Ricerche sul comportamento asintotico delle soluzioni delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali.

Memoria di SANDRO FAEDO (a Roma).

Sunto. - *Si dimostra come dal Calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito, recentemente sviluppato dall' A., si possano dedurre classiche proposizioni asintotiche per le soluzioni delle equazioni differenziali e stabilirne delle nuove.*

Ad un mio lavoro ([1]), in cui davo un contributo al Calcolo delle Variazioni per integrali su un intervallo infinito, M. PICONE ha fatto seguire una Sua Nota ([2]), nella quale osservava come dal mio risultato si potesse dedurre immediatamente una notevole proprietà asintotica degli integrali di una vasta classe di equazioni differenziali.

Ciò si comprende quando si rifletta che il Calcolo delle Variazioni porta fra l'altro a stabilire le proprietà delle soluzioni delle equazioni di EULERO; nel caso da me studiato, essendo il campo d'integrazione infinito, si ottengono appunto proprietà di tali soluzioni per $x \to \infty$.

Successivamente ([3]) io ho sviluppato il Calcolo delle Variazioni per gli integrali

$$I_\infty = \int_a^{+\infty} f\left[x, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots, \frac{d^m}{dx^m} y_1(x), \dots, \frac{d^m}{dx^m} y_n(x)\right] dx,$$

([1]) S. FAEDO, *Contributo alla sistemazione teorica del metodo variazionale per l'analisi dei problemi di propagazione*, « Annali R. Scuola Normale di Pisa », serie II, vol. X, 1941, pagg. 139-152.

([2]) M. PICONE, Nota al lavoro cit. in ([1]), ibidem, pagg. 153-155.

([3]) S. FAEDO, *L'unicità delle successive approssimazioni nel metodo variazionale*, « Memorie della R. Accad. d'Italia », vol. XIII. (5), pagg. 679-707, 1942; *Proprietà asintotiche delle estremanti degli integrali a campo di integrazione illimitato*, « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », serie II, vol. XI, 1942, pagg. 119-131; *Sull'estremo assoluto degli integrali estesi a un campo illimitato*, « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. XI, 1942, pagg. 223-234. I risultati di questi lavori e di quello citato in ([1]), con l'aggiunta di ulteriori contributi, sono esposti nella Memoria: *Il Calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito*, inserita nelle « Commentationes » dell'Accademia Pontificia, 1943. Un riassunto, dallo stesso titolo, trovasi nei « Rend. della R. Accad. d'Italia », 1943. Tale Memoria dell'Accademia Pontificia verrà in seguito indicata con « Memoria A. P. ».

ed ho approfondito sopratutto gli argomenti che presentavano nuovi problemi e nuove difficoltà rispetto alla analoga teoria per gli integrali su un intervallo finito; e *in tutte tali questioni è essenziale lo studio del comportamento asintotico delle funzioni in esame.*

In tali ricerche io ho seguito il metodo diretto del TONELLI e quindi l'esistenza e le proprietà delle estremanti si provano direttamente senza fare ricorso alle equazioni differenziali.

Dai miei risultati si possono quindi dedurre delle proposizioni sulle proprietà asintotiche delle soluzioni di vaste classi di equazioni e sistemi di equazioni differenziali.

Ciò viene rapidamente esposto in questa Nota, *sia per ottenere in questo campo dei risultati nuovi che potranno interessare, ma sopratutto per mostrare come lo studio dell'integrale* I_∞ *col metodo diretto della Scuola Italiana porti a stabilire per le estremanti delle proprietà differenziali all'infinito assai riposte,* il cui conseguimento riuscirebbe altrimenti assai difficile.

Richiamati (§ 1) alcuni risultati su gli integrali I_∞, mostro (§ 2) come per questa nuova via si riottengano alcune ormai classiche proposizioni asintotiche per le equazioni lineari del secondo ordine e come se ne possano trovare delle nuove. Nel § 3 mi occupo delle equazioni differenziali autoaggiunte di ordine $2n$ dimostrando, per le soluzioni di tali equazioni, delle proprietà asintotiche che ritengo non siano state prima d'ora altrove conseguite. Dò poi (§ 4) alcuni teoremi di unicità quando siano state assegnate per le soluzioni opportune condizioni all'infinito e mi occupo (§ 5) delle equazioni non lineari. Dimostro per esse alcune proposizioni e altre ne indico che si possono ottenere in modo analogo e sulle quali non mi soffermo per non rendere troppo lungo il presente lavoro.

Osservo infine (§ 6) che quanto ho provato per le equazioni sussiste pure per i sistemi di equazioni differenziali.

§ 1. Cenni sul Calcolo delle Variazioni per gli integrali I_∞.

1. Si consideri uno spazio ad $mn+1$ dimensioni riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali

$$[x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m-1)}, \dots, y_n^{(m-1)}].$$

Diremo campo A la totalità dei punti di tale spazio per cui è $x \geq \omega$. Per ogni punto di A ed ogni valore finito di $y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ è definita una funzione

$$f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}),$$

continua rispetto a $x, y_1, y_2, \ldots, y_n^{(m)}$ insieme alle sue derivate

$$f_{y_i^{(m)}, y_j^{(m)}} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Una curva C appartenente ad un S_{n+1} e di equazioni

$$y_1 = y_1(x), \ldots, \quad y_n = y_n(x), \qquad \omega \leq \alpha \leq x < +\infty,$$

si dice una *curva ordinaria* se:

le $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ sono assolutamente continue in ogni intervallo finito $(\alpha, \alpha + X)$, con $X > 0$, insieme alle loro derivate dei primi $m - 1$ ordini;

esiste finito l'integrale (nel senso del LEBESGUE)

$$\int_{\alpha}^{\alpha+X} f[x, y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots, y_1^{(m)}(x), \ldots, y_n^{(m)}(x)]dx;$$

esiste finito l'integrale generalizzato

$$I_\infty = \lim_{X \to +\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+X} f[x, y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots, y_1^{(m)}(x), \ldots, y_n^{(m)}(x)]dx.$$

Indicheremo con K_1 la classe di tutte le curve ordinarie per cui è

$$y_i^{(k)}(\alpha) = c_{i,k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

dove le $c_{i,k}$ sono delle costanti.

Con K_2 indicheremo invece la classe di tutte le curve ordinarie definite sull'intervallo $(\alpha, +\infty)$.

2. Enunciamo alcuni teoremi di esistenza del minimo assoluto dell'integrale I_∞, nelle classi K_1 e K_2 ([4]).

TEOREMA I°: *Se la* $f(x, y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)})$ *è un polinomio di secondo grado nelle variabili* $y_1, \ldots, y_n^{(m)}$ *i cui coefficienti sono funzioni di* x *a quadrato integrabile in ogni intervallo finito; se per ogni* $X > 0$ *si può determinare un* $\tau > 0$ *tale che sia per tutti i punti di* A *con* $\alpha \leq x \leq \alpha + X$ *e per ogni valore finito di* $y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)}$

$$\sum_{i,j}^{1\ldots n} v_i v_j f_{y_i^{(m)}, y_j^{(m)}} \geq \tau \sum_{i=1}^{n} v_i^2,$$

per ogni valore delle variabili v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

([4]) S. FAEDO, « Memoria A. P. », Cap. II, n. 5.

se inoltre esiste una funzione $\psi(x)$ *integrabile in* $(\alpha, +\infty)$ *per cui sia*

$$f[x, y_1, \dots, y_n^{(m)}] \geq \psi(x);$$

allora nella classe K_1 *(o* K_2*) esiste il minimo assoluto di* I_∞.

TEOREMA II° (4'): *Se l'integrale* I_∞ *è quasi regolare positivo; se esiste una funzione* $\psi(x)$ *definita e continua per ogni* $x \geq \omega$, *integrabile su* $(\omega, +\infty)$, *tale che sia in tutti i punti di* A *e per ogni valore finito di* $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$

$$f[x, y_1, \dots, y_n^{(m)}] \geq \psi(x);$$

se in corrispondenza ad ogni numero h, *con* $h > \omega$ *esiste una funzione* $\Phi_h(z)$ *definita in* $(0, +\infty)$, *inferiormente limitata, tale che* $\dfrac{\Phi_h(z)}{z} \to +\infty$ *per* $z \to +\infty$ *e per la quale si abbia nei punti di* A *per cui è* $x \leq h$

$$f[x, y_1, \dots, y_n^{(m)}] \geq \Phi_h\left[\sqrt{y_1^{(m)2} + \dots + y_n^{(m)2}}\right];$$

allora nella classe K_1 *(o* K_2*) esiste il minimo assoluto di* I_∞.

Nella « Memoria A. P. » vengono dati numerosi altri teoremi di esistenza del minimo assoluto, che qui non riportiamo per ragioni di brevità; *taluni di tali teoremi permettono di asserire che l'estremante che minimizza* I_∞ *in* K_1 *o* K_2 *è limitata su tutto l'intervallo* $(\alpha, +\infty)$.

TEOREMA III° (5): *Si abbiano, per* $x \geq \alpha$, *due funzioni continue e non negative* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$, *tali che esistano un* $\sigma > 0$ *ed un* $x_0 > \alpha$ *in modo che si abbia*

$$\varphi(x) \geq \sigma, \quad \psi(x) \geq \sigma \qquad \textit{per } x \geq x_0.$$

Se $y(x)$ *è una funzione assolutamente continua in ogni intervallo finito e tale che esista finito*

$$\int_a^{+\infty} \{ \varphi(x) y^2(x) + \psi(x) y'^2(x) \} \, dx,$$

necessariamente è

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0.$$

(4') Nota aggiunta durante la correzione delle bozze. In un lavoro successivo alla « Memoria A. P. », *Un nuovo teorema di esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali su un intervallo infinito*, « Boll. U. M. I. », 1943, è data una larga estensione del teorema II.

(5) S. FAEDO, « Memoria A. P. », Cap. VI, n. 2.

3. Ogni curva ordinaria $C[y_1(x), \dots, y_n(x)]$ e tale che siano continue su ogni intervallo finito le derivate $\frac{d^r}{dx^r} y_i$ $(i = 1, \dots, n)$ fino all'ordine m e che soddisfi al sistema di equazioni di EULERO

$$f_{y_i} - \frac{d}{dx}\left[f_{y_i'} - \frac{d}{dx}\left\{f_{y_i''} - \dots - \frac{d}{dx}\left(f_{y_i^{(m-1)}} - \frac{d}{dx} f_{y_i^{(m)}}\right) \dots \right\}\right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots . n),$$

dicesi una *estremale* relativa alla $f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)})$.

Se la curva $C[y_1(x), \dots, y_n(x)]$ ha le derivate $\frac{d^r}{dx^r} y_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ continue in ogni intervallo finito fino all'ordine m e rende minimo I_∞ nella classe K_1 (o K_2) essa è una estremale.

Data la curva ordinaria $C[y_1(x), \dots, y_n(x)]$ si dice *variazione prima della sua ordinata* $y_i(x)$ una qualunque funzione δy_i definita per ogni $x \geq \alpha$ e tale che la curva $C_1(y_j = y_j(x),\ j \neq i;\ y_i = y_i(x) + \delta y_i,\ j = i)$ sia ancora una curva ordinaria.

Se esistono finiti gli integrali

$$\int_\alpha^{+\infty} f_{y_i} \delta y_i dx, \quad \int_\alpha^{+\infty} f_{y_i'} \delta y_i' dx, \dots, \quad \int_\alpha^{+\infty} f_{y_i^{(m)}} \delta y_i^{(m)} dx \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

si dice *variazione prima dell'integrale* I_∞ sulla curva ordinaria C l'espressione

$$\delta I_\infty = \int_\alpha^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (f_{y_i} \delta y_i + \dots + f_{y_i^{(m)}} \delta_{y_i^{(m)}}) \right\} dx.$$

Se le variazioni δy_i sono tali che per $x = \alpha$ sia

$$\delta y_i = \delta y_i' = \dots = \delta y_i^{(m-1)} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

si diranno *variazioni smorzate nel primo estremo* e la relativa variazione di I_∞ si dirà *variazione prima smorzata nel primo estremo* e si indicherà con $\bar{\delta} I_\infty$.

Se inoltre le variazioni δy_i si annullano anche per $x \to +\infty$ insieme alle $\delta y_i^{(r)}$ $[i = 1, 2, \dots, n;\ r = 0, 1, \dots, m-1]$ si diranno *variazioni smorzate* e la variazione che viene ad avere I_∞ si indicherà con $\bar{\bar{\delta}} I_\infty$.

Non è sempre vero — come invece accade per gli integrali su un intervallo finito — *che su una estremale*, che sia una curva ordinaria, *sia identicamente nulla la variazione smorzata prima.*

Ho però dato delle condizioni [6] sotto le quali tale fatto continua a sussistere.

---

[6] S. FAEDO, « Memoria A. P. », Cap. III, § 2.

Nella « Memoria A. P. » (Cap. III, § 3) ho pure dato delle condizioni sufficienti a garantire che una estremante sia una estremale.

4. Ecco alcuni teoremi di unicità per le estremali verificanti alcune condizioni asintotiche (« Memoria A. P. », Cap. IV):

Teorema IV°: *Se per ogni punto del campo* A *e per ogni valore finito di* $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ *la forma quadratica nelle variabili* w_i $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\sum_{i,j}^{1\dots n} w_i w_j f_{y_i^{(m)}, y_j^{(m)}}[x, y_1, \dots, y_n^{(m)}]$$

è sempre definita positiva e la forma quadratica in $v_{i,r}$ $(i = 1, \dots, m;\ r = 0, 1, \dots, m)$

$$\sum_{r,s}^{0\dots m} \sum_{i,j}^{1\dots n} v_{i,r} v_{j,s} f_{y_i^{(r)}, y_j^{(s)}}[x, y_1, \dots, y_n^{(m)}]$$

è sempre semidefinita positiva, allora esiste al più una sola estremale relativa alla $f[x, y_1, \dots, y_n^{(m)}]$ *che appartiene a* K_1 *(o a* K_2*) e su cui è nulla la variazione prima smorzata nel primo estremo.*

Per le estremali su cui è nulla identicamente la variazione prima smorzata sussiste il

Teorema V°: *La* $f[x, y_1, \dots, y_n^{(m)}]$ *soddisfi alle ipotesi del teorema IV. Allora assegnate ad arbitrio le funzioni*

$$\varphi_{i,r}^{(x)} \qquad [i = 1, 2, \dots, n;\ r = 0, \dots, m-1]$$

continue su ogni intervallo finito, esiste al più una estremale $C[y_1(x), \dots, y_n(x)]$ *su cui è nulla la variazione prima smorzata e tale che sia*

$$\lim_{x \to +\infty} [y_i^{(r)} - \varphi_{i,r}] = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n;\ r = 0, 1, \dots, m-1).$$

5. Supponiamo che il sistema di equazioni di Eulero relativo ad I_∞ sia lineare. Si ha allora (« Memoria A. P. », Cap. V, § 3) che l'estremale $\overline{C}$ che rende minimo o massimo I_∞ in K_1 (o K_2) è tale che su essa si annulla identicamente la variazione prima δI_∞ di I_∞ per ogni $\delta\overline{C}$ tale che $\overline{C} + \delta\overline{C}$ sia ancora una curva di K_1 (o K_2).

Consideriamo dapprima la classe K_1. Allora l'essere $\delta I_\infty \equiv 0$ porta alle seguenti condizioni per $x = \alpha$ e per $x \to +\infty$.

Per $x = \alpha$ è

$$y_i^{(k)}(\alpha) = c_{i,k}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n;\ k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Per $x \to +\infty$ è

$$\text{(1)} \quad \lim_{x \to +\infty} \Big\{ \delta\bar{y}_i\Big(f_{\bar{y}_i'} - \frac{d}{dx} f_{\bar{y}_i''} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} f_{\bar{y}_i^{(m)}}\Big) + \\ + \delta\bar{y}_i'\Big(f_{\bar{y}_i''} - \frac{d}{dx} f_{\bar{y}_i'''} + \dots + (-1)^{m-2} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} f_{\bar{y}_i^{(m)}}\Big) + \\ + \dots + \delta\bar{y}_i^{(m-1)} f_{\bar{y}_i^{(m)}} \Big\} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dove le funzioni $\delta\bar{y}_1, \dots, \delta\bar{y}_n$ sono tali che la curva $\bar{C} + \delta\bar{C} \equiv (\bar{y}_1 + \delta\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n + \delta\bar{y}_n)$ appartenga ancora a K_1.

Se invece si considera la classe K_2 allora si hanno le stesse condizioni per $x \to +\infty$ mentre invece per $x = \alpha$ si hanno le condizioni di trasversalità

$$\begin{cases} f_{\bar{y}_i'} - \dfrac{d}{dx} f_{\bar{y}_i''} + \dots + (-1)^{m-1} \dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} f_{\bar{y}_i^{(m)}} = 0, \\ f_{\bar{y}_i''} - \dfrac{d}{dx} f_{\bar{y}_i'''} + \dots + (-1)^{m-2} \dfrac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} f_{\bar{y}_i^{(m)}} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{\bar{y}_i^{(m)}} = 0. \end{cases}$$

Se, ad esempio, si possono porre per $\delta\bar{y}_1, \dots, \delta\bar{y}_n$ dei polinomi di grado $m - 1$, allora dalle (1) segue che la $\bar{C}$ soddisfa alle condizioni di trasversalità all'infinito

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \Big[f_{\bar{y}_i'} - \dfrac{d}{dx} f_{\bar{y}_i''} + \dots + (-1)^{m-1} \dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} f_{\bar{y}_i^{(m)}}\Big] = 0, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \Big[f_{\bar{y}_i''} - \dfrac{d}{dx} f_{\bar{y}_i'''} + \dots + (-1)^{m-2} \dfrac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} f_{\bar{y}_i^{(m)}}\Big] = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f_{\bar{y}_i^{(m)}} = 0. \end{cases}$$

Ho dimostrato [II° lavoro cit. in ([3])] che non sempre dalle (1) si possono dedurre le (2), come invece succede per gli integrali su un intervallo finito.

Se il sistema delle equazioni di Eulero non è lineare ho provato (« Memoria A. P. », Cap. V, § 5) che non sussistono in generale più le (1). In tal caso si vengono ad avere delle condizioni di tipo particolare a seconda del problema allo studio.

§ 2. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

1. Ritengo opportuno, prima di trattare equazioni del secondo ordine più generali, di mostrare come dai miei risultati di Calcolo delle Variazioni si riottengano immediatamenle e in taluni punti si precisino alcune classiche proposizioni relative alla equazione differenziale

$$y'' = \varphi y.$$

a) Supponiamo dapprima che $\varphi(x)$ sia definita per $x \geq \alpha$, quasi continua, non negativa e di quadrato integrabile su ogni intervallo $(\alpha, \alpha + X)$, con $X > 0$; sia inoltre convergente l'integrale

$$\int_\alpha^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx.$$

Consideriamo l'integrale

$$I_\infty = \int_\alpha^{+\infty} \{ \varphi y^2 + (y' - C)^2 \} dx.$$

La classe K_1 non è vuota perchè vi appartiene la retta $y = C(x - \alpha) + c_{1,0}$. In K_1 I_∞ ammette una minimante $y = \bar{y}(x)$ che verifica l'equazione di EULERO

$$y'' = \varphi y. \tag{3}$$

Tale curva soddisfa alla condizione di trasversalità all'infinito e cioè

$$\lim_{x \to +\infty} \bar{y}'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\bar{y}(x)}{x} = C \text{ (}^7\text{)}.$$

Inoltre tale curva integrale della (3) rende convergente I_∞. Si ha quindi: « *Assegnata comunque una costante* C, *per ogni punto* (x_0, y_0) *del piano* x, y

(7) Si veda G. SANSONE, *Studi asintotici sulle equazioni differenziali lineari nel campo reale*, « Atti II Congresso dell'Unione Matematica Italiana », ed. Cremonese, Roma, 1942, pag. 51; *Equazioni differenziali nel campo reale*, Zanichelli (Bologna), 1941, Parte II, Cap. VII, n. 5, pagg. 41-43: D. CALIGO, *Comportamento asintotico degli integrali dell'equazione* $y''(x) + A(x)y(x) = 0$, *nell'ipotesi* $\lim_{x \to \infty} A(x) = 0$, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », serie II, anno II, n. 4, 1941, pagg. 276-285. Il CALIGO dimostra che sussiste la (4) se la $\varphi(x)$ è continua e verifica la limitazione $|\varphi| \leq \frac{l}{x^{2+\rho}}$ (l, ρ costanti positive). Al n. 2 di questo paragrafo vedremo come si può togliere l'ipotesi che sia $\varphi \geq 0$.

con $x_0 \geq \alpha$, *esce una soluzione* $\bar{y}(x)$ *dell'equazione* (3) *per cui è*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\bar{y}(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}'(x) = C \tag{4}$$

e sono convergenti

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \varphi \bar{y}^2 dx, \quad \int_{\alpha}^{+\infty} (\bar{y}' - C)^2 dx.$$

Tale soluzione è inoltre unica per il teorema IV ».

b) Si supponga che $\varphi^2(x)$ sia integrabile su ogni intervallo finito e $\varphi(x) \geq 0$ integrabile su $(\alpha, +\infty)$. Ammette ora minimo in K_1

$$I_\infty = \int_{\alpha}^{+\infty} [\varphi y^2 + y'^2] dx.$$

In modo analogo al caso *a)* si ha che per ogni punto (x_0, y_0) con $x_0 \geq \alpha$, esce uno e uno solo integrale della (3) per cui è

$$\lim_{x \to +\infty} \bar{y}'(x) = 0$$

e tale che sono finiti

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \varphi \bar{y}^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\alpha}^{+\infty} \bar{y}'^2 dx.$$

c) Se si suppone soltanto che la $\varphi(x)$ sia quasi continua e di quadrato integrabile su ogni intervallo finito, segue che ha minimo l'integrale

$$I_\infty = \int_{\alpha}^{+\infty} (\varphi y^2 + y'^2) dx.$$

Esiste quindi in ogni caso, per ogni punto (x_0, y_0), una soluzione $\bar{y}(x)$ della (3) per cui sono integrabili su $(\alpha, +\infty)$ $\varphi \bar{y}^2$ e $\bar{y}'^2$. Su tale curva è $\delta I_\infty \equiv 0$, e cioè se δy, con $\delta y(\alpha) = 0$, è tale che è finito

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \{ \varphi \overline{\delta y}^2 + \overline{\delta y'}^2 \} dx,$$

di conseguenza è

$$\lim_{x \to +\infty} \delta y \cdot \bar{y}'(x) = 0.$$

In particolare è

$$\lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x) \bar{y}'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{d\bar{y}^2(x)}{dx} = 0.$$

Se si suppone che, per $x \geq x_0$, sia $\varphi \geq \sigma > 0$, allora segue dal teorema III che è di conseguenza

$$\lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x) = 0.$$

Inoltre in questo caso esce una sola soluzione per ogni punto del piano x, y per cui sono convergenti

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \varphi y^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\alpha}^{+\infty} y'^2 dx \text{ (8)}.$$

2. Se non è $\varphi \geq 0$, l' integrale

$$\int_{\alpha}^{+\infty} [y'^2 + \varphi y^2] dx$$

non ha in generale minimo. Per trattare l' equazione

$$y'' = \varphi y$$

quando non sia $\varphi \geq 0$, consideriamo l' integrale

$$I_\infty = \int_{\alpha}^{+\infty} [y'^2 + \psi^2 y^2 + 2\rho y y'] dx,$$

con

$$\rho = -\int_{x}^{+\infty} [\varphi + \psi^2] dx. \tag{5}$$

L' equazione di EULERO è ora

$$y'' + (\rho' - \psi^2) y = 0$$

e, per la (5),

$$y'' + \varphi y = 0.$$

Supponiamo che esistano un $M > 0$ e un $\sigma > 0$ tali che per x sufficientemente grande sia

$$x^2 \varphi \leq \frac{1}{4} + \frac{M}{x^\sigma},$$

da cui segue

$$\max \lim_{x \to +\infty} x^2 \varphi(x) \leq \frac{1}{4}.$$

(8) M. PICONE, loc. cit. in (2).

Si ponga

$$\psi^2(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{M}{x^{2+\frac{\sigma}{2}}}.$$

È

$$\rho^2(x) = \left[\int_x^\infty (\varphi + \psi^2)dx\right]^2 \leq \left[\int_x^\infty \left[\frac{1}{2x^2} + \frac{M}{x^{2+\sigma}} + \frac{M}{x^{2+\frac{\sigma}{2}}}\right]dx\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4x^2} + \left(\frac{M}{1+\sigma}\right)^2 \frac{1}{x^{2+2\sigma}} + \left[\left(\frac{M}{1+\frac{\sigma}{2}}\right)^2 + \frac{M}{1+\sigma}\right]\frac{1}{x^{2+\sigma}} + \frac{M}{1+\frac{\sigma}{2}}\frac{1}{x^{2+\frac{\sigma}{2}}} +$$

$$+ \frac{2M^2}{(1+\sigma)\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}\frac{1}{x^{2+\frac{3\sigma}{2}}}.$$

Per x sufficientemente grande è

$$\rho^2(x) < \psi^2(x).$$

Infatti è, per x abbastanza grande,

$$\left(\frac{M}{1+\sigma}\right)^2 \frac{1}{x^{2+2\sigma}} + \left[\left(\frac{M}{1+\frac{\sigma}{2}}\right)^2 + \frac{M}{1+\sigma}\right]\frac{1}{x^{2+\sigma}} + \frac{2M^2}{(1+\sigma)\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}\frac{1}{x^{2+\frac{3\sigma}{2}}} < \frac{M\sigma}{2\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}\frac{1}{x^{2+\frac{\sigma}{2}}},$$

da cui segue

$$\rho^2(x) \leq \frac{1}{4x^2} + \left(\frac{M}{1+\sigma}\right)^2 \frac{1}{x^{2+2\sigma}} + \left[\left(\frac{M}{1+\frac{\sigma}{2}}\right)^2 + \frac{M}{1+\sigma}\right]\frac{1}{x^{2+\sigma}} + \frac{2M^2}{(1+\sigma)\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}\frac{1}{x^{2+\frac{3\sigma}{2}}} +$$

$$+ \frac{M}{1+\frac{\sigma}{2}}\frac{1}{x^{2+\frac{\sigma}{2}}} < \frac{1}{4x^2} + \left[\frac{M\sigma}{2\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)} + \frac{M}{1+\frac{\sigma}{2}}\right]\frac{1}{x^{2+\frac{\sigma}{2}}} = \frac{1}{4x^2} + \frac{M}{x^{2+\frac{\sigma}{2}}} \equiv \psi^2.$$

Se α è sufficientemente grande si consideri

$$I_\infty = \int_\alpha^{+\infty} [y'^2 + \psi^2 y^2 + 2\rho y y']dx,$$

con

$$\psi^2 = \frac{1}{4x^2} + \frac{M}{x^{2+\frac{\sigma}{2}}}, \qquad M \geq 0$$

e

$$\rho = -\int_x^{+\infty} [\varphi + \psi^2]dx,$$

dove $\varphi(x)$ soddisfa alla condizione

$$x^2\varphi(x) \leq \frac{1}{4} + \frac{M}{x^\sigma}, \qquad [M \geq 0,\ \sigma > 0];$$

allora è

$$\rho^2(x) \leq \psi^2(x),$$

e quindi

$$y'^2 + \psi^2 y^2 + 2\rho y y' \geq 0.$$

È interessante notare come per questa nuova via si ritrovi la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\varphi \leq \frac{1}{4}$$

data da KNESER [9] perchè gli integrali della equazione

$$y'' + \varphi y = 0 \tag{6}$$

non siano oscillanti.

Ne segue allora che per ogni punto del piano $x,\ y$ esce un integrale della (6) per cui è

$$\lim_{x \to +\infty} (y' + \rho y) = 0$$

e per cui esiste finito l'integrale

$$\int_\alpha^{+\infty} [y' + \rho y]^2 \leq \int_\alpha^{+\infty} [y'^2 + 2\rho y y' + \psi^2 y^2] dx = I_\infty .$$

3. Passiamo ora a considerare equazioni differenziali del secondo ordine di tipo generale.

a) Sia

$$I_\infty = \int_\alpha^{+\infty} \left[\psi^2 y'^2 + \varphi^2 y^2 + 2\beta y + \frac{\beta^2}{\varphi^2}\right] dx$$

e supponiamo dapprima che $\frac{\beta}{\varphi}$ sia di quadrato integrabile su $(\alpha, +\infty)$ e $\psi^2 > 0$.

Allora l'equazione di EULERO, relativa ad I_∞,

$$\frac{d}{dx}(\psi^2 y') - \varphi^2 y = \beta \tag{7}$$

ammette, per ogni punto (x_0, y_0) del piano $x,\ y$ un integrale $y = \bar{y}(x)$ per cui esistono finiti

$$\int_\alpha^{+\infty} \psi^2 \bar{y}'^2 dx \quad \text{e} \quad \int_\alpha^{+\infty} \varphi^2 \bar{y}^2 dx.$$

[9] A. KNESER, *Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale Linearer Differentialgleichungen*, « Math. Ann. », Bd. 42, 1893, pagg. 409-435.

Infatti l'estremale che minimizza I_∞ fra tutte le curve $y = y(x)$ passanti per (x_0, y_0) dà valore finito ad I_∞ e quindi a

$$\int_\alpha^{+\infty} \psi^2 \bar{y}'^2 dx \quad \text{e} \quad \int_\alpha^{+\infty} \left[\varphi^2 \bar{y}^2 + 2\beta\bar{y} + \frac{\beta^2}{\varphi^2}\right] dx;$$

esistendo

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\beta^2}{\varphi^2}\, dx$$

è pure convergente

$$\int_\alpha^{+\infty} \varphi^2 \bar{y}^2 dx \quad (^{10}).$$

Essendo sull'estremante $\delta I_\infty \equiv 0$, ne segue ancora che è

$$\lim_{x \to +\infty} \psi^2 \bar{y}\bar{y}' = 0.$$

Se inoltre supponiamo che sia finito

$$\int_\alpha^{+\infty} \varphi^2 dx,$$

allora la suddetta estremale verifica la condizione di trasversalità all'infinito

$$\lim_{x \to +\infty} \psi^2 y' = 0.$$

b) Consideriamo l'equazione (7) e invece di supporre l'integrabilità su $(\alpha, +\infty)$ di $\dfrac{\beta^2}{\varphi^2}$, ammettiamo che sia

$$\psi^2 \geq M x^a, \qquad |\beta| \leq N x^b,$$

dove è

$$M > 0, \quad N > 0 \qquad \text{e} \qquad a > 2(b+3).$$

Si ha

$$m(x) = \int_\alpha^x \beta(x) dx + \frac{N\alpha^{b+1}}{b+1} \leq \int_\alpha^x |\beta(x)|\, dx + \frac{N\alpha^{b+1}}{b+1} \leq \frac{N}{b+1} x^{b+1};$$

$$\frac{m^2(x)}{\psi^2(x)} \leq \frac{N^2}{M(b+1)^2} x^{2b-a+2}.$$

---

[10] Cfr. M. PICONE, loc. cit. in [2].

Essendo $2b - a + 2 < -1$, $\dfrac{m^2 x}{\psi^2(x)}$ è integrabile su $(\alpha, +\infty)$. L'integrale

$$I_\infty = \int_\alpha^{+\infty} \left[\psi^2 y'^2 + \varphi^2 y^2 - 2my' + \frac{m^2}{\psi^2}\right] dx$$

ammette per equazione di EULERO la (7); avendo I_∞ minimo nella classe delle curve per un punto del piano (x, y), per ogni punto di tale piano si ha un integrale delle (7) per cui sono finiti

$$\int_\alpha^{+\infty} \psi^2 y'^2 dx \quad \text{e} \quad \int_\alpha^{+\infty} \varphi^2 y^2 dx$$

ed è

$$\lim_{x \to +\infty} \psi^2 y y' = 0.$$

Introducendo ulteriori ipotesi per la funzione $\varphi^2(x)$ si possono ottenere — come si è visto precedentemente — nuove proprietà asintotiche per gli integrali della (7).

c) Consideriamo ora l'integrale

$$I_\infty = \int_\alpha^{+\infty} \theta^2 [y'^2 + \psi^2 y^2 + 2\rho y y' + 2\delta y + \gamma^2] dx.$$

L'equazione di EULERO è

$$\frac{d}{dx}(\theta^2 y') + y\left[\frac{d}{dx}(\theta^2 \rho) - \theta^2 \psi^2\right] = \delta;$$

posto

(8) $$\frac{d}{dx}(\theta^2 \rho) - \theta^2 \psi^2 = \varphi,$$

essa diviene

(9) $$\frac{d}{dx}(\theta^2 y') + \varphi y = \delta.$$

Supponiamo che sia

$$\theta^2 \geq \frac{1}{K} x^a, \qquad |\varphi| \leq H x^b,$$

con $K > 0$, $H > 0$ e $b < a - 2$; inoltre sia integrabile su $(\alpha, +\infty)$

$$\frac{\delta^2 \theta^6}{x^{2b+2}}.$$

Se è $2b+2<m<2a-2$, si ponga

$$\psi^2=\frac{x^m}{\theta^4}.$$

Dalla (8) si ottiene

$$\theta^2\rho=-\int_x^{+\infty}[\varphi+\theta^2\psi^2]dx\,;$$

si ha

$$\theta^4\rho^2=\left[\int_x^{\infty}(\varphi+\theta^2\psi^2)dx\right]^2\leq\left[\int_x^{\infty}\left(Hx^b+\frac{x^m}{\theta^2}\right)dx\right]^2\leq$$

$$\leq\left[\int_x^{\infty}Hx^b+Kx^{m-a})dx\right]^2=\left[\frac{H}{1+b}x^{b+1}+\frac{K}{m-a+1}x^{m-a+1}\right]^2<x^m=\theta^4\psi^2.$$

per x sufficientemente grande, essendo

$$2(b+1)<m,\qquad 2(m-a+1)<m.$$

È quindi

$$\rho^2<\psi^2.$$

Si ha ancora

$$\theta^4(\psi^2-\rho^2)=x^m-\theta^4\rho^2\geq x^m-\left[\frac{H}{1+b}x^{b+1}+\frac{K}{m-a+1}x^{m-a+1}\right]^2$$

e se è $0<N<1$, per x sufficientemente grande è sempre

$$\theta^4(\psi^2-\rho^2)\geq Nx^m>Nx^{2b+2}.$$

Si ponga

$$\gamma^2=\frac{\delta^2}{\psi^2-\rho^2}\,;$$

essendo

$$\theta^2\gamma^2\leq\frac{\delta^2\theta^6}{Nx^{2b+2}},$$

$\theta^2\gamma^2$ è integrabile su $(\alpha,+\infty)$. Inoltre è

$$y'^2+\psi^2y^2+2\rho yy'+2\delta y+\gamma^2\geq 0.$$

Pertanto I_∞ ammette minimo assoluto e per ogni punto del piano x, y esce un integrale della (9) per cui è finito

$$\int_x^{+\infty}\theta^2(y'^2+\psi^2y^2+2\rho yy'+2\delta y+\gamma^2)dx$$

ed essendo integrabile $\theta^2\gamma^2$ è pure finito

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \theta^2(y'^2 + \psi^2 y^2 + 2\rho y y')dx$$

e quindi è integrabile su $(\alpha, +\infty)$

$$\theta^2(y' + \rho y)^2 \leq \theta^2(y'^2 + \varphi^2 y^2 + 2\rho y y').$$

Osserviamo che è

$$\theta^2\psi^2 = \frac{x^m}{\theta^2} \leq \frac{x^{2a-2}}{\theta^2} \leq Kx^{a-2} < Kx^b.$$

Quindi, se $b < -1$, $\theta^2\psi^2$ è integrabile ed è verificata la condizione di trasversalità all'infinito

$$\lim_{x \to +\infty} \theta^2(y' + \rho y) = 0.$$

In modo analogo ai casi precedentemente trattati si possono dedurre nuove proprietà purchè si facciano delle ulteriori ipotesi sulla funzione $\theta^2\psi^2$.

§ 3. Equazioni differenziali lineari di ordine $2n$.

1. O. Perron ([11]) ha dimostrato il seguente teorema:

Se $\varphi_1(x), \varphi_2(x), .., \varphi_n(x)$ *sono funzioni continue per* $x \geq x_0$; *se esistono finiti i limiti*

$$\lim_{x \to \infty} \varphi_i(x) = a_i, \qquad \lim_{x \to \infty} \beta(x) = b;$$

se le radici dell'equazione

$$\rho^n + a_1\rho^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{10}$$

sono reali, non nulle e tutte distinte, l'equazione differenziale

$$y^{(n)} + \varphi_1(x)y^{(n-1)} + ... + \varphi_n(x)y = \beta(x) \tag{11}$$

possiede un integrale $y(x)$ *tale che*

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \frac{b}{a_n}, \quad \lim_{x \to \infty} y'(x) = 0, ..., \quad \lim_{x \to \infty} y^{(n)}(x) = 0.$$

L. Cesari ([12]) ha recentemente esteso questa importante proposizione ai sistemi differenziali, dopo averne migliorate in modo notevole le ipotesi. Fra

([11]) O. Perron, *Ueber nichthomogene lineare Differentialgleichungen*, « Math. Zeitschr. », 6, 1920, pagg. 161-166: *Ueber einen Grenzwertsatz*, id., 17, 1923, pagg. 149-152.

([12]) L. Cesari, *Proprietà asintotiche delle equazioni differenziali lineari ordinarie*. « Rend. Sem. Mat. R. Università di Roma », serie IV, vol. III, pagg. 171-193.

l'altro il CESARI ha provato che il teorema continua a sussistere anche se le radici dell'equazione caratteristica (10) sono multiple perchè non nulle. Se la (10) ha una radice nulla semplice ed è $b=0$, il CESARI ha dimostrato che allora esiste un integrale della (11) per cui è

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = \ldots = \lim_{x\to\infty} y^{(n)}(x) = 0.$$

Il caso che l'equazione caratteristica (10) abbia una radice nulla multipla, per $n \geq 2$ è stato recentissimamente studiato da O. HAUPT ([13]). Servendosi dei miei risultati di Calcolo delle Variazioni si possono riottenere, per le equazioni autoaggiunte di ordine $2n$, alcuni risultati dell'HAUPT ed altri che ritengo non siano stati prima d'ora conseguiti.

Per maggior brevità e chiarezza mi limiterò alle equazioni del quarto ordine, essendo ovvie le possibili generalizzazioni.

a) Consideriamo l'integrale

$$I_\infty = \int_\alpha^{+\infty} [y''^2 + a^2 y'^2 + b^2 y^2] dx$$

la cui equazione di EULERO è

$$y^{(4)} - \frac{d}{dx}(a^2 y') + b^2 y = 0. \tag{12}$$

Supponiamo che $a^2(x)$ e $b^2(x)$ siano quasi continue,

$$K \geq a^2(x) \geq \sigma > 0$$

e che $b^2(x)$ sia integrabile su $(\alpha, +\infty)$. Fissato ad arbitrio $x_0 \geq \alpha$, y_0 e y_0', esiste un integrale $y = \bar{y}(x)$ della (12) per cui è $\bar{y}(x_0) = y_0$, $\bar{y}'(x_0) = y_0'$ e per cui I_∞ è convergente.

Allora essendo finiti

$$\int_\alpha^{+\infty} \bar{y}''^2 dx \quad \text{e} \quad \int_\alpha^{+\infty} a^2 \bar{y}'^2 dx$$

è, per il teorema III,

$$\lim_{x\to+\infty} \bar{y}' = 0,$$

da cui segue pure

$$\lim_{x\to+\infty} a^2 y' = 0.$$

([13]) O. HAUPT, *Ueber das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen*, « Math. Zeitschrift », 48 B, 2 H, 1942, pagg. 289-292.

Poichè $y = \bar{y}(x)$ verifica la condizione di trasversalità all'infinito

$$\lim_{x \to +\infty} (a^2 y' - y''') = 0,$$

è anche

$$\lim_{x \to \infty} \bar{y}''' = 0.$$

Se invece si suppone che sia $b^2 \geq \sigma > 0$, dalla integrabilità di $a^2 \bar{y}'^2$ e $b^2 \bar{y}^2$ su $(\alpha, +\infty)$ segue che è anche

$$\lim_{x \to +\infty} \bar{y} = 0.$$

b) Sia ora

$$I_\infty = \int_\alpha^{+\infty} [y''^2 + \lambda^2 (y' - C)^2 + b^2 y^2] dx$$

con $x^2 b^2(x)$ integrabile su $(\alpha, +\infty)$ e λ e C costanti. L'equazione di EULERO è

(13) $$y^{(4)} - \lambda^2 y'' + b^2 y = 0.$$

Per ogni punto $(x_0, \bar{y}_0)$ del piano e per ogni valore di C e di $\bar{y}_0'$ esce quindi un integrale $y = \bar{y}(x)$ di tale equazione, per cui sono finiti

$$\int_\alpha^{+\infty} \bar{y}''^2 dx, \quad \int_\alpha^{+\infty} (\bar{y}' - C)^2 dx \quad \text{e} \quad \int_\alpha^{+\infty} b^2 \bar{y}^2 dx$$

ed è inoltre $\bar{y}'(x_0) = \bar{y}_0'$.

Per il teorema III è quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \bar{y}'(x) = C.$$

È inoltre verificata la condizione di trasversalità all'infinito

$$\lim_{x \to +\infty} [\lambda^2 (\bar{y}' - C) - \bar{y}''') = 0,$$

da cui segue

$$\lim_{x \to +\infty} \bar{y}''' = 0.$$

Si ha così:

Per ogni punto (x_0, y_0), *con* $x_0 \geq \alpha$, *e fissati ad arbitrio* C *e* y_0' *esce un integrale della* (13) *per cui è*

$$y'(x_0) = y_0', \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} y'(x) = C, \quad \lim_{x \to +\infty} y'''(x) = 0.$$

c) Supponiamo ora integrabile su $(\alpha, +\infty)$ $x^4 b^2(x)$ e che sia

$$a^2(x) \leq \frac{K}{x^{3+\sigma}}$$

con $K > 0$, $\sigma > 0$.

Sia

$$I_\infty = \int_\alpha^{+\infty} \{ [y'' - C]^2 + a^2 y'^2 + b^2 y^2 \} \, dx.$$

La classe K_1 delle curve per cui è $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ e che danno valore finito ad I_∞ non è vuota. Infatti una curva per cui sia $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ e che per $x \geq x_0 + 1$ coincida con $y = Cx$ appartiene a K_1.

Esiste quindi un integrale della

$$y^{(4)} - \frac{d}{dx}(a^2 y') + b^2 y = 0 \tag{14}$$

per cui è $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ e per cui sono finiti

$$\int_\alpha^{+\infty} (y'' - C)^2 dx, \quad \int_\alpha^{+\infty} a^2 y'^2 dx \quad \text{e} \quad \int_\alpha^{+\infty} b^2 y^2 dx.$$

Sono inoltre soddisfatte le condizioni di trasversalità all'infinito

$$\lim_{x \to +\infty} y'' = C, \qquad \lim_{x \to +\infty} (a^2 y' - y''') = 0.$$

Si ha

$$|y'| \leq \int_\alpha^x |y''(x)| \, dx + |y'(\alpha)|;$$

si può inoltre determinare un $H > 0$ tale che sia

$$|y''(x)| \leq H$$

ed è quindi

$$|y'| \leq H(x - \alpha) + |y'(\alpha)|$$

e

$$|a^2 y'| \leq \frac{K \{ H(x - \alpha) + |y'(\alpha)| \}}{x^{3+\sigma}};$$

ne segue

$$\lim_{x \to +\infty} a^2 y' = 0.$$

Si conclude:

« *Comunque si assegnino* x_0, y_0, y_0' *e* C, *si ha un integrale della* (14) *per cui è*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0',$$

esistono finiti

$$\int_\alpha^{+\infty} (y'' - C)^2 dx, \quad \int_\alpha^{+\infty} a^2 y'^2 dx, \quad \int_\alpha^{+\infty} b^2 y^2 dx$$

ed è

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2y(x)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{y'(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} y''(x) = C$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} y'''(x) = 0.$$

d) Supponiamo ora che sia

$$a^2(x) \leq \frac{K}{x^{5+\sigma}} \qquad (K > 0,\ \sigma > 0)$$

e che sia integrabile $x^6 b^2(x)$.

Sia

$$I_\infty = \int_\alpha^{+\infty} \{[y'' - (Cx + D)]^2 + a^2 y'^2 + b^2 y^2\}\, dx.$$

La classe K_1, analoga a quella considèrata in *c)*, non è vuota e perciò, assegnati x_0, y_0, y_0', esiste un integrale $y = \bar{y}(x)$ della

$$y^{(4)} - \frac{d}{dx}(a^2 y') + b^2 y = 0 \tag{14}$$

per cui è

$$\bar{y}(x_0) = y_0, \quad \bar{y}'(x_0) = \bar{y}_0'$$

e per cui è finito

$$\int_\alpha^{+\infty} \{[\bar{y}'' - (Cx + D)]^2 + a^2 \bar{y}'^2 + b\bar{y}^2\}\, dx.$$

Sono inoltre soddisfatte le condizioni di trasversalità all'infinito

$$\lim_{x \to +\infty} [\bar{y}'' - (Cx + D)] = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} [a^2 \bar{y}' - (\bar{y}''' - C)] = 0.$$

È

$$|\bar{y}'(x)| \leq \int_\alpha^x |\bar{y}''|\, dx + |y'(\alpha)| \leq Mx^2 + N,$$

essendo

$$|\bar{y}''(x)| \leq 2Mx + N;$$

è quindi

$$|a^2 \bar{y}'| < \frac{K(Mx^2 + N)}{x^{5+\sigma}};$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^2 \bar{y}' = 0,$$

e si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \bar{y}''' = C.$$

Nelle ipotesi fatte per le funzioni $a^2(x)$ *e* $b^2(x)$, *assegnati ad arbitrio* x_0, y_0, y_0', C *e* D, *si ha un integrale della* (14) *per cui è*

$$y(x_0) = y_0, \qquad y_0'(x_0) = y_0';$$

$$\lim_{x \to +\infty} y'''(x) = C;$$

$$y''(x) = Cx + D + \varepsilon(x),$$

dove $\varepsilon(x) \to 0$ *per* $x \to +\infty$. *Si ha pertanto che gli integrali della* (14) *si comportano come quelli della equazione limite*

$$y^{(4)} = 0.$$

2. In modo del tutto analogo a come si è fatto nel § 2 per le equazioni del 2° ordine, si possono trovare proposizioni asintotiche per le equazioni di ordine superiore al 2° e non omogenee. Per brevità ne diamo qui una soltanto, essendo ovvio come se ne possano dedurre altre.

Sia

$$I_\infty = \int_\alpha^{+\infty} \left[y'' + a^2 y'^2 + b^2 y^2 - 2qy + \frac{q^2}{b^2} \right] dx,$$

con la condizione che $\frac{q^2}{b^2}$ sia integrabile su $(\alpha, +\infty)$.

« *Fissati comunque* $x_0 \geq \alpha$, y_0, y_0', *esiste una soluzione di*

$$y^{(4)} - \frac{d}{dx}(a^2 y') + b^2 y = q \tag{15}$$

per cui è

$$y(x_0) = y_0, \quad y_0'(x_0) = y_0'$$

e per cui sono integrabili, su $(\alpha, +\infty)$

$$y''^2, \quad a^2(x) y'^2 \quad \text{e} \quad b^2(x) y^2 \text{ »}.$$

Inoltre, dalla condizione $\delta I = 0$, si ricava

$$\lim_{x \to +\infty} y'y'' = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} y[a^2 y' - y'''] = 0.$$

Se si fanno ulteriori ipotesi sulle funzioni $a^2(x)$, $b^2(x)$ e $q(x)$ si può imporre alla soluzione della (15) di soddisfare alle condizioni di trasversalità all'infinito.

3. Nel n. 1 e 2 del presente paragrafo si poteva, più in generale, considerare l'equazione differenziale del 4° ordine

$$\frac{d^2}{dx^2}(\psi^2 y'') - \frac{d}{dx}(a^2 y') + b^2 y = q,$$

per la quale sussistono proposizioni analoghe a quelle stabilite per

$$y^{(4)} - \frac{d}{dx}(a^2y') + b^2y = q,$$

4. Come si è visto per le equazioni del 2° ordine si può considerare l'integrale

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \theta^2[y''^2 + a^2y'^2 + b^2y^2 + 2cy''y' + 2dy''y + 2ey'y - 2\delta y]dx,$$

il quale porta a una equazione differenziale del tipo di

$$\frac{d^2}{dx^2}(\theta^2y'') + \frac{d}{dx}(\psi y') + \varphi y + \delta.$$

Si possono ottenere per tale equazione proposizioni analoghe a quelle date nel § 2 [n. 3, *c*)] per l'equazione

$$\frac{d}{dx}(\theta^2y') + \varphi y = \delta.$$

5. Invece di ricercare il minimo assoluto di I_∞ nella classe K_1 lo si può cercare in K_2 (§ 1, n. 1) e cioè nella classe di tutte le curve ordinarie definite per $x \geq x_0$.

Si vengono così ad ottenere le stesse proprietà asintotiche e, per $x = x_0$, invece che la condizione

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

si hanno due condizioni lineari fra y, y', y'' e y''' (condizioni di trasversalità per $x = x_0$).

Più in generale si può considerare la classe delle curve ordinarie il cui primo estremo (al finito) si appoggi a una curva assegnata. Si vengono così ad avere al finito due condizioni lineari fra x, y, y', y'', y''', di tipo generale, e all'infinito le condizioni precedentemente poste in evidenza.

Ciò è interessante sopratutto per le applicazioni, in quanto spesso intervengono al finito delle condizioni lineari fra la funzione incognita e le sue derivate.

§ 4. Teoremi di unicità con condizioni asintotiche.

1. Consideriamo l'integrale

$$I_\infty = \int_{\alpha}^{+\infty} [a_n^2(x)y^{(n)2} + \dots + a_0^2(x)y^2]dx,$$

con la condizione $a_n^2(x) > 0$.

Fissati ad arbitrio i valori $x_0 \geq \alpha,\ y_0, \dots,\ y_0^{(n-1)}$ esiste una e una sola soluzione dell'equazione di EULERO

$$\frac{d^{(n)}}{dx^n}(a^2 y^{(n)}) - \frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}}(a_{n-1}^2 y^{(n-1)}) + \dots + (-1)^n a_0^2 y = 0 \tag{16}$$

che verifica le condizioni

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{17}$$

e su cui è nulla la variazione prima smorzata nel primo estremo. In particolare se sono integrabili su $(\alpha, +\infty)$ le funzioni

$$x^{2i} a_{n-i-1}^2(x) \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

allora sussistono le condizioni di trasversalità all'infinito e si ha il

TEOREMA: *Se sono integrabili su* $(\alpha, +\infty)$ *le funzioni*

$$x^{2i} a_{n-i-1}^2(x) \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

allora esiste una e una sola soluzione della (16) *che verifica le* (17) *e per cui è inoltre*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left[a_1^2 y' - \dfrac{d}{dx}(a_2^2 y'') + \dots + (-1)^{n-1} \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_n^2 y^{(n)})\right] = 0, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left[a_2^2 y'' - \dfrac{d}{dx}(a_3^2 y''') + \dots + (-1)^{n-2} \dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(a_n^2 y^{(n)})\right] = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lim\limits_{x \to +\infty} a_n^2 y^{(n)} = 0. \end{cases}$$

2. È immediato come per questa via si possano ottenere teoremi di unicità con condizioni asintotiche anche per equazioni non omogenee e di tipo più generale di quella considerata nel n. 1.

3. Ho dato (« Memoria A. P. », Cap. III, § 2) alcuni criterî sotto i quali si può asserire che su una estremale sia nulla la variazione prima smorzata.

Eccone uno assai semplice per gli integrali

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x, y, y')dx.$$

« *Se si possono determinare un* M *e una funzione* g(x) *integrabile su* $(\alpha, +\infty)$ *tali che sia*

$$(18) \qquad -g(x) - Mf(x, y, y') \leq f_y(x, y, y') \leq Mf(x, y, y') + g(x),$$

allora su ogni estremale relativa alla f(x, y, y') *e che sia una curva ordinaria è identicamente nulla la variazione prima smorzata* ».

Mostriamone una immediata applicazione.

Sia

$$f(x, y, y') \equiv \theta^2 y'^2 + \varphi^2 y^2.$$

Se φ^2 è integrabile su $(\alpha, +\infty)$, è

$$|f_y| = 2\varphi^2 |y| \leq 2|f| + 2\varphi^2$$

ed è quindi soddisfatta la (18).

In base al teorema V° di unicità riportato nel § 1 si ha il

Teorema: *Se* $\varphi^2(x)$ *è continua e integrabile su* $(\alpha, +\infty)$, *prefissata una arbitraria funzione continua* $\psi(x)$ *esiste al più una sola soluzione* $y = y(x)$ *dell' equazione*

$$\frac{d}{dx}(\theta^2 y') - \varphi^2 y = 0$$

che esce dal punto (x_0, y_0), *con* $x_0 \geq \alpha$, *per la quale è finito*

$$\int_\alpha^{+\infty} [\theta^2 y'^2 + \varphi^2 y^2] dx$$

ed è

$$\lim_{x \to +\infty} [y(x) - \psi(x)] = 0.$$

Analoghi teoremi si possono dedurre per equazioni di ordine $2n$ e di forma più generale.

4. Se si considera l' integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f[x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)] dx,$$

dai teoremi di unicità per le estremali si possono immediatamente ricavare dei teoremi di unicità per le soluzioni di vaste classi di equazioni differenziali, per cui siano assegnate soltanto condizioni per $|x| \to \infty$.

§ 5. Equazioni differenziali non lineari.

Quando l'equazione di EULERO relativa all'integrale

$$I_\infty = \int_{\alpha}^{+\infty} f[x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)]dx$$

non è lineare ho provato (« Memoria A. P. », Cap. V, § 5) che non è in generale vero che su una estremale che minimizzi I_∞ sia identicamente nulla la variazione prima di I_∞. In tali casi si possono però conseguire ugualmente delle proposizioni a carattere asintotico e precisamente:

I°) *Sussistono ancora i teoremi di unicità delle estremali rammentati nel* § 1 *e quindi se ne possono dedurre condizioni asintotiche sufficienti ad assicurare l'unicità delle estremali.*

II°) *Si possono dare teoremi che garantiscono l'esistenza di una estremale soddisfacente a date condizioni iniziali e che inoltre renda convergente* I_∞.

Darò quì un cenno per le questioni del tipo II°, poichè per quelle del tipo I° basta procedere come si è fatto nel § 4.

Consideriamo l'integrale

$$I_\infty = \int_{\alpha}^{+\infty} [\theta^2(x)\Phi^2(y') + \varphi^2(x)\psi^2(y)]dx\,;$$

sia $\theta^2(x) > 0$

$$\lim_{|y'| \to \infty} \left| \frac{\Phi^2(y')}{y'} \right| = +\infty$$

ed esista finito

$$\int_{\alpha}^{+\infty} [\theta^2(x)\Phi^2(0) + \varphi^2(x)\psi^2(0)]dx.$$

Supponiamo inoltre che ad ogni $\lambda > 0$ si possano fare corrispondere due numeri M ed N tali che sia

$$|\psi_y(y)| \leq M|\psi(y)| + N$$

per ogni $|y| \leq \lambda$.

Nella classe (non vuota) delle curve $y = y(x)$ con $y(x_0) = y_0$ e che rendono convergente I_∞, esiste il minimo assoluto di I_∞. Tale minimo è inoltre fornito da una estremale (« Memoria A. P. », Cap. III, § 3). Si ha quindi che l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}[\theta^2\Phi(y')\Phi_y(y')] - \varphi^2(x)\psi(y)\psi_y(y) = 0,$$

ammette un integrale per cui è

$$y(x_0) = y_0$$

e per cui sono finiti

$$\int_\alpha^{+\infty} \theta^2 \Phi^2(y') dx, \qquad \int_\alpha^{+\infty} \varphi^2 \psi^2(y) dx.$$

Se ne possono dedurre dei semplici e significativi corollari. Si faccia

$$\Phi^2(y') = y'^4, \qquad \psi^2 = y^2.$$

L'equazione differenziale

$$2 \frac{d}{dx} (\theta^2 y'^3) - \varphi^2 y = 0$$

possiede, per ogni punto del piano (x, y), un integrale per cui esistono finiti

$$\int_\alpha^{+\infty} \theta^2 y'^4 dx \quad \text{e} \quad \int_\alpha^{+\infty} \varphi^2 y^2 dx.$$

Più in generale, se $f(x, y(x), \dots, y(x)^{(n)})$ soddisfa sia alle condizioni di uno dei teoremi di esistenza dell'estremo assoluto che a quelle che assicurano che la minimante è un'estremale, si ha contemporaneamente una proposizione che dà una proprietà asintotica degli integrali di una equazione in generale non lineare.

In particolare *se le condizioni del teorema di esistenza sono tali da assicurare che la* y(x) *è limitata* (« Memoria A. P. », Cap. II, § 2), *si possono ricavare delle condizioni perchè l'equazione abbia degli integrali limitati su* $(\alpha, +\infty)$. *È questa una questione di grande importanza nei problemi che interessano le applicazioni.*

Ma su ciò non intendo soffermarmi, non volendo render più lunga questa Nota, il cui scopo è soltanto di indicare l'interesse delle ricerche su gli integrali I_∞ anche in questo campo, a prima vista così lontano dalle mete immediate del Calcolo delle Variazioni.

§ 6. **Sistemi di equazioni differenziali.**

Se nei ragionamenti fatti nei precedenti paragrafi si considerano integrali I_∞ dipendenti da curve di un S_{n+1}, le relative equazioni di Eulero vengono a costituire un sistema di n equazioni differenziali.

Poichè le proposizioni di Calcolo delle Variazioni su cui ci siamo fondati sono state dimostrate per integrali dipendenti da curve di un S_{n+1}, ne risulta che le proprietà asintotiche già stabilite per le equazioni sussistono anche per i sistemi di equazioni differenziali.