r+1)}$ einer Teilfolge von $\{K_i\}$ r Schnittkomponenten liefert. Da DU_{r+1} dicht liegt in U_{r+1} ergibt sich ein Widerspruch mit der über den schw. $(K \mid f)$-Ord. der K_i gemachten Vor.

§ 5. Punktordnung eines Limes von Kontinuen.

5.1. Im Vorangehenden (§ 4) waren die Kontinuen K_i als von gleichmässig beschränktem schwachem *Komponenten*-Ordnungswert bezüglich einer f-Menge von Hyperebenen vorausgesetzt und es wurde daraus auf den Komponenten-Ordnungswert von $\lim K_i$ geschlossen (Nr. 4.5.). Nunmehr sollen die K_i als von gleichmässig beschränktem *Punkt*-Ordnungswert angenommen werden und zwar *bezüglich des Raumes* $E^{(n-1)}$ aller Hyperebenen; und es soll der *Punkt*-Ordnungswert des Limes bezüglich des $E^{(n-1)}$ bestimmt werden. Wir behaupten:

Satz. *Es sei* $K = \lim K_i$, *wo die gleichmässig beschränkten* [28] *Kontinua* K_i *schwache* $(P \mid E^{(n-1)})$*-Ordnungswerte* $\leq k$ *besitzen. Dann besitzt auch* K *einen schwachen* $(P \mid E^{(n-1)})$*-Ordnungswert* $\leq k$ [30].

Bew. Ist K einpunktig, so ist nichts zu beweisen. Es sei daher im Folgenden stets vorausgesetzt, dass K mehrpunktig, also ein Kontinuum ist. Gemäss Nr. 1.5. und Nr. 4.5. besitzt K jedenfalls einen schw. $(K \mid E^{(n-1)})$-Ordnungswert $\leq k$. Gemäss Nr. 3.2. genügt es daher, zu zeigen, dass die Hyperebenen E mit diskontinuierlichem KE dichtliegen im $E^{(n-1)}$. Für letzteres ist aber hinreichend, dass jede Büschelmenge $N = N(E_0; u)$ (vgl. Nr. 2.6.2.) für *jede* Hyperebene E_0 und eine (beliebige) Umgebung u von E_0 im $E^{(n-1)}$ höchstens abzählbar viele Hyperebenen E' mit nichtdiskontinuierlichen KE' enthält; denn alsdann gibt es unter den ü. a. Hyperebenen von N offenbar (sogar ü. a.) Hyperebenen E'' mit diskontinuierlichem KE'' und solche E'' liegen beliebig nahe bei E_0 (weil u beliebig), also dicht im $E^{(n-1)}$, weil E_0 jede beliebige Hyperebene sein konnte. Da nun Büschelmengen zu den K-Mengen (vgl. Nr. 2.6.1.) gehören, so genügt schliesslich der Beweis des folgenden.

Hilfssatzes: Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes enthält jede **K**–Menge höchstens abzählbar viele Hyperebenen **E** mit nicht–diskontinuierlichem **KE**.

5.2. Zum *Beweis des vorstehenden Hillfssatzes* nehmen wir diesen als falsch an. Dann gibt es in mindestens einer **K**–Menge eine ü. a. Teilmenge **m**, die also selbst **K**–Menge ist, sodass **KE** Kontinua enthält für jede $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{m}$. Für **K** gilt jetzt die Beh. 1. des Hilfssatzes in Nr. 2.7.; wir nehmen dabei die dort, sowie in Nr. 2.7.3. gebrauchten Bezeichnungen auf mit der einzigen Abweichung, dass unter **s** die *abgeschlossene Hülle* der betreffenden Schicht verstanden werden soll. Es sei nun **g** eine auf P_1 und P_2 senkrechte, zu **K** fremde Gerade. Auf **g** mögen **K** sowie die $\mathbf{K}_i$ durch die zu **g** senkrechten Hyperebenen projiziert werden. Das Bild von **s** ist dabei eine Strecke π, welche in der Projektion eines jeden Kontinuums $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{B})$ enthalten ist. Wegen den für die Durchmesser der **T** und für deren Endpunkte geltenden Annahmen (Nr. 2.7.3.) hat man für die *Länge* p *von* π die Schranken $(1 - 5\delta)h < p < (1 + \delta)h$.

5.2.1. Wir wählen jetzt eine, im Folgenden festzuhaltende natürliche Zahl m mit $m > 6k'(k + 1)$, vobei $k' = 8k$ gesetzt ist; ausserdem wählen wir im ganzen m verschiedene Hyperebenen **B**, etwa $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$. Dann sei $c = 2^{-2}c'$, wo c' das Minimum der Abstände je zweier der $\mathbf{B}_\mu$ $\mu = 1, \ldots, m$, voneinander bezeichnet. Ferner sei $\mathbf{H}'_\mu$ die Menge aller Punkte des $R^{(n)}$, deren Abstand von $\mathbf{B}_\mu$ nicht grösser ist als c und es sei $\mathbf{sH}'_\mu = \mathbf{H}_\mu$ gesetzt. Die $\mathbf{H}_\mu$ sind abgeschlossen und fremd. Da der Rand von $\mathbf{H}_\mu$ Summe aus vier, je in einer Hyperebene gelegenen Teilen ist, so ist $\mathbf{K}_i\underline{\mathbf{H}}_\mu$ Summe aus höchstens $k' = 8k$ Komponenten $\mathrm{C}_{i\mu\,|\,\tau}$, $\tau = 1, \ldots, t_{i\mu} \leq k'$, für alle i und μ (Vgl. Nr. 2.1.4., Zusatz 1). Jede $\overline{\mathrm{C}}_{i\mu\,|\,\tau}$ enthält Randpunkte von $\mathbf{H}_\mu$.

Beh. Unter den Komponenten $\mathrm{C}_{i\mu\,|\,\tau}$ von $\mathbf{K}_i\underline{\mathbf{H}}_\mu$ gibt es bei festen i, μ mindestens eine, etwa mit $\mathrm{C}_{i\mu}$ zu bezeichnende, welche sich auf π in eine Strecke $\pi'_{i\mu}$ von grösserer Länge als $a' = h' : k'$ projiziert, sobald i hinreichend gross ist, genauer: sobald $i \geq N$, wobei N unabhängig von μ ist, $\mu = 1, \ldots, m$; dabei ist $h' = (1 - 7d)h$ gesetzt und $k' = 8k$. (Uebrigens sind die $\overline{\mathrm{C}}_{i1}, \ldots, \mathrm{C}_{im}$ paarweise fremd für jedes i).

Bew. Es sei μ festgehalten $(1 \leq \mu \leq m)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $N = N(\mu; \varepsilon)$ derart, dass für $i \geq N$ die Projektion von $\mathbf{K}_i\mathbf{H}_\mu$ auf π von jedem Punkte von π einen Abstand kleiner als ε besitzt. Denn das Kontinuum $\mathbf{T}_\mu = \mathbf{T}(\mathbf{B}_\mu)$ ist in **K** enthalten, sodass $\mathbf{K}_i$ für hinreichend grosses i jedem Punkt von $\mathbf{T}_\mu$ beliebig nahe kommen muss; andererseits ist π in der Projektion von $\mathbf{T}_\mu$ vollständig enthalten. Nun ist aber $\mathbf{K}_i\underline{\mathbf{H}}_\mu$ Summe aus nicht mehr als k' Komponenten $\mathbf{C}_{i\mu|\tau}$ (wobei die $\overline{\mathbf{C}}_{i\mu|\tau}$ höchstens Randpunkte von $\mathbf{H}_\mu$ gemeinsam haben) und jedes $\mathbf{C}_{i\mu|\tau}$ projiziert sich nach π als Strecke $\pi_{i\mu|\tau}$, welche ev. auch ein Punkt (Nullstrecke) sein kann. Die Projektion von $\mathbf{K}_i\mathbf{H}_\mu$ ist daher Summe aus höchstens k' solcher, einander ev. überdeckender Strecken $\pi_{i\mu|\tau}$ (einschliesslich etwaiger Nullstrecken); diese Projektion besitzt also eine bestimmte Länge $p_{i\mu}$ und es ist $p_{i\mu} \geq [1-5\delta)h - 2\varepsilon(k'+1)]$ (vgl. Nr. 5.2.). Wählen wir daher $\varepsilon > 0$ so, dass $2\varepsilon(k'+1) \leq \delta h$, so folgt $p_{i\mu} > h' = (1-7\delta)h$ für $i \geq N(\mu; \delta h : 2(k'+1) = N(\mu)$. Ist nun $p'_{i\mu}$ die maximale Länge der $\pi_{i\mu|\tau}$ für $\tau = 1, \ldots, t_{i\mu}$, so gilt mithin $k'p'_{i\mu} \geq p_{i\mu} > h'$ für $i \geq N(\mu)$. Daraus folgt die Beh., sobald $N = 1 + \operatorname{Max}(N(1), \ldots, N(m))$ gewählt wird.

5.2.2. Es sei jetzt gesetzt $i = N$ und $p'_{N\mu} = p_\mu$ (vgl. Nr. 5.2.1.), ferner sei π_μ eine der Strecken $\pi_{N\mu|\tau}$, deren Länge gleich p_μ ist; es ist also p_μ grösser als $a' = h' : k'$, $\mu = 1, \ldots, m$, wobei $m > 6 \cdot 8k(k+1)$ (vgl. Nr. 5.2.1.).

Beh. Unter den $\pi_1, \ldots, \pi_m$ gibt es mindestens $(k+1)$, in deren Durchschnitt eine Strecke π' von der Länge $p : 6k'$ enthalten ist, wenn p die Länge der Projektion π von $\mathbf{s}$ ist (vgl. Nr. 5.2.).

Bew. I) Es ist $h' < p < h''$ mit $h' = (1-7\delta)h$, $h'' = (1+2\delta)h$ (Nr. 5.2.). Wählen wir jetzt $t = 2k'$ und teilen wir π in $3t$ gleiche, abgeschlossene (bis auf höchstens Endpunkte fremde) Strecken $\mathbf{t}_\tau$, so ist die Länge einer jeden $\mathbf{t}_\tau$ kleiner als $a' : 3$; denn es ist $p : 6k' < (1+2\delta)h : 6k' < h' : 3k' = a' : 3$ wegen $0 < \delta < 2^{-4}$ (Nr. 2.7.3.). II) Wegen $p_\mu > a'$ ist also in jeder der (in π enthaltenen) π_μ, $\mu = 1, \ldots, m$, mindestens eine der $\mathbf{t}_\tau$ vollständig enthalten. Wegen $m > 3t(k+1) = 6k'(k+1)$ ist daher (mindestens) eine der $\mathbf{t}_\tau$ gleichzeitig in mindestens $(k+1)$ der π_μ enthalten. Das war behauptet.

5.2.3. Gemäss Nr. 5.2.2. existiert eine Teilstrecke π' von π derart, dass jede der (untereinander parallelen) Hyperebenen $\mathbf{P}$, welche π' treffen, zugleich mindestens $(k+1)$ fremde zusammenhängende Teilmenge von $\mathbf{K}_N$, etwa $\mathbf{C}_{N1}, \ldots, \mathbf{C}_{N,k+1}$ trifft. Ist dabei $\mathbf{P}_0$ diejenige Hyperebene $\mathbf{P}$, welche etwa durch den Mittelpunkt von π' geht, so gibt es in jedem der $\mathbf{C}_{N1}, \ldots, \mathbf{C}_{N,k+1}$ Punkte, die auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{P}_0$ liegen. Daher gibt es eine Umgebung $\mathbf{u}$ von $\mathbf{P}_0$ im $E^{(n-1)}$, sodass $\mathbf{K}_N\mathbf{E}$ für jede Hyperebene $\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{u}$ mindestens $(k+1)$ verschiedene Punkte enthält. Andererseits liegen in $\mathbf{u}$ diejenigen Hyperebenen $\mathbf{E}'$ nirgends dicht, für welche $\mathbf{K}_N\mathbf{E}'$ mehr als k Punkte enthält; denn $\mathbf{K}_N$ soll einen schw. $(P|E^{(n-1)})$-Ord. $< k+1$ besitzen (vgl. Nr. 1.4.2.). Widerspruch. Damit ist der Hilfssatz in Nr. 5.2. bewiesen.