Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali.

Memoria di SANDRO FAEDO (a Roma).

Sunto. - *Si danno le condizioni necessarie per la semicontinuità dei funzionali*

$$I(y) = \int_a^b\int_a^b f[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)]dxdz,$$

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b\int_c^d f[x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)]dxdz,$$

dove $y = y(x)$, $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(z)$ *sono le equazioni di curve assolutamente continue per* x *in* (a, b) *e* z *in* (c, d).

La proprietà che più distingue tali funzionali da quelli finora considerati nel Calcolo delle Variazioni è che se $I(y)$ e $I(y_1, y_2)$ sono semicontinui su una data curva possono non esserlo su archi di questa. *Pertanto, oltre alle condizioni necessarie per la semicontinuità in tutto il campo e sopra una curva* C *assegnata, se ne danno anche altre per la semicontinuità su ogni arco di* C.

INTRODUZIONE

1. G. FUBINI, in una Memoria (1) del 1913, ha proposto lo studio di un nuovo tipo di problemi di Calcolo delle Variazioni e precisamente la ricerca dei massimi e minimi per il funzionale

$$I(y) = \int_a^b\int_a^b f[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)]dxdz.$$

Scrive il FUBINI (pag. 217):

« *Lo studio di questi nuovi problemi apre tutto un nuovo indirizzo di ricerche, in cui sarebbe, secondo me, del massimo interesse il trovare effettivamente condizioni necessarie e sufficienti per un massimo o per un minimo, seguendo l'ordine di studi che è stato aperto da* LEGENDRE, JACOBI, WEIERSTRASS, HILBERT. *Ma non può essere questo lo scopo di un primo lavoro, il quale, più che altro, deve essere dedicato a dimostrare con esempi particolari che i nuovi*

(1) G. FUBINI, *Alcuni nuovi problemi di Calcolo delle Variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali*, « Annali di Matematica pura ed applicata », S. III, T. XX, 1913, pagg. 217-244.

problemi non sono scelti a caso, ma che il loro studio getta nuova luce in altri campi dell'Analisi Matematica. E noi proveremo appunto che le nostre ricerche conducono per via semplice ed uniforme a risultati nuovi nel campo delle equazioni integro-differenziali: risultati che non sembrano facilmente conseguibili coi metodi finora applicati alle ordinarie equazioni del FREDHOLM ». Dopo aver accennato ad applicazioni ad altri campi, come al *problema di Dirichlet,* il FUBINI conclude:

« *Ma nonostante questi risultati, molto più numerose sono le questioni da noi poste, che i problemi risoluti in queste pagine, le quali vogliono essenzialmente contenere i primi germi di un nuovo capitolo di quel Calcolo Funzionale, alla costruzione del quale tanti sforzi sono ora diretti* ».

Il FUBINI fa uso, negli esempi che considera, dei metodi classici del Calcolo delle Variazioni, fondati sullo studio della equazione di EULERO, e sono noti [2] i numerosi inconvenienti e svantaggi che presenta tale modo di procedere.

Frattanto L. TONELLI sviluppava il Suo *metodo diretto* col quale il Calcolo delle Variazioni veniva ridotto a un capitolo del Calcolo Funzionale e mostrava che esso si poteva applicare col maggior successo a tutti i problemi classici.

Recentemente Egli [3] ha provato che il Suo metodo è applicabile anche all'integrale $I(y)$ e ne ha trattato alcuni casi particolari, deducendo in modo semplice ed elegante alcune classiche proposizioni relative agli autovalori delle equazioni integrali di FREDHOLM a nucleo simmetrico.

Seguendo un consiglio datomi dal mio Maestro L. TONELLI [4] — e di cui Lo ringrazio vivamente — *inizio col presente lavoro lo studio dell'integrale* I(y) *coi procedimenti della Scuola Italiana di Calcolo delle Variazioni,* sia per mostrare ancora una volta la vasta portata di tali metodi, sia per ottenere un nuovo strumento per la risoluzione di svariate questioni, di alcune delle quali mi occuperò in successivi lavori.

---

[2] V. ad es. L. TONELLI, *Il Calcolo delle Variazioni secondo la Scuola Italiana ed i suoi più recenti risultati,* « Atti del I° Congresso dell'Unione Matematica Italiana », 1937, pagg. 26-39.

[3] L. TONELLI, *Su alcuni funzionali,* « Annali di Matematica pura ed applicata », S. IV. T. XVIII, 1939. Alcuni dei risultati di tale Memoria sono riportati nel recente trattato di G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale,* (Zanichelli, Bologna), 1941, Vol. I, pagg. 277-286.

[4] Fin dal 1940. Il ritardo del presente lavoro è causato dal mio richiamo alle armi. Cfr. L. TONELLI, *L'analisi funzionale nel Calcolo delle Variazioni,* « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, Vol. IX, 1940, pagg. 289-302. Nel Cap. « Problemi attuali e nuovi orizzonti del Calcolo delle Variazioni », L. TONELLI addita tale questione all'attenzione dei matematici.

Oltre all'integrale $I(y)$ io considererò anche il funzionale più generale

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b\int_c^d f[x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)]dxdz.$$

Gli integrali $I(y)$ ed $I(y_1, y_2)$ si possono considerare, ad un primo esame come qualcosa di intermedio fra l'integrale curvilineo

$$\mathfrak{J}(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx$$

e l'integrale doppio

$$\mathfrak{J}_D(z) = \iint_D \Phi[x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)]dxdy. \quad \left[p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

che normalmente si considerano nel Calcolo delle Variazioni.

Risulterà dall'analisi che faremo che, per alcuni riguardi, $I(y_1\ y_2)$ ed $I(y)$ *hanno un carattere del tutto proprio e pongono problemi e difficoltà che non si presentavano nè per* $\mathfrak{J}(y)$ *nè per* $\mathfrak{J}_D(z)$.

2. La prima indagine da svolgere è quella sulle *condizioni necessarie per la semicontinuità.*

Tale ricerca è importante, oltre che per se stessa, perchè dà delle indicazioni decisive sulle vie che si debbono seguire nell'ulteriore sviluppo della teoria.

Nel Cap. I° dò le indicazioni necessarie per la semicontinuità inferiore di $I(y_1, y_2)$.

Si ottiene che, per la semicontinuità inferiore di $I(y_1, y_2)$ in tutto il campo che si considera, deve essere

(1) $$f_{y_1'y_1'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] \geq 0, \qquad f_{y_2'y_2'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] \geq 0.$$

Confrontiamo tali condizioni con quelle necessarie per la semicontinuità inferiore di $\mathfrak{J}(y)$ e $\mathfrak{J}_D(z)$, che sono

per $\mathfrak{J}(y)$ (5): $\qquad F_{y'y'} \geq 0$

e per $\mathfrak{J}_D(z)$ (6): $\qquad \Phi_{pp} \geq 0, \quad \Phi_{qq} \geq 0, \quad \Phi_{pp}\Phi_{qq} - \Phi_{pq}^2 \geq 0.$

Le (1) sono, almeno formalmente, simili alla $F_{y'y'} \geq 0$ [ciò che era da attendersi perchè $\mathfrak{J}(y)$ può considerarsi un caso particolare di $I(y_1, y_2)$] e alle

(5) L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*, Vol. I, Cap. X, pag: 369.
(6) S. CINQUINI, loc. cit. in (13).

prime due condizioni per $\mathfrak{J}_D(z)$, $\Phi_{pp} \geq 0$, $\Phi_{qq} \geq 0$. Non è invece necessario che sia, oltre alle (1),

$$f_{y_1' y_1'} f_{y_2' y_2'} - f^2_{y_1' y_2'} \geq 0,$$

come si potrebbe ritenere per analogia con la $\Phi_{pp}\Phi_{qq} - \Phi^2_{pq} \geq 0$.

Questo fatto porta a una conseguenza di notevole importanza per il seguito della teoria, in quanto *precisa in modo definitivo la posizione che occupa* $\mathrm{I}(y_1, y_2)$ *fra* $\mathfrak{J}(y)$ *e* $\mathfrak{J}_D(z)$.

In essenziali questioni riguardanti $\mathfrak{J}(y)$ conviene sviluppare $F(x, y, y')$ rispetto a y' con la formula di TAYLOR arrestata al secondo termine e cioè

$$\mathfrak{J}(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx = \int_a^b F(x, y, \bar{y}')dx +$$

$$+ \int_a^b [y' - \bar{y}']F_{y'}[x, y, \bar{y}']dx + \frac{1}{2}\int_a^b [y' - \bar{y}']^2 F_{y'y'}[x, y, \bar{\bar{y}}']dx;$$

in modo analogo, per l'integrale $\mathfrak{J}_D(z)$, è

$$\mathfrak{J}_D(z) = \iint_D \Phi(x, y, z, p, q)dxdy = \iint_D \Phi(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})dxdy +$$

$$+ \iint_D [p - \bar{p}]\Phi_p[x, y, z, \bar{p}, \bar{q}]dxdy + \iint_D [q - \bar{q}]\Phi_q[x, y, z, \bar{p}, \bar{q}]dxdy +$$

$$+ \frac{1}{2}\iint_D \{[p - \bar{p}]^2 \Phi_{\bar{\bar{p}}\bar{\bar{p}}} + 2[p - \bar{p}][q - \bar{q}]\Phi_{\bar{\bar{p}}\bar{\bar{q}}} + [q - \bar{q}]^2 \Phi_{\bar{\bar{q}}\bar{\bar{q}}}\}dxdy.$$

Ora, nei problemi quasi-regolari, è $F_{y'y'} \geq 0$, e la forma quadratica

$$u^2\Phi_{pp} + 2uv\Phi_{pq} + v^2\Phi_{qq}$$

è semidefinita positiva. Per questo, in tali questioni, è lecito trascurare l'influenza dell'ultimo integrale in ciascuno dei due precedenti sviluppi. Rimangono i più agevoli integrali

$$\int_a^b (y' - \bar{y}')F_{y'}(x, y, \bar{y}')dx, \quad \iint_D \{(p - \bar{p}]\Phi_p(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) + (q - \bar{q})\Phi_p(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})\}dxdy,$$

dove $F_{y'}$ e Φ_p, Φ_q sono calcolate per valori fissati di y', p, q; quando si vogliano determinare le condizioni necessarie per la semicontinuità, questi integrali si trattano immediatamente con un lemma fondamentale di L. TONELLI ([7]).

([7]) L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. V, pag. 213 e loc. cit. in ([22]).

Ove per l'integrale $I(y_1, y_2)$ si segua questa via come per $\mathfrak{J}_D(z)$, si può ancora applicare il lemma, ma la forma quadratica

$$u^2 f_{y_1' y_1'} + 2uv f_{y_1' y_2'} + v^2 f_{y_2' y_2'}$$

non è in generale semidefinita positiva (e tale ostacolo non si può rimuovere); se invece se ne fa lo sviluppo come per $\mathfrak{J}(y)$, *non è più lecito applicare il lemma di* TONELLI, perchè in tal caso la $f_{y_1'}$ è calcolata per $y_1' = \bar{y}_1'$ ma non per un fissato valore di y_2'.

Ho potuto superare tale difficoltà con un ragionamento che allarga il campo di applicabilità del lemma e ne rende possibile l'uso anche nel nuovo caso (§ 5, n. 1).

Ove si rifletta sulla natura della cosa, ciò significa che *è molto più profonda l'affinità di* $\mathrm{I}(y_1, y_2)$ *con* $\mathfrak{J}(y)$ *che non con* $\mathfrak{J}_D(z)$ e ciò corrisponde al fatto che mentre i legami con $\mathfrak{J}_D(z)$ sono più che altro formali, quelli con $\mathfrak{J}(y)$ sono di natura molto più intima, dipendendo entrambi da funzioni di una sola variabile.

Mediante l'introduzione delle funzioni $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ analoghe alla classica $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 = f(x, z, y_1, y_2, \bar{y}_1', y_2') - f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - \\ - (\bar{y}_1' - y_1') f_{y_1'}(x, y, z, y_1, y_2, y_1', y_2'), \\ \mathcal{E}_2 = f(x, z, y_1, y_2, y_1', \bar{y}_2') - f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - \\ - (\bar{y}_2' - y_2') f_{y_2'}(x, y, z, y_1, y_2, y_1', y_2'), \end{aligned}$$

si possono esprimere le condizioni (1) indipendentemente dall'ipotesi dell'esistenza di $f_{y_1' y_1'}$ e di $f_{y_2' y_2'}$, come si fa per $\mathfrak{J}(y)$.

3. Passo poi (§ 3) a dare le condizioni necessarie per la semicontinuità di $I(y_1, y_2)$ su una curva fissata.

Qui merita di essere segnalato un fatto nuovo che distingue nettamente $I(y_1, y_2)$ da $\mathfrak{J}(y)$ e $\mathfrak{J}_D(z)$.

Se l'integrale $\mathfrak{J}(y)$ (*e così pure* $\mathfrak{J}_D(z)$) *è semicontinuo su una data curva, lo è pure (e nello stesso senso) su ogni arco di questa. Ciò non è più vero per* $\mathrm{I}(y_1, y_2)$, *come provo con un esempio.*

Per $\mathrm{I}(y_1, y_2)$ *la semicontinuità su una data curva* (intendendo per curva la coppia di funzioni $y_1(x)$, $y_2(z)$) *non porta affatto la semicontinuità sugli archi di questa.*

Questo fatto arreca notevoli difficoltà nella trattazione dell'integrale $I(y_1, y_2)$, ma in compenso ne rende più interessante lo studio, dandogli una fisionomia tutta propria.

Pertanto dò due tipi di *condizioni necessarie perchè* $I(y_1, y_2)$ *sia semicontinuo inferiormente:*

a) *su ogni arco di una data curva.*

b) *su una curva assegnata.*

Per mostrare la diversità di tali condizioni, consideriamo il caso più semplice in cui siano continue $y_1'(x)$ e $y_2'(z)$.

Se $y = y_1(x)$, $y = y_2(z)$, $a \leq x \leq b$, $c \leq z \leq d$, sono le equazioni della curva, nel caso a) si trova che *su tutta la curva debbono essere verificate le* (1) *e nel caso* b) *deve invece soltanto essere*

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_c^d f_{y_1'y_1'}[x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)]dz \geq 0, \text{ per ogni } x \text{ in } (a, b), \\ \displaystyle\int_a^b f_{y_2'y_2'}[x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)]dx \geq 0, \text{ per ogni } z \text{ in } (c, d). \end{cases}$$

Queste condizioni hanno un aspetto nuovo rispetto a quelle per $\mathfrak{I}(y)$ e $\mathfrak{I}_D(z)$ e risolvono una questione che non si poneva per tali integrali.

4. Dalle (1) segue immediatamente che condizione necessaria per la continuità di $I(y_1, y_2)$ in tutto il campo è che sia

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \equiv P(x, z, y_1, y_2) + y_1'Q(x, z, y_1 . y_2) + \\ + y_2'R(x, z, y_1, y_2) + y_1'y_2'S(x, z, y_1, y_2).$$

5. Nel Cap. II studio l'integrale $I(y)$, che presenta nuove notevoli difficoltà nei riguardi di $I(y_1, y_2)$, $\mathfrak{I}(y)$ e $\mathfrak{I}_D(z)$.

Essendo, qualunque sia la curva C: $y = y(x)$,

$$I(y) = \int_a^b\int_a^b f[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)]dxdz = \\ = \int_a^b\int_a^b \frac{f[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)] + f[z, x, y(z), y(x), y'(z), y'(x)]}{2}\, dxdz,$$

si può sempre sostituire alla $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ la

$$\frac{f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') + f(z, x, y_2, y_1, y_2', y_1')}{2}.$$

Supporremo sempre che sia già stata fatta tale sostituzione e quindi

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = f(z, x, y_2, y_1, y_2', y_1').$$

Ciò è indispensabile per evitare casi banali che farebbero eccezione ai teoremi che stabiliremo [8].

È importante notare anzitutto *una profonda differenza — di carattere strutturale — fra l'integrale* I(y) *e quelli finora considerati nel Calcolo delle Variazioni e cioè* $\mathfrak{J}(y)$, $\mathfrak{J}_D(z)$ *e così pure* $I(y_1, y_2)$.

Per questi ultimi la semicontinuità porta a delle proprietà puntuali della funzione integranda in tutto il campo in cui è definita. Ciò dipende dalla seguente proprietà di $\mathfrak{J}(y)$, $\mathfrak{J}_D(z)$ e $I(y_1, y_2)$. Consideriamo ad esempio $\mathfrak{J}(y)$:

Sia (x_0, y_0, y_0') un qualunque punto interno al campo in cui è definita la $F(x, y, y')$. Comunque si prenda un intorno Δ a tre dimensioni di tale punto si può trovare una funzione $y = y(x)$, definita su un conveniente intervallo δ, tale che il punto $[x, y(x), y'(x)]$ appartenga a Δ, qualunque sia x in δ. Pertanto la semicontinuità o meno di

$$\int_\delta F[x, y(x), y'(x)]dx$$

dipende soltanto dai valori di $F(x, y, y')$ in Δ; si comprende quindi come per $\Delta \to 0$ si debba ottenere una proprietà di $F(x, y, y')$ nel punto (x_0, y_0, y_0') e cioè che per la semicontinuità inferiore debba necessariamente essere $F_{y'y'}(x_0, y_0, y_0'] \geq 0$. Lo stesso fatto sussiste sia per $\mathfrak{J}_D(z)$ che per $I(y_1, y_2)$.

Passiamo ora ad $I(y)$ e consideriamo un punto $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_1', \bar{y}_2']$, con $\bar{x} \neq \bar{z}$. Perchè il valore di $f(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_1', \bar{y}_2')$ influisca sul comportamento di $I(y)$ è ora necessario considerare una funzione $y = y(x)$ *definita almeno sull'intervallo* $(\bar{x}, \bar{z})$; *ma allora la semicontinuità di* I(y) *non dipende più soltanto dai valori di* $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ *in un intorno comunque piccolo di* $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_1', \bar{y}_2']$ *ma anche da quelli che essa assume in tutto un campo contenente* $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_1', \bar{y}_2']$ *e che non si può ridurre piccolo a piacere.*

Si potrebbe pensare di ottenere ugualmente, con procedimenti diversi da quelli che si usano per $\mathfrak{J}(y)$, $\mathfrak{J}_D(z)$ e $I(y_1, y_2)$, delle condizioni puntuali necessarie per la semicontinuità di $I(y)$.

---

(8) Ad esempio, se è $f(y_1', y_2') = y_1'^2 - y_2'^2$, l'integrale

$$I(y) = \int_0^1\int_0^1 [y'^2(x) - y'^2(z)]dxdz = 0$$

è continuo; però è $f_{y_1'y_1'} = 1$, $f_{y_2'y_2'} = -1$ e non è soddisfatta la condizione $f_{y_1'y_1'} = 0$, $f_{y_2'y_2'} = 0$ che è necessaria per la continuità. Sostituendo alla $f(y_1', y_2')$ la $\dfrac{f(y_1', y_2') + f(y_2', y_1')}{2}$, tale condizione è verificata.

Si dimostra (Cap. II°, § 6, n. 5) che *ciò è impossibile in generale,* fatta eccezione per i punti $[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2']$ in cui è $x = z$, $y_1 = y_2$, $y_1' = y_2'$.

6. Consideriamo dapprima i punti in cui è $x = z$, $y_1 = y_2$, $y_1' = y_2'$. Per la semicontinuità inferiore di $I(y)$ in tutto il campo *è necessario* (§ 5) *che in tali punti siano verificate le* (1); è appunto per ottenere tale teorema che si deve — come ho già detto — allargare il campo di applicabilità del Lemma di TONELLI.

Quanto alla semicontinuità su una curva assegnata, per $I(y)$ sussiste pure il fatto già segnalato per $I(y_1, y_2)$ e cioè che *se* I(y) *è semicontinuo su una curva può non esserlo su archi di questa.*

Ma per l'integrale $I(y)$ è interessante notare anche l'altro fatto e cioè che *se* C_1 *e* C_2 *sono due archi consecutivi di una curva assolutamente continua e se* I(y) *è semicontinuo inferiormente su* C_1 *e su* C_2, *può non esserlo su* $C_1 + C_2$.

Si dimostra (§ 6, n. 4) che *condizione necessaria affinchè su una data curva* $C(y = y(x),\ a \leq x \leq b)$, *con* $y'(x)$ *continua,* I(y) *sia semicontinuo inferiormente è che sia*

$$(44) \qquad \int_a^b f_{y_1'y_1'}[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)]dz \geq 0, \text{ per tutti gli } x \text{ di } (a, b).$$

In qnesto caso dalla (44) segue anche

$$\int_a^b f_{y_2'y_2'}[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)]dz \geq 0, \text{ per tutti gli } z \text{ di } (a, b).$$

Dunque *la condizione necessaria per la semicontinuità di* I(y) *su una data curva è la stessa ottenuta per la semicontinuità di* $I(y_1, y_2)$ [(12)].

Si deve però osservare che *la diversità fra* I(y) *e* $I(y_1, y_2)$, messa in luce nel n. 5, *obbliga in questo caso a procedere per vie assai diverse da quelle usate per stabilire la* (12); per lo stesso motivo *non si possono nemmeno usare i procedimenti tenuti da* L. TONELLI *e* S. CINQUINI *rispettivamente per gli integrali* $\mathfrak{J}(y)$ *e* $\mathfrak{J}_D(z)$.

7. Se poi si esige la semicontinuità inferiore di $I(y)$ su ogni arco di una curva data o in tutto il campo, non è più vero che debbano essere verificate le (1), come provo con un esempio, ma *ci si deve limitare a delle condizioni non più puntuali bensì globali.* La causa di ciò è stata chiarita nel n. 5.

Inoltre si mostra (§ 6, n. 7) che *in casi particolari* le condizioni necessarie in forma globale possono portare che, anche per $I(y)$, debbano essere verificate le (1) in tutto il campo; ma ciò, come ho già detto, non è vero in generale.

Invece, nel caso della continuità, si ha un fatto notevole che merita di essere segnalato e cioè si giunge, come per l'integrale $\mathrm{I}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2)$, *a condizioni puntuali; si dimostra che per la continuità in tutto il campo di* $\mathrm{I}(\mathrm{y})$ *deve essere — come per* $\mathrm{I}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2)$ —

$$f[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] \equiv P(x, z, y_1, y_2) + y_1'Q(x, z, y_1, y_2) + \\ + y_2'R(x, z, y_1, y_2) + y_1'y_2'S(x, z, y_1, y_2).$$

8. Nel Cap. III confronto i risultati ottenuti per $I(y_1, y_2)$ con quelli per $I(y)$ e ne concludo che *si deve anzitutto sviluppare la teoria di* $\mathrm{I}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2)$, *la quale darà certamente quanto è sufficiente anche per* $\mathrm{I}(\mathrm{y})$, *almeno per quanto concerne i problemi di effettivo interesse pratico.*

Ciò è confermato per ora, oltre che dal fatto che *le condizioni per la continuità in tutto il campo e quelle per la semicontinuità su una data curva sono le stesse per i due integrali, anche dai casi trattati da* L. Tonelli e imposti da un problema di equazioni integrali i quali, *pur essendo degli integrali* $\mathrm{I}(\mathrm{y})$, *soddisfano* **necessariamente** *anche alle condizioni più restrittive ottenute per* $\mathrm{I}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2)$.

Cap. I. - L'INTEGRALE $I(y_1, y_2)$.

§ 1. **Definizioni.**

Campo A. — Dicesi *campo* A un insieme di punti di uno spazio cartesiano $[x, z, y_1, y_2]$ che contenga tutti i propri punti di accumulazione posti al finito.

Funzione $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$. — La funzione $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ è definita in ogni punto di A ed ogni valore finito di y_1' e y_2' ed è *continua* insieme alle $f_{y_1'}$, $f_{y_2'}$, $f_{y_1'y_1'}$, $f_{y_2'y_2'}$ in ogni punto $[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2']$ in cui è definita.

Curva ordinaria. — Chiameremo *curva ordinaria* C ogni coppia di funzioni $y = y_1(x)$, $y = y_2(z)$, $a \leq x \leq b$, $c \leq z \leq d$, tali che:

$y_1(x)$ e $y_2(z)$ siano assolutamente continue nel rispettivo intervallo di definizione;

i punti $[x, z, y_1(x), y_2(z)]$ appartengano al campo A;

esista finito l'integrale nel senso di Lebesgue

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f[x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)] dx dz.$$

Osservazione I. — Gli intervalli (a, b) e (c, d) non sono necessariamente gli stessi per ogni curva ordinaria.

Osservazione II. — La funzione

$$f[x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)]$$

è quasi-continua [9] per $a \leq x \leq b$, $c \leq z \leq d$.

Arco di una curva ordinaria. — Se $C[y_1(x), y_2(z), a \leq x \leq b, c \leq z \leq d]$ è una curva ordinaria, dicesi *arco di* C ogni curva ordinaria $C'[y_1(x), y_2(z), a' \leq x \leq b', c' \leq z \leq d']$ con $a \leq a' < b' \leq b$, $c \leq c' < d' \leq d$.

Curva ordinaria di classe 1. — Se la curva ordinaria $C[y_1(x), y_2(z)]$ possiede continue le $y_1'(x)$ e $y_2'(z)$ si dirà *di classe* 1.

Funzioni $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ di WEIERSTRASS. — Per ogni punto (x, z, y_1, y_2) del campo A e per ogni terna di numeri $y', \bar{y}_1', y_2'$, si ponga

$$\mathcal{E}_1[x, z, y_1, y_2, y_2'; y_1', \bar{y}_1'] = f(x, z, y_1, y_2, \bar{y}_1', y_2') - f[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] - \\ - [\bar{y}_1' - y_1']f_{y_1'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'];$$

la funzione $\mathcal{E}_1$ così definita si dirà funzione $\mathcal{E}_1$ di WEIERSTRASS.

Per ogni punto (x, z, y_1, y_2) del campo A e per ogni terna di numeri y_1', y_2', $\bar{y}_2'$, si definisce la *funzione* $\mathcal{E}_2$ *di* WEIERSTRASS nel modo seguente:

$$\mathcal{E}_2[x, z, y_1, y_2, y_1'; y_2', \bar{y}_2'] = f(x, z, y_1, y_2, y_1', \bar{y}_2') - f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - \\ - [\bar{y}_2' - y_2']f_{y_2'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'].$$

Integrale $\mathfrak{J}(y)$. — Con *integrale* $\mathfrak{J}(y)$ intenderò un integrale curvilineo del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria [10]

$$\mathfrak{J}(y) = \int_C F\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) dx,$$

dove $y = y(x)$ è l'equazione della curva C.

Intorno (ρ) di una curva C. — Una curva $C[y_1(x), y_2(z), a \leq x \leq b, c \leq z \leq d]$ *appartiene propriamente all'intorno* (ρ) *di un'altra curva* $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$, quando:

1°) Per ogni x comune ad (a, b) e $(\bar{a}, \bar{b})$ e per ogni z comune a (c, d) e $(\bar{c}, \bar{d})$ è

$$| y_1(x) - \bar{y}_1(x) | \leq \rho, \quad | y_2(z) - \bar{y}_2(z) | \leq \rho;$$

2°) per ogni x minore di $\bar{a}$ ed appartenente ad (a, b) e per ogni z mi-

---

(9) L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. IX, § 1, pag. 349.

(10) L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. IX, pag 347.

nore di c e appartenente a (c, d) è

$$|\, y_1(x) - \bar{y}_1(\bar{a})\,| \leq \rho, \quad |\, y_2(z) - \bar{y}_2(\bar{c})\,| \leq \rho;$$

3°) per ogni x maggiore di $\bar{b}$ e appartenente ad (a, b) e per ogni z maggiore di $\bar{d}$ e appartenente a (c, d) è

$$|\, y_1(x) - \bar{y}_1(\bar{b})\,| \leq \rho, \quad |\, y_2(z) - \bar{y}_2(\bar{c})\,| \leq \rho;$$

4°) è

$$|\, a - \bar{a}\,| \leq \rho, \quad |\, b - \bar{b}\,| \leq \rho, \quad |\, c - \bar{c}\,| \leq \rho, \quad |\, d - \bar{d}\,| \leq \rho.$$

Semicontinuità e continuità dell'integrale $I(y_1, y_2)$. — Si dirà che l'integrale $I(y_1, y_2)$ è una *funzione semicontinua inferiormente (superiormente) sulla curva ordinaria* $\bar{C}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ se, preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si può determinare $\rho > 0$ in modo che per tutte le curve ordinarie $C(y_1, y_2)$ che appartengono propriamente all'intorno (ρ) della $\bar{C}$ sia

$$I(y_1, y_2) > I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) - \varepsilon \qquad [< I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) + \varepsilon].$$

Se $I(y_1, y_2)$ è una funzione semicontinua inferiormente (superiormente) su ogni curva ordinaria, si dirà una *funzione semicontinua inferiormente (superiormente)*.

Si dirà che $I(y_1, y_2)$ è *continuo* sulla curva $\bar{C}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ se, preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare $\rho > 0$ in modo che sia

$$|\, I(y_1, y_2) - I(\bar{y}_1, \bar{y}_2)\,| < \varepsilon$$

per tutte le curve $C(y_1, y_2)$ che appartengono propriamente all'intorno (ρ) della $\bar{C}$.

Se $I(y_1, y_2)$ è continuo su ogni curva ordinaria si dirà una funzione continua.

§ 2. La semicontinuità in tutto il campo.

1. **Condizione necessaria per la semicontinuità inferiore.** — Come è noto ci si può limitare a trattare la semicontinuità inferiore, poichè per ottenere le condizioni per la semicontinuità superiore non c'è che da cambiare il senso delle disuguaglianze che si stabiliscono.

Teorema. — *Condizione necessaria affinchè l'integrale* $I(y_1, y_2)$ *sia una funzione semicontinua inferiormente è che sia*

$$(1) \qquad f_{y_1'y_1'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] \geq 0, \quad f_{y_2'y_2'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] \geq 0,$$

per ogni valore finito di y_1' *e* y_2', *in tutti i punti interni al campo* A *o di accumulazione di tali punti.*

Supponiamo, se possibile, che esistano un punto $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ interno ad A ed una coppia di valori $\bar{y}_1'$, $\bar{y}_2'$, tali che sia

$$f_{y_1'y_1'}[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_1', \bar{y}_2'] < 0. \tag{2}$$

Per la continuità della $f_{y_1'y_1'}$ e per la (2) si può determinare $\delta > 0$ in modo che se è

$$|z - \bar{z}| \leq \delta, \quad |y_2 - \bar{y}_2| \leq |\bar{y}_2'|\,\delta$$

il punto $(\bar{x}, z, \bar{y}_1, y_2)$ appartenga ancora ad A e sia

$$f_{y_1'y_1'}[\bar{x}, z, \bar{y}_1, y_2, \bar{y}_1', \bar{y}_2'] < 0. \tag{3}$$

Indichiamo con A_2 l'intersezione di A con gli iperpiani $x = \bar{x}$, $y_1 = \bar{y}_1$ e per il punto $[\bar{z}, \bar{y}_2]$ di A_2 tracciamo il segmento, tutto contenuto in A_2, di equazione

$$y_2 = \bar{y}_2 + \bar{y}_2'(z - \bar{z}) = \bar{y}_2(z), \qquad |z - \bar{z}| \leq \delta.$$

Consideriamo ora l'integrale

$$I[y_1(x), \bar{y}_2(z)] = \int_a^b \int_{\bar{z}-\delta}^{\bar{z}+\delta} f(x, z, y_1(x), \bar{y}_2(z), y_1'(x), \bar{y}_2'(z)]dxdz,$$

$y_1 = y_1(x)$ essendo una funzione continua con la derivata prima in (a, b), con $a < \bar{x} < b$, $y_1(\bar{x}) = \bar{y}_1$, $y_1'(\bar{x}) = \bar{y}_1'$; inoltre la curva $\bar{C}[y_1(x), \bar{y}_2(z)]$ appartenga al campo A.

La funzione di x e z

$$f[x, z, y_1(x), \bar{y}_2(z), y_1'(x), \bar{y}_2'(z)]$$

è continua ed è quindi

$$I[y_1(x), \bar{y}_2(z)] = \int_a^b \Phi[x, y_1(x), y_1'(x)]dx, \tag{4}$$

con

$$\Phi(x, y_1, y_1') = \int_{\bar{z}-\delta}^{\bar{z}+\delta} f[x, z, y_1, \bar{y}_2(z), y_1', \bar{y}_2'(z)]dz.$$

La Φ è finita e continua con $\Phi_{y_1'}$ e $\Phi_{y_1'y_1'}$; ma dalla (3) segue

$$\Phi_{y_1'y_1'}[\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_1'] = \int_{\bar{z}-\delta}^{\bar{z}+\delta} f_{y_1'y_1'}[\bar{x}, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2(z), \bar{y}_1', \bar{y}_2'(z)]dz < 0.$$

Ciò significa che l'integrale (4) non soddisfa alla condizione necessaria di TONELLI [11] per la semicontinuità inferiore e pertanto l'integrale $I(y_1, y_2)$ non è semicontinuo inferiormente sulla curva $\bar{C}$.

È così provato che non può sussistere la (2). Dalla continuità della $f_{y_1'y_1'}$ segue subito che la prima delle (1) deve essere verificata anche in ogni punto di accumulazione di punti interni ad A.

In modo del tutto analogo si dimostra la seconda delle (1).

Osservazione. — Può sorgere l'idea di ricercare le condizioni necessarie (1) servendosi del metodo diretto di L. TONELLI con i procedimenti che si usano per gli integrali doppi

$$\mathfrak{J}_D(z) = \iint_D \Phi(x, y, z, p, q)dxdy,$$

Φ essendo una funzione continua con Φ_{pp}, Φ_{pq}, Φ_{qq} per (x, y) in D e ogni valore finito di z, p, q, dove D designa un campo aperto e limitato.

Se $z = z(x, y)$ sappresenta una superficie assolutamente continua in D [nel senso di TONELLI [12]] e tale che, posto $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, l'integrale $\mathfrak{J}_D(z)$ esista finito, S. CINQUINI [13] ha dimostrato che *condizione necessaria affinchè* $\mathfrak{J}_D(z)$ *sia semicontinuo inferiormente su ognuna di tali superficie è che sia simultaneamente*

$$\Phi_{pp} \geq 0, \quad \Phi_{qq} \geq 0, \quad \Phi_{pp}\Phi_{qq} - \Phi_{pq}^2 \geq 0, \tag{5}$$

in tutti i punti del campo D *e della sua frontiera e per ogni valore finito di* z, p, q.

Con lo stesso procedimento con cui si ottengono le prime due delle (5) si possono, con opportuni accorgimenti, dimostrare le (1).

Vien quindi naturale di pensare che, analogamente alla terza delle (5), si possa dedurre una ulteriore condizione necessaria per la semicontinuità dell'integrale $I(y_1, y_2)$ e precisamente che debba essere, oltre alle (1),

$$f_{y_1'y_1'}f_{y_2'y_2'} - f_{y_1'y_2'}^2 \geq 0. \tag{6}$$

Ove si vada a sviluppare tale dimostrazione si vede che in un punto

---

(11) L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. X, § 1, pag. 369.

(12) L. TONELLI, *Sulla quadratura delle superficie*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. III, 1926.

(13) S. CINQUINI, *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni*, « Annali di Matematica pura ed applicata », S. IV, T. X, 1932, pagg. 234-242.

essenziale ([14]) non si può più procedere come fa S. CINQUINI per l'integrale $\mathfrak{J}_D(z)$.

Si potrebbe pensare di conseguire la (6) con altri procedimenti ed è quindi necessario chiarire tale questione.

Mostrerò infatti, con un semplice esempio, che *la* (6) *non è una condizione necessaria per la semicontinuità inferiore.*

Sia

$$f(y_1', y_2') = y_1'^2 y_2'^2.$$

Tale funzione soddisfa alle (1) ma non alla (6), avendosi

$$f_{y_1'y_1'}f_{y_2'y_2'} - f^2_{y_1'y_2'} = -12y_1'^2 y_2'^2 \leq 0.$$

L'integrale

$$I_1(y_1, y_2) = \int_0^1\int_0^1 y_1'^2(x) y_2'^2(z)\,dx\,dz$$

è semicontinuo inferiormente su ogni curva ordinaria; infatti è

$$I_1(y_1, y_2) = \int_0^1 y_1'^2(x)\,dx \cdot \int_0^1 y_2'^2(z)\,dz$$

e poichè l'integrale $\int_0^1 y'^2(x)\,dx$ è semicontinuo inferiormente ([15]) ne segue immediatamente che lo è anche $I_1(y_1, y_2)$.

([14]) Tenendo presente il lavoro di S. CINQUINI già citato, si possono nel nostro caso costruire due successioni di poligonali $y_1 = y_{1,n}(x)$, $y_2 = y_{2,n}(z)$ tali che (come per le (6) e (7) di pag. 237) sia

$$|y'_{1,n}(x) - \bar{y}_1'| = |u|\lambda < \delta, \quad |y'_{2,n}(z) - \bar{y}_2'| = |v|\lambda < \delta.$$

Invece dell'integrale

$$\frac{1}{2}\lambda^2 \iint_Q [u^2\Phi_{pp} + 2uv\Phi_{pq} + v^2\Phi_{qq}]\,dx\,dy$$

che trovasi in fondo a pag. 240, nel nostro caso si otterrebbe

$$\frac{1}{2}\lambda^2 \int_a^b\int_c^d [u^2 f_{y_1'y_1'} \pm 2uv f_{y_1'y_2'} + v^2 f_{y_2'y_2'}]\,dx\,dz,$$

dove il segno di $\pm 2uvf_{y_1'y_2'}$ va così interpretato:

si prende il segno $+$ nei punti (x, y) in cui è $[y'_{1,n}(x) - \bar{y}_1'][y'_{2,n}(z) - \bar{y}_2'] > 0$;

il segno $-$ nei punti (x, z) in cui tale prodotto è < 0.

Non si può quindi concludere, analogamente a come fa S. CINQUINI, che sia necessaria la (6).

([15]) L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. XI, pag. 397.

2. **Altra forma della condizione necessaria per la semicontinuità inferiore.** — Le condizioni (1) per la semicontinuità inferiore sono espresse mediante le derivate seconde della funzione f rispetto a $y_1' y_1'$ e $y_2' y_2'$.

Come accade per gli integrali già trattati nel Calcolo delle Variazioni, introducendo la funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS, si possono esprimere le condizioni necessarie (1) supponendo solo l'esistenza e la continuità delle $f_{y_1'}$ e $f_{y_2'}$. Per l'integrale $I(y_1, y_2)$ si hanno le due funzioni $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ di WEIERSTRASS definite nel § 1.

Teorema. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale* $I(y_1, y_2)$ *sia una funzione semicontinua inferiormente è che si abbia*

$$\mathcal{E}_1(x, z, y_1, y_2, y_2'; y_1', \bar{y}_1') \geq 0, \qquad \mathcal{E}_2(x, z, y_1, y_2, y_1'; y_2', \bar{y}_2') \geq 0,$$

per ogni valore finito di y_1', y_2', $\bar{y}_1'$, $\bar{y}_2'$ *e in tutti i punti interni ad* A *o d'accumulazione di tali punti.*

Supponiamo, ad esempio, che esistano un punto interno ad A $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2]$ ed una terna di numeri $\bar{y}_1'$, $y_1^{*\prime}$, $\bar{y}_2'$ tali che sia

$$\mathcal{E}_1[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_2'; \bar{y}_1', y_1^{*\prime}] < 0. \tag{7}$$

Per la continuità della $\mathcal{E}_1$ si può determinare $\delta > 0$ in modo che se è

$$|z - \bar{z}| \leq \delta, \qquad |y_2 - \bar{y}_2| \leq |\bar{y}_2'|\,\delta$$

il punto $(\bar{x}, z, \bar{y}_1, y_2)$ appartenga ad A e sia sempre

$$\mathcal{E}_1(\bar{x}, z, \bar{y}_1, y_2, \bar{y}_2'; \bar{y}_1', y_1^{*\prime}) < 0.$$

Conservando le notazioni del teorema del n. 1, consideriamo ancora l'integrale

$$I_1[y_1(x), \bar{y}_2(z)] = \int_a^b \Phi[x, y_1(x), y_1'(x)]dx, \tag{4}$$

con

$$\Phi(x, y_1, y_1') = \int_{\bar{z}-\delta}^{\bar{z}+\delta} f[x, z, y_1, \bar{y}_2(z), y_1', y_2'(z)]dz.$$

La funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS relativa alla $\Phi(x, y, y')$ è [16]

$$\mathcal{E}(x, y_1; y_1', y_1^{*\prime}) = \Phi(x, y_1, y_1^{*\prime}) - \Phi(x, y_1, y_1') - (y_1^{*\prime} - y_1')\Phi_{y_1'}(x, y_1, y_1');$$

---

[16] L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. IX, n. 135, pag. 350.

ne segue

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}_1; \bar{y}_1', y_1^{*\prime}) = \int_{\bar{z}-\delta}^{\bar{z}+\delta} \{ f[\bar{x}, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2(z), y_1^{*\prime}, \bar{y}_2'(z)] - f[\bar{x}, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2(z), \bar{y}_1', \bar{y}_2'(z)] -$$

$$- [y_1^{*\prime} - \bar{y}_1'] f_{y_1'}[\bar{x}, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2(z), \bar{y}_1', \bar{y}_2'(z)] \} dz =$$

$$= \int_{\bar{z}-\delta}^{\bar{z}+\delta} \mathcal{E}_1(\bar{x}, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2(z), \bar{y}_2'(z); \bar{y}_1', y_1^{*\prime}) dz < 0,$$

per la (7). Ma allora l'integrale (4) non è semicontinuo inferiormente e si può concludere come nel n. 1.

3. **Condizione necessaria per la continuità.** - Teorema. — *Condizione necessaria affinchè l'integrale* $I(y_1, y_2)$ *sia una funzione continua è che si abbia*

$$f \equiv P(x, z, y_1, y_2) + y_1' Q(x, z, y_1, y_2) + y_2' R(x, z, y_1', y_2') + y_1' y_2' S(x, z, y_1, y_2)$$

in tutti i punti interni ad A *e in quelli di accumulazione di tali punti.*

Infatti per la semicontinuità inferiore deve essere

$$f_{y_1'y_1'} \geq 0, \quad f_{y_2'y_2'} \geq 0,$$

e per quella superiore

$$f_{y_1'y_1'} \leq 0, \quad f_{y_2'y_2'} \leq 0.$$

Deve quindi aversi

$$f_{y_1'y_1'} = f_{y_2'y_2'} = 0$$

in tutti i punti interni ad A o di accumulazione di questi.

§ 3. La semicontinuità su una data curva.

1. **Diversità fondamentale fra l'integrale $I(y_1, y_2)$ e l'integrale $\mathfrak{I}(y)$.** — Prima di passare a stabilire le condizioni necessarie per la semicontinuità su una curva ordinaria assegnata, è essenziale mettere in evidenza una differenza fondamentale, rispetto a tale questione, fra l'integrale $I(y_1, y_2)$ e l'integrale curvilineo in forma ordinaria del Calcolo delle Variazioni $\mathfrak{I}(y)$; ciò sia allo scopo di mettersi in guardia da fallaci analogie fra i due integrali, sia perchè in tale diversità di comportamento risiede uno degli aspetti più interessanti dell'integrale $I(y_1, y_2)$.

Una proprietà fondamentale dell'integrale $\mathfrak{I}(y)$ è la seguente:

Se I(y) *è semicontinuo inferiormente sulla curva* C *lo è pure su ogni arco di* C [17].

---

[17] L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. VI, 2, n. 88. nota a piè di pagina 245.

La dimostrazione è immediata; di tale proprietà si fa sistematico uso nella ricerca delle condizioni necessarie per la semicontinuità di $\mathfrak{I}(y)$ su una data curva.

Tale fatto non è più vero per $I(y_1, y_2)$.

Se $I(y_1, y_2)$ *è semicontinuo inferiormente su una data curva, può non esserlo su archi di questa.*

Proveremo questa affermazione dando un esempio di un integrale $I(y_1, y_2)$ continuo su una data curva e non continuo su archi di questa.

Sia

$$f(y_1', y_2') = e^{-y_1'^2} y_2'.$$

Su una curva ordinaria $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1]$, tale che sia $\bar{y}_2(0) = \bar{y}_2(1)$ e che $\bar{y}_2(z)$ non sia costante, l'integrale

$$I_1(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d e^{-y_1'^2(x)} y_2'(z) dx dz$$

è una funzione continua.

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si determini ρ, con $0 < \rho < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, in modo che la $\bar{y}_2(z)$ abbia in ogni intervallo di ampiezza $\leq \rho$ una oscillazione minore di $\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ e si consideri una qualunque curva $C[y_1(x), y_2(z), a \leq x \leq b, c \leq z \leq d]$ che appartenga propriamente all'intorno (ρ) della $\bar{C}$.

È

$$I_1(y_1, y_2) - I_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \int_a^b \int_c^d e^{-y_1'^2(x)} y_2'(z) dx dz - \int_0^1 \int_0^1 e^{-\bar{y}_1'^2(x)} \bar{y}_2'(z) dx dz =$$

$$= [y_2(d) - y_2(c)] \int_a^b e^{-y_1'^2(x)} dx ;$$

ma è

$$| y_2(d) - \bar{y}_2(1) | \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad | y_2(c) - \bar{y}_2(0) | \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

e quindi

$$| y_2(d) - y_2(c) | \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ne segue

$$| I_1(y_1, y_2) - I_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2) | \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b e^{-y'^2(x)} dx \leq \varepsilon.$$

È così provato che I_1 è una funzione continua su $\bar{C}$.

Si scelga ora un qualunque arco parziale $\bar{\Gamma}(0 \leq \bar{a} \leq x \leq \bar{b} \leq 1$, $0 \leq \bar{c} \leq z \leq \bar{d} \leq 1)$ di $\bar{C}$, con la sola condizione che sia $\bar{y}_2(\bar{c}) \neq \bar{y}_2(\bar{d})$; ciò è sempre possibile perchè la $\bar{y}_2(z)$ non è costante in $(0, 1)$.

Sia ora $\Gamma[y_1(x), y_2(z)]$ una curva ordinaria avente gli stessi punti terminali di $\bar{\Gamma}$; la differenza fra l'integrale I_1 calcolato sulla curva Γ e su $\bar{\Gamma}$ è

$$I_1(y_1, y_2) - I_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}}\int_{\bar{c}}^{\bar{d}} \{ e^{-y_1'^2(x)} y_2'(z) - e^{-\bar{y}_1'^2(x)} \bar{y}_2'(z) \} \, dx dz =$$

$$= [\bar{y}_2(\bar{d}) - \bar{y}_2(\bar{c})] \cdot \left\{ \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} e^{-y_1'^2(x)} dx - \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} e^{\bar{y}'^2(x)} dx \right\}.$$

Poichè l'integrale

$$\int_{\bar{a}}^{b} e^{-y'^2(x)} dx$$

non è continuo sulla curva $y = \bar{y}_1(x)$, si può determinare un $\sigma > 0$ tale che comunque piccolo si prenda $\rho > 0$ si trovi sempre qualche $y_1(x)$ $[\bar{a} \leq x \leq \bar{b}]$ con

$$| y_1(x) - \bar{y}_1(x) | \leq \rho$$

e per cui sia

$$\left| \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} e^{-y_1'^2(x)} dx - \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} e^{-\bar{y}_1'^2(x)} dx \right| > \sigma.$$

Per quanto piccolo si prenda $\rho > 0$ si può allora trovare sempre una curva ordinaria $\Gamma(y_1, y_2)$ appartenente propriamente all'intorno (ρ) di $\bar{\Gamma}$ e per cui è

$$| I_1(y_1, y_2) - I_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2 | > \sigma | \bar{y}_2(\bar{d}) - \bar{y}_2(\bar{c}) |$$

ed è così provato che su $\bar{\Gamma}$ l'integrale $I_1(y_1, y_2)$ non è continuo.

È così dimostrato che dalla continuità o semicontinuità (superiore o inferiore) di I(y_1, y_2) *su una data curva* C *non si può dedurre la stessa proprietà per ogni arco di* C.

Tale fatto stabilisce una fondamentale diversità fra l'integrale $I(y_1, y_2)$ e gli integrali curvilinei $\mathfrak{J}(y)$ finora considerati nel Calcolo delle Variazioni.

Si presentano quindi naturali due vie da seguire nello sviluppo della teoria e cioè *dare delle condizioni perchè l'integrale sia semicontinuo inferiormente*:

a) *su una data curva e su ogni suo arco parziale,*

oppure

b) *su una curva assegnata.*

Per quel che riguarda le condizioni necessarie per la semicontinuità svilupperò compiutamente tali due ricerche nel caso più semplice che la curva sia di classe 1, sia per non rendere troppo lungo il presente lavoro, sia perchè in tal modo si ottengono ugualmente complete indicazioni sulle condizioni sufficienti per la semicontinuità in entrambi i casi a) e b).

Qualora la curva ordinaria non sia di classe 1, ne tratterò alcuni tipi particolari ed esporrò delle considerazioni di carattere generale, mettendo in evidenza un inconveniente che si può presentare.

2. **La semicontinuità su ogni arco di una data curva.** - Teorema. — *Condizione necessaria affinchè su ogni arco di una data curva ordinaria* $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)]$, *di classe 1, completamente interna al campo* A, *l'integrale* $I(y_1, y_2)$ *sia una funzione semicontinua inferiormente, è che si abbia in ogni punto di* $\bar{C}$

(9) $f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)] \geq 0, \quad f_{y_2'y_2'}[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)] \geq 0.$

Supponiamo infatti che sia

(10) $$f_{y_1'y_1'}[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1(\bar{x}), \bar{y}_2(\bar{z}), \bar{y}_1'(\bar{x}), \bar{y}_2'(\bar{z})] < 0;$$

si può allora determinare un numero $\delta > 0$ in modo che sia

$$f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)] < 0$$

ogni qualvolta risulta

(11) $$|x - \bar{x}| \leq \delta, \quad |z - \bar{z}| \leq \delta.$$

Per conseguire il teorema basta dimostrare che dalla (10) segue che non è semicontinuo inferiormente, sull'arco $\bar{\Gamma}$ di $\bar{C}$ che soddisfa alle (11), l'integrale

$$I_\delta(y_1, y_2) = \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta}\int_{\bar{z}-\delta}^{\bar{z}+\delta} f[x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)]dxdz.$$

Infatti si ha

$$I_\delta(y_1, \bar{y}_2) = \int_{\bar{z}-\delta}^{\bar{z}+\delta} \Phi[x, y_1(x), y_1'(x)]dx,$$

con

$$\Phi(x, y_1, y_1') = \int_{\bar{z}-\delta}^{\bar{z}+\delta} f[x, z, y_1, \bar{y}_2(z), y_1', \bar{y}_2'(z)]dz,$$

ed è

$$\Phi_{y_1'y_1'}[x, \bar{y}_1(x), \bar{y}_1'(x)] = \int_{\bar{z}-\delta}^{\bar{z}+\delta} f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)]dz < 0,$$

per tutti gli x che verificano la (11). Quindi $I_\delta(y_1(x), \bar{y}_2)$ non è semicontinuo inferiormente ([18]) sulla curva di equazione $y_1 = \bar{y}_1(x)$ $[|x - \bar{x}| \leq \delta]$ e così non lo è neppure $I_\delta(y_1, y_2)$ sull'arco $\bar{\Gamma}$ di $\bar{C}$.

Se non si suppone l'esistenza delle $f_{y_1'y_1'}$ e $f_{y_2'y_2'}$ si ha il

T e o r e m a. — *Condizione necessaria affinchè su ogni arco di una data curva ordinaria* $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)]$, *di classe 1, completamente interna al campo* A, *l'integrale* $I(y_1, y_2)$ *sia una funzione semicontinua inferiormente è che si abbia in ogni punto di* C, *per tutti i valori di* y_1', y_2',

$$\mathcal{E}_1[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_2'(z); \bar{y}_1'(x), y_1'] \geq 0,$$
$$\mathcal{E}_1[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x); \bar{y}_2'(z), y_2'] \geq 0,$$

La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente.

O s s e r v a z i o n e. — Come per l'integrale $\mathfrak{I}(y)$ ([19]) si può osservare che i due teoremi di questo n. continuano a sussistere anche se la curva C non è completamente interna al campo A, purchè essa non possieda archi parziali tutti costituiti da punti della frontiera di A.

3. La semicontinuità su una curva assegnata. - T e o r e m a. — *Condizione necessaria affinchè su una data curva ordinaria* $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), a \leq x \leq b, c \leq z \leq d]$, *di classe 1, completamente interna al campo* A, *l'integrale* $I(y_1, y_2)$ *sia una funzione semicontinua inferiormente, è che si abbia*

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_c^d f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)]dz \geq 0, \quad \textit{per ogni } \mathrm{x} \textit{ in } (\mathrm{a}, \mathrm{b}), \\ &\int_a^b f_{y_2'y_2'}[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)]dx \geq 0, \quad \textit{per ogni } \mathrm{z} \textit{ in } (\mathrm{c}, \mathrm{d}). \end{aligned} \right.$$

Affinchè $I(y_1, y_2)$ sia semicontinuo inferiormente su $\bar{C}$ è necessario che lo siano $I[y_1(x), \bar{y}_2(z)]$ su $\bar{y}_1(x)$ e $I[\bar{y}_1(x), y_2(z)]$ su $\bar{y}_2(z)$.

Ma è

$$I[y_1(x), \bar{y}_2(z)] = \int_a^b \Phi[x, y_1(x), y_1'(x)]dx,$$

([18]) L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. X, 2, pag. 370.

([19]) L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. VI, n. 88 *b)*, pag. 245.

con

$$\Phi(x, y_1, y_1') = \int_c^d f[x, z, y_1, \bar{y}_2(z), y_1', \bar{y}_2'(z)]dz.$$

$\Phi(x, y_1, y_1')$ è continua per ogni valore finito di y_1' insieme alla $\Phi_{y_1'y_1'}$.

Affinchè $I[y_1(x), \bar{y}_2(z)]$ sia semicontinuo inferiormente su $\bar{y}_1(x)$ è quindi necessario che sia $\Phi_{y_1'y_1'}[x, \bar{y}_1(x), \bar{y}_1'(x)] \geq 0$, ossia

$$\int_c^d f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)]dz \geq 0,$$

per tutti gli x di (a, b).

Osservazione. — Le condizioni (9) date nel n. 2 sono evidentemente contenute nelle (12). Inoltre dal teorema ora dato si può dedurre facilmente quello del n. 2. Infatti, se $I(y_1, y_2)$ è semicontinuo inferiormente su ogni arco di C, le (12) sono verificate qualunque siano (a, b) e (c, d) e poichè le funzioni sotto il segno d'integrale sono continue debbono essere verificate le (9).

Sussiste pure il

Teorema. — *Condizione necessaria affinchè su una data curva ordinaria* $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), a \leq x \leq b, c \leq z \leq d]$, *di classe 1, completamente interna al campo* A, *l'integrale* $I(y_1, y_2)$ *sia una funzione semicontinua inferiormente, è che si abbia per tutti i valori di* y_1' *e* y_2',

$$\int_c^d \mathcal{E}_1[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_2'(x); \bar{y}_1'(x), y_1']dz \geq 0, \quad \textit{per ogni } x \textit{ in } (a, b)$$

$$\int_a^b \mathcal{E}_2[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x); \bar{y}_2'(z), y_2']dx \geq 0, \quad \textit{per ogni } z \textit{ in } (c, d).$$

4. La continuità su una data curva. — Sia $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), a \leq x \leq b, c \leq z \leq d]$ una curva di classe 1, completamente interna al campo A. Dal teorema del n. 2 segue immediatamente:

Condizione necessaria affinchè l'integrale $I(y_1, y_2)$ *sia una funzione continua su ogni arco di* $\bar{C}$ *è che si abbia in tutti i punti della curva* $\bar{C}$ *e per tutti i valori di* y_1' *e* y_2'

$$(13) \qquad f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = P(x, z, y_1, y_2) + y_1'Q(x, z, y_1, y_2) + \\ + y_2'R(x, z, y_1, y_2) + y_1'y_2'S(x, z, y_1, y_2).$$

Dal teorema del n. 3 segue l'altra proposizione:

Condizione necessaria affinchè l'integrale $I(y_1, y_2)$ *sia una funzione continua su* $\overline{C}$ *è che si abbia*

$$(14_1) \qquad \int_c^d f(x, z, y_1, \bar{y}_2(z), y_1', \bar{y}_2'(z)]dz = A(x, y_1) + y_1' B(x, y_1)$$

per ogni valore di y_1' *e in tutti i punti* $(x, \bar{y}_1(x))$ *con* $a \leq x \leq b$, *e*

$$(14_2) \qquad \int_a^b f(x, z, \bar{y}_1(x), y_2, \bar{y}_1'(x), y_2']dx = C(z, y_2) + y_2' D(z, y_2)$$

per ogni valore di y_2' *e in tutti i punti* $(z, \bar{y}_2(z))$ *con* $c \leq z \leq d$.

L'integrale $I_1(y_1, y_2)$ considerato nel n. 1 del presente paragrafo soddisfa alle (14_1) e (14_2) ma non alle (13). Infatti in tal caso è

$$f[y_1', y_2'] = e^{-y_1'^2} y_2'$$

e la curva $\overline{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)], 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1]$ è tale che sia $\bar{y}_2(0) = \bar{y}_2(1)$.

La (13) non è evidentemente soddisfatta su $\overline{C}$; quanto alla (14_1) è

$$\int_0^1 e^{-\bar{y}'^2(x)} \bar{y}_2'(z) dz = (\bar{y}_2(1) - \bar{y}_2(0))\, e^{-y_1^2(x)} = 0$$

e la (14_2) è pure verificata essendo

$$\int_0^1 e^{-\bar{y}_1'^2(x)} \bar{y}_2' dx = y_2' \int_0^1 e^{-\bar{y}'^2(x)} dx = y_2' \cdot D.$$

5. La semicontinuità su una data curva ordinaria non di classe 1. — Nei numeri 2 e 3 si è visto, quando la curva ordinaria C in esame è di classe 1, come differiscano le condizioni necessarie per la semicontinuità inferiore a seconda che tale proprietà sia o no richiesta sulla C soltanto oppure su ogni suo arco.

Delle semplici considerazioni permettono di vedere cosa accada, in taluni casi significativi, quando la curva in esame non sia di classe 1.

Suppeniamo che $\bar{y}_2'(z)$ sia continua in (c, d), mentre $\bar{y}_1(x)$ sia supposta soltanto assolutamente continua in (a, b) in modo che $\overline{C}[y_1(x), \bar{y}_2(z)]$ sia una curva ordinaria.

Si ottiene allora facilmente che condizione necessaria per la semicontinuità di $I(y_1, y_2)$ su $\bar{C}$ è che per quasi tutti gli x di (a, b) sia

$$\int_c^d f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)]dz \geq 0 \text{ [20]}.$$

Pur non intendendo, per le ragioni già dette, di occuparmi qui del caso generale delle curve non di classe 1, ritengo utile mostrare un esempio in cui, pur essendo $I(y_1, y_2)$ semicontinuo inferiormente su $\bar{C}$, gli integrali (14_1) e (14_2) risultano infiniti, qualunque siano x e z rispettivamente.

Consideriamo dapprima l'integrale curvilineo

$$\mathfrak{J}(y) = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{y'^2(x)}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(y'(x))dx,$$

che è semicontinuo inferiormente [21] su ogni curva ordinaria definita per $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Indichiamo con $\bar{C}$ la curva di equazione

$$y = \bar{y}(x) = \int_0^x \sqrt{-\log x - 2\log|\log x|}\, dx \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right),$$

la radice quadrata essendo intesa in senso aritmetico.

Per $0 < x \leq \frac{1}{2}$ è

$$\bar{y}'^2(x) = -\log x - 2\log|\log x|$$

e per $x = 0$, si ponga $\bar{y}'(0) = 0$.

Si ottiene

$$\mathfrak{J}(\bar{y}) = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\log x - 2\log|\log x|}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\log^2 x} = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\log\frac{1}{2}}$$

ed è così provato che $\bar{C}$ è una curva ordinaria per $\mathfrak{J}(y)$.

È

$$f_{y'y'} = 2e^{y'^2}[1 + 2y'^2] = 2f(y') + 4e^{y'^2}y'^2;$$

per dimostrare che non è integrabile su $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ $f_{y'y'}[\bar{y}'(x)]$ basta provare che

---

[20] L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. X, 2, pag. 370.
[21] L. TONELLI, loc. cit. in [12].

non esiste finito

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\bar{y}'^2(x)}\bar{y}'^2(x)dx.$$

Infatti è

$$e^{\bar{y}'^2}\bar{y}'^2 = -\frac{1}{x\log x} - \frac{2\log|\log x|}{x\log^2 x};$$

$$-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\log x} = -\Big[\log|\log x|\Big]_0^{\frac{1}{2}} = +\infty,$$

mentre esiste finito

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log|\log x|}{x\log^2 x}\,dx = \left[-\frac{\log|\log x|+1}{\log x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{\log\left|\log\frac{1}{2}\right|+1}{\log\frac{1}{2}},$$

essendo

$$\lim_{x\to+0} \frac{\log|\log x|+1}{\log x} = 0.$$

È così dimostrato che è

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\bar{y}'^2(x)}\bar{y}'^2(x)dx = +\infty.$$

Consideriamo ora l'integrale

$$I(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} f(y_1', y_2')dxdz = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{y_1'^2(x)y_2'^2(z)}dxdz.$$

La curva $\bar{y}_1 = x$, $\bar{y}_2 = \int_0^z \sqrt{-\log z - \log|\log z|}\,dz$ è una curva ordinaria, essendo

$$I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\bar{y}_2'^2(z)}dz = -\frac{1}{2\log\frac{1}{2}}.$$

È

$$f_{y_1'y_1'} = 2y_2'^2 e^{y_1'^2 y_2'^2}[1 + 2y_1'^2 y_2'^2],$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_{y_1'y_1'}[\bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)]dz = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \bar{y}_2'^2(z)e^{\bar{y}_2'^2(z)}[1 + 2\bar{y}_2'^2(z)]dz,$$

e, per quanto si è premesso, tale integrale non esiste finito.

Quindi, nel nostro caso, per tutti gli x di $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ non è finita l'espressione (14_1)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_{y_1' y_1'}[\bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)]dz.$$

Cap. II. - L'INTEGRALE $I(y)$.

§ 4. **Definizioni e proposizioni preliminari.**

Campo A. — In questo capitolo con *campo* A intenderemo un insieme di punti del piano (x, y) che contenga ogni proprio punto di accumulazione posto al finito.

Funzione $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$. — Sia $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ una funzione *definita per ogni coppia di punti* (x, y_1), (z, y_2) del campo A ed ogni valore finito di y_1' e y_2', *continua* in ogni punto $[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2']$ per cui è definita insieme alle derivate parziali $f_{y_1'}$, $f_{y_2'}$, $f_{y_1' y_1'}$, $f_{y_2' y_2'}$.

Curva ordinaria. — La curva $C[y = y(x), a \leq x \leq b]$ si dice una *curva ordinaria* quando

a) tutti i punti $[x, y(x)]$ appartengono al campo A;

b) esiste finito l'integrale nel senso del Lebesgue

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)]\, dxdz.$$

Osservazione sulla funzione $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$. — Possiamo supporre, senza con ciò introdurre alcune limitazione, che la f soddisfi alla relazione

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = f(z, x, y_2, y_1, y_2', y_1'). \tag{15}$$

Infatti, se ciò non fosse, basta sostituire alla funzione f la nuova funzione

$$\Phi(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = \frac{f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') + f(z, x, y_2, y_1, y_2', y_1')}{2}$$

e ciò è lecito perchè qualunque sia la curva ordinaria $C[y(x), a \leq x \leq b]$ è sempre

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)]dxdz = \int_a^b \int_a^b \Phi[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)]dxdz;$$

la $\Phi(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ soddisfa ovviamente alla (15).

Dalla (15) segue

$$(15') \qquad \begin{cases} f_{y_1'}[x, z, y_1, y_2, \bar{y}_1', \bar{y}_2'] = f_{y_2'}[z, x, y_2, y_1, \bar{y}_2', \bar{y}_1'], \\ f_{y_1'y_1'}[x, z, y_1, y_2, \bar{y}_1', \bar{y}_2'] = f_{y_2'y_2'}[z, x, y_2, y_1, \bar{y}_2', \bar{y}_1']. \end{cases}$$

In particolare, per $x = z$, $y_1 = y_2$, $y_1' = y_2'$, si ha

$$(16) \qquad \begin{cases} f_{y_1'}[x, x, y_1, y_1, y_1', y_1'] = f_{y_2'}[x, x, y_1, y_1, y_1', y_1'], \\ f_{y_1'y_1'}[x, x, y_1, y_1, y_1', y_1'] = f_{y_2'y_2'}[x, x, y_1, y_1, y_1', y_1']. \end{cases}$$

Funzioni $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ di WEIERSTRASS. — Le funzioni $\mathcal{E}_1[x, z, y_1, y_2, y_2'; y_1', \bar{y}_1']$ ed $\mathcal{E}_2[x, z, y_1, y_2, y_1'; y_2', \bar{y}_2']$ di WEIERSTRASS si definiscono nello stesso modo del Cap. I, § 1.

Dalla (16) segue immediatamente che è, per $x = z$, $y_1 = y_2$, $y_1' = y_2'$, qualunque sia $\bar{y}_1'$

$$\mathcal{E}_1[x, x, y_1, y_1, y_1'; y_1', \bar{y}_1'] = \mathcal{E}_2[x, x, y_1, y_1, y_1'; y_1', \bar{y}_1'].$$

Intorno (ρ) di una curva ordinaria. — Se $C_0[y = y_0(x),\ a \leq x \leq b]$ e $C[y = y(x),\ c \leq x \leq d]$ sono due curve ordinarie diremo che C *appartiene propriamente all'intorno* (ρ) *della* C_0 quando:

1°) per ogni x comune ai due intervalli (a, b) e (c, d) è

$$|y_0(x) - y(x)| \leq \rho;$$

2°) per ogni x minore di a ed appartenente a (c, d) è

$$|y_0(a) - y(x)| \leq \rho;$$

3°) per ogni x maggiore di b ed appartenente a (c, d) è

$$|y_0(b) - y(x)| \leq \rho;$$

4°) è

$$|a - c| \leq \rho, \qquad |b - d| \leq \rho.$$

Semicontinuità e continuità dell'integrale $I(y)$. — Le definizioni di semicontinuità (superiore o inferiore) e di continuità per l'integrale $I(y)$ sono ancora quelle date nel Cap. I, § 1, prendendo però per curva ordinaria e intorno (ρ) le definizioni date nel presente §.

Richiamiamo il

Lemma di TONELLI [22]. — *Sia* $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{z})$ *una funzione quasi continua e limitata sul quadrato* $(\mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}, \mathrm{a} \leq \mathrm{z} \leq \mathrm{b})$. *Fissato un numero positivo* H *e preso*

---

[22] L. TONELLI, *Sur la semicontinuité des intégrales doubles du Calcul des Variations*, « Acta Matematica ». T. 53, pag. 333. Il lemma è stato dato da L. TONELLI, in una forma più generale. Per i nostri scopi è però sufficiente questo caso particolare.

ad arbitrio $\varepsilon > 0$ *è possibile determinare* $\rho > 0$ *in modo che sia*

$$\left| \int_a^b \int_a^b \varphi(x, z) y'(x) dx dz \right| < \varepsilon$$

per tutte le funzioni $y = y(x)$ *assolutamente continue in* (a, b), *che soddisfano in tutto* (a, b) *alla disuguaglianza*

$$|y(x)| \leq \rho, \qquad |y'(x)| \leq H.$$

§ 5. **La semicontinuità in tutto il campo.**

1. Condizione puntuale necessaria per la semicontinuità inferiore. — Come verrà chiarito dall'analisi che faremo, le condizioni puntuali necessarie per la semicontinuità inferiore di $I(y)$ in tutto il campo A sono molto meno espressive delle corrispondenti (1) date per l'integrale $I(y_1, y_2)$ e ciò è un fatto intrinseco, connesso con la struttura funzionale dell'integrale $I(y)$. Condizioni più forti si possono avere, come vedremo in seguito, ma non di carattere puntuale, bensì globale.

Una condizione puntuale è espressa dal seguente

Teorema. — *Condizione necessaria affinchè* $I(y)$ *sia semicontinuo inferiormente è che, per ogni valore di* y' *e in ogni punto* (x, y) *interno ad* A *o d'accumulazione di punti interni, sia*

$$f_{y_1' y_1'}[x, x, y, y, y,' y'] \geq 0. \tag{17}$$

Osserviamo anzitutto che per la (16) la (17) diviene

$$f_{y_1' y_1'}[x, x, y, y, y', y'] = f_{y_2' y_2'}[x, x, y, y, y', y'] \geq 0.$$

Supponiamo [23] che esista un punto (x_0, y_0) interno ad A ed un valore y_0' di y' tali che sia

$$f_{y_1' y_1'}[x_0, x_0, y_0, y_0, y_0', y_0'] < 0. \tag{18}$$

Per la continuità della $f_{y_1' y_1'}$ si possono determinare $\eta > 0$ e δ, con $0 < \delta < 1$ in modo che, se è

$$|x - x_0| \leq 2\delta, \quad |z - x_0| \leq 2\delta, \quad |y_1 - y_0| \leq 2\delta, \quad |y_2 - y_0| \leq 2\delta,$$
$$|y_1' - y_0'| \leq 2\delta, \quad |y_2' - y_0'| \leq 2\delta,$$

([23]) La dimostrazione che daremo è l'estensione ad $I(y)$ di quella data da L. Tonelli per $\mathfrak{J}(y)$, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. VI, pag. 231.

sia anche

$$f_{y_1'y_1'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] < -\eta, \quad f_{y_2'y_2'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] < -\eta \tag{19}$$

e (x, y_1), (z, y_2) siano punti di A.

Per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di A si consideri un segmento P_0P di equazione

$$y = y_0(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) \qquad x_0 \leq x \leq x_0 + \delta.$$

Si divida P_0P in n parti uguali mediante i punti $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n \equiv P$. Per P_0 tracciamo una retta di coefficiente angolare $y_0' + \delta$ e per P_1 un'altra retta con coefficiente angolare $y_0' - \delta$.

Se Q è il punto d'incontro fra le due rette, consideriamo il triangolo P_0QP_1. Si faccia la stessa costruzione su $P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$.

Si è così costruita una poligonale C_n sopra P_0P, composta dai lati dei detti triangoli che non coincidono con $P_0P_1, \ldots, P_{n-1}P_n$.

Tale poligonale è tutta costituita di punti di A: se $y = y_n(x)$ è l'equazione di C_n è, uniformemente sull'intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$,

$$\lim_{n \to +\infty} y_n(x) = y_0(x)$$

e, in tutti i punti in cui esiste $y_n'(x)$,

$$y_n'(x) = y_0' \pm \delta.$$

Inoltre è $y_n(x_0) = y_0$, $y_n(x_0 + \delta) = y_0(x_0 + \delta)$.

Consideriamo la differenza

$$I(y_n(x)) - I(y_0(x)) = \tag{20}$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{x_0}^{x_0+\delta} \{ f[x, z, y_n(x), y_n(z), y_n'(x), y_n'(z)] - f[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_0'(z)] \} \, dxdz =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{x_0}^{x_0+\delta} \{ f[x, z, y_n(x), y_n(z), y_n'(x), y_n'(z)] - f[x, z, y_0(x), y_0(z), y_n'(x), y_n'(z)] \} \, dxdz +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{x_0}^{x_0+\delta} \{ f[x, z, y_0(x), y_0(z), y_n'(x), y_n'(z)] - f[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)] \} \, dxdz +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{x_0}^{x_0+\delta} \{ f[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)] - f[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_0'(z)] \} \, dxdz.$$

Si fissi ε, con $0 < \varepsilon < \delta^4\eta$, ad arbitrio. Per la continuità della f ed essendo sempre $|y_n'(x)| \leq |y_0'| + \delta$, si puo determinare un intero n_1 tale che per $n \geq n_1$

sia sempre

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \{ f[x, z, y_n(x), y_n(z), y_n'(x), y_n'(z)] - f[x, z, y_0(x), y_0(z), y_n'(x), y_n'(z)] \} dxdz \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Esaminiamo ora il secondo integrale del secondo membro della (20). Applicando la formula di TAYLOR si ottiene

$$(21) \quad \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \{ f[x, z, y_0(x), y_0(z), y_n'(x), y_n'(z)] - f[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)] \} dxdz =$$
$$= \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [y_n'(x) - y_0'(x)] f_{y_1'}[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)] dxdz +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [y_n'(x) - y_0'(x)]^2 f_{y_1' y_1'}[x, z, y_0(x), y_0(z), \bar{y}_n'(x), y_n'(z)] dxdz,$$

essendo $\bar{y}_n'(x)$ un conveniente numero compreso fra $y_n'(x)$ e $y_0'(x)$.

Dimostriamo ora che è

$$(22) \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [y_n'(x) - y_0'(x)] f_{y_1'}[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)] dxdz = 0.$$

Ciò non si può dedurre dal lemma di TONELLI, *perchè nel nostro caso la funzione* $f_{y_1'}[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)]$ *dipende da* n.

Consideriamo ([24]) la funzione

$$f_{y_1'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$$

continua nel campo Δ definito da

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \delta, \quad x_0 \leq z \leq x_0 + \delta,$$
$$|y_1 - y_0| \leq 2\delta, \quad |y_2 - y_0| \leq 2\delta, \quad |y_1' - y_0'| \leq 2\delta, \quad |y_2' - y_0'| \leq 2\delta.$$

Si fissi M in modo che in Δ sia sempre $|f_{y_1'}| < M$.

Possiamo costruire una successione di polinomi ([25])

$$\{ \Pi_m(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

([24]) Per questa dimostrazione cfr. L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. V, pag. 214, e loc. cit. in ([22]).

([25]) L. TONELLI, *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali*, « Rend. Circ. Mat. Palermo ». T. XXIX (1910), pagg. 1-36.

tale che sia in ogni punto di Δ

$$|\Pi_m| \leq M,$$
$$\lim_{m \to +\infty} \Pi_m = f_{y_1'}.$$

Si fissi m così grande che sia in tutto Δ

$$|\Pi_m - f_{y_1'}| \leq \frac{\varepsilon}{6\delta^2}.$$

Tenuto conto che è $|y_n'(x) - y_0'(x)| = \delta < 1$, si ha

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{x_0}^{x_0+\delta}[y_n'(x) - y_0'(x)]f_{y_1'}[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)]dxdz\right| \leq \tag{23}$$

$$\leq \int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{x_0}^{x_0+\delta}|f_{y_1'}[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)] - \Pi_m[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)]|\,dxdz +$$

$$+\left|\int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{x_0}^{x_0+\delta}[y_n'(x) - y_0'(x)]\Pi_m[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)]dxdz\right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{6} + \left|\int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{x_0}^{x_0+\delta}[y_n'(x), - y_0'(x)]\Pi_m(x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)]\,dxdz\right|.$$

Integrando per parti, tenuto conto che è $y_n(x_0)=y_0(x_0)$, $y_n(x_0+\delta)=y_0(x_0+\delta)$, è

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{x_0}^{x_0+\delta}[y_n'(x) - y_0'(x)]\Pi_m[x, z, y_n(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)]dxdz =$$

$$= -\int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{x_0}^{x_0+\delta}[y_n(x) - y_0(x)]\,\frac{d\Pi_m[x, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)]}{dx}\,dxdz.$$

Ma è

$$\frac{d\Pi_m[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)]}{dx} = \tag{24}$$

$$= \left[\frac{\partial \Pi_m}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_m}{\partial y_1} y_0'\right]_{y_1=y_0(x),\ y_2=y_0(z),\ y_1'=y_0',\ y_2'=y_n'(z)}.$$

Si può quindi determinare un numero L, indipendentemente da n, tale che sia, per $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$, $x_0 \leq z \leq x_0 + \delta$

$$\left|\frac{d\Pi_m[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)]}{dx}\right| \leq L.$$

Si determini n_2 in modo che per $n \geq n_2$ sia

$$|\, y_n(x) - y_0(x)\,| \leq \frac{\varepsilon}{6L\delta^2};$$

ne segue

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [y_n'(x) - y_0'(x)]\, \Pi_m[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)]\, dx dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{6}$$

e quindi, per la (23), se è $n \geq n_2$, è anche

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [y_n'(x) - y_0'(x)]\, f_{y_1'}[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)]\, dx dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Passiamo ora al terzo integrale del secondo membro della (20), che per la formula di Taylor diviene

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \{ f[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_n'(z)] - f[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_0'(z)] \}\, dx dz =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [y_n'(z) - y_0'(z)]\, f_{y_2'}[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_0'(z)]\, dx dz +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [y_n'(z) - y_0'(z)]^2 f_{y_2' y_2'}[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), \bar{\bar{y}}_n'(z)]\, dx dz,$$

dove $\bar{\bar{y}}_n'(z)$ è un valore conveniente fra $y_n'(z)$ e $y_0'(z)$.

Al primo degli integrali al secondo membro si può ora applicare il lemma di Tonelli e quindi determinare n_3 tale che per $n \geq n_3$ sia

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [y_n'(z) - y_0'(z)]\, f_{y_2'}[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), y_0'(z)]\, dx dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dalle (20), (21), (22) e da quanto si è finora dimostrato segue che se $\bar{n}$ è il maggiore fra gli interi n_1, n_2, n_3, per $n \geq \bar{n}$ è

$$(25) \qquad I[y_n(x)] - I[y_0(x)] < \varepsilon +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [y_n'(x) - y_0'(x)]^2 f_{y_1' y_1'}[x, z, y_0(x), y_0(z), \bar{y}_n'(x), y_n'(z)]\, dx dz +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [y_n'(z) - y_0'(z)]^2 f_{y_2' y_2'}[x, z, y_0(x), y_0(z), y_0'(x), \bar{\bar{y}}_n'(z)]\, dx dz < \varepsilon - \delta^4 \eta < 0$$

per le (19).

Poichè $y_n(x)$ tende uniformemente a $y_0(x)$, questa disuguaglianza prova che su $y_0(x)$ l'integrale $I(y)$ non è semicontinuo. È quindi assurdo che sia verificata la (18) e la (17) è così dimostrata quando il punto (x, y) sia interno ad A. Per la continuità della $f_{y_1'y_1'}$ la (17) sussiste anche nei punti di accumulazione di punti interni ad A e il teorema è completamente dimostrato.

Osservazione. — Il teorema ora dato non dà condizioni puntuali in tutti i punti in cui è definita la $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$, bensì soltanto in quelli per cui è $x = z$, $y_1 = y_2$, $y_1' = y_2'$.

Si potrebbe pensare di avere condizioni necessarie per la semicontinuità inferiore, come la (17), ma valevoli in ogni punto in cui è definita la f, ossia per ogni coppia di punti di A (x, y_1) e (z, y_2) e per ogni valore finito di y_1' e y_2'. Ci si persuade che ciò non può essere nel modo seguente.

Sia ad esempio

$$f_{y_1'y_1'}(x_0, z_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_1', \bar{y}_2') < 0, \tag{26}$$

con $x_0 < z_0$. Tale relazione continuerà a valere anche nei punti $(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ purchè sia

$$|x - x_0| \leq \delta, \quad |z - z_0| \leq \delta, \quad |y_1 - \bar{y}_1| \leq \delta, \quad |y_2 - \bar{y}_2| \leq \delta,$$
$$|y_1 - \bar{y}_1| \leq \delta, \quad |y_2 - \bar{y}_2| \leq \delta.$$

Supponiamo che sia $\delta < z_0 - x_0$. Per poter esaminare se ciò pregiudica o meno la semicontinuità inferiore di $I(y)$ occorre ora considerare una qualunque curva ordinaria $\Gamma[y = y(x)]$ definita sull'intervallo (x_0, z_0) con $y(x_0) = \bar{y}$, $y(z_0) = \bar{y}_1$, $y'(x_0) = \bar{y}_1'$, $y'(z_0) = \bar{y}_2'$. Ora, sulla semicontinuità di $I(y)$ su Γ non influiscono soltanto i valori di $f_{y_1'y_1'}$ per $|x - x_0| \leq \delta$, $|z - z_0| \leq \delta$, ma anche quelli in tutto l'intorno di Γ.

Quindi la (26) non è sufficiente perchè se ne possa dedurre che su Γ $I(y)$ non è semicontinuo inferiormente (v. n. 5, pag. 114).

Vedremo nel successivo § delle condizioni necessarie per la semicontinuità, in cui entrano tutti i punti in cui è definita la f; tali condizioni non sono più puntuali ma globali.

2. **Altra forma della condizione necessaria per la semicontinuità inferiore.** — Anche per l'integrale $I(y)$ il teorema del numero precedente si può esprimere in modo che non compaiano le $f_{y_1'y_1'}$ e $f_{y_2'y_2'}$.

Teorema. — *Condizione necessaria affinchè l'integrale* I(y) *sia una funzione semicontinua inferiormente è che si abbia*

$$\mathcal{E}_1[x, z, y, y, y'; y', \bar{y}'] = \mathcal{E}_2[x, z, y, y, y'; y', \bar{y}'] \geq 0,$$

per ogni valore finito di y' *e* $\bar{y}'$ *e in tutti i punti* (x, y) *interni al campo* A *o di accumulazione di tali punti.*

Per brevità si omette la dimostrazione; essa si può ottenere estendendo, con gli stessi accorgimenti del precedente teorema, quella data dal TONELLI per l'integrale $\mathfrak{I}(y)$ ([26]).

§ 6. La semicontinuità su una data curva.

1. **Diversità di comportamento fra gli integrali $I(y)$ ed $\mathfrak{I}(y)$.** — Anche per l'integrale $I(y)$ sussiste il fatto già provato per $I(y_1, y_2)$ e cioè:

Se $I(y)$ *è semicontinuo inferiormente su una curva* C *può non esserlo su archi di* C.

L'esempio con cui tale affermazione è stata giustificata per $I(y_1, y_2)$ sussiste anche per $I(y)$.

Ma vogliamo ora notare un'altra notevole diversità di comportamento rispetto all'integrale $\mathfrak{I}(y)$.

Siano C_1 e C_2 due archi consecutivi della curva ordinaria C.

Se $I(y)$ *è semicontinuo inferiormente su* C_1 *e su* C_2, *può non esserlo sulla curva* $C_1 + C_2$.

Proviamo ciò col seguente esempio

$$I(y) = \int_0^2\!\!\int_0^2 [y(x) - x]^2 e^{-y'^2(x)} y'(z)\,dx\,dz.$$

Consideriamo la curva ordinaria $C \equiv C_1 + C_2$, dove è

$$\begin{aligned} C_1 &: y = \bar{y}(x) = x, & 0 \leq x \leq 1, \\ C_2 &: y = \bar{y}(x) = 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Su C_1 $I(y)$ è continuo; infatti se $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$ appartiene propriamente all'intorno (ρ) di C_1 è

$$| I(y) - I(\bar{y}) | = | I(y) | = \left| \int_a^b\!\!\int_a^b [y(x) - x]^2 e^{-y'^2(x)} y'(z)\,dx\,dz \right| \leq$$

$$\leq | y(b) - y(a) | \cdot \int_a^b (y(x) - \bar{y})^2 dx < | y(b) - y(a) | \cdot \rho^2(b-a) < (1 + 4\rho)\rho^2(b-a),$$

e, poichè ρ è arbitrario, è dimostrato che su C_1 $I(y)$ è continuo.

([26]) L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. VI, n. 89 *a)*, pag. 246.

$I(y)$ è continuo anche su C_2 avendosi, in tal caso,

$$| I(y) - I(\bar{y}) | = | I(y) | \leq \int_a^b [y(x) - x]^2 dx \cdot | y(b) - y(a) | .$$

Ma se $y(x)$ appartiene all'intorno (ρ) di C_2 $(y = 1)$ è

$$| y(b) - y(a) | \leq 2\rho, \quad \int_a^b (y(x) - x)^2 dx \leq (1 + \rho)^2 (b - a)$$

e ne segue immediatamente la continuità di $I(y)$ su C_2.

Dimostriamo ora che $I(y)$ non è continuo su $C \equiv C_1 + C_2$.

Sia $\Gamma(y = y(x),\ 0 \leq x \leq 2)$ una qualunque curva ordinaria con $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$ e appartenente all'intorno (ρ) di C.

Consideriamo

$$I(y) - I(\bar{y}) = \int_0^2\int_0^2 [y(x) - x]^2 e^{-y'^2(x)} y'(z) dx dz - \int_0^2\int_0^2 [\bar{y}(x) - x]^2 e^{-\bar{y}'^2(x)} \bar{y}'(z) dx dz.$$

È

$$\int_1^2 [y(x) - x]^2 e^{-y'^2(x)} y'(z) dz = 0,$$

e quindi

$$| I(y) - I(\bar{y}) | > \left| \int_1^2\int_0^1 \{ [y(x) - x]^2 e^{-y'^2(x)} y'(z) - [\bar{y}(x) - x]^2 e^{-\bar{y}'^2(x)} \bar{y}'(z) \} dx dz \right| -$$

$$- \left| \int_0^1\int_0^1 \{ [y(x) - x]^2 e^{-y'^2(x)} y'(z) - [\bar{y}(x) - x]^2 e^{-\bar{y}'^2(x)} \bar{y}'(z) \} dx dz \right| .$$

Il secondo degli integrali al secondo membro tende a zero per $\rho \to 0$. Il valore assoluto dell'altro integrale è

$$\left| \int_1^2 \{ [y(x) - x]^2 e^{-y'^2(x)} - (1 - x)^2 \} dx \right| ;$$

poichè

$$\int_1^2 (y - x)^2 e^{-y'^2} dx$$

non è continuo sulla curva $y = 1$, si può determinare $\sigma > 0$ in modo che, qualunque sia ρ, si abbia sempre

$$\left|\int_1^2 \{ [y(x) - x]^2 e^{-y'^2(x)} - (1-x)^2 \} dx \right| > 2\sigma$$

e quindi si può determinare $\rho_0 > 0$ in modo che qualunque sia ρ con $0 < \rho \leq \rho_0$ sia sempre

$$|I(y) - I(\bar{y})| > \sigma,$$

ciò che dimostra che su C $I(y)$ non è continuo.

Anche per l'integrale $I(y)$ interessa quindi dare delle condizioni necessarie per la semicontinuità su una data curva, distinguendo se si esige tale proprietà sulla sola curva o su ogni arco di questa.

2. Condizione puntuale necessaria per la semicontinuità su ogni arco di una curva assegnata. — Dalla proposizione del precedente paragrafo si deduce facilmente il

Teorema. — *Condizione necessaria affinchè su ogni arco di una data curva ordinaria* C, *di classe* 1, *completamente interna al campo* A, *di equazione* $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, *l'integrale* $I(y)$ *sia una funzione semicontinua inferiormente è che sia*

(27) $$f_{y_1' y_1'}[x, x, y(x), y(x), y'(x), y'(x)] \geq 0, \qquad (a \leq x \leq b).$$

Se infatti è

$$f_{y_1' y_1'}[x_0, x_0, y(x_0), y(x_0), y'(x_0), y'(x_0)] < 0,$$

tale relazione vale su tutto un intorno di un conveniente arco Γ di C e per valori di y_1' e y_2' prossimi a quelli di $y(x)$ su tale arco.

Si può agevolmente costruire una successione di poligonali che tendono uniformemente a Γ in modo analogo a quanto si è fatto nel teorema del § 5, n. 1, e giungere così ad una disuguaglianza come la (25).

3. Condizione necessaria per la semicontinuità su una curva assegnata.

a) Come abbiamo fatto nel n.° precedente si può, con considerazioni analoghe a quelle del teorema del § 5, n. 1, dedurre una condizione necessaria per la semicontinuità su una curva assegnata. Ma su ciò non mi soffermo.

Invece è di maggiore interesse dare delle condizioni necessarie che coinvolgano i valori della $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ in tutto il campo in cui essa è definita, come nel seguente

Teorema. — *Condizione necessaria affinchè su una data curva ordinaria* $C(y = \bar{y}(x), a \leq x \leq b)$, *di classe 1, completamente interna al campo* A, *l'integrale* I(y) *sia una funzione semicontinua inferiormente è che sia*

$$(28)\qquad \int_a^b\int_a^b f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dxdz \geq 0.$$

Osserviamo che, essendo

$$f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)] = f_{y_2'y_2'}[z, x, \bar{y}(z), \bar{y}(x), \bar{y}'(z), \bar{y}'(x)],$$

segue dalla (28) la

$$(28')\qquad \int_a^b\int_a^b f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dxdz = \int_a^b\int_a^b f_{y_2'y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dxdz \geq 0.$$

Supponiamo che la (28) non sia verificata ma si abbia

$$(29)\qquad \int_a^b\int_a^b f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dxdz = -2\eta < 0.$$

Sia M il massimo di $|\bar{y}'(x)|$ in (a, b). Per (x, y_1), (z, y_2) in un fissato intorno (ρ) di $\bar{y}(x)$ (sufficientemente piccolo in modo che tale intorno sia tutto interno al campo A) e se $|y_1'| \leq M$, $|y_2'| \leq M$, la funzione $f_{y_1'y_1'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2']$ è uniformemente continua e si può determinare δ, con $0<\delta\leq\rho\leq 1$, in modo che si abbia

$$|f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)] - f_{y_1'y_1'}[x_0, z_0, y_1, y_2, y_1', y_2']| \leq \frac{\eta}{(b-a)^2},$$

qualora sia

$$|x - x_0| \leq \delta, \quad |z - z_0| \leq \delta, \quad |\bar{y}(x) - y_1| \leq \delta, \quad |\bar{y}(x) - y_2| \leq \delta,$$
$$|\bar{y}'(x) - y_1'| \leq \delta, \quad |\bar{y}'(z) - y_2'| \leq \delta.$$

Ne segue, se $y_1'(x)$ e $y_2'(z)$ soddisfano in (a, b) alle disuguaglianze

$$|y_1'(x) - \bar{y}'(x)| \leq \delta, \quad |y_2'(z) - \bar{y}'(z)| \leq \delta,$$

$$(30)\qquad \int_a^b\int_a^b f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_1'(x), y_2'(z)]dxdz \leq -\eta$$

e, come si è ottenuta la (28'),

$$(30')\qquad \int_a^b\int_a^b f_{y_2'y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_1'(x), y_2'(z)]dxdz \leq -\eta.$$

Costruiamo ora una successione di curve $C_n(y = y_n(x),\ a \leq x \leq b)$ nel modo seguente:

Si divida (a, b) in $2n$ parti uguali mediante i punti

$$a \equiv x_0,\ x_1, \dots,\ x_{2n} \equiv b.$$

Per $a \leq x \leq x_1$, si ponga

$$y_n(x) = \bar{y}(x) + \delta(x - x_0).$$

È $y_n(x) \geq \bar{y}(x)$ e inoltre

$$y_n(x) - \bar{y}(x) = \delta(x - x_0) \leq \frac{\delta(b-a)}{2n}.$$

Per $x_1 \leq x \leq x_2$ si ponga

$$y_n(x) = \bar{y}(x) + \delta(x_1 - x_0) - \delta(x - x_1).$$

La $y_n(x)$ è così continua su (x_0, x_2) ed è sempre $y_n(x) \geq \bar{y}(x)$ e

$$y_n(x) - \bar{y}(x) \leq \frac{\delta(b-a)}{2n};$$

inoltre è

$$y_n(x_2) = \bar{y}(x_2)$$

Si definisca la $y_n(x)$ nello stesso modo sulle coppie successive di intervalli consecutivi

$$(x_2, x_3),\ (x_3, x_4); \dots;\ (x_{2n-2}, x_{2n-1}),\ (x_{2n-1}, x_{2n}).$$

La curva $C_n[y = y_n(x),\ a \leq x \leq b]$, è una curva ordinaria e gode delle seguenti proprietà

$$y_n(a) = \bar{y}(a),\ y_n(b) = \bar{y}(b),\ y_n(x) \geq \bar{y}(x),\ y_n(x) - \bar{y}(x) \leq \frac{\delta(b-a)}{2n} \tag{31}$$

e, esclusi i punti $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$, è

$$| y_n'(x) - \bar{y}'(x) | = \delta. \tag{31'}$$

Consideriamo ora la differenza

$$I(y_n) - I(\bar{y}) = \tag{32}$$

$$= \int_a^b\!\!\int_a^b \{ f[x, z, y_n(x), y_n(z), y_n'(x), y_n'(z)] - f[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n'(x), y_n'(z)] \} \, dxdz +$$

$$+ \int_a^b\!\!\int_a^b \{ f[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n'(x), y_n'(z)] - f[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), y_n'(z)] \} \, dxdz +$$

$$+ \int_a^b\!\!\int_a^b \{ f[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), y_n'(z)] - f[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)] \} \, dxdz.$$

Sui tre integrali del secondo membro della (32) si possono ripetere alcuni dei ragionamenti fatti per la (20) del teorema § 5, n. 1; anzitutto si ha che, fissato ε con $0 < \varepsilon < \delta^2 \eta$, si può determinare n_1 in modo che sia, per $n \geq n_1$,

$$\left| \int_a^b \int_a^b \{ f[x, z, y_n(x), y_n(z), y_n'(x), y_n'(z)] - f[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n'(x), y_n'(z) \} \, dxdz \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Quanto al secondo dei tre detti integrali, la dimostrazione fatta nel § 5, n. 1 non è ora sufficiente per ottenere la relazione che corrisponde alla (22); infatti in tale dimostrazione per stabilire la formula (24) si sfrutta il fatto che la funzione $y_0(x)$ ha derivata seconda continua $(y_0''(x) = 0)$, e nel nostro caso la $\bar{y}(x)$ non gode di tale proprietà.

Invece, scomposto il terzo integrale con la formula di TAYLOR (come si è fatto nel § 5, n. 1) si può ancora applicare il lemma di TONELLI. Pertanto si può determinare un $n_2 \geq n_1$ in modo che si abbia, per $n \geq n_2$,

$$I(y_n) - I(\bar{y}) \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \tag{33}$$
$$+ \int_a^b \int_a^b \{ f[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n'(x), y_n'(z)] - f[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), y_n'(z)] \} \, dxdz +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [y_n'(z) - \bar{y}'(z)]^2 f_{y_2' y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}_n'(z)] dxdz,$$

dove $\bar{y}_n'(z)$ è un valore compreso fra $\bar{y}'(z)$ e $y_n'(z)$.

Per la formula di TAYLOR è

$$\int_a^b \int_a^b \{ f[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n'(x), y_n'(z) - f[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), y_n'(z)] \} \, dxdz = \tag{34}$$
$$= \int_a^b \int_a^b [y_n'(x) - \bar{y}'(x)] f_{y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), y_n'(z)] dxdz +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [y_n'(x) - \bar{y}'(x)]^2 f_{y_1' y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n^{*\prime}(x), y_n'(z)] dxdz,$$

essendo $y_n^{*\prime}(x)$ compreso fra $\bar{y}'(x)$ e $y_n'(x)$.

Dimostriamo che anche ora è

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \int_a^b [y_n'(x) - \bar{y}'(x)] f_{y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), y_n'(z)] dxdz = 0.$$

La funzione $f_{y_1'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2']$ è uniformemente continua nel campo Δ definito da

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq z \leq b, \quad |y_1 - \bar{y}(x)| \leq \rho, \quad |y_2 - \bar{y}(z)| \leq \rho,$$
$$|y_1' - \bar{y}'(x)| \leq \rho, \quad |y_2' - \bar{y}'(z)| \leq \rho,$$

dove $\rho > 0$ è già stato precedentemente fissato in modo che i punti $[x, y_1]$ e $[z, y_2]$ siano interni al campo A. Sia N un numero tale che in tutto Δ si abbia

$$|f_{y_1'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2']| \leq N;$$

come si è fatto nella dimostrazione della (22), possiamo ancora costruire una successione di polinomi

$$\Pi_m[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2']$$

tali che in ogni punto di Δ sia

$$|\Pi_m[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'| \leq N,$$
$$\lim_{m \to \infty} \Pi_m(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = f_{y_1'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2').$$

Per l'uniforme continuità di $f_{y_1'}$ in Δ, si può costruire una funzione $y = y_0(x)$, con $y_0'(x)$ e $y_0''(x)$ continue in (a, b), con $|y_0(x) - \bar{y}(x)| \leq \rho$, $|y_0'(x) - \bar{y}(x)| \leq \rho$ e in modo che sia

$$(35) \qquad |f_{y_1'}[x, z, y_0(x), \bar{y}(z), y_0'(x), y_n'(z)] - f_{y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), y_n'(z)]| \leq \frac{\varepsilon}{9\delta(b-a)^2}.$$

Si fissi m in modo che sia in tutto Δ

$$(36) \qquad |f_{y_1'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - \Pi_m(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')| \leq \frac{\varepsilon}{9\delta(b-a)^2}.$$

È

$$(37) \qquad \left|\int_a^b\!\!\int_a^b [y_n'(x) - \bar{y}'(x)] f_{y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), y_n'(z)]\,dx\,dz\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b\!\!\int_a^b |y_n'(x) - \bar{y}'(x)| \cdot |f_{y_1'}(x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), y_n'(z)] - f_{y_1'}[x, z, y_0(x), \bar{y}(z), y_0'(x), y_n'(z)]|\,dx\,dz +$$

$$+ \int_a^b\!\!\int_a^b |y_n'(x) - \bar{y}'(x)| \cdot |f_{y_1'}[x, z, y_0(x), \bar{y}(z), y_0'(x), y_n'(z)] - \Pi_m[x, z, y_0(x), \bar{y}(z), y_0'(x), y_n'(z)]|\,dx\,dz +$$

$$+ \left|\int_a^b\!\!\int_a^b [y_n'(x) - \bar{y}'(x)] \Pi_m[x, z, y_0(x), \bar{y}(z), y_0'(x), y_n'(z)]\,dx\,dz\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{9}\varepsilon + \left|\int_a^b\!\!\int_a^b [y_n'(x) - \bar{y}'(z)] \Pi_m[x, z, y_0(x), \bar{y}(z), y_0'(x), y_n'(z)]\,dx\,dz\right|,$$

tenuto conto delle (31'), (35) e (36).

Integrando per parti e per la (31) si ha

$$\int_a^b\int_a^b [y_n'(x)-\bar{y}'(x)]\Pi_m[x, z, y_0(x), \bar{y}(z), y_0'(x), y_n'(z)]\,dxdz =$$

$$= -\int_a^b\int_a^b [y_n(x)-\bar{y}(x)]\,\frac{d\Pi_m[x, z, y_0(x), y_0(z), \bar{y}(z), y_0'(x), y_n'(z)]}{dx}\,dxdz.$$

È

$$\frac{d\Pi_m(x, z, y_0(x), \bar{y}(z), y_0'(x), y_n'(z)]}{dx} = \left[\frac{\partial\Pi_m}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_m}{\partial y_1}\,y_0'(x) + \frac{\partial\Pi_m}{\partial y_1'}\,y_0''(x)\right]_{\substack{y_1=y_0(x),\ y_1'=y_0'(x)\\ y_2=\bar{y}(z),\ y_2'=y_n'(z)}}$$

e si può pertanto determinare un numero L, indipendente da n, in modo che sia, per $a \leq x \leq b$, $a \leq z \leq b$,

$$\left|\frac{d\Pi_m[x, z, y_0(x), \bar{y}(z), y_0'(x), y_n'(z)]}{dx}\right| \leq L.$$

Si determini ora $n_3 \geq n_2$ in guisa che per $n \geq n_3$ sia in tutto (a, b)

$$|\,y_n(x)-\bar{y}(x)\,| \leq \frac{\varepsilon}{9(b-a)^2L};$$

ne segue

$$\left|\int_a^b\int_a^b [y_n'(x)-\bar{y}'(x)]\Pi_m[x, z, y_0(x), \bar{y}(z), y_0'(x), y_n'(z)]\,dxdz\right| \leq \frac{\varepsilon}{9}$$

e quindi, per la (37), è per $n \geq n_3$

$$\left|\int_a^b\int_a^b [y_n'(x)-\bar{y}'(x)]f_{y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), y_n'(z)]\,dxdz\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Segue allora dalla (33) e per la (34),

$$(38)\quad I(y_n)-I(\bar{y}) \leq \varepsilon + \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [y_n'(x)-\bar{y}'(x)]^2 f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n^{*\prime}(x), y_n'(z)]\,dxdz +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [y_n'(z)-\bar{y}'(z)]f_{y_2'y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}_n'(z)]\,dxdz =$$

$$= \varepsilon + \frac{\delta^2}{2}\int_a^b\int_a^b \{ f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n^{*\prime}(x), y_n'(z)] + f_{y_2'y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}_n'(z)] \}\,dxdz,$$

per la (31').

Tenuto conto della (31) e della definizione di $y_n^{*\prime}(x)$ e $\bar{y}_n'(z)$ è

$$|y_n^{*\prime}(x) - \bar{y}'(x)| \leq \delta, \quad |\bar{y}_n'(z) - \bar{y}'(x)| \leq \delta,$$

e quindi per le (30) e (30') dalla disuguaglianza or ora stabilita segue

$$I(y_n) - I(\bar{y}) \leq \varepsilon - \delta^2\eta < 0,$$

qualunque sia $n \geq n_3$. Tale relazione prova che $I(y)$ non è semicontinuo inferiormente su $y = \bar{y}(x)$; è assurdo quindi supporre la (29) e il teorema è così dimostrato.

b) Il precedente teorema si può estendere notevolmente, ottenendo una proposizione dalla quale si possono dedurre le più espressive condizioni necessarie per la semicontinuità.

Teorema. — *Condizione necessaria affinchè su una data curva ordinaria* $\bar{\mathrm{C}}(\mathrm{y} = \bar{\mathrm{y}}(\mathrm{x}),\ \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b})$, *di classe 1, completamente interna al campo* A, *l'integrale* I(y) *sia una funzione semicontinua inferiormente è che, comunque si prenda in* (a, b) *una funzione quasi-continua* $\varphi(\mathrm{x})$, *con* $|\varphi(\mathrm{x})| \leq 1$, *sia*

$$\int_a^b\int_a^b \varphi^2(x) f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dxdz \geq 0. \tag{28'}$$

Supponiamo che esista una funzione $\varphi(x)$, quasi-continua in (a, b), con $|\varphi(x)| \leq 1$ e per cui sia

$$\int_a^b\int_a^b \varphi^2(x) f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dxdz = -2\eta \tag{39}$$

con $\eta > 0$. Si può determinare $\delta > 0$ in modo che se è

$$|y_1'(x) - \bar{y}'(x)| \leq \delta, \qquad |y_2'(z) - \bar{y}'(z)| \leq \delta \tag{40}$$

sia anche, per ogni x e z di (a, b),

$$|f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)] - f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_1'(x), y_2'(z)]| \leq \frac{\eta}{(b-a)^2}. \tag{41}$$

Costruiamo ora una successione di curve $C_n : y = y_n(x)$, convergente alla $\bar{C}$.

La funzione $\varphi(x)$ non è nulla in quasi-tutto (a, b), altrimenti non potrebbe sussistere la (39). Pertanto

$$\Phi(x) = \int_a^x |\varphi(x)|\, dx$$

è una funzione continua non decrescente in (a, b) ed è $\Phi(b) > 0$. Inoltre è

$$\Phi(b) = \int_a^b |\varphi(x)|\, dx \leq b - a.$$

Sia x_i $(i=0, 1, \dots, 2n)$ il primo punto di (a, b) in cui è

$$\Phi(x_i) = \frac{i}{2n}\Phi(b), \qquad (i=0, 1, 2, \dots, n).$$

I punti $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ si susseguono in quest' ordine su (a, b) ed è $x_0 \equiv a$ e $x_{2n} \leq b$. Nell' intervallo (a, x_1) si ponga:

$$y_n(x) = \bar{y}(x) + \delta\int_a^x |\varphi(x)|\,dx.$$

È

$$y_n(x) \geq \bar{y}(x), \quad y_n(a) = \bar{y}(a),$$

$$y_n(x) - \bar{y}(x) \leq \delta\int_a^x |\varphi(x)|\,dx \leq \delta\int_a^{x_1} |\varphi(x)|\,dx = \frac{\delta\Phi(b)}{2n} \leq \frac{\delta(b-a)}{2n},$$

ed è, in quasi tutto (a, x_1)

$$y_n'(x) - \bar{y}'(x) = \delta\,|\varphi(x)|.$$

Nell' intervallo (x_1, x_2) si ponga

$$y_n(x) = \bar{y}(x + \delta\int_a^{x_1} |\varphi(x)|\,dx - \delta\int_{x_1}^x |\varphi(x)|\,dx.$$

La funzione $y_n(x)$ è continua in (a, x_2) e in ogni punto di (a, x_2) è

$$y_n(x) \geq \bar{y}(x), \quad y_n(a) = \bar{y}(a), \quad y_n(x) - \bar{y}(x) \leq \frac{\delta(b-a)}{2n},$$

$$y_n(x_2) = \bar{y}(x_2) + \delta\int_a^{x_1} |\varphi(x)|\,dx - \delta\int_{x_1}^{x_2} |\varphi(x)|\,dx = \bar{y}(x_2)$$

e, su quasi tutto (a, x_2),

$$|y_n'(x) - \bar{y}'(x)| = \delta\,|\varphi(x)|.$$

Così si prosegua la definizione di $y_n(x)$ sulle coppie di intervalli consecutivi (x_2, x_3), (x_3, x_4); ...; (x_{2n-2}, x_{2n-1}), (x_{2n-1}, x_{2n}).

Se è $x_{2n} = b$ la $y_n(x)$ è definita in tutto (a, b); in caso contrario, la $\varphi(x)$ è nulla su quasi tutto (x_{2n}, b) e ponendo in (x_{2n}, b)

$$y_n(x) = \bar{y}(x)$$

si ha che in tutto (a, b) la $y_n(x)$ verifica le seguenti relazioni:

$$y_n(a) = \bar{y}(a), \quad y_n(b) = \bar{y}(b), \quad y_n(x) \geq \bar{y}(x), \quad y_n(x) - \bar{y}(x) \leq \frac{\delta(b-a)}{2n}, \tag{42}$$

ed è in quasi tutto (a, b)

(43) $$|y_n'(x) - \bar{y}'(x)| = \delta\,|\varphi(x)| \leq \delta.$$

Consideriamo la differenza $I(y_n) - I(\bar{y})$. Si possono ripetere i ragionamenti del precedente teorema fino a stabilire la disuguaglianza analoga alla (38) e cioè, fissato ε con $0 < \varepsilon < \delta^2\eta$ si può determinare $\bar{n}$ in modo che per $n \geq \bar{n}$ sia

(38′) $$I(y_n) - I(\bar{y}) \leq \varepsilon +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [y_n'(x) - \bar{y}'(x)]^2 f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n^{*\prime}(x), y_n'(z)]\,dxdz +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [y_n'(z) - \bar{y}'(z)]^2 f_{y_2'y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}_n'(z)]\,dxdz,$$

dove $y_n^{*\prime}(x)$ e $\bar{y}_n'(z)$ sono compresi rispettivamente fra $y_n'(x)$ e $\bar{y}'(x)$ e fra $y_n'(z)$ e $\bar{y}'(z)$.

Poichè su quasi tutto (a, b) è $[y_n'(x) - \bar{y}'(x)]^2 = \delta^2\varphi^2(x)$, ne segue

$$I(y_n) - I(\bar{y}) \leq \varepsilon + \frac{\delta^2}{2}\int_a^b\int_a^b \varphi^2(x) f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n^{*\prime}(x), y_n'(z)]\,dxdz +$$
$$+ \frac{\delta^2}{2}\int_a^b\int_a^b \varphi^2(z) f_{y_2'y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}_n'(z)]\,dxdz =$$
$$= \varepsilon + \frac{\delta^2}{2}\int_a^b\int_a^b \varphi^2(x)\,\{ f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n^{*\prime}(x), y_n'(z)] + f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}_n'(x), \bar{y}'(z)]\}\,dxdz$$

essendo, per le (15′),

$$f_{y_2'y_2'}[z, x, \bar{y}(z), \bar{y}(x), \bar{y}'(z), \bar{y}_n'(x)] = f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}_n'(x), \bar{y}'(z)].$$

Per le definizioni di $y_n^{*\prime}(x)$ e $\bar{y}_n'(x)$ e per la (43) segue che in quasi tutto (a, b) è

$$|y_n^{*\prime}(x) - \bar{y}'(x)| \leq \delta, \quad |\bar{y}_n'(x) - \bar{y}'(x)| \leq \delta;$$

si ha allora per le (40), (41) e (39)

$$I(y_n) - I(\bar{y}) \leq \varepsilon +$$
$$+ \frac{\delta^2}{2}\int_a^b\int_a^b \varphi^2(x)\,|f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), y_n^{*\prime}(x), y_n'(z)] - f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]|\,dxdz +$$

$$+\frac{\delta^2}{2}\int_a^b\int_a^b \varphi^2(x)\,|\,f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}_n'(x), \bar{y}'(z)] - f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]\,|\,dxdz +$$

$$+\delta^2\int_a^b\int_a^b \varphi^2(x) f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dxdz \leq \varepsilon + \frac{\delta^2\eta}{2} + \frac{\delta^2\eta}{2} - 2\delta^2\eta < 0,$$

qualunque sia $n \geq \bar{n}$. Per l'ultima delle (42) questa disuguaglianza prova che su $\bar{C}$ $I(y)$ non è semicontinuo inferiormente; quindi è assurda la (39) e il teorema è così dimostrato.

Osservazione. — Se è verificata la (28'), segue immediatamente dalle (15') che è anche

$$(28'') \qquad \int_a^b\int_a^b \varphi^2(z) f_{y_2'y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dxdz \geq 0.$$

4. Nuova forma della condizione necessaria per la semicontinuità su una curva assegnata. — Dal teorema *b)* del n. precedente dedurremo una condizione necessaria per la semicontinuità inferiore notevolmente più espressiva.

Sia $\bar{C}(y = \bar{y}(x),\ a \leq x \leq b)$ una curva ordinaria di classe 1, completamente interna al campo A e su $\bar{C}$ $I(y)$ sia semicontinuo inferiormente.

Comunque si prenda una funzione quasi-continua $\varphi^2(x) \leq 1$ è sempre, per la (28')

$$\int_a^b\int_a^b \varphi^2(x) f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dxdz =$$

$$= \int_a^b \varphi^2(x)dx \int_a^b f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), y'(z)]dz \geq 0.$$

Ne segue che per tutti gli x di (a, b) deve essere

$$\Phi(x) = \int_a^b f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dz \geq 0\,;$$

infatti $\Phi(x)$ è continua e se fosse $\Phi(x_0) < 0$, si potrebbe determinare tutto un intorno δ di x_0 tale che in esso sia sempre $\Phi(x) < 0$. Posto allora $\varphi^2(x) = 1$ in δ, $\varphi^2(x) = 0$ fuori di δ, ne seguirebbe

$$\int_a^b\int_a^b \varphi^2(x) f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dxdz = \int_\delta \Phi(x)dx < 0$$

e ciò è assurdo. Analogamente deve essere per tutti gli z di (a, b)

$$\int_a^b f_{y_2' y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)] dx \geq 0.$$

Si è così dimostrato il

Teorema. — *Condizione necessaria affinchè su una data curva ordinaria* $C(y = \bar{y}(x), a \leq x \leq b)$, *di classe 1, completamente interna al campo* A, *l'integrale* $I(y)$ *sia una funzione semicontinua inferiormente è che sia*

$$(44) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f_{y_1' y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)] dz \geq 0 & \textit{per ogni } x \textit{ in } (a, b), \\ \displaystyle\int_a^b f_{y_2' y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)] dx \geq 0 & \textit{per ogni } z \textit{ in } (a, b). \end{cases}$$

Osservazione I. — La seconda delle (44) è conseguenza della prima. Infatti per le (15') è

$$f_{y_2' y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}(z)] = f_{y_1' y_1'}[z, x, \bar{y}(z), \bar{y}(x), \bar{y}'(z), \bar{y}'(x)]$$

e quindi

$$\int_a^b f_{y_2' y_2'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)] dx =$$

$$= \int_a^b f_{y_1' y_1'}[z, x, \bar{y}(z), \bar{y}(x), \bar{y}'(z), \bar{y}'(x)] dx = \int_a^b f_{y_1' y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)] \geq 0,$$

per la prima delle (44).

Osservazione II. — La condizione necessaria per la semicontinuità su una curva di classe 1 ora data coincide con quella stabilita nel Cap. I, § 3, n. 3 per l'integrale $I(y_1, y_2)$.

Osservazione III. — Introducendo le funzioni $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ di WEIERSTRASS, come si è fatto nel Cap. I per l'integrale $I(y_1, y_2)$, si possono esprimere le condizioni (44) senza che sia necessaria l'esistenza delle $f_{y_1' y_1'}$ e $f_{y_2' y_2'}$.

Osservazione IV. — Per stabilire le condizioni necessarie per la semicontinuità su una curva data, nel caso degli integrali $\mathfrak{I}(y)$, $\mathfrak{I}_D(z)$ e $I(y_1, y_2)$, si parte dalle condizioni puntuali necessarie per la semicontinuità in tutto il campo. Invece per l'integrale $I(y)$, mancando tali condizioni puntuali, occorre procurarsi la condizione globale (28') dalla quale segue la (44).

Passando dalle (28') alle (44) ci si riduce da un integrale doppio a uno semplice, che *esprime in modo globale le condizioni necessarie per la semicontinuità su una data curva.*

Ciò non deve stupire se si riflette che *mentre per l'integrale* I(y) *l'equazione di* EULERO *è un'equazione differenziale, quella relativa a* I(y) *è invece un'equazione integro-differenziale del tipo di* FREDHOLM (cfr. G. FUBINI, loc. cit. in (2), pagg. 225-226).

5. **Diversità degli integrali $I(y)$ e $I(y_1, y_2)$ rispetto alla semicontinuità in tutto il campo o su ogni arco di una data curva.** — Per l'integrale $I(y_1, y_2)$ se si esigeva la semicontinuità su ogni arco di una curva $\overline{C}[y_1(x), y_2(z)]$ di classe 1, dalle (12) [che corrispondono alle (44)] seguiva che necessariamente era

$$(9)\quad f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)] \geq 0, \quad f_{y_2'y_2'}[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)] \geq 0.$$

(Cfr. Osservazione, Cap. I, § 3, n. 3).

Ciò non è più vero per l'integrale I(y).

Esaminiamo dapprima la causa della diversità fra $I(y)$ e $I(y_1, y_2)$. Se $I(y)$ è semicontinuo inferiormente su ogni arco di C, dal teorema del n. 4 segue che comunque si prendano a_1 e b_1 con $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ è

$$(45)\qquad \int_{a_1}^{b_1} f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)] \geq 0, \quad \textit{per ogni } \mathrm{x} \textit{ in } (\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1),$$

e da ciò non si può, in generale, dedurre che sia

$$f_{y_1'y_1'}[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{y}(\bar{z}), \bar{y}'(\bar{x}), \bar{y}'(\bar{z})] \geq 0$$

quando sia $\bar{x} \neq \bar{z}$; infatti se è $\bar{x} < \bar{z}$, nella (45) entra il valore di $f_{y_1'y_1'}$ nel punto $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{y}(\bar{z}), \bar{y}'(\bar{x}), \bar{y}'(\bar{z})]$ solo quando sia $a_1 \leq \bar{x} < \bar{z} \leq b_1$, e pertanto prendendo comunque in (a, b) l'intervallo (a_1, b_1), quando la sua lunghezza è minore di $|\bar{z} - \bar{x}|$, la (45) è indipendente dal valore di $f_{y_1'y_1'}$ in $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{y}(\bar{z}), \bar{y}'(\bar{x}), \bar{y}'(\bar{z})]$.

Si potrebbe pensare di poter dedurre con altri procedimenti che, come per $\mathrm{I}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2)$, *sia ancora necessario che si abbia per la semicontinuità inferiore*

$$(9')\qquad f_{y_1'y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)] \geq 0, \quad \textit{per ogni } \mathrm{x} \textit{ e } \mathrm{z} \textit{ in } (\mathrm{a}, \mathrm{b}).$$

Mostreremo, più in generale che, *le condizioni*

$$(1')\qquad f_{y_1'y_1'}[x, z, y_1, y_2, y_1' \, y_2'] \geq 0, \quad f_{y_2'y_2'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] \geq 0,$$

non sono necessarie nemmeno per la semicontinuità inferiore in tutto il campo. Basta per questo il seguente esempio:

Definiamo sul quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ la funzione continua $K(x, z)$,

$$K(x, z) = 2(x - z) + 1, \qquad \text{per } z \geq x,$$
$$K(x, z) = 2(z - x) + 1, \qquad \text{per } x \geq z.$$

È $K(x, z) = K(z, x)$; inoltre la $K(x, z)$ non è ≥ 0 nel campo in cui è definita, essendo $K(0, 1) = -1$. Poniamo

$$f[x, z, y_1', y_2'] = K(x, z)[y_1'^2 + y_2'^2].$$

È

$$f_{y_1' y_1'} = f_{y_2' y_2'} = 2K(x, z)$$

e non sono verificate le (1). Ciò nonostante l'integrale

$$I_1(y) = \int_a^b \int_a^b K(x, z)[y'^2(x) + y'^2(z)]dxdz \qquad (0 \leq a < b \leq 1)$$

è semicontinuo inferiormente su ogni curva ordinaria $y(x)$ definita in (a, b). Infatti è

$$I_1(y) = \int_a^b \Phi(x) y'^2(x) dx, \quad \text{con} \quad \Phi(x) = 2\int_a^b K(x, z)\, dz.$$

Condizione sufficiente per la semicontinuità di $\int_a^b \Phi(x) y'^2(x) dz$ è che esso sia regolare positivo e cioè che si abbia

$$\Phi(x) > 0.$$

Ma è

$$\Phi(x) = \int_a^x K(x, z) dz + \int_x^b K(x, z) dz = \int_a^x [2(z - x) + 1] dz + \int_x^b [2(x - z) + 1] dz =$$
$$= (x - a) - (x - a)^2 + (b - x) - (b - x)^2 > 0$$

essendo $0 \leq x - a \leq 1$, $0 \leq b - x \leq 1$; $\int_a^b \Phi(x) y'^2(x) dx$ è quindi regolare positivo e pertanto $I(y)$ è semicontinuo inferiormente su ogni curva ordinaria, pur non essendo verificate le (1).

È così dimostrato che per la semicontinuità inferiore in tutto il campo (o su tutti gli archi di una curva assegnata) non sono più necessarie le condizioni (1) *(o le* (9')*) come per l'integrale* $\mathrm{I}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2)$.

6. **La semicontinuità su ogni arco di una curva data.** — Da quanto precede segue immediatamente il

T e o r e m a. — *Condizione necessaria affinchè su ogni arco di una data curva ordinaria* $\bar{\mathrm{C}}(\mathrm{y} = \bar{\mathrm{y}}(\mathrm{x}),\ \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b})$, *di classe 1, completamente interna al campo* A, *l'integrale* $\mathrm{I}(\mathrm{y})$ *sia una funzione semicontinua inferiormente, è che* *si abbia*

$$(46)\qquad \int_{a_1}^{b_1} f_{y_1' y_1'}[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]dz \geq 0, \quad \textit{per ogni } \mathrm{x} \textit{ in } (\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1)$$

essendo $(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1)$ *un qualunque intervallo contenuto in* (a, b).

Osservazione I. — Da questo teorema segue che deve essere

$$f_{y_1 y_1'}[x, x, \bar{y}(x), \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \bar{y}'(x)] \geq 0$$

in accordo col teorema del § 6, n. 2.

Osservazione II. — La (46), per quanto si è dimostrato nel n. precedente, non si può in generale ulteriormente migliorare fino a attenere una condizione in tutti i punti $[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]$.

§ 7. Ulteriori condizioni per la semicontinuità in tutto il campo.

1. **La semicontinuità in tutto il campo.** — Si è dimostrato nel § 6, n. 5 che — eccetto il caso trattato nel § 5 — non si può esprimere la condizione necessaria per la semicontinuità con una relazione puntuale analoga alle (1).

Si ha pertanto il

Teorema. — *Condizione necessaria affinchè* I(y) *sia una funzione semicontinua inferiormente è che, comunque si prenda una curva* $C(y = y(x), a \leq x \leq b)$ *ordinaria e di classe 1, si abbia*

$$(47)\qquad \int_a^b f_{y_1' y_1'}[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)]dz \geq 0, \quad \textit{per tutti gli } \mathrm{x} \textit{ in } (\mathrm{a}, \mathrm{b}).$$

Ci poniamo ora la seguente questione:

Può accadere che, per tipi particolari della $f[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2']$ *dalla* (47) *segua necessariamente che sia ovunque*

$$f_{y_1' y_1'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] \geq 0 \ ?$$

A tale domanda si risponde affermativamente. Un esempio è fornito dall'integrale

$$I_1(y) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, z) y'^2(x) y'^2(z) dx dz,$$

con $K(x, z)$ continua. L. Tonelli [27] ha dimostrato che, se è $K(x, z) > 0$, $I_1(y)$

[27] L. Tonelli, loc. cit. in [3], § 3.

è semicontinuo inferiormente. Dalla (47) segue che deve essere $K(x, z) \geq 0$. Infatti in tal caso la (47) diviene

$$\int_0^1 K(x, z) y'^2(z) dz \geq 0,$$

qualunque sia la $y'(z)$; per la continuità di $K(x, z)$, se fosse $K(\bar{x}, \bar{z}) < 0$, si avrebbe tutto un intorno di $(\bar{x}, \bar{z})$ in cui è sempre $K(x, z) < 0$ e quindi si potrebbe trovare una $y'(z)$ per cui è

$$\int_0^1 K(x, z) y'^2(z) dz < 0.$$

2. **La continuità in tutto il campo.** — Nel caso della continuità si possono avere condizioni puntuali in tutto il campo e precisamente la condizione necessaria per $I(y_1, y_2)$ lo è anche per $I(y)$.

Teorema. — *Condizione necessaria affinchè l'integrale* I(y) *sia una funzione continua è che si abbia*

$$(8') \qquad f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \equiv P(x, z, y_1, y_2) + y_1' Q(x, z, y_1, y_2) + \\ + y_2' R(x, z, y_1, y_2) + y_1' y_2' S(x, z, y_1, y_2),$$

per tutte le coppie di punti (x, y_1), (z, y_2) *interni ad* A *e in quelle di accumulazione di tali punti.*

Dal teorema del n. 1 segue, se $I(y)$ è continuo su ogni curva, che è

$$\int_\alpha^z f_{y_1' y_1'}[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)] dz = 0, \quad \text{per tutti gli } x \text{ compresi fra } \alpha \text{ e } z.$$

Derivando rispetto a z si ottiene

$$f_{y_1' y_1'}[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)] = 0$$

e per le (15')

$$f_{y_2' y_2'}[z, x, y(z), y(x), y'(z), y'(x)] = 0.$$

Per l'arbitrarietà della $y(x)$ e la continuità di $f_{y_1' y_1'}$ e $f_{y_2' y_2'}$ deve quindi essere per ogni coppia di punti interni ad A ed ogni valore di y_1', y_2'

$$f_{y_1' y_1'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] = 0, \quad f_{y_2' y_2'}[x, z, y_1, y_2, y_1' y_2'] = 0,$$

da cui segue immediatamente la (8').

CAP. III - CONCLUSIONI E CONFRONTO CON I RISULTATI DI L. TONELLI

1. Confronto con l'integrale curvilineo $\mathfrak{I}(y)$. Per l'integrale $I(y_1, y_2)$ si sono date le semplici condizioni (1) necessarie per la semicontinuità in tutto il campo; esse sono dello stesso tipo della condizione $(F_{y_1' y_1'} \geq 0)$ affinchè sia semicontinuo inferiormente l'integrale

$$\mathfrak{I}(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx.$$

$\mathfrak{I}(y)$, se è $F_{y'y'} \geq 0$, si dice *quasi-regolare positivo* e tale condizione è anche sufficiente ([28]) a garantire la semicontinuità inferiore di $\mathfrak{I}(y)$.

Chiameremo allora *quasi regolare-positivo* l'integrale $I(y_1, y_2)$ quando siano soddisfatte le (1) ed è lecito attendersi che tale condizione porti la semicontinuità inferiore di $I(y_1, y_2)$.

Di ciò mi occuperò in un successivo lavoro. Sottolineo per ora il fatto che la struttura delle condizioni (1) fa ritenere che si possa, coi metodi diretti della Scuola Italiana, edificare il Calcolo delle Variazioni per l'integrale $I(y_1, y_2)$ e giungere a risultati definitivi come è stato fatto per $\mathfrak{I}(y)$.

2. Conclusioni per l'ulteriore sviluppo della teoria. — Per l'integrale $I(y)$, salvo il caso della continuità, non siamo giunti a condizioni necessarie puntuali valevoli in tutti i punti in cui è definita la $f[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2']$.

Di questa impossibilità ci siamo resi ragione nella Osservazione del n. 1, § 5. Ma ritengo opportuno ritornare sull'argomento per confrontare $I(y)$ con gli altri integrali che si incontrano nel Calcolo delle Variazioni e metterne in rilievo una profonda differenza strutturale.

Consideriamo dapprima l'integrale

$$\mathfrak{I}(y) = \int_C F[x, y(x), y'(x)]dx,$$

dove $y = y(x)$ è l'equazione di C. In $\mathfrak{I}(y)$ possiamo distinguere tre elementi:

a) una funzione in tre variabili $F(x, y, y')$ definita per ogni y' e per (x, y) in un assegnato campo A;

([28]) L. TONELLI, *Fondamenti...*, Vol. I, Cap. XI, pag. 397. Occorre inoltre supporre la continuità di $F_{y'x}$ o altre condizioni, ad es. che $\mathfrak{I}(y)$ sia seminormale; cfr. L. TONELLI, *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*, « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, Vol. III, 1934, pagg. 404-410.

b) la classe (K) di tutte le curve C assolutamente continue e i cui punti appartengono tutti ad A;

c) l'operatore $\int\limits_C$.

Per decidere della semicontinuità inferiore in tutto A di $\mathfrak{J}(y)$, noi possiamo prendere un qualunque punto $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ad A e fissare ad arbitrio $\bar{y}'$.

Comunque piccolo si prenda un intorno Δ a tre dimensioni del punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}')$, possiamo trovare in (K) una curva ordinaria $\bar{C}: y = \bar{y}(x)$, tale che il punto $[x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)]$ stia tutto in Δ ed operando con $\int\limits_{\bar{C}}$ non si esce da Δ. Per $\Delta \to 0$ la semicontinuità inferiore deve quindi portare a una proprietà della F nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}')$, che è appunto $F_{y'y'}[\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'] \geq 0$.

Questo stesso ragionamento sussiste sia per $\mathfrak{J}_D(z)$ che per $I(y_1, y_2)$, ma non più per $I(y)$.

In tal caso abbiamo:

a') una funzione di sei variabili $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$, definita per ogni y_1', y_2' e (x, y_1), (z, y_2) appartenenti ad A;

b') la classe (K) di tutte le curve C assolutamente continue i cui punti appartengono ad A;

c') l'operatore $\iint\limits_C$.

Fissato il punto $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_1', \bar{y}_2')$ con $(\bar{x}, \bar{y}_1)$, $(\bar{z}, \bar{y}_2)$ interni ad A, se è, ad esempio, $\bar{x} \neq \bar{z}$ e si prende un intorno Δ di $\bar{P}$ definito da

$$|x - \bar{x}| \leq \delta, \quad |z - \bar{z}| \leq \delta, \quad |y_1 - \bar{y}_1| \leq \delta, \quad |y_2 - \bar{y}_2| \leq \delta,$$
$$|y_1' - \bar{y}_1'| \leq \delta, \quad |y_2' - \bar{y}_2'| \leq \delta$$

con $\delta < |\bar{x} - \bar{z}|$, non esiste in (K) una curva $\bar{C}: y = \bar{y}(x)$ tale che il punto $[x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)]$ appartenga sempre a Δ e quindi l'operatore $\iint\limits_{\bar{C}}$ non agisce più soltanto su Δ e non se ne può dedurre una proprietà puntuale per la semicontinuità inferiore.

Questo fatto dà una profonda diversità strutturale fra I(y) *da un lato e* $\mathfrak{J}$(y), $\mathfrak{J}_D$(z) *e* I(y_1, y_2) *dall'altro e dimostra che* I(y_1, y_2) *e non* I(y) *rappresenta la naturale estensione di* $\mathfrak{J}$(y).

Riprendiamo il confronto fra $I(y_1, y_2)$ ed $I(y)$.

Si è visto (Cap. II, § 6, n. 4, Osservazione II) che le condizioni necessarie per la semicontinuità di $I(y_1, y_2)$ e $I(y)$ sopra una data curva sono le stesse e così pure per la continuità in tutto il campo per entrambi è necessario che la funzione integranda sia del tipo

$$P(x, z, y_1, y_2) + y_1'Q(x, z, y_1, y_2) + y_2'R(x, z, y_1, y_2) + y_1'y_2'S(x, z, y_1, y_2).$$

Quando invece si esige la semicontinuità su tutti gli archi di una data curva oppure ovunque, allora si hanno per $I(y_1, y_2)$ delle condizioni puntuali su tutta la curva o in ogni punto del campo, mentre ciò non è necessario per $I(y)$.

Ne segue che, *se ci si limita a trattare l'integrale* $\mathrm{I}(y_1, y_2)$, *le condizioni sufficienti che si otterranno comprendono una vastissima classe di integrali* $\mathrm{I}(y)$, *la quale contiene tutti quelli che presentano un effettivo interesse pratico.*

Una prima conferma dell'affermazione fatta è data dai casi già trattati da L. TONELLI che, pur essendo integrali $I(y)$, soddisfano tutti alle più restrittive condizioni (1) date per $I(y_1, y_2)$. Ciò sarà mostrato nel n. successivo.

Qualora nell'ulteriore sviluppo della teoria se ne veda l'opportunità, si potranno segnalare delle proprietà valevoli per $I(y)$ e non per $I(y_1, y_2)$.

3. **Confronto con i risultati di L. Tonelli.** — Confrontiamo ora i risultati di L. TONELLI con quelli ottenuti nel presente lavoro, sopratutto per confermare che gli integrali da Lui considerati — e imposti dalla teoria delle equazioni integrali — pur essendo integrali $I(y)$ soddisfano alle (1).

L. TONELLI ([29]) ha dato il seguente teorema di semicontinuità:

« *Se* $\mathrm{K}(x, z)$ *è una funzione continua e positiva per* $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, *l'integrale*

$$I_1(y) = \int_0^1\int_0^1 K(x, z) y'^2(x) y'^2(z) dx dz$$

è semicontinuo inferiormente ».

In tal caso è $f_{y_1'y_1'} = 2Ky'^2(z) \geq 0$, $f_{y_2'y_2'} = 2Ky'^2(x) \geq 0$ per tutti gli x e z in (0, 1). Sono quindi verificate le (1).

Come si è provato nel Cap. II, § 6, n. 8, la condizione $K(x, z) \geq 0$ è anche *necessaria* per la semicontinuità inferiore di $I_1(y)$.

Sia ora $K(x, z)$ una funzione quasi continua con $K^2(x, z)$ integrabile secondo LEBESGUE sul quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Limitiamoci a considerare la classe (K) delle curve $C(y = y(x), 0 \leq x \leq 1)$, con $y(x)$ assolutamente continua e per cui è

$$\int_0^1 y'^2(x) dx \leq 1.$$

([29]) Loc. cit. in ([3]), § 3.

L. TONELLI [30] ha dimostrato che *l'integrale*

$$I_2(y) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, z) y'(x) y'(z) dx dz$$

è continuo nella classe (K).

Ciò significa che se $\bar{C}[y = \bar{y}(x)]$ è una curva di (K), preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare $\delta > 0$ in modo che per tutte le curve di (K) per cui è

$$|y(x) - \bar{y}(x)| \leq \delta \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

sia anche

$$|I_2(y) - I_2(\bar{y})| \leq \varepsilon.$$

Da ciò non segue, evidentemente, che $I_2(y)$ è continuo nel senso da noi stabilito. Come mostrerò in un successivo lavoro [31], se si aggiungono delle ipotesi di derivabilità per la $K(x, z)$, l'integrale $I_2(y)$ è una funzione continua.

Però, anche senza tali ipotesi e quindi sapendo soltanto che $I_2(y)$ è continuo nella classe (K), esso verifica ugualmente la condizione (8) per la continuità di $I(y_1, y_2)$, che coincide con la (8') data per $I(y)$.

È così confermato quanto si era precedentemente detto circa l'opportunità di studiare sistematicamente l'integrale $\mathrm{I}(y_1, y_2)$, *anche per ottenere quanto è sufficiente per* $\mathrm{I}(y)$.

([30]) Loc. cit. in ([3]), § 1, n. 3.

([31]) S. FAEDO, *Un nuovo tipo di funzionali continui*, « Rend. di Matematica e delle sue Applicazioni », Roma, 1943.