Su due notevoli integrali del Tonelli.

Memoria di A. MAMBRIANI (a Bologna).

Sunto. - *Si stabiliscono alcune conclusioni sui due notevoli integrali definiti che il* TONELLI *considera nella sua definizione di funzione di due variabili a variazione limitata.*

La nozione del TONELLI di « funzione di due variabili a variazione limitata » si deve annoverare, indubbiamente, fra le nozioni fondamentali dell'Analisi, e, prerogativa di molti concetti fondamentali, essa si presenta di una grande semplicità. Tale nozione venne introdotta dal TONELLI (1) nel 1926 allo scopo di risolvere l'arduo problema della quadratura di una qualunque superficie continua rappresentata da un'equazione $z = f(x, y)$; essa ha condotto il TONELLI (2) a risolvere completamente, nella sua forma più generale, detto problema, e inoltre si è palesata di grande utilità in diverse altre importanti questioni (3).

Un'interessante conferenza tenuta lo scorso anno dal prof. TONELLI (4) nell'Istituto Matematico della R. Università di Bologna, mi ha suggerito l'argomento di alcuni lavori, nei quali *mi propongo, dapprima, di stabilire dei risultati in stretto legame con l'interpretazione geometrica della detta nozione del* TONELLI, *e, successivamente, di generalizzare ampiamente e applicare tali risultati.*

In questo primo lavoro s'ottengono alcune conclusioni — che non sembrano prive d'importanza in sè stesse — sui due notevoli integrali definiti

---

(1) L. TONELLI, *Sulla quadratura delle superficie* (« Rendic. R. Accad. Naz. Lincei », s. 6, vol. 3 (1926), pp. 357-362). Cfr., in particolare, la pagina 357. Si veda pure (dello stesso Autore): *Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata* (« Rendic. R. Accad. Naz. Lincei », s. 6, vol. 7 (1928), pp. 357-363); *Sulle funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata* (« Annali R. Scuola Norm. Sup. », s. 2, vol. 5 (1936), pp. 314-320).

(2) L. TONELLI, *Sulla quadratura delle superficie* (« Rendic. R. Accad. Naz. Lincei », s. 6, vol. 3 (1926), pp. 357-362 (Nota I), pp. 445-450 (Nota II), pp. 633-638 (Nota III)).

(3) Sopratutto negli studi sugli sviluppi in serie, e in particolare sugli sviluppi in serie doppia di FOURIER. Cfr. L. TONELLI: *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier* (« Annali di Matematica », s. 4, vol. 4 (1927), pp. 29-72); *Serie trigonometriche*, N. Zanichelli, Bologna, 1928.

(4) L. TONELLI, *Su alcuni concetti dell'Analisi moderna* (« Annali R. Scuola Nor. Sup. », s. 2, vol. 11 (1942), pp. 107-118). Cfr., in particolare, le pagine 115 e 116.

che il TONELLI considera appunto nella sua definizione di funzione di due variabili a variazione limitata. Per formulare anzitutto brevemente tali conclusioni, incominciamo col fissare, nel nostro spazio a tre dimensioni, un sistema cartesiano ortogonale di assi x, y, z. Indi consideriamo una funzione, di due variabili, $\{ f(x, y), Q \}$ a un valore, reale e *continua*, il cui campo Q di definizione sul piano (x, y) è, per semplicità, il quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$; e a questa funzione associamo la corrispondente superficie continua $S \equiv \{ z = f(x, y), Q \}$. I due sopra nominati integrali del TONELLI, relativi alla funzione considerata, sono qui indicati [n.° 1] con S_x e S_y allo scopo di richiamarne gli importanti significati geometrici, i quali sono, rispettivamente, quello di area della proiezione della superficie S, parallelamente all'asse delle x, sul piano (y, z), e quello di area della proiezione di S, parallelamente all'asse delle y, sul piano (x, z). Si deve tenere presente che le superficie piane date da tali proiezioni, che indicheremo pure con S_x e S_y, rispettivamente, sono in generale ripiegate più volte (e anche infinite volte) su sè stesse ([5]). Notiamo, che nel caso particolare in cui S sia una superficie poliedrica (a facce piane) gli integrali S_x e S_y sono quindi, rispettivamente, la somma delle aree delle proiezioni, parallelamente all'asse delle x, sul piano (y, z), di tutte le facce della poliedrica, e la somma delle aree delle proiezioni, parallelamente all'asse delle y, sul piano (x, z), di tutte le nominate facce. Qui si dimostra [n.° 4] che *gli integrali* $\mathrm{S_x}$ *e* $\mathrm{S_y}$ *del* TONELLI *si possono considerare come i minimi limiti degli integrali analoghi relativi a particolari poliedriche inscritte nella superficie* S, *al tendere di dette poliedriche a tale superficie. S'individua poi* [n.° 6], *fra le nominate poliedriche inscritte nella superficie* S, *una classe di poliedriche tali che* [n.° 7] *gli integrali* $\mathrm{S_x}$ *e* $\mathrm{S_y}$ *si possono considerare come i limiti degli integrali analoghi relativi a simili poliedriche, quando queste poliedriche tendono alla superficie* S.

1. Gli integrali S_x e S_y del Tonelli. — Per dare maggiore chiarezza a ciò che segue facciamo anche qualche richiamo.

a) Consideriamo una funzione, di due variabili, $\{ f(x, y), Q \}$ a un valore, reale e finita (continua o discontinua), il cui campo Q di definizione sia, come precedentemente, il quadrato $\{ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \}$. Si hanno allora i due insiemi di funzioni, di una variabile,

$$\{ f(x, y),\ 0 \leq x \leq 1 \} \text{ con } 0 \leq y \leq 1, \qquad \{ f(x, y),\ 0 \leq y \leq 1 \} \text{ con } 0 \leq x \leq 1.$$

([5]) Si può precisare tale affermazione parlando di *superficie piane multiple*.

Le variazioni totali di queste funzioni, usando le notazioni del TONELLI, s'indicheranno, rispettivamente, con $V_x(y)$ e $V_y(x)$: nascono così le due funzioni, di una variabile,

$$(1) \qquad \{ V_x(y),\ 0 \leq y \leq 1 \}, \qquad \{ V_y(x),\ 0 \leq x \leq 1 \},$$

le quali sono non negative ed eventualmente infinite (precisamente, infinite solo per alcuni valori delle rispettive variabili, oppure anche per tutti i valori di tali variabili).

La classica definizione di JORDAN di « funzione, di una variabile, a variazione limitata » ha come corrispondente nel campo delle funzioni di due variabili la seguente fondamentale

DEFINIZIONE DI TONELLI [6]. — « Si dice che $\{ f(x, y), Q \}$ è una *funzione* « *di due variabili a variazione limitata*, quando le corrispondenti « variazioni totali (1) sono funzioni quasi dappertutto finite e integrabili nel « senso di LEBESGUE; cioè, quando gli integrali (nel senso di LEBESGUE)

$$(2) \qquad S_x = \int_0^1 V_x(y)dy, \qquad S_y = \int_0^1 V_y(x)dx,$$

« esistono (finiti) entrambi ».

Un esempio del TONELLI [7]. — Consideriamo una funzione $\{ \varphi(x), 0 \leq x \leq 1 \}$ continua e tale che in ogni intervallo $(x, 1)$, con $0 < x < 1$, abbia solo un numero finito d'oscillazioni ed una variazione totale data da $1 : \sqrt{x}$. Sia, poi, $\{ f(x, y), Q \}$ la funzione che nei punti (x, y) di Q con $x^2 + y^2 \leq 1$ è rappresentata dalla superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva $\{ z = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1 \}$, e che negli altri punti di Q ha valori uguali a $\varphi(1)$. Le funzioni $\{ f(x, 0), 0 \leq x \leq 1 \}$ e $\{ f(0, y), 0 \leq y \leq 1 \}$ *non* sono a variazione limitata, tuttavia la funzione $\{ f(x, y), Q \}$ è a variazione limitata, perchè, avendosi sempre $V_x(y) \leq (1 : \sqrt{y})$ per $y > 0$ e $V_y(x) \leq (1 : \sqrt{x})$ per $x > 0$, gli integrali (2) esistono (finiti) entrambi.

b) Nel seguito supporremo sempre, e soltanto, che la funzione $\{$ f(x, y), Q $\}$ *sia continua*. Con questa sola ipotesi gli integrali (2) possono anche non esistere. Per esempio, la funzione $\{ f(x, y) \equiv \varphi(x), Q \}$, dove $\varphi(x)$ è la funzione continua del precedente esempio del TONELLI, ha $V_x(y) \equiv \equiv V_x(0) = +\infty$, $V_y(x) \equiv 0$, onde il primo degli integrali (2) *non* esiste e il

---

[6] Loc. cit. in [1].

[7] L. TONELLI, *Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata* (« Rendic. R. Accad. Naz. Lincei », s. 6, vol. 7 (1928), pp. 357-363). Cfr., in particolare, la pagina 363.

secondo degli integrali (2) esiste ed ha il valore zero. Se il primo degli integrali (2) esiste (finito), la corrispondente funzione $\{ V_x(y),\ 0 \leq y \leq 1 \}$ risulta *quasi dappertutto finita* e inoltre *semicontinua inferiormente*; così pure, se il secondo degli integrali (2) esiste (finito), la funzione $\{ V_y(x),\ 0 \leq x \leq 1 \}$ risulta quasi dappertutto finita e inoltre semicontinua inferiormente.

Nel seguito, però, parleremo in ogni caso degli « integrali $\mathrm{S_x}$ *e* $\mathrm{S_y}$ *del* TONELLI *relativi alla funzione continua* $\{ \mathrm{f(x, y),\ Q} \}$ *», in quanto fissiamo, per definizione, d'attribuire il valore* $+\infty$ *a quello degli integrali* (2) *che eventualmente non esiste, o a ciascuno di tali integrali se non esistono entrambi.* Questi integrali S_x e S_y del TONELLI dànno, allora, sempre [8] rispettivamente (com'è anche accennato nell'introduzione) l'area della proiezione della superficie continua

$$S \equiv \{ z = f(x, y),\ Q \},$$

parallelamente all'asse x, sul piano (y, z), e l'area della proiezione di S, parallelamente all'asse y, sul piano (x, z). E si deve tenere presente che queste proiezioni sono delle superficie piane in generale ripiegate più volte su sè stesse [9].

c) LEMMA DI TONELLI [10]. — *Sia* $\mathrm{S} \equiv \{ \mathrm{z = f(x, y),\ Q} \}$ *una superficie continua e sia* $\Sigma_\nu \equiv \{ \mathrm{z} = \varphi_\nu(\mathrm{x, y}),\ \mathrm{D}_\nu \}$, *con* $\nu = 1, 2, \ldots$ *una successione di poliedriche tendenti verso la superficie* S [11]. *Allora, detti* $\Sigma_{\nu,\mathrm{x}}$ *e* $\Sigma_{\nu,\mathrm{y}}$ *i due integrali del* TONELLI *relativi alla poliedrica* Σ_ν, *si ha*

$$S_x \leq \min_{\nu \to \infty} \lim \Sigma_{\nu,x}, \quad S_y \leq \min_{\nu \to \infty} \lim \Sigma_{\nu,y}. \tag{3}$$

Questo importante lemma sarà applicato più volte nel seguito.

2. Le poliedriche di Tonelli. — Il TONELLI nei suoi studi fondamentali sulla quadratura delle superficie è riuscito a sfruttare, in modo veramente magistrale, delle particolari poliedriche inscritte nella superficie da quadrare. Tali poliedriche sono qui richiamate col nome di *poliedriche di* TONELLI. Diamo precisamente la seguente

---

(8) Loc. cit. in (4).

(9) Loc. cit. in (5).

(10) Loc. cit. in (2), Nota I. pag. 358 (n.° 1), e Nota II, pp. 447-448 (n.° 6). Ho apportato all'affermazione del TONELLI una generalizzazione, togliendo l'ipotesi che l'area di Σ^ν, quando $\nu \to \infty$, tenda all'area secondo LEBESGUE (supposta finita) della superficie S, e includendo anche il caso in cui tale area di S è uguale a $+\infty$. La dimostrazione del TONELLI sussiste, però, invariata.

(11) È sottinteso che $\varphi_\nu(x, y)$ è, per ogni ν, una funzione a un valore (reale) nel suo campo D_ν di definizione (campo che, quando $\nu \to \infty$, tende al quadrato Q).

DEFINIZIONE. — « Una poliedrica $T \equiv \{ z = g(x, y), D \}$, dove D è il campo « di definizione della funzione a un valore (reale e finito) $g(x, y)$, si dirà una « *poliedrica di* TONELLI, quando:

1°) « Le sue facce, in numero finito, sono dei triangoli, tranne eventualmente alcune (sempre piane) contenenti porzioni di contorno della « poliedrica ».

2°) « Queste facce si possono ordinare in tante coppie di facce contigue — ad eccezione eventualmente di alcune facce contenenti porzioni di « contorno della poliedrica — in modo che, proiettando ortogonalmente sul « piano (x, y) i contorni di tutte queste coppie di facce e anche i contorni « delle eventuali facce rimaste isolate, si abbia una suddivisione in parti, del « campo D, ottenibile esattamente tracciando sul piano (x, y) due convenienti « sistemi di rette parallele (in numero finito, le rette di un sistema *non* essendo parallele alle rette dell'altro sistema) » ([12]).

Dette α e β le due direzioni, complanari e distinte, delle rette dei due precedenti sistemi di rette parallele, si potrà dire, con maggiore precisazione, che la poliedrica T, sopra definita, è una *poliedrica di* TONELLI *a base* D, *sul piano* (x, y), *reticolata secondo le direzioni* α *e* β; si dirà pure che T è una *poliedrica di* TONELLI *a base reticolata ortogonalmente* oppure *a base reticolata obliquamente* a seconda che le direzioni α e β sono, rispettivamente, ortogonali o no.

3. La poliedrica di Tonelli $T_{\delta,\lambda}$. — Eseguiamo una suddivisione del precedente quadrato Q, sul piano (x, y), di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$, in un numero finito di rettangoli $R_{r,s}$, mediante rette d'equazioni

$$x = x_0,\ x = x_1, \dots,\ x = x_{m-1},\ x = x_m;\quad y = y_0,\ y = y_1, \dots,\ y = y_{n-1},\ y = y_n,$$

con

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1,\quad 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = 1.$$

I rettangoli $R_{r,s}$ sono allora, ordinatamente, così definiti:

$$R_{r,s} \equiv \{ x_{r-1} \leq x \leq x_r,\ y_{s-1} \leq y \leq y_s \},\quad (r = 1, 2, \dots, m;\ s = 1, 2, \dots, n).$$

Poniamo

$$\delta = \max_{r=1,2,\dots,m} (x_r - x_{r-1}),\quad \lambda = \max_{s=1,2,\dots,n} (y_s - y_{s-1}). \tag{4}$$

Ai vertici dei rettangoli considerati corrispondono, sulla precedente superficie

---

([12]) Le poliedriche di TONELLI rappresentate parametricamente saranno definite in altro lavoro.

continua $S \equiv \{ z = f(x, y),\ Q \}$, i punti

$$P_{r,s} \equiv (x_r, y_s, f(x_r, y_s)), \quad (r = 0, 1, 2, \dots, m;\ s = 0, 1, 2, \dots, n).$$

In corrispondenza a ciascun rettangolo $R_{r,s}$ consideriamo la coppia di triangoli, inscritti in S (cioè, aventi i vertici su S),

$$(5) \qquad P_{r-1,s-1}P_{r,s-1}P_{r-1,s}, \quad P_{r,s}P_{r,s-1}P_{r-1,s};$$

coppia di triangoli che si proietta ortogonalmente sul piano (x, y) nel rettangolo $R_{r,s}$. L'insieme di tutte queste coppie di triangoli forma una *poliedrica di* Tonelli [n.° 2] *inscritta nella superficie* S *e a base reticolata ortogonalmente secondo le direzioni degli assi* x *e* y: la indicheremo con $T_{\delta,\lambda}$. Siano poi

$$(P_{r-1,s-1}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_x, \quad (P_{r,s}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_x$$

i triangoli (e le aree dei triangoli) proiezioni, parallelamente all'asse delle x, sul piano (y, z), dei triangoli (5), rispettivamente; e, analogamente, siano

$$(P_{r-1,s-1}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_y, \quad (P_{r,s}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_y$$

i triangoli (e le aree dei triangoli) proiezioni, parallelamente all'asse delle y, sul piano (x, z), dei triangoli (5), rispettivamente. Si trova:

$$(P_{r-1,s-1}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_x = \frac{1}{2} \left| f(x_r, y_{s-1}) - f(x_{r-1}, y_{s-1}) \right| (y_s - y_{s-1}),$$

$$(P_{r,s}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_x = \frac{1}{2} \left| f(x_r, y_s) - f(x_{r-1}, y_s) \right| (y_s - y_{s-1}),$$

$$(P_{r-1,s-1}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_y = \frac{1}{2} \left| f(x_{r-1}, y_s) - f(x_{r-1}, y_{s-1}) \right| (x_r - x_{r-1}),$$

$$(P_{r,s}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_y = \frac{1}{2} \left| f(x_r, y_s) - f(x_r, y_{s-1}) \right| (x_r - x_{r-1}).$$

Poniamo ancora

$$[6] \qquad T_{\delta,\lambda,x} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \left\{ (P_{r-1,s-1}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_x + (P_{r,s}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_x \right\},$$

$$(7) \qquad T_{\delta,\lambda,y} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \left\{ (P_{r-1,s-1}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_y + (P_{r,s}P_{r,s-1}P_{r-1,s})_y \right\},$$

cioè indichiamo con $T_{\delta,\lambda,x}$ e $T_{\delta,\lambda,y}$, rispettivamente, la somma delle aree delle proiezioni, parallelamente all'asse delle x, sul piano (y, z), di tutte le facce della poliedrica di Tonelli $T_{\delta,\lambda}$, e la somma delle aree delle proiezioni, parallelamente all'asse delle y, sul piano (x, z), di tutte le nominate facce. Per ciò che precede abbiamo quindi:

$$(6')\qquad T_{\delta,\lambda,x}=\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{2}\{|f(x_r,y_{s-1})-f(x_{r-1},y_{s-1})|+|f(x_r,y_s)-f(x_{r-1},y_s)|\}(y_s-y_{s-1}),$$

$$(7')\qquad T_{\delta,\lambda,y}=\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{2}\{|f(x_{r-1},y_s)-f(x_{r-1},y_{s-1})|+|f(x_r,y_s)-f(x_r,y_{s-1})|\}(x_r-x_{r-1}).$$

Se poi, per brevità, poniamo

$$(8)\qquad v_{\delta,x}(y)=\sum_{r=1}^{m}|f(x_r,y)-f(x_{r-1},y)|,\quad v_{\lambda,y}(x)=\sum_{s=1}^{n}|f(x,y_s)-f(x,y_{s-1})|,$$

si può scrivere, più concisamente,

$$(6'')\qquad T_{\delta,\lambda,x}=\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{2}\{v_{\delta,x}(y_{s-1})+v_{\delta,x}(y_s)\}(y_s-y_{s-1}),$$

$$(7'')\qquad T_{\delta,\lambda,y}=\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{2}\{v_{\lambda,y}(x_{r-1})+v_{\lambda,y}(x_r)\}(x_r-x_{r-1}).$$

Per quanto si è già detto nell'introduzione e nel n.° 1, le due somme $T_{\delta,\lambda,x}$ e $T_{\delta,\lambda,y}$ non sono altro che gli integrali del TONELLI relativi alla poliedrica $T_{\delta,\lambda}$.

Manifestamente, *la poliedrica* $\mathrm{T}_{\delta,\lambda}$, *quando* $\underset{\smile}{\delta,\lambda}\to 0$ (13), *tende (uniformemente) verso la superficie* S.

Osservazione. — In corrispondenza ad un rettangolo $R_{r,s}$ si possono, veramente. considerare due tipi di coppie di triangoli inscritti nella superficie S. Un primo tipo dato dalla coppia (5) precedente, e un secondo tipo dato dalla coppia

$$P_{r,s-1}P_{r-1,s-1}P_{r,s},\quad P_{r-1,s}P_{r-1,s-1}P_{r,s}.$$

Considerando in corrispondenza ad ogni rettangolo $R_{r,s}$ il secondo tipo di coppia di triangoli, s'ottiene una nuova poliedrica di TONELLI i cui due integrali del TONELLI sono uguali a $T_{\delta,\lambda,x}$ e a $T_{\delta,\lambda,y}$, com'è facile verificare. Uguale conclusione si ha per una poliedrica di TONELLI ottenuta fissando in corrispondenza ad alcuni rettangoli $R_{r,s}$ il primo tipo di coppia di triangoli e in corrispondenza ai rimanenti rettangoli il secondo tipo di coppia di triangoli.

4. **Gli integrali S_x e S_y considerati come minimi limiti.** — *Se la funzione* $\{\mathrm{f}(x, y), Q\}$ *è continua, gli integrali* $\mathrm{S_x}$ *e* $\mathrm{S_y}$ *del* TONELLI *(precisati al* n.° 1, ***b****)) si possono considerare come i minimi limiti, quando* $\underset{\smile}{\delta,\lambda}\to 0$,

(13) La scrittura $\underset{\smile}{\delta,\lambda}\to 0$ si legge « δ e λ indipendentemente e contemporaneamente tendono allo zero ».

delle somme $T_{\delta,\lambda,x}$ *e* $T_{\delta,\lambda,y}$, *rispettivamente; si ha cioè:*

$$(9)\qquad S_x = \min_{\underset{\sim}{\delta,\lambda}\to 0} \lim T_{\delta,\lambda,x}, \quad S_y = \min_{\underset{\sim}{\delta,\lambda}\to 0} \lim T_{\delta,\lambda,y}.$$

Però, questi segni di minimo limite non sono in generale sostituibili con quello di limite.

Dimostrazione. — *a)* Poichè [n.° 3] la poliedrica $T_{\delta,\lambda}$, quando $\underset{\sim}{\delta,\lambda}\to 0$, tende (uniformemente) verso la superficie continua S, si ha, in base al lemma di TONELLI del n.° 1, *c)*,

$$(10)\qquad S_x \leq \min_{\underset{\sim}{\delta,\lambda}\to 0} \lim T_{\delta,\lambda,x}, \quad S_y \leq \min_{\underset{\sim}{\delta,\lambda}\to 0} \lim T_{\delta,\lambda,y}.$$

b) Se è $S_x = +\infty$, dalla prima delle (10) segue immediatamente la prima delle (9); ed analogamente, se è $S_y = +\infty$ dalla seconda delle (10) segue subito la seconda delle (9).

c) Sia invece, ad esempio, $S_y < +\infty$, e mostriamo che vale ancora la seconda delle (9). A tale scopo consideriamo l'espressione della somma $T_{\delta,\lambda,y}$ nella forma (7''). Poichè la funzione $\{v_{\lambda,y}(x),\ 0 \leq x \leq 1\}$, che compare in (7'') e che è data dalla seconda delle (8), è continua e quindi integrabile, da (7'') si ha

$$(11)\qquad \int_0^1 v_{\lambda,y}(x)dx = \lim_{\delta\to 0} T_{\delta,\lambda,y}.$$

Essendo poi $V_y(x) \geq v_{\lambda,y}(x)$, risulta

$$(12)\qquad S_y \geq \lim_{\delta\to 0} T_{\delta,\lambda,y},$$

e ciò per ogni sistema di punti $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = 1$ e quindi per ogni λ (non nullo). Da (12) segue allora

$$(13)\qquad S_y \geq \min_{\underset{\sim}{\delta,\lambda}\to 0} \lim T_{\delta,\lambda,y}.$$

Confrontando poi la (13) con la seconda delle (10), si conclude proprio con la seconda delle (9). E analogamente si ragiona, se è $S_x < +\infty$, per concludere con la prima delle (9).

d) Se in una delle (9) il primo membro è infinito, in essa si può sostituire, manifestamente, il segno di minimo limite con quello di limite; e ciò può farsi per entrambe le (9) se risultano infiniti sia S_x che S_y. In generale, però, nelle (9) i segni di minimo limite *non* sono sostituibili con quello di limite, come segue dall'osservare che, ad esempio, può essere contemporaneamente

$$S_y < +\infty, \quad \max_{\delta,\lambda\to 0} \lim T_{\delta,\lambda,y} = +\infty.$$

Invero, supposto $S_y < +\infty$, se la funzione $\{V_y(x),\ 0 \leq x \leq 1\}$ è infinita (positiva) in qualcuno dei punti precedenti $x_0 = 0,\ x_1, \dots,\ x_{m-1},\ x_m = 1$ [il che è possibile, come mostra chiaramente l'esempio del TONELLI richiamato al n.° 1, *a)*], da (7'') discende manifestamente

$$\lim_{\lambda\to 0} T_{\delta,\lambda,y} = +\infty, \qquad \text{e pertanto} \qquad \max_{\delta,\lambda\to 0} \lim T_{\delta,\lambda,y} = +\infty.$$

5. **La classe delle poliedriche di Tonelli $\mathcal{T}_{\delta,\lambda}$ e una naturale domanda.** — Indichiamo ora con $\mathcal{T}_{\delta,\lambda}$ una poliedrica di TONELLI più generale di $T_{\delta,\lambda}$. La $\mathcal{T}_{\delta,\lambda}$ o coincide con $T_{\delta,\lambda}$ o coincide con una parte di $T_{\delta,\lambda}$ proiettantesi ortogonalmente sul piano (x, y) in un *rettangolo* ottenuto dal quadrato Q asportandovi tutti o alcuni rettangoli $R_{r,s}$ [vedasi n.° 3] aventi qualche lato sui lati di Q. Per una tale poliedrica $\mathcal{T}_{\delta,\lambda}$ si osserva che si può ripetere, a passo a passo, la dimostrazione fatta precedentemente [n.° 4] per la poliedrica $T_{\delta,\lambda}$. Abbiamo quindi pure, analogamente alle (9),

$$(15) \qquad S_x = \min_{\delta,\lambda\to 0} \lim \mathcal{T}_{\delta,\lambda,x}, \quad S_y = \min_{\delta,\lambda\to 0} \lim \mathcal{T}_{\delta,\lambda,y}.$$

Queste formule suggeriscono la domanda seguente: Nella classe $\{\mathcal{T}_{\delta,\lambda}\}$ di tutte le poliedriche $\mathcal{T}_{\delta,\lambda}$ esiste una sottoclasse di poliedriche $\tau_{\delta,\lambda}$, per così dire minimizzanti, tali che sia contemporaneamente

$$S_x = \lim_{\delta,\lambda\to 0} \tau_{\delta,\lambda,x}, \quad S_y = \lim_{\delta,\lambda\to 0} \tau_{\delta,\lambda,y}\ ?$$

In ciò che segue, superando varie difficoltà, si mostra che tale domanda ha una risposta pienamente affermativa.

6. **La poliedrica di Tonelli $\tau_{\delta,\lambda}$.** — Ad ogni poliedrica di TONELLI $T_{\delta,\lambda}$ (definita al n.° 3) associamo, nel modo che verrà ora indicato, un'altra poliedrica di TONELLI, ben determinata, $\tau_{\delta,\lambda}$.

Fissata una poliedrica $T_{\delta,\lambda}$, ad essa corrispondono sull'intervallo $(0, 1)$ dell'asse x e sull'intervallo $(0, 1)$ dell'asse y due determinati sistemi di punti: con le notazioni del n.° 3 tali punti sono, rispettivamente,

$$(16) \quad 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1, \quad 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = 1.$$

Analogamente, alla nuova poliedrica $\tau_{\delta,\lambda}$ corrisponderanno sull'asse x e sull'asse y, ordinatamente, altri due sistemi di punti che stabiliremo, fin d'ora, d'indicare così:

$$0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{p-1} < \xi_p \leq 1, \quad 0 \leq \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{q-1} < \eta_q \leq 1.$$

Diciamo pure subito che per la poliedrica $\tau_{\delta,\lambda}$ risulterà (come vedremo):

$$2\delta \geq \max_{r=2,3,\dots,p} (\xi_r - \xi_{r-1}), \quad 2\lambda \geq \max_{s=2,3,\dots,q} (\eta_s - \eta_{s-1}),$$

inoltre $\delta \geq \xi_1$, $\delta \geq 1 - \xi_p$, $\lambda \geq \eta_1$, $\lambda \geq 1 - \eta_q$; di guisa che quando $\delta, \lambda \to 0$ tenderanno a zero contemporaneamente sia tutte le differenze $\xi_r - \xi_{r-1}$, sia tutte le differenze $\eta_s - \eta_{s-1}$, nello stesso tempo ξ_1 e η_1 tenderanno allo zero e ξ_p e η_q tenderanno all'unità.

1°) Se è $S_x = +\infty$, si pone semplicemente

$$\xi_1 = x_0, \ \xi_2 = x_1, \dots, \ \xi_{p-1} = x_{m-1}, \ \xi_p = x_m$$

(onde sarà $p = m + 1$). Analogamente se è $S_y = +\infty$, si pone semplicemente

$$\eta_1 = y_0, \ \eta_2 = y_1, \dots, \ \eta_{q-1} = y_{n-1}, \ \eta_q = y_n$$

(onde sarà $q = n + 1$). Ne segue che se è contemporaneamente $S_x = +\infty$ e $S_y = +\infty$, la poliedrica $\tau_{\delta,\lambda}$ non è altro che $T_{\delta,\lambda}$.

2°) Sia invece, ad esempio, $S_y < +\infty$. Allora nell'espressione di S_y, data dalla seconda delle (2), la funzione $\{ V_y(x), \ 0 \leq x \leq 1 \}$ risulta [cfr. n.° 1, *b)*] quasi dappertutto finita e inoltre semicontinua inferiormente. Pertanto ([14]) la funzione $V_y(x)$ in ogni intervallo (x_{r-1}, x_r) ha un minimo assoluto finito e i suoi punti di minimo assoluto hanno una minima ascissa a_r. Sull'intervallo (0, 1) dell'asse x resta così individuato univocamente un sistema di punti

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{m-1} \leq a_m \leq 1$$

pei quali è

$$a_1 \leq \delta, \quad 1 - a_m \leq \delta, \quad a_r - a_{r-1} \leq 2\delta \qquad \text{per } r = 2, 3, \dots, m.$$

Suddividiamo ora, eventualmente, ogni intervallo *non nullo* (a_{r-1}, a_r) in un numero *finito* di parti mediante dei punti $a'_{r-1}, a''_{r-1}, \dots$, e ciò nel modo seguente, suggerito unicamente dalle conclusioni che vogliamo stabilire più avanti.

Fissiamo dunque un intervallo non nullo (a_{r-1}, a_r).

Se è $V_y(a_{r-1}) = V_y(a_r)$, *non* suddividiamo l'intervallo (a_{r-1}, a_r).

([14]) L. TONELLI, loc. cit. in ([2]), Nota I, n.° 2, pag. 359.

Se è $V_y(a_{r-1}) \neq V_y(a_r)$, introduciamo il numero positivo e finito

$$(17) \qquad \delta'_r = \frac{2\delta}{(m-1)\,|\,V_y(a_r) - V_y(a_{r-1})\,|}.$$

Potranno allora darsi due casi:

Si ha $a_r - a_{r-1} \leq \delta'_r$. Allora *non* suddividiamo l'intervallo (a_{r-1}, a_r).

Si ha $a_r - a_{r-1} > \delta'_r$. Allora distinguiamo se è $V_y(a_{r-1}) < V_y(a_r)$ oppure l'opposto. Per fissare, supponiamo sia

$$V_y(a_{r-1}) < V_y(a_r),$$

perchè qualora fosse l'opposto si ripeterebbero ragionamenti analoghi. La funzione $V_y(x)$ nell'intervallo $\frac{a_{r-1} + a_r}{2} \leq x \leq a_r$ [15] ha un minimo assoluto $\leq V_y(a_r)$. Se tale minimo assoluto è proprio $V_y(a_r)$, *non* suddividiamo ancora l'intervallo (a_{r-1}, a_r). Se detto minimo assoluto è invece $< V_y(a_r)$, diciamo a'_{r-1} l'ascissa minima dei punti di minimo assoluto di $V_y(x)$ nell'intervallo $\frac{a_{r-1} + a_r}{2} \leq x \leq a_r$. È

$$V_y(a_{r-1}) \leq V_y(a'_{r-1}) < V_y(a_r).$$

Suddividiamo l'intervallo (a_{r-1}, a_r) nei due intervalli (a_{r-1}, a'_{r-1}) e (a'_{r-1}, a_r) pei quali è $a'_{r-1} - a_{r-1} \geq a_r - a'_{r-1}$. Se il secondo di questi due intervalli ha lunghezza $\leq \delta'_r$, *non* suddividiamo più tali due intervalli. *Se invece è* $a_r - a'_{r-1} > \delta'_r$, *su ciascuno dei due intervalli procediamo come si è fino ad ora fatto per l'intero intervallo* (a_{r-1}, a_r) *nell'ipotesi* $a_r - a_{r-1} > \delta'_r$: è da notare che si ha, allora,

$$\delta'_r < a_r - a'_{r-1} \leq a'_{r-1} - a_{r-1} < (a_r - a_{r-1}) - \delta'_r.$$

Così, riferendoci all'intervallo (a_{r-1}, a'_{r-1}), pel quale è

$$V_y(a_{r-1}) \leq V_y(a'_{r-1}),$$

consideriamo la funzione $V_y(x)$ nell'intervallo $\frac{a_{r-1} + a'_{r-1}}{2} \leq x \leq a'_{r-1}$, il cui minimo assoluto è $\leq V_y(a'_{r-1})$. Se tale minimo assoluto è proprio $V_y(a'_{r-1})$, *non* suddividiamo l'intervallo (a_{r-1}, a'_{r-1}) [ciò accade, ad esempio, se è $V_y(a_{r-1}) = V_y(a'_{r-1})$]; nel caso opposto, suddividiamo l'intervallo (a_{r-1}, a'_{r-1})

---

[15] Se invece fosse $V_y(a_{r-1}) > V_y(a_r)$, si considererebbe la funzione $V_y(x)$ nell'intervallo $a_{r-1} \leq x \leq \frac{a_{r-1} + a_r}{2}$.

mediante l'ascissa minima a''_{r-1} dei punti di minimo assoluto di $V_y(x)$ nell'intervallo $\frac{a_{r-1}+a'_{r-1}}{2} \leq x \leq a'_{r-1}$. Circa l'intervallo (a'_{r-1}, a_r), pel quale è $V_y(a'_{r-1}) < V_y(a_r)$, consideriamo la funzione $V_y(x)$ nell' intervallo $\frac{a'_{r-1}+a_r}{2} \leq x \leq a_r$, il cui minimo assoluto è $\leq V_y(a_r)$. Se tale minimo assoluto è proprio $V_y(a_r)$, ecc.. E così via.

Il procedimento ha senza dubbio *una fine*, come segue dal notare che le lunghezze degli intervalli sui quali si continua ad operare diventano successivamente minori di

$$(a_r - a_{r-1}) - \delta'_r,\ (a_r - a_{r-1}) - 2\delta'_r,\ (a_r - a_{r-1}) - 3\delta'_r, \dots .$$

I numeri distinti fra gli $a_1, a_2, \dots, a_n$ e quelli eventuali (in numero finito) introdotti, $a'_1, a''_1, \dots, a'_2, a''_2, \dots, a'_{m-1}, a''_{m-1}, \dots$ posti in ordine di grandezza crescente, si chiamino ordinatamente $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$. Risulta

$$\xi_1 = a_1 \leq \delta, \quad 1 - \xi_p = 1 - a_m \leq \delta, \quad \xi_r - \xi_{r-1} \leq 2\delta \qquad \text{per } r = 2, 3, \dots, p.$$

3°) Così pure, se è $S_x < +\infty$, ragionando analogamente sulla funzione $\{ V_x(y),\ 0 \leq y \leq 1 \}$, s'individuerà univocamente sull'intervallo $(0, 1)$ dell'asse y un sistema di punti che chiameremo $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$ pei quali risulterà

$$\eta_1 \leq \lambda, \quad 1 - \eta_q \leq \lambda, \quad \eta_s - \eta_{s-1} < 2\lambda \qquad \text{per } s = 2, 3, \dots, q.$$

4°) Suddividiamo ora il quadrato Q in rettangoli, conducendo pei punti ξ_r le parallele all'asse y e pei punti η_s le parallele all'asse x. Fra questi rettangoli consideriamo solo quelli appartenenti al rettangolo

$$(18) \qquad \{ \xi_1 \leq x \leq \xi_p,\ \eta_1 \leq y \leq \eta_q \},$$

consideriamo cioè i rettangoli

$$\rho_{r,s} \equiv \{ \xi_{r-1} \leq x \leq \xi_r,\ \eta_{s-1} \leq y \leq \eta_s \}, \qquad (r = 2, 3, \dots, p;\ s = 2, 3, \dots, q).$$

In corrispondenza a ciascun rettangolo $\rho_{r,s}$ costruiamo i due triangoli inscritti nella superficie $S \equiv \{ z = f(x, y),\ Q \}$, analogamente a quanto è fatto al n.° 3 in corrispondenza ad ogni rettangolo $R_{r,s}$, per costruire la poliedrica $T_{\delta,\lambda}$. L'insieme di tutte queste coppie di triangoli forma una poliedrica di Tonelli che indicheremo con $\tau_{\delta,\lambda}$. *Questa poliedrica* $\tau_{\delta,\lambda}$ *si proietta ortogonalmente sul piano* (x, y) *nel rettangolo* (18) *e, quando* $\delta, \lambda \to 0$, *tende (uniformemente) alla superficie* S.

Se poniamo, per brevità,

$$(19) \quad w_{\delta,x}(y) = \sum_{r=2}^{p} | f(\xi_r, y) - f(\xi_{r-1}, y) |, \quad w_{\lambda,y}(x) = \sum_{s=2}^{q} | f(x, \eta_s) - f(x, \eta_{s-1}) |,$$

abbiamo che le quantità $\tau_{\delta,\lambda,x}$ e $\tau_{\delta,\lambda,y}$, rispettivamente analoghe a $T_{\delta,\lambda,x}$ e

$T_{\delta,\lambda,y}$, sono date da

$$\tau_{\delta,\lambda,x} = \sum_{s=2}^{q} \frac{1}{2} \{ w_{\delta,x}(\eta_{s-1}) + w_{\delta,x}(\eta_s) \} (\eta_s - \eta_{s-1}), \tag{20}$$

$$\tau_{\delta,\lambda,y} = \sum_{r=2}^{p} \frac{1}{2} \{ w_{\lambda,y}(\xi_{r-1}) + w_{\lambda,y}(\xi_r) \} (\xi_r - \xi_{r-1}). \tag{21}$$

7. Gli integrali S_x e S_y considerati come limiti. — *Le due somme* $\tau_{\delta,\lambda,x}$ *e* $\tau_{\delta,\lambda,y}$, *quando* $\underset{\frown}{\delta, \lambda} \to 0$, *hanno dei limiti (finiti o infiniti), e tali limiti sono proprio gli integrali* $\mathrm{S_x}$ *e* $\mathrm{S_y}$ *del* TONELLI, *rispettivamente; si ha cioè*

$$S_x = \lim_{\underset{\frown}{\delta, \lambda} \to 0} \tau_{\delta,\lambda,x}, \quad S_y = \lim_{\underset{\frown}{\delta, \lambda} \to 0} \tau_{\delta,\lambda,y}. \tag{22}$$

Dimostrazione. — *a)* Poichè [n.° 6] la poliedrica $\tau_{\delta,\lambda}$, quando $\underset{\frown}{\delta, \lambda} \to 0$, tende (uniformemente) verso la superficie continua S, si ha, in base al lemma di TONELLI del n.° 1, *c)*,

$$S_x \leq \min_{\underset{\frown}{\delta, \lambda} \to 0} \lim \tau_{\delta,\lambda,x}, \quad S_y \leq \min_{\underset{\frown}{\delta, \lambda} \to 0} \lim \tau_{\delta,\lambda,y}. \tag{23}$$

b) Se è $S_x = +\infty$, dalla prima delle (23) segue immediatamente la prima delle (22); ed analogamente se è $S_y = +\infty$ dalla seconda delle (23) segue immediatamente la seconda delle (22).

c) Se è invece, ad esempio, $S_y < +\infty$, concluderemo che vale ancora la seconda delle (22), dimostrando che, allora, oltre alla seconda delle (23) si ha

$$S_y \geq \max_{\underset{\frown}{\delta, \lambda} \to 0} \lim \tau_{\delta,\lambda,y}. \tag{24}$$

Per provare, dunque, la (24), osserviamo che — fissata una poliedrica $\tau_{\delta,\lambda}$ — risulta

$$S_y = \int_0^1 V_y(x)dx \geq \sum_{r=2}^{m} \int_{a_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx, \tag{25}$$

dove gli a_r sono i punti introdotti al n.° 6, 2°), e nell'ultimo membro di (25) possono scartarsi i termini, eventuali, corrispondenti ad intervalli (a_{r-1}, a_r) di lunghezza nulla. Fissiamo, poi, un intervallo *non nullo* (a_{r-1}, a_r) e minoriamo il corrispondente integrale

$$\int_{a_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx.$$

Se è $V_y(a_{r-1}) = V_y(a_r)$, l'intervallo (a_{r-1}, a_r) coincide [n.° 6] con *uno* degli intervalli $(\xi_1, \xi_2), \dots, (\xi_{p-1}, \xi_p)$, e la detta minorazione è la seguente:

$$(26) \qquad \int_{a_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx \geq V_y(a_{r-1}) \cdot (a_r - a_{r-1}) = \frac{1}{2} \{ V_y(a_{r-1}) + V_y(a_r) \} (a_r - a_{r-1}).$$

Se è $V_y(a_{r-1}) \neq V_y(a_r)$, l'intervallo (a_{r-1}, a_r) coincide [n.° 6] con *uno* od anche con *più* intervalli (consecutivi) $(\xi_1, \xi_2), \dots, (\xi_{p-1}, \xi_p)$. Supponiamo che tali intervalli consecutivi si ottengano suddividendo l'intervallo (a_{r-1}, a_r) mediante i punti

$$a_{r-1} = \alpha_0^{(r)} < \alpha_1^{(r)} < \dots < \alpha_{m_r-1}^{(r)} < \alpha_{m_r}^{(r)} = a_r.$$

Allora, vale per il detto integrale la minorazione seguente:

$$(27) \quad \int_{a_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx \geq \sum_{k=1}^{m_r} \frac{1}{2} \{ V_y(\alpha_{k-1}^{(r)}) + V_y(\alpha_k^{(r)}) \} (\alpha_k^{(r)} - \alpha_{k-1}^{(r)}) - \frac{1}{2} | V_y(a_r) - V_y(a_{r-1}) | \delta'_r,$$

dove δ'_r è il numero dato da (17); e ciò viene provato nel seguito, a *d)*.

Da (25), tenendo conto di (26) e (27), segue allora:

$$S_y \geq \sum_{r=2}^{p} \frac{1}{2} \{ V_y(\xi_{r-1}) + V_y(\xi_r) \} (\xi_r - \xi_{r-1}) - \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{m}{}' | V_y(a_r) - V_y(a_{r-1}) | \delta'_r,$$

dove la somma accentata nel secondo membro è estesa solo agli r tali che sia $a_r - a_{r-1} \neq 0$ e $V_y(a_r) - V_y(a_{r-1}) \neq 0$. In virtù dell'espressione di δ'_r, data da (17), si ha quindi anche

$$S_y \geq \sum_{r=2}^{p} \frac{1}{2} \{ V_y(\xi_{r-1}) + V_y(\xi_r) \} (\xi_r - \xi_{r-1}) - \delta,$$

ed a più forte ragione, tenendo presente la seconda delle (19),

$$S_y \geq \sum_{r=2}^{p} \frac{1}{2} \{ w_{\lambda,y}(\xi_{r-1}) + w_{\lambda,y}(\xi_r) \} (\xi_r - \xi_{r-1}) - \delta,$$

cioè, per la (21),

$$S_y \geq \tau_{\delta,\lambda,y} - \delta,$$

da cui segue subito la (24). Vale quindi la seconda delle (22).

In modo del tutto analogo si ragiona, se è $S_x < +\infty$, per provare che vale pure la prima delle (22).

d) Resta ancora da dimostrare la (27). A tale scopo distinguiamo diversi casi.

Caso I. — Il fissato intervallo non nullo (a_{r-1}, a_r) coincide con *uno* degli intervalli $(\xi_1, \xi_2), \dots, (\xi_{p-1}, \xi_p)$. Allora la (27) da dimostrare si riduce alla seguente

$$\int_{a_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx \geq \frac{1}{2} \{ V_y(a_{r-1}) + V_y(a_r) \} (a_r - a_{r-1}) - \frac{1}{2} | V_y(a_r) - V_y(a_{r-1}) | \delta'_r . \tag{28}$$

Poichè si ha $V_y(a_{r-1}) \neq V_y(a_r)$, il caso presente può aversi in due eventualità:

1.ª) Si ha $a_r - a_{r-1} \leq \delta'_r$. Allora, nell'ipotesi $V_y(a_{r-1}) < V_y(a_r)$, risulta

$$\int_{a_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx \geq V_y(a_{r-1}) \cdot (a_r - a_{r-1}) =$$

$$= \frac{1}{2} \{ V_y(a_{r-1}) + V_y(a_r) \} (a_r - a_{r-1}) - \frac{1}{2} \{ V_y(a_r) - V_y(a_{r-1}) \} (a_r - a_{r-1})$$

e quindi vale la (28). Se invece si ha $V_y(a_{r-1}) > V_y(a_r)$, risulta analogamente

$$\int_{a_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx \geq V_y(a_r) \cdot (a_r - a_{r-1}) =$$

$$= \frac{1}{2} \{ V_y(a_{r-1}) + V_y(a_r) \} (a_r - a_{r-1}) - \frac{1}{2} \{ V_y(a_{r-1}) - V_y(a_r) \} (a_r - a_{r-1}),$$

e quindi vale ancora la (28).

2.ª) Si ha $a_r - a_{r-1} > \delta'_r$; inoltre, supposto $V_y(a_{r-1}) < V_y(a_r)$, il minimo assoluto di $V_y(x)$ nell'intervallo $\frac{a_{r-1} + a_r}{2} \leq x \leq a_r$ è dato da $V_y(a_r)$. Allora risulta

$$\int_{a_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx \geq V_y(a_{r-1}) \frac{a_r - a_{r-1}}{2} + V_y(a_r) \frac{a_r - a_{r-1}}{2} = \frac{1}{2} \{ V_y(a_{r-1}) + V_y(a_r) \} (a_r - a_{r-1})$$

e quindi, a fortiori, vale la (28). Se si suppone $V_y(a_{r-1}) > V_y(a_r)$, dovrà aversi che il minimo assoluto di $V_y(x)$ nell'intervallo $a_{r-1} \leq x \leq \frac{a_{r-1} + a_r}{2}$ è dato da $V_y(a_{r-1})$, ed allora risulta la stessa conclusione.

Caso II. — Il fissato intervallo non nullo (a_{r-1}, a_r) coincide con *due* (consecutivi) degli intervalli $(\xi_1, \xi_2), \dots, (\xi_{p-1}, \xi_p)$. Allora, se diciamo (a_{r-1}, a'_{r-1})

e (a'_{r-1}, a_r) tali due intervalli, la formula (27) da dimostrare si riduce alla seguente

$$\int_{a_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx \geq \frac{1}{2}\{V_y(a_{r-1}) + V_y(a'_{r-1})\}(a'_{r-1} - a_{r-1}) + \tag{29}$$
$$+ \frac{1}{2}\{V_y(a'_{r-1}) + V_y(a_r)\}(a_r - a'_{r-1}) - \frac{1}{2}|V_y(a_r) - V_y(a_{r-1})|\delta'_r.$$

Nell'ipotesi $V_y(a_{r-1}) < V_y(a_r)$, risulta [n.° 6]

$$V_y(a_{r-1}) \leq V_y(a'_{r-1}) < V_y(a_r).$$

e possono darsi due eventualità:

1.ª) Si ha $a_r - a'_{r-1} \leq \delta'_r$. Allora, per la definizione di a'_{r-1}, abbiamo

$$\int_{a_{r-1}}^{a'_{r-1}} V_y(x)dx \geq V_y(a_{r-1})\left(\frac{a_{r-1} + a_r}{2} - a_{r-1}\right) + V_y(a'_{r-1})\left(a'_{r-1} - \frac{a_{r-1} + a_r}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\{V_y(a_{r-1}) + V_y(a'_{r-1})\}(a'_{r-1} - a_{r-1}) - \frac{1}{2}\{V_y(a'_{r-1}) - V_y(a_{r-1})\}(a_r - a'_{r-1}),$$

$$\int_{a'_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx \geq V_y(a'_{r-1}) \cdot (a_r - a'_{r-1}) =$$
$$= \frac{1}{2}\{V_y(a'_{r-1}) + V_y(a_r)\}(a_r - a'_{r-1}) - \frac{1}{2}\{V_y(a_r) - V_y(a'_{r-1})\}(a_r - a'_{r-1}),$$

dalle quali, per somma e tenendo presente che è $a_r - a'_{r-1} \leq \delta'_r$, si conclude con la (29).

2.ª) Si ha $a_r - a'_{r-1} > \delta'_r$. Allora, poichè gli intervalli (a_{r-1}, a'_{r-1}) e (a'_{r-1}, a_r) *non* sono stati ulteriormente suddivisi, saranno certamente soddisfatte le seguenti disuguaglianze, analoghe a (28),

$$\int_{a_{r-1}}^{a'_{r-1}} V_y(x)dx \geq \frac{1}{2}\{V_y(a_{r-1}) + V_y(a'_{r-1})\}(a'_{r-1} - a_{r-1}) - \frac{1}{2}\{V_y(a'_{r-1}) - V_y(a_{r-1})\}\delta'_r,$$

$$\int_{a'_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx \geq \frac{1}{2}\{V_y(a'_{r-1}) + V_y(a_r)\}(a_r - a'_{r-1}) - \frac{1}{2}\{V_y(a_r) - V_y(a'_{r-1})\}\delta'_r,$$

le quali sommate membro a membro dànno ancora la (29).

Nell'ipotesi $V_y(a_{r-1}) > V_y(a_r)$ si ragiona analogamente.

Caso III. — Il fissato intervallo non nullo (a_{r-1}, a_r) coincide con *tre* (consecutivi) degli intervalli $(\xi_1 . \xi_2), \ldots, (\xi_{p-1}, \xi_p)$. Ciò accade quando dei due intervalli (a_{r-1}, a'_{r-1}) e (a'_{r-1}, a_r), considerati nel Caso II, uno è stato suddiviso in due intervalli e l'altro **no.** Fissiamo sia stato suddiviso il primo intervallo nei due (a_{r-1}, a''_{r-1}) e (a''_{r-1}, a'_{r-1}). Allora la formula (27) da dimostrare si riduce alla seguente

$$(30)\qquad \int_{a_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx \geq \frac{1}{2}\{V_y(a_{r-1}) + V_y(a''_{r-1})\}(a''_{r-1} - a_{r-1}) +$$
$$+\frac{1}{2}\{V_y(a''_{r-1}) + V_y(a'_{r-1})\}(a'_{r-1} - a''_{r-1}) + \frac{1}{2}\{V_y(a'_{r-1}) + V_y(a_r)\}(a_r - a'_{r-1}) -$$
$$-\frac{1}{2}\{V_y(a_r) - V_y(a_{r-1})\}\delta'_r.$$

Nell'ipotesi $V_y(a_{r-1}) < V_y(a_r)$, risulta [n.° 6]

$$V_y(a_{r-1}) \leq V_y(a''_{r-1}) < V_y(a'_{r-1}) < V_y(a_r).$$

Relativamente all'intervallo (a_{r-1}, a'_{r-1}) sarà soddisfatta la seguente disuguaglianza, analoga a (29),

$$\int_{a_{r-1}}^{a'_{r-1}} V_y(x)dx \geq \frac{1}{2}\{V_y(a_{r-1}) + V_y(a''_{r-1})\}(a''_{r-1} - a_{r-1}) +$$
$$+\frac{1}{2}\{V_y(a''_{r-1}) + V_y(a'_{r-1})\}(a'_{r-1} - a''_{r-1}) - \frac{1}{2}\{V_y(a'_{r-1}) - V_y(a_{r-1})\}\delta'_r,$$

e relativamente all'intervallo (a'_{r-1}, a_r) sarà soddisfatta la seguente disuguaglianza, analoga a (28),

$$\int_{a'_{r-1}}^{a_r} V_y(x)dx \geq \frac{1}{2}\{V_y(a'_{r-1}) + V_y(a_r)\}(a_r - a'_{r-1}) - \frac{1}{2}\{V_y(a_r) - V_y(a'_{r-1})\}\delta'_r.$$

Sommando queste due ultime disuguaglianze, s'ottiene la (30).

Nell'ipotesi $V_y(a_{r-1}) > V_y(a_r)$ il ragionamento è analogo.

E così si continua nei casi successivi.

8. **Alcune osservazioni.** — Terminiamo con due osservazioni che saranno applicate in altro lavoro.

a) Indichiamo con $\sigma_{r,\delta,\lambda}$ la porzione della poliedrica $\tau_{\delta,\lambda}$ proiettantesi ortogonalmente, sul piano (x, y), nel rettangolo $\{\xi_{r-1} \leq x \leq \xi_r,\ \eta_1 \leq y \leq \eta_q\}$, e indichiamo con $\sigma'_{s,\delta,\lambda}$ la porzione di $\tau_{\delta,\lambda}$ proiettantesi ortogonalmente invece nel rettangolo $\{\xi_1 \leq x \leq \xi_p,\ \eta_{s-1} \leq y \leq \eta_s\}$. Proviamo che *se è* $S_x < +\infty$, *le quantità* $\sigma_{r,\delta,\lambda,x}$ *e* $\sigma'_{s,\delta,\lambda,x}$ (il cui significato è chiaro per ciò che precede) *quando* $\delta, \lambda \to 0$ *hanno limite nullo; così pure, se è* $S_y < +\infty$, *le quantità* $\sigma_{r,\delta,\lambda,y}$ *e* $\sigma'_{s,\delta,\lambda,y}$ *quando* $\delta, \lambda \to 0$ *hanno limite nullo.* Sarà sufficiente, ad esempio, di provare tale affermazione per $\sigma_{2,\delta,\lambda}$. A tale scopo, sia $\tau_{2,\delta,\lambda}$ la poliedrica ottenuta da $\tau_{\delta,\lambda}$ sopprimendovi $\sigma_{2,\delta,\lambda}$. Per $\tau_{2,\delta,\lambda}$ si può ripetere, a passo a passo, la dimostrazione fatta nel n.° 7 per $\tau_{\delta,\lambda}$, e concludere

$$S_x = \lim_{\delta,\lambda \to 0} \tau_{2,\delta,\lambda,x}, \quad S_y = \lim_{\delta,\lambda \to 0} \tau_{2,\delta,\lambda,y}.$$

Ne segue che $\sigma_{2,\delta,\lambda,x} = \tau_{\delta,\lambda,x} - \tau_{2,\delta,\lambda,x}$, qualora sia $S_x < +\infty$, ha limite quando $\delta, \lambda \to 0$ e tale limite è dato da $S_x - S_x = 0$. Analogamente per $\sigma_{2,\delta,\lambda,y}$. Ciò è, dunque, quanto basta provare.

b) Considerata una poliedrica $\tau_{\delta,\lambda}$, nel rettangolo $\{\xi_1 \leq x \leq \xi_p, \; \eta_1 \leq y \leq \eta_q\}$, su cui si proietta ortogonalmente $\tau_{\delta,\lambda}$, fissiamo un rettangolo

$$\bar{R} \equiv \{\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2, \; \beta_1 \leq y \leq \beta_2\}$$

e siano $\bar{S}$ e $\bar{\tau}_{\delta,\lambda}$ le porzioni di S e $\tau_{\delta,\lambda}$, rispettivamente, proiettantesi ortogonalmente su $\bar{R}$. Dato poi a $\bar{S}_x$, $\bar{S}_y$, $\bar{\tau}_{\delta,\lambda,x}$ e $\bar{\tau}_{\delta,\lambda,y}$ il significato ormai chiaro per ciò che precede, dimostriamo che *se è* $S_x < +\infty$, *risulta certamente*

$$\bar{S}_x = \lim_{\delta,\lambda \to 0} \bar{\tau}_{\delta,\lambda,x}; \tag{31}$$

così pure, se è $S_y < +\infty$, *risulta*

$$\bar{S}_y = \lim_{\delta,\lambda \to 0} \bar{\tau}_{\delta,\lambda,y}. \tag{32}$$

Invero, fra i rettangoli $\rho_{r,s}$ componenti il rettangolo $\{\xi_1 \leq x \leq \xi_p, \; \eta_1 \leq y \leq \eta_q\}$ [cfr. n.° 6] consideriamo tutti quelli completamente appartenenti al rettangolo $\bar{R}$: tali rettangoli (che esisteranno certamente se, come supponiamo, δ e λ sono abbastanza piccoli) formono un rettangolo R' appartenente a $\bar{R}$. Sia poi $\tau'_{\delta,\lambda}$ la porzione della poliedrica $\tau_{\delta,\lambda}$ proiettantesi ortogonalmente su R'. La dimostrazione fatta nel n.° 7 per la poliedrica $\tau_{\delta,\lambda}$, relativamente alla superficie S, si può ripetere, a passo a passo, per la poliedrica $\tau'_{\delta,\lambda}$, relativamente alla superficie $\bar{S}$. Si conclude quindi

$$\bar{S}_x = \lim_{\delta,\lambda \to 0} \tau'_{\delta,\lambda,x}, \quad \bar{S}_y = \lim_{\delta,\lambda \to 0} \tau'_{\delta,\lambda,y}. \tag{33}$$

Ma le due poliedriche $\tau'_{\delta,\lambda}$ e $\bar{\tau}_{\delta,\lambda}$ o coincidono o differiscono per porzioni appartenenti a quattro striscie poliedriche (al massimo) del tipo $\sigma_{r,\delta,\lambda}$ e $\sigma'_{s,\delta,\lambda}$ considerate ad *a)*. Per la conclusione fatta ad *a)*, se è $S_x < +\infty$ dalla prima delle (33) segue la (31), e così pure se è $S_y < +\infty$ dalla seconda delle (33) segue la (32).