Sopra alcune questioni relative alle equazioni del tipo iperbolico non lineari.

Memoria di MARIA CINQUINI-CIBRARIO (a Pavia).

Sunto. - *Dopo aver ripreso per l'equazione del tipo iperbolico* non lineare:

(1) $$F(x, y; z; p, q; r, s, t) = 0 \qquad (F_s^2 - 4F_rF_t > 0)$$

il problema di GOURSAT, *studiato in una Memoria precedente, e aver ridotto notevolmente le ipotesi fatte, l'A. sviluppa per l'equazione stessa la teoria delle caratteristiche nel campo delle funzioni di variabile reale, dimostrando in tale campo, sotto ipotesi che non sembrano ulteriormente riducibili, numerosi teoremi, che finora erano stati dimostrati solo nel campo analitico. L'A. porta così nel campo reale la teoria delle caratteristiche per la* (1) *allo stesso grado di compiutezza, a cui essa era stata portata nel campo analitico.*

In una Memoria recente [1] ci siamo occupati dell'equazione *del tipo iperbolico non lineare* in due variabili indipendenti:

(I) $$F(x, y; z; p, q; r, s, t) = 0 \qquad (F_s^2 - 4F_rF_t > 0)$$

$\left(\text{dove, al solito, } p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$, considerata nel campo delle funzioni di variabile reale, e abbiamo risolto per tale equazione il *problema di Goursat*: « *determinare una superficie integrale della* (I), *che passi per due curve assegnate* Γ_1 *e* Γ_2, *aventi un punto in comune* ».

Il presente lavoro è dedicato a ridurre notevolmente le ipotesi fatte in (M), e a mettere in rilievo diversi risultati interessanti, che si deducono dai teoremi dimostrati in (M).

Nella dimostrazione fatta in (M), allo scopo di rendere immediata in una prima trattazione la comprensione del metodo seguito e di semplificare i calcoli, già molto laboriosi, si sono portate le curve Γ_1 e Γ_2 a coincidere cogli assi coordinati x e y. In tal modo però si sono dovute introdurre

(1) M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sul problema di* GOURSAT *per le equazioni del tipo iperbolico non lineari*, « Annali di Matematica », S. IV, T. XXI, 1942-XX, p. 189-229.

Nel seguito tale memoria sarà citata con (M).

alcune ipotesi non essenziali; precisamente, indicate con:

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ z = F_1(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = f_2(y) \\ z = F_2(y), \end{cases}$$

le equazioni rispettive delle curve Γ_1 e Γ_2, si suppone in (M) che le funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(y)$, $F_2(y)$ abbiano derivate continue dei primi cinque ordini. I §§ 1 e 2 del presente lavoro sono dedicati a ridurre queste ipotesi; se non si portano le curve Γ_1 e Γ_2 a coincidere cogli assi coordinati x e y, basta supporre che le funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(y)$, $F_2(y)$ abbiano soltanto *derivate terze lipschitziane* [2]; si ha, naturalmente, una complicazione maggiore nei calcoli, e occorre qualche accorgimento in più nella dimostrazione.

Nel successivo § 3 sono contenuti i risultati fondamentali del presente lavoro. Si considera, anzi tutto, il caso particolare, in cui le curve Γ_1 e Γ_2 siano curve caratteristiche della superficie integrale richiesta; in tale caso si ha una nuova riduzione nelle ipotesi, perchè è sufficiente *supporre che le funzioni* $\mathrm{f}_1(\mathrm{x})$, $\mathrm{F}_1(\mathrm{x})$, $\mathrm{f}_2(\mathrm{y})$, $\mathrm{F}_2(\mathrm{y})$ *abbiano derivate continue dei primi tre ordini*, senza l'ipotesi ulteriore che le derivate terze siano lipschitziane; ci si riconduce così ad un minimo di ipotesi [3].

Da queste e da altre semplici considerazioni si ottengono alcune conseguenze notevoli; tra esse segnaliamo il risultato, fondamentale nella teoria delle caratteristiche, che, *se, p. es., la curva* Γ_1 *è una caratteristica per una superficie integrale* $\mathrm{z} = \mathrm{Z}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *della* (I), *esistono infinite superfici integrali della* (I), *passanti per* Γ_1, *e per le quali* Γ_1 *è una curva caratteristica.*

Questo teorema è ben noto nel campo analitico [4]; nel campo delle funzioni di variabile reale vi è una dimostrazione dovuta a E. E. LEVI [5],

---

(2) L'esistenza delle derivate terze delle funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(y)$, $F_2(y)$ è nella natura della questione ed è richiesta dal fatto, che si introducono le equazioni delle strisce caratteristiche della (I), perchè per scrivere tali equazioni (se la (I) non è lineare neppure soltanto nelle derivate di ordine massimo) si ammette già che l'integrale della (I), dal quale si parte, abbia derivate continue dei primi tre ordini. L'ipotesi poi che le derivate terze di $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(y)$, $F_2(y)$ siano lipschitziane occorre per dimostrare la convergenza delle approssimazioni successive, come si vedrà nel seguito.

(3) Cfr. la nota precedente; come si vedrà, in questo caso si può dimostrare la convergenza delle approssimazioni successive, senza far uso dell'ipotesi che le derivate terze delle funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(y)$, $F_2(y)$ siano lipschitziane.

(4) Cfr. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Tome I, Chap. IV, p. 188-193.

(5) E. E. LEVI, *Sopra un teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine*, « Annali di Matematica », S. III, T. XVIII, p. 287-333; cfr. il § III, p. 331-333. A proposito della dimostrazione del LEVI, che scrive la (I) nella forma $s = f(x, y; z; p, q; r, t)$,

che esige ipotesi piuttosto restrittive; nel § 6 di (M) è data una dimostrazione da cui segue subito il teorema precedente (cfr. la nota ([28]) p. 223 di (M); il risultato è ivi appena accennato), ma si richiedono ancora ipotesi di derivabilità, non inerenti alla questione.

La dimostrazione che daremo qui (in cui si suppone soltanto che le funzioni $F(x, y; z; p, q; r, s, t)$ e $Z(x, y)$ abbiano *derivate continue dei primi tre ordini*, e in cui si segue un metodo del tutto diverso da quello tenuto sia dal Levi che da noi in (M)) stabilisce il teorema accennato sotto ipotesi, che non sembrano ulteriormente riducibili.

Inoltre nel § 3 si dimostrano, nel campo delle funzioni di variabile reale, varie altre proprietà notevoli, relative alle strisce caratteristiche dell'*equazione non lineare* (I), e ciò riducendo al minimo le ipotesi; tali proprietà erano state considerate soltanto nel campo analitico, oppure, nel campo reale, per le sole equazioni lineari.

Infine il § 4 è dedicato al caso, in cui la (I) sia una *equazione quasi-lineare* (cioè lineare soltanto nelle derivate di ordine massimo):

$$A(x, y; z; p, q)r + 2B(x, y; z; p, q)s + C(x, y; z; p, q)t = D(x, y; z; p, q),$$
$$(B^2 - AC > 0).$$

In tale caso si ha una riduzione ulteriore di ipotesi, perchè basta supporre che le funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(y)$, $F_2(y)$ abbiano *derivate seconde lipschitziane*, e, anzi, nel caso in cui le curve Γ_1 e Γ_2 siano caratteristiche della superficie integrale richiesta, che le funzioni indicate abbiano *derivate seconde continue* ([6]). I teoremi del § 3 assumono una forma particolarmente semplice per l'equazione quasi-lineare, in confronto all'equazione generale (I).

§ 1. **Posizione del Problema.**

1. Sia data l'equazione alle derivate parziali del secondo ordine:

$$F(x, y; z; p, q; r, s, t) = 0, \tag{I}$$

e si supponga che la funzione $F(x, y; z; p, q; r, s, t)$ sia definita in un certo

---

va tenuto presente che dalle ipotesi del Levi segue anche la condizione:

$$\frac{\partial f(x,\ 0;\ 0;\ 0,\ 0;\ 0,\ 0)}{\partial y} = 0,$$

che il Levi non rileva in modo esplicito, ma di cui si serve nella dimostrazione.

([6]) Infatti per scrivere le equazioni delle strisce caratteristiche nel caso di una equazione quasi-lineare, basta supporre che l'integrale di partenza abbia derivate seconde continue.

campo e abbia ivi derivate continue dei primi tre ordini; inoltre in tutto il campo sia:

$$F_s^2 - 4F_rF_t > 0, \tag{1}$$

cioè l'equazione (I) sia del tipo iperbolico nel campo che si considera; in tutto il lavoro supporremo sempre che sia soddisfatta questa ipotesi.

Siano dati nel piano x, y due archi di curva γ_1 e γ_2 di equazioni rispettive:

$$y = f_1(x), \quad x = f_2(y), \tag{2}$$

aventi in comune un punto (x_1, y_1) interno a entrambi gli archi; γ_1 e γ_2 non siano tangenti nel punto comune e non abbiano altri punti in comune; le funzioni $f_1(x)$, $f_2(y)$ siano definite, rispettivamente, in un intorno del punto x_1 e in un intorno del punto y_1 e abbiano ivi *derivate terze lipschitziane*. Negli stessi intorni siano assegnate due funzioni $F_1(x)$, $F_2(y)$, aventi *derivate terze lipschitziane*, e tali che sia:

$$F_1(x_1) = F_2(y_1).$$

Indicato con z_1 questo valore comune, si determinino le quantità p_1, q_1 mediante il sistema:

$$\begin{cases} p_1 + q_1 f_1'(x_1) = F_1'(x_1) \\ p_1 f_2'(y_1) + q_1 = F_2'(y_1). \end{cases} \tag{3}$$

Il sistema di valori x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 sia *interno* al campo di definizione della funzione $F(x, y; z; p, q; r, s, t)$; esista inoltre *uno e un solo* sistema di valori $r_1 . s_1, t_1$, per cui siano soddisfatte le:

$$\begin{cases} r_1 + 2s_1 f_1'(x_1) + t_1 f_1'^2(x_1) + q_1 f_1''(x_1) = F_1''(x_1) \\ r_1 f_2'^2(y_1) + 2s_1 f_2'(y_1) + t_1 + p_1 f_2''(y_1) = F_2''(y_1) \\ F(x_1, y_1; z_1; p_1, q_1; r_1, s_1 . t_1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

e il sistema di valori $x_1, y_1; z_1; p_1, q_1; r_1, s_1, t_1$ sia interno al campo di definizione della funzione $F(x, y; z; p, q; r, s, t)$.

Valga inoltre la seguente ipotesi fondamentale:

α) *Le due rette per il punto* (x_1, y_1), *aventi coefficienti angolari definiti dall'equazione*

$$(F_r)_1 dy^2 - (F_s)_1 dxdy + (F_t)_1 dx^2 = 0 \; (^7) \tag{5}$$

e le due rette tangenti alle curve γ_1 *e* γ_2 *nel punto* (x_1, y_1) *non formino gruppo armonico.*

---

(7) Si è posto $(F_s)_1 = F_s(x_1, y_1; z_1; p_1, q_1; r_1, s_1, t_1)$, e analogamente per le derivate $(F_r)_1$, $(F_t)_1$; lo stesso si è fatto più sotto.

In queste ipotesi, meno restrittive di quelle enunciate nel § 1 di (M), vale il TEOREMA I del § 1 di (M), che riportiamo qui:

TEOREMA I. — « *Esiste uno e un solo integrale della* (I), *definito almeno in un intorno del punto* (x_1, y_1), *finito e continuo colle sue derivate dei primi tre ordini* [8], *che si riduce alle funzioni assegnate* $F_1(x)$ *e* $F_2(y)$ *rispettivamente sugli archi delle curve* γ_1 *e* γ_2, *i quali sono contenuti in quell'intorno (in cui è definito l'integrale stesso), e si tagliano nel punto* (x_1, y_1), *cioè esiste una e una sola superficie integrale della* (I), *che passa per le due curve sghembe* Γ_1 *e* Γ_2, *di equazioni rispettive*:

$$(6) \qquad \begin{cases} y = f_1(x) \\ z = F_1(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = f_2(y) \\ z = F_2(y) \end{cases} \text{ ».}$$

2. Con un cambiamento delle variabili indipendenti e della funzione incognita si possono assumere come assi coordinati le due rette per il punto (x_1, y_1) aventi coefficienti angolari determinati dalla (5) (che, come è noto, definisce le *direzioni caratteristiche* della superficie integrale cercata nel suo punto (x_1, y_1, z_1)), portando così il punto (x_1, y_1), comune alle curve γ_1 e γ_2, nell'origine, e si può supporre che le funzioni $F_1(x)$, $F_2(y)$ assegnate e l'integrale $z(x, y)$ richiesto si annullino nell'origine assieme alle loro derivate dei primi tre ordini [9]. Da queste ipotesi segue che:

$$(F)_0 = (F_r)_0 = (F_t)_0 = (F_x)_0 = (F_y)_0 = 0 \text{ [10]}.$$

Dalla condizione (1) segue allora che: $(F_s)_0 \neq 0$; si può dunque risolvere la (I) rispetto ad s, ottenendo la:

$$\text{(II)} \qquad s = f(x, y; z; p, q; r, t),$$

dove la funzione $f(x, y; z; p, q; r, t)$ è definita almeno per $|x| \dots |t|$ [11] abbastanza piccoli, ha derivate continue dei primi tre ordini e soddisfa le:

$$(7) \qquad (f)_0 = (f_r)_0 = (f_t)_0 = (f_x)_0 = (f_y)_0 = 0.$$

Per la condizione α) le tangenti alle curve γ_1 e γ_2 nell'origine non sono

---

(8) Come si vedrà, dalle ipotesi fatte seguirà anche che le derivate terze della funzione $z(x, y)$ sono lipschitziane.

(9) I valori delle derivate prime e seconde dell'integrale $z(x, y)$ cercato nel punto comune alle curve γ_1 e γ_2 sono determinati dalle (3) e (4); derivando la (I) rispetto a x, y si hanno due relazioni, dalle quali e dalle condizioni che $z(x, y)$ si riduca alle funzioni assegnate su γ_1 e γ_2, riescono determinati i valori delle derivate terze di $z(x, y)$ nel punto comune a γ_1 e γ_2.

(10) *Qui* e *sempre nel seguito*, con $(F)_0$ intenderemo il valore che assume una funzione F, quando tutte le variabili, da cui essa dipende, assumono il valore zero.

(11) Scriveremo spesso, qui e in seguito, $x \dots t$ al posto di $x, y; z; p, q; r, t$.

simmetriche rispetto agli assi, e quindi:

$$1 + f_1'(0) f_2'(0) \neq 0. \tag{8}$$

Poichè γ_1 e γ_2 non sono tangenti nel punto comune si ha pure che:

$$1 - f_1'(0) f_2'(0) \neq 0. \tag{9}$$

Come si vede facilmente, non è restrittivo supporre che sia proprio:

$$| f_1'(0) | < 1 \,; \quad | f_2'(0) | < 1 \ \text{(12)}. \tag{10}$$

Basterà dunque dimostrare il TEOREMA I per l'equazione (II), nell'ipotesi che valgano le (7), che le curve γ_1 e γ_2 si incrocino nell'origine, che ivi siano soddisfatte le (10), e che infine le funzioni $F_1(x)$, $F_2(y)$ si annullino colle loro derivate dei primi tre ordini rispettivamente per $x = 0$ e per $y = 0$.

3. Ragionamenti simili a quelli fatti nel § 2 di (M) permettono di introdurre due nuove variabili indipendenti λ, μ, di considerare le variabili $x \ldots t$ come funzioni di λ, μ, e di ricondurre la dimostrazione del TEOREMA I alla integrazione di un sistema di equazioni alle derivate parziali del primo ordine nelle funzioni incognite $x = x(\lambda, \mu), \ldots\ t = t(\lambda, \mu)$, e alla costruzione di ulteriori funzioni, in modo che siano soddisfatte certe condizioni, che enunceremo tra poco.

Precisamente, posto:

$$\begin{cases} \delta = \sqrt{1 - 4 f_r f_t}\,; \quad \rho = -\dfrac{2 f_t}{1 + \delta}\,; \quad \sigma = -\dfrac{2 f_r}{1 + \delta} \ \text{(13)}\,; \\[2ex] \left(\dfrac{df}{dx}\right) = f_x + f_z p + f_p r + f_q f\,; \quad \left(\dfrac{df}{dy}\right) = f_y + f_z q + f_p f + f_q t, \end{cases} \tag{11}$$

cogli stessi ragionamenti fatti in (M) si prova che dimostrare il TEOREMA I,

---

(12) Infatti se è, p. es. $f_1'(0) = 0$, $f_2'(0) \geq 1$, basta fare il cambiamento di variabili $x = \rho X$, $y = Y$, con $\rho > |f_2'(0)|$, e analogamente per $|f_1'(0)| \geq 1$, $f_2'(0) = 0$. Se $|f_1'(0)| > 1$, $|f_2'(0)| > 1$, basta scambiare le due curve (ricavare cioè dalle $y = f_1(x)$ e $x = f_2(y)$ rispettivamente le $x = g_2(y)$ e $y = g_1(x)$, il che è certo possibile per $|x|$, $|y|$ abbastanza piccoli). Se è poi $|f_1'(0)| < 1$, $|f_2'(0)| \geq 1$, $|f_1'(0) f_2'(0)| < 1$, basta fare il cambiamento di variabili $X = \sqrt{|f_1'(0)|}\, x$, $Y = \sqrt{|f_2'(0)|}\, y$. Se è $|f_1'(0)| < 1$, $|f_2'(0)| > 1$, $|f_1'(0) f_2'(0)| > 1$ (per le (8) e (9) non può essere $|f_1'(0) f_2'(0)| = 1$) basta scambiare le due curve, perchè le nuove equazioni $y = g_1(x)$, $x = g_2(y)$ soddisfano certo le $|g_1'(0)| < 1$, $|g_2'(0)| > 1$, $|g_1'(0) g_2'(0)| < 1$. Ragionamenti analoghi valgono, se $|f_1'(0)| \geq 1$, $|f_2'(0)| < 1$, oppure $|f_1'(0)| > 1$, $|f_2'(0)| = 1$, o infine $|f_1'(0)| = 1$, $|f_2'(0)| > 1$; in questi ultimi due casi basta scambiare le due curve per ricondursi ai casi precedenti. Per le (8) e (9) non può essere $|f_1'(0)| = |f_2'(0)| = 1$.

(13) Scriveremo, qui e in seguito, f al posto di $f(x, y;\ z;\ p, q;\ r, t)$, e analogamente per le derivate di f, e per tutte le funzioni di $x \ldots t$, che ci occorrerà di introdurre.

nel caso dell'equazione (II), equivale a dimostrare che esiste uno e un solo sistema di soluzioni del seguente:

Problema *a*). – « *Determinare un sistema di funzioni* $x(\lambda, \mu)$, $y(\lambda, \mu)$, $\bar{z}(\lambda, \mu)$, $\bar{p}(\lambda, \mu)$, $\bar{q}(\lambda, \mu)$, $\bar{r}(\lambda, \mu)$, $\bar{t}(\lambda, \mu)$, *definite almeno per* $|\lambda|$, $|\mu|$ *abbastanza piccoli, finite e continue colle loro derivate parziali prime e colle derivate seconde miste, che soddisfino il sistema di equazioni a derivate parziali*:

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} x_\mu = \sigma y_\mu; \quad y_\lambda = \rho x_\lambda; \quad \bar{z}_\mu = \bar{p} x_\mu + \bar{q} y_\mu; \quad \bar{p}_\mu = \bar{r} x_\mu + f y_\mu; \quad \bar{q}_\mu = f x_\mu + \bar{t} y_\mu; \\ \bar{r}_\mu = \rho^2 \bar{t}_\mu + \dfrac{2}{1+\delta}\left[\left(\dfrac{df}{dx}\right) - \rho\left(\dfrac{df}{dy}\right)\right] y_\mu; \quad \bar{t}_\lambda = \sigma^2 \bar{r}_\lambda + \dfrac{2}{1+\delta}\left[\left(\dfrac{df}{dy}\right) - \sigma\left(\dfrac{df}{dx}\right)\right] x_\lambda; \end{cases}$$

e costruire dieci funzioni $\varphi(\lambda)$, $\psi(\mu)$, $P_1(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$, $T_1(\lambda)$, $P_2(\mu)$, $Q_2(\mu)$, $R_2(\mu)$, $T_2(\mu)$, *definite almeno per* $|\lambda|$ *oppure per* $|\mu|$ *abbastanza piccoli e finite e continue colle loro derivate prime, in modo che siano soddisfatte le condizioni*:

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} x[\lambda, \varphi(\lambda)] = \lambda; \quad y[\ldots] = f_1(\lambda); \quad \bar{z}[\ldots] = F_1(\lambda); \quad \bar{p}[\ldots] = P_1(\lambda), \quad \bar{q}[\ldots] = Q_1(\lambda); \\ \qquad \bar{r}[\ldots] = R_1(\lambda); \quad \bar{t}[\ldots] = T_1(\lambda). \\ x\{\psi(\mu), \mu\} = f_2(\mu); \quad y\{\ldots\} = \mu; \quad \bar{r}\{\ldots\} = R_2(\mu); \quad \bar{t}\{\ldots\} = T_2(\mu). \\ \varphi(0) = \psi(0) = P_2(0) = Q_1(0) = R_2(0) = T_1(0) = 0 \ \text{[14]}. \\ P_1(\lambda) + f_1'(\lambda) Q_1(\lambda) = F_1'(\lambda); \quad P_2(\mu) f_2'(\mu) + Q_2(\mu) = F_2'(\mu). \\ Q_1'(\lambda) = \chi_1(\lambda) + T_1(\lambda) f_1'(\lambda); \quad P_2'(\mu) = R_2(\mu) f_2'(\mu) + \chi_2(\mu). \\ R_1(\lambda) + 2\chi_1(\lambda) f_1'(\lambda) + T_1(\lambda) f_1'^2(\lambda) + Q_1(\lambda) f_1''(\lambda) = F_1''(\lambda). \\ R_2(\mu) f_2'^2(\mu) + 2\chi_2(\mu) f_2'(\mu) + T_2(\mu) + P_2(\mu) f_2''(\mu) = F_2''(\mu) \text{ »}, \end{cases}$$

dove si è posto:

$$\text{(12)}\quad \begin{cases} \chi_1(\lambda) = f[\lambda, f_1(\lambda); \quad F_1(\lambda); \quad P_1(\lambda), \ Q_1(\lambda); \quad R_1(\lambda), \ T_1(\lambda)] \\ \chi_2(\mu) = f[f_2(\mu), \mu; \quad F_2(\mu); \quad P_2(\mu), \ Q_2(\mu); \quad R_2(\mu), \ T_2(\mu)]. \end{cases}$$

4. Si vede subito che per provare che il Problema *a*) ammette uno e un solo sistema di soluzioni basta provare che esiste uno e un solo sistema di soluzioni del seguente:

Problema *b*). — « *Costruire un sistema di funzioni* $x(\lambda, \mu) \ldots \bar{t}(\lambda, \mu)$, *definite almeno per* $|\lambda|$, $|\mu|$ *abbastanza piccoli e ivi finite e continue colle loro derivate prime e colla derivata seconda mista, e un sistema di funzioni* $\varphi(\lambda) \ldots T_2(\mu)$ [15], *definite almeno per* $|\lambda|$ *oppure per* $|\mu|$ *abbastanza piccoli e*

---

[14] Dall'insieme delle condizioni (IV) segue che anche:

$$P_1(0) = Q_2(0) = R_1(0) = T_2(0) = 0.$$

[15] Scriveremo sempre, qui e in seguito, $\varphi(\lambda) \ldots T_2(\mu)$ per indicare il sistema di funzioni $\varphi(\lambda)$, $\psi(\mu)$, $P_1(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$, $T_1(\lambda)$, $P_2(\mu)$, $Q_2(\mu)$, $R_2(\mu)$, $T_2(\mu)$.

ivi finite e continue colle loro derivate prime, in modo da soddisfare le relazioni:

$$\text{(V)}\quad\begin{cases} x=\lambda+\displaystyle\int_{\varphi(\lambda)}^{\mu}\sigma y_\tau d\tau; \quad y=\mu+\int_{\psi(\mu)}^{\lambda}\rho x_\nu d\nu; \quad \bar z=F_1(\lambda)+\int_{\varphi(\lambda)}^{\mu}(\bar p x_\tau+\bar q y_\tau)d\tau; \\ \bar p=P_1(\lambda)+\displaystyle\int_{\varphi(\lambda)}^{\mu}(\bar r x_\tau+f y_\tau)d\tau; \quad \bar q=Q_1(\lambda)+\int_{\varphi(\lambda)}^{\mu}(f x_\tau+\bar t y_\tau)d\tau; \\ \bar r=R_1(\lambda)+\displaystyle\int_{\varphi(\lambda)}^{\mu}(\rho^2\bar t_\tau+\Phi y_\tau)d\tau; \quad \bar t=T_2(\mu)+\int_{\psi(\mu)}^{\lambda}(\sigma^2\bar r_\nu+\Psi x_\nu)d\nu. \end{cases}$$

$$\text{(VI)}\quad\begin{cases} \varphi(\lambda)=f_1(\lambda)-\displaystyle\int_{\psi[\varphi(\lambda)]}^{\lambda}(\rho x_\nu)_{\nu,\varphi(\lambda)}d\nu; \quad \psi(\mu)=f_2(\mu)-\int_{\varphi[\psi(\mu)]}^{\mu}(\sigma y_\tau)_{\psi(\mu),\tau}d\tau. \\ Q_1(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\lambda}[\chi_1(\nu)+T_1(\nu)f_1'(\nu)]d\nu; \quad P_2(\mu)=\int_0^{\mu}[R_2(\tau)f_2'(\tau)+\chi_2(\tau)]d\tau. \\ P_1(\lambda)=F_1'(\lambda)-f_1'(\lambda)Q_1(\lambda); \quad Q_2(\mu)=F_2'(\mu)-P_1(\mu)f_2'(\mu). \\ T_1(\lambda)=T_2[\varphi(\lambda)]+\displaystyle\int_{\psi[\varphi(\lambda)]}^{\lambda}(\sigma^2\bar r_\nu+\Psi x_\nu)_{\nu,\varphi(\lambda)}d\nu; \quad R_2(\mu)=R_1[\psi(\mu)]+\int_{\varphi[\psi(\mu)]}^{\mu}(\rho^2\bar t_\tau+\Phi y_\tau)_{\psi(\mu),\tau}d\tau. \\ R_1(\lambda)=F_1''(\lambda)-2\chi_1(\lambda)f_1'(\lambda)-f_1'^2(\lambda)T_1(\lambda)-f_1''(\lambda)Q_1(\lambda); \\ T_2(\mu)=F_2''(\mu)-R_2(\mu)f_2'^2(\mu)-2\chi_2(\mu)f_2'(\mu)-P_2(\mu)f_2''(\mu)\ \text{(}^{16}\text{)}\ », \end{cases}$$

$$\text{(VII)}\qquad \varphi(0)=\psi(0)=R_2(0)=T_1(0)=0,$$

dove si è posto:

$$\text{(13)}\qquad \Phi=\frac{2}{1+\delta}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)-\rho\left(\frac{df}{dy}\right)\right]; \quad \Psi=\frac{2}{1+\delta}\left[\left(\frac{df}{dy}\right)-\sigma\left(\frac{df}{dx}\right)\right],$$

e inoltre si deve osservare che le funzioni che compaiono sotto il segno di integrale nei secondi membri delle (V) e (VI) sono funzioni di λ, μ (o direttamente o come funzioni di $x(\lambda,\mu)\ldots,\bar t(\lambda,\mu)$); negli integrali fatti rispetto a ν si è messo ν al posto di λ, e in quelli fatti rispetto a τ si è messo τ al posto di μ; infine p. es. colla notazione $(\rho x_\nu)_{\nu,\varphi(\lambda)}$ si intende che la funzione ρx_ν è calcolata ponendo in essa ν al posto di λ e $\varphi(\lambda)$ al posto di μ, e analoghe convenzioni si sono fatte in casi simili. Manterremo in tutto il seguito queste notazioni.

([16]) Si noti che per le ipotesi (7) è ora sempre:

$$(\rho)_0=(\sigma)_0=0,$$

e quindi non occorrono le trasformazioni fatte nel § 3 di (M).

§ 2. Risoluzione del Problema di Goursat mediante approssimazioni successive.

1. Il metodo delle approssimazioni successive permette di costruire un sistema di soluzioni del PROBLEMA *b*), e quindi del PROBLEMA *a*), e di dimostrare che tali problemi ammettono un solo sistema di soluzioni.

Come in (M) § 4, n. 1, si vede subito che le funzioni richieste $x(\lambda, \mu) \ldots \bar{t}(\lambda, \mu)$, $\varphi(\lambda) \ldots T_2(\mu)$ sono tutte nulle per $\lambda = \mu = 0$, e che le condizioni imposte permettono di calcolare i valori delle derivate $x_\lambda \ldots \bar{t}_\lambda$, $x_\mu \ldots \bar{t}_\mu$, $\varphi'(\lambda) \ldots T_2'(\mu)$, $x_{\lambda\mu} \ldots \bar{t}_{\lambda\mu}$ per $\lambda = \mu = 0$.

Come punto di partenza per risolvere il sistema delle equazioni (V) e (VI) mediante approssimazioni successive si prende qui un sistema di funzioni $x^{(1)}(\lambda, \mu) \ldots t^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\varphi^{(1)}(\lambda) \ldots T_2^{(1)}(\mu)$, definite almeno per $|\lambda|$, $|\mu|$ abbastanza piccoli, e aventi derivate prime lipschitziane; si suppone inoltre che le funzioni $x^{(1)}(\lambda, \mu) \ldots t^{(1)}(\lambda, \mu)$ abbiano anche derivate seconde miste e le funzioni $P_1^{(1)}(\lambda)$, $Q_1^{(1)}(\lambda)$, $P_2^{(1)}(\mu)$, $Q_2^{(1)}(\mu)$ derivate seconde, che le funzioni $x^{(1)}(\lambda, \mu) \ldots t^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\varphi^{(1)}(\lambda) \ldots T_2^{(1)}(\mu)$ siano tutte nulle per $\lambda = \mu = 0$, e che le loro derivate prime assumano per $\lambda = \mu = 0$ proprio i valori calcolati a priori.

Non svilupperemo qui i calcoli, che occorrono per assicurare la convergenza delle approssimazioni successive, e che sono piuttosto laboriosi; tali calcoli sono simili a quelli fatti nel § 3 di (M), ma esigono qualche accorgimento in più e sono un po' più complicati, anche perchè tra le (VI) vi sono quattro relazioni (quelle che danno le funzioni $P_1(\lambda)$, $Q_2(\mu)$, $R_1(\lambda)$, $T_2(\mu)$), che non contengono integrali; bisogna pure tenere conto delle ipotesi più generali, fatte ora sui dati, in confronto a quelle fatte in (M).

Nelle ipotesi attuali non si può più provare l'esistenza di tutte le derivate seconde delle funzioni dei successivi sistemi $x^{(n)}(\lambda, \mu) \ldots t^{(n)}(\lambda, \mu)$, $\varphi^{(n)}(\lambda) \ldots T_2^{(n)}(\mu)$ $(n = 2, 3, \ldots)$, che si ottengono mediante le approssimazioni successive, ma soltanto quella delle $x^{(n)}_{\lambda\mu} \ldots t^{(n)}_{\lambda\mu}$, e delle $P_1''^{(n)}(\lambda)$, $Q_1''^{(n)}(\lambda)$, $P_2''^{(n)}(\mu)$, $Q_2''^{(n)}(\mu)$.

Si considerano valori di λ, μ, per cui sia:

$$(1) \qquad |\lambda| < h, \quad |\mu| < h,$$

dove h è un numero abbastanza piccolo, il cui limite superiore è determinato da certe diseguaglianze.

Alcune di queste si ottengono, imponendo condizioni perchè, per $|\lambda| < h$, $|\mu| < h$, i valori assoluti di tutte le funzioni $x^{(n)}(\lambda, \mu) \ldots t^{(n)}(\lambda, \mu)$, $\varphi^{(n)}(\lambda) \ldots T_2^{(n)}(\mu)$

$(n = 2, 3, \ldots)$, delle loro derivate prime e delle derivate seconde $P_1''^{(n)}(\lambda)$, $Q_1''^{(n)}(\lambda)$, $P_2''^{(n)}(\mu)$, $Q_2''^{(n)}(\mu)$, abbiano, per ogni n, gli stessi limiti superiori dei valori assoluti delle funzioni del sistema di partenza $x^{(1)}(\lambda, \mu) \ldots t^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\varphi^{(1)}(\lambda) \ldots T_2^{(1)}(\mu)$ e delle loro derivate.

Dall'ipotesi fatta che le derivate terze delle funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(y)$, $F_2(y)$ siano lipschitziane, e che le derivate prime delle funzioni del sistema di partenza $x^{(1)}(\lambda, \mu) \ldots t^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\varphi^{(1)}(\lambda) \ldots T_2^{(1)}(\mu)$ siano pure lipschitziane, segue che tutte le funzioni dei successivi sistemi $x^{(n)}(\lambda, \mu) \ldots t^{(n)}(\lambda, \mu)$, $\varphi^{(n)}(\lambda) \ldots T_2^{(n)}(\mu)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ hanno derivate prime lipschitziane; si impone inoltre la condizione che *per ognuna di queste derivate la costante di Lipschitz sia la stessa per tutti i valori di* n; da tale condizione seguono altre limitazioni per h.

La condizione che tutte le funzioni dei successivi sistemi $x^{(n)}(\lambda, \mu) \ldots t^{(n)}(\lambda, \mu)$, $\varphi^{(n)}(\lambda) \ldots T_2^{(n)}(\mu)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ abbiano derivate prime lipschitziane, e che per ognuna di esse la costante di LIPSCHITZ sia la stessa per tutti i valori di n occorre per dimostrare la convergenza delle approssimazioni successive, e ciò perchè sono incognite le funzioni $\varphi(\lambda)$, $\psi(\mu)$. Infatti si ha, p. es.:

$$x_\lambda^{(n)}(\lambda, \mu) = 1 - [\sigma^{(n-1)}(y_\mu^{(n-1)}\varphi'^{(n-1)}(\lambda) + y_\lambda^{(n-1)})]_{\lambda, \varphi^{(n-1)}(\lambda)} + \sigma^{(n-1)}y_\lambda^{(n-1)} +$$
$$+ \int_{\varphi_{n-1}(\lambda)}^{\mu} [\sigma_\lambda^{(n-1)}y_\tau^{(n-1)} - \sigma_\tau^{(n-1)}y_\lambda^{(n-1)}]d\tau \quad (^{17}),$$

e per maggiorare la differenza $x_\lambda^{(n)}(\lambda, \mu) - x_\lambda^{(n-1)}(\lambda, \mu)$ occorre maggiorare le differenze:

$$y_\lambda^{(n-1)}[\lambda, \varphi^{(n-1)}(\lambda)] - y_\lambda^{(n-2)}[\lambda, \varphi^{(n-2)}(\lambda)]; \quad y_\mu^{(n-1)}[\lambda, \varphi^{(n-1)}(\lambda)] - y_\mu^{(n-2)}[\lambda, \varphi^{(n-2)}(\lambda)].$$

L'ipotesi che le derivate terze delle funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(y)$, $F_2(y)$ siano lipschitziane occorre dunque, in quanto sono incognite le funzioni $\varphi(\lambda)$, $\psi(\mu)$.

Con metodi simili a quelli tenuti in (M), § 4, n. 3, si dimostra la convergenza delle approssimazioni successive, che è assicurata, imponendo ulteriori limitazioni per h.

([17]) Colla scrittura $\sigma^{(n-1)}$ si intende che la funzione σ delle variabili $x \ldots t$ è calcolata per $x = x^{(n-1)}(\lambda, \mu) \ldots t = t^{(n-1)}(\lambda, \mu)$. Scrivendo $[\ldots]_{\lambda, \varphi^{(n-1)}(\lambda)}$ si intende che le funzioni entro la parentesi sono calcolate per $\mu = \varphi^{(n-1)}(\lambda)$. Infine si è posto:

$$\sigma_\lambda = \sigma_x x_\lambda + \sigma_y y_\lambda + \sigma_z \bar{z}_\lambda + \sigma_p \bar{p}_\lambda + \sigma_q \bar{q}_\lambda + \sigma_r \bar{r}_\lambda + \sigma_t \bar{t}_\lambda,$$

e analogamente per σ_μ.

2. Dimostrata l'esistenza per $|\lambda| < h$, $|\mu| < h$ delle funzioni $x(\lambda, \mu) \dots \bar{t}(\lambda, \mu)$, $\varphi(\lambda) \dots T_2(\mu)$, finite e continue colle loro derivate prime, che soddisfano le (V) e (VI), si prova facilmente che tali derivate prime sono lipschitziane e che esistono le $P_1''(\lambda)$, $Q_1''(\lambda)$, $P_2''(\mu)$, $Q_2''(\mu)$.

Come in (M) § 4, n. 4 si dimostra poi che esistono le $x_{\lambda\mu}(\lambda, \mu) \dots \bar{t}_{\lambda\mu}(\lambda, \mu)$. Per il modo in cui è stato costruito, il sistema di funzioni $x(\lambda, \mu) \dots \bar{t}(\lambda, \mu)$, $\varphi(\lambda) \dots T_2(\mu)$ risolve il Problema *b*) e quindi il Problema *a*). Il metodo delle approssimazioni successive assicura anche l'unicità della soluzione di tali problemi.

Come nel § 5 di (M), dalle relazioni:

$$x = x(\lambda, \mu), \quad y = y(\lambda, \mu), \tag{2}$$

si ricavano le variabili λ, μ come funzioni di x, y:

$$\lambda = \lambda(x, y), \quad \mu = \mu(x, y), \tag{3}$$

dove le funzioni $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$ hanno, nel caso presente, derivate prime lipschitziane, e si sostituiscono nelle altre funzioni $\bar{z}(\lambda, \mu)$, $\bar{p}(\lambda, \mu)$, $\bar{q}(\lambda, \mu)$, $\bar{r}(\lambda, \mu)$, $\bar{t}(\lambda, \mu)$, al posto di λ, μ le funzioni $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$. Con ragionamenti simili a quelli fatti nel § 5 di (M) si prova che le funzioni $z(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$, $r(x, y)$, $t(x, y)$, che si sono così costruite, soddisfano le:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p\,; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y\,; z\,; p, q\,; r, t)\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t,$$

così che z come funzione di x, y ha derivate continue dei primi tre ordini (e anzi le sue derivate terze sono lipschitziane), ed è un integrale della (II); si prova pure subito che, per $y = f_1(x)$, $x = f_2(y)$, z si riduce rispettivamente alle funzioni assegnate $F_1(x)$ e $F_2(y)$.

Il Teorema I riesce così dimostrato.

Anche nelle nuove ipotesi più generali valgono considerazioni analoghe a quelle fatte nel § 7 di (M) circa il campo, in cui è definito l'integrale, che risolve il problema di Goursat, e circa il caso, in cui i due archi di curva γ_1 e γ_2, invece di attraversarsi, hanno un estremo in comune; sono validi i risultati ottenuti là.

§ 3. **Teoria delle caratteristiche per l'equazione non lineare del tipo iperbolico.**

1. I ragionamenti dei §§ 1 e 2 valgono, in particolare, anche quando una delle curve Γ_1 e Γ_2 (o entrambe), per cui si impone che passi la super-

ficie integrale richiesta dell'equazione (I), è tangente, nel punto comune alle due curve Γ_1 e Γ_2, a una delle curve caratteristiche di tale superficie, oppure anche è essa stessa una caratteristica della superficie integrale richiesta; anzi, in quest'ultimo caso, vi è qualche semplificazione.

Ci si riferirà, poichè, come si è visto, ciò non è restrittivo, al caso in cui l'equazione è scritta nella forma (II) e valgono le ipotesi (7) del § 1.

Se p. es. la curva Γ_1 è una caratteristica (necessariamente del primo sistema ([17bis])) della superficie integrale S richiesta, passante per Γ_1 e Γ_2, allora lungo Γ_1, e cioè per $y = f_1(x)$, $z = F_1(x)$, sono soddisfatte le equazioni del primo sistema di caratteristiche, cioè, se si pone:

$$p[x, f_1(x)] = P_1(x), \quad q[x, f_1(x)] = Q_1(x), \quad r[x, f_1(x)] = R_1(x), \quad t[x, f_1(x)] = T_1(x)$$

le funzioni $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$, che sono tutte nulle per $x = 0$, soddisfano il sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} f_1'(x) = \rho\,[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x);\ R_1(x),\ T_1(x)]. \\ F_1'(x) = P_1(x) + Q_1(x) f_1'(x). \\ P_1'(x) = R_1(x) + f[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x);\ R_1(x),\ T_1(x)] f_1'(x). \\ Q_1'(x) = f[\ldots]\ ([18]) \ + T_1(x) f_1'(x). \\ T_1'(x) = \sigma^2[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x);\ R_1(x),\ T_1(x)] R_1'(x) + \Psi[\ldots]. \end{cases}$$

Dunque condizione necessaria perchè Γ_1 sia una caratteristica della superficie integrale S richiesta, è che esistano quattro funzioni $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$, nulle per $x = 0$, che soddisfino il sistema (1).

Dalla prima delle (1), tenuto conto che $(\rho)_0 = 0$, segue subito $f_1'(0) = 0$.

Dalla seconda, terza e quarta delle (1) si ricava facilmente la relazione:

$$(2) \qquad \{1 + 2 f_1'(x) f_r[\ldots]\}\, R_1'(x) + \{f_1'^2(x) + 2 f_1'(x) f_t[\ldots]\}\, T_1'(x) = H[\ldots],$$

dove H è una funzione, di cui non scriveremo l'espressione esplicita, tenendo presente soltanto che in essa compaiono le derivate dei primi tre ordini di $f_1(x)$, $F_1(x)$ e le derivate prime della funzione f oltre, naturalmente, alle $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$. Dalla (2) e dall'ultima delle (1) si possono rica-

---

([17bis]) Si è infatti supposto che la curva Γ_1 abbia equazioni della forma $y = f_1(x)$, $z = F_1(x)$, dove $f_1(x)$, $F_1(x)$ sono continue colle loro derivate dei primi tre ordini. Lungo le curve caratteristiche del secondo sistema è $\dfrac{dx}{dy} = \sigma$ e $(\sigma)_0 = 0$, per le ipotesi fatte (7) del § 1.

([18]) Colla scrittura $f[\ldots]$ indichiamo che la funzione $f(x, y;\ z;\ p, q;\ r, t)$ è calcolata ponendo in essa $y = f_1(x)$, $z = F_1(x)$, $p = P_1(x)$, $q = Q_1(x)$, $r = R_1(x)$, $t = T_1(x)$. La stessa convenzione faremo per $\Psi[\ldots]$ e nel seguito *del presente paragrafo* in casi analoghi (p. es. più sotto per: $H[\ldots]$, $g_1[\ldots]$, $g_2[\ldots]$).

vare $R_1'(x)$, $T_1'(x)$ [19], ottenendo così il sistema:

$$(3) \qquad \begin{cases} P_1'(x) = R_1(x) + f[...]f_1'(x) \\ Q_1'(x) = f[...] + T_1(x)f_1'(x) \\ R_1'(x) = g_1[...] \\ T_1'(x) = g_2[...] \end{cases}$$

dove $g_1[...]$, $g_2[...]$ sono funzioni, di cui non staremo a scrivere le espressioni esplicite.

La condizione necessaria perchè la curva Γ_1 sia una caratteristica della superficie integrale $z = z(x, y)$ si trasforma in questa, che le quattro funzioni $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$, che soddisfano le (3) e sono nulle per $x = 0$, soddisfino anche la prima della (1).

Viceversa questa condizione è anche sufficiente perchè Γ_1 sia una caratteristica della superficie integrale S richiesta. Infatti, supposta soddisfatta la condizione enunciata, il sistema delle equazioni (V) e (VI) si può semplificare, ponendo $\varphi(\lambda) = 0$, e assumendo come funzioni $P_1(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$, $T_1(\lambda)$ le funzioni $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$, che soddisfano le (3) e sono nulle per $x = 0$ (si osservi che per $\mu = \varphi(\lambda)$, e quindi qui per $\mu = 0$, è $x = \lambda$); inoltre nel sistema delle (V) e (VI) del § 1 si lascino da parte le equazioni, che servono a calcolare $\varphi(\lambda)$, $P_1(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$, $T_1(\lambda)$, ottenendo così il sistema:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \lambda + \int_0^\mu \sigma y_\tau d\tau; \quad y = \mu + \int_{\psi(\mu)}^\lambda \rho x_\nu d\nu; \quad \bar{z} = F_1(\lambda) + \int_0^\mu (\bar{p} x_\tau + \bar{q} y_\tau) d\tau; \\ \bar{p} = P_1(\lambda) + \int_0^\mu (\bar{r} x_\tau + f y_\tau) d\tau; \quad \bar{q} = Q_1(\lambda) + \int_0^\mu (f x_\tau + \bar{t} y_\tau) d\tau; \\ \bar{r} = R_1(\lambda) + \int_0^\mu (\rho^2 \bar{t}_\tau + \Phi y_\tau) d\tau; \quad \bar{t} = T_2(\mu) + \int_{\psi(\mu)}^\lambda (\sigma^2 \bar{r}_\nu + \Psi x_\nu) d\nu; \\ \psi(\mu) = f_2(\mu) - \int_0^\mu (\sigma y_\tau)_{\psi(\mu),\,\tau} d\tau; \quad P_2(\mu) = \int_0^\mu [R_2(\tau) f_2'(\tau) + \chi_2(\tau)] d\tau; \\ Q_2(\mu) = F_2'(\mu) - P_2(\mu) f_2'(\mu); \quad R_2(\mu) = R_1[\psi(\mu)] + \int_0^\mu (\rho^2 \bar{t}_\tau + \Phi y_\tau)_{\psi(\mu),\,\tau} d\tau; \\ T_2(\mu) = F_2''(\mu) - f_2'^2(\mu) R_2(\mu) - 2 f_2'(\mu) \chi_2(\mu) - f_2''(\mu) P_2(\mu), \end{cases}$$

[19] Si vede subito infatti che il determinante dei coefficienti di $R_1'(x)$, $T_1'(x)$ nelle due equazioni indicate è diverso da zero.

colle condizioni:

$$\psi(0) = T_2(0) = 0.$$

Se le funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$ hanno derivate terze lipschitziane, le funzioni $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$ hanno derivate prime lipschitziane, come si vede subito, e restano validi per le (4) (e anzi si semplificano) i ragionamenti fatti nel § 2. Si ottiene così un sistema (unico) di funzioni $x(\lambda, \mu) \dots \bar{t}(\lambda, \mu)$, $\psi(\mu)$, $P_2(\mu)$, $Q_2(\mu)$, $R_2(\mu)$, $T_2(\mu)$, che soddisfano le (4). Da queste segue senz'altro che, per $\mu = 0$, è $x = \lambda$, $z = F_1(x)$, $p = P_1(x)$, $q = Q_1(x)$, $r = R_1(x)$; si indichino poi con $Y(x)$, $T(x)$ le funzioni a cui si riducono $y(\lambda, \mu)$, $\bar{t}(\lambda, \mu)$ per $\mu = 0$ (e quindi per $x = \lambda$); dalle (4), tenendo conto che per $\mu = 0$ è $x_\lambda = 1$, segue:

$$(5) \qquad \begin{cases} Y'(x) = \rho\,[x,\, Y(x);\; F_1(x);\; P_1(x),\; Q_1(x);\; R_1(x),\; T(x)] \\ T'(x) = \sigma^2[x,\, Y(x);\; F_1(x);\; P_1(x),\; Q_1(x);\; R_1(x),\; T(x)]R_1'(x) + \\ \qquad + \Psi[x,\, Y(x);\; F_1(x);\; P_1(x),\; Q_1(x);\; R_1(x),\; T(x)]. \end{cases}$$

Il sistema delle (5) (nelle due funzioni incognite $Y(x)$, $T(x)$), ammette un *unico sistema* di soluzioni $Y(x)$, $T(x)$ nulle per $x = 0$, ma, per la prima e l'ultima delle (1), le (5) sono soddisfatte dalle funzioni $f_1(x)$, $T_1(x)$, nulle per $x = 0$.

Dunque certamente:

$$Y(x) = f_1(x), \quad T(x) = T_1(x);$$

segue subito di qui che Γ_1 è una curva caratteristica della superficie integrale costruita $z = z(x, y)$ [19bis], passante per le due curve Γ_1 e Γ_2; infatti nei punti di Γ_1 le derivate p, q, r, t si riducono alle funzioni $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$, che soddisfano le (1).

2. Condizioni analoghe alle (1) valgono perchè Γ_2 sia una caratteristica (necessariamente del secondo sistema) della superficie integrale richiesta.

Se valgono assieme le (1) nei punti di Γ_1 e le analoghe nei punti di Γ_2, cioè se Γ_1 e Γ_2 sono entrambe curve caratteristiche dei due diversi sistemi per la superficie integrale richiesta, si possono semplificare ipotesi e dimostrazione del TEOREMA I. Precisamente in questo caso è sufficiente supporre che le funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(y)$, $F_2(y)$ abbiano derivate terze continue (senza l'ipotesi ulteriore che le derivate terze di tali funzioni siano lipschitziane), e ciò perchè, in questo caso. le funzioni $\varphi(\lambda)$, $\psi(\mu)$ sono già note, ed è

(19bis) L'esistenza dell'integrale $z(x, y)$ è dimostrata in piccolo (si tenga presente il TEOREMA I). Così nel, seguito, molte tra le considerazioni fatte si intenderanno fatte in piccolo (anche se ciò sarà sottinteso negli enunciati).

$\varphi(\lambda) = \psi(\mu) = 0$ identicamente. Il sistema (4) diviene qui:

$$
(6)\qquad \begin{cases}
x = \lambda + \int_0^\mu \sigma y_\tau d\tau; \quad y = \mu + \int_0^\lambda \rho x_\nu d\nu; \quad \bar{z} = F_1(\lambda) + \int_0^\mu (\bar{p} x_\tau + \bar{q} y_\tau) d\tau. \\
\bar{p} = P_1(\lambda) + \int_0^\mu (\bar{r} x_\tau + f y_\tau) d\tau; \quad \bar{q} = Q_1(\lambda) + \int_0^\mu (f x_\tau + \bar{t} y_\tau) d\tau. \\
\bar{r} = R_1(\lambda) + \int_0^\mu (\rho^2 \bar{t}_\tau + \Phi y_\tau) d\tau; \quad \bar{t} = T_2(\mu) + \int_0^\lambda (\sigma^2 \bar{r}_\nu + \Psi x_\nu) d\nu,
\end{cases}
$$

dove le funzioni $P_1(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$, $T_2(\mu)$ sono funzioni note, aventi derivata prima continua ([20]), determinate le prime tre dal sistema (3) di equazioni e l'ultima dal sistema analogo, relativo a Γ_2, che non si è scritto. I ragionamenti del § 2 riescono ora molto semplificati ([21]); l'integrale $z = z(x, y)$, che si costruisce, ha derivate continue dei primi tre ordini (ma, in generale, le sue derivate terze non sono lipschitziane).

I ragionamenti precedenti assicurano che le curve Γ_1 e Γ_2 sono curve caratteristiche della superficie integrale S costruita.

3. Le derivate terze, p. es., di $f_1(x)$, $F_1(x)$ compaiono soltanto nelle espressioni delle funzioni g_1, g_2, che stanno a secondo membro nelle ultime due equazioni del sistema (3), dal quale riescono determinate le funzioni $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$; ma *se è già noto un sistema* di funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$, *che soddisfano le* (1), per costruire, coi metodi precedenti, una superficie integrale S della (II), passante per Γ_1 e Γ_2, è sufficiente supporre che tali funzioni abbiano derivate prime lipschitziane ([22]), se Γ_2 non è una caratteristica della superficie integrale S richiesta, oppure più semplicemente che le funzioni indicate abbiano derivate prime continue, se anche Γ_2 è una caratteristica della superficie integrale S richiesta.

([20]) Anzi le funzioni $P_1(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$ hanno anche derivata seconda continua, come segue subito dalle (1).

([21]) In questo caso non occorre più imporre la condizione che tutti i sistemi di funzioni $x^{(n)} \dots t^{(n)}$ ottenuti colle approssimazioni successive abbiano derivate prime lipschitziane. Del resto si possono ripetere qui, con lievi mutamenti, le osservazioni fatte alla fine del § 6 (p. 224) di (M).

([22]) In realtà è sufficiente l'ipotesi che le funzioni $R_1(x)$, $T_1(x)$ abbiano derivate lipschitziane, perchè dal sistema (1) segue già che le funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$ hanno anche derivate seconde continue.

Se è *data una superficie integrale* Σ della (II), e se la curva Γ_1 è una sua caratteristica, è certamente noto un sistema di funzioni che soddisfano le (1); se $z = Z(x, y)$ è l'equazione della superficie Σ, e se $Z(x, y)$ è una funzione dotata di derivate terze lipschitziane, il Teorema I e le considerazioni precedenti permettono di *costruire una superficie integrale* S *di equazione* $\mathrm{z} = \mathrm{z}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, *avente con la superficie* Σ *un contatto del secondo ordine in un punto* P *di* Γ_1, *passante per* Γ_1 *e per un'altra curva arbitraria* Γ_2 *che ha il punto* P *in comune con* Γ_1 (interno a entrambi gli archi Γ_1 e Γ_2 di curva ([23])), *e non è tangente a* Γ_1, purchè siano soddisfatte semplici condizioni di compatibilità nel punto P comune a Γ_1 e a Γ_2 (precisamente se p. es. il punto P comune a Γ_1 e Γ_2 corrisponde a $x = y = 0$, e se la funzione $Z(x, y)$ si annulla nell'origine colle derivate dei primi due ordini, il che non è restrittivo, basta supporre che sia:

$$F_2(0) = F_2'(0) = F_2''(0) = 0). \tag{7}$$

Dalle considerazioni precedenti segue che *la curva* Γ_1 *è una caratteristica anche per la superficie costruita* S, *e che le due superfici* S *e* Σ *hanno nei punti di* Γ_1 *un contatto del secondo ordine. Se la curva* Γ_2 *è anch'essa una caratteristica per la superficie* S *richiesta, è sufficiente l'ipotesi che* $\mathrm{Z}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *abbia derivate terze continue.*

Poichè esistono infinite curve Γ_2, che soddisfano le condizioni (analoghe alle (1)) perchè Γ_2 sia una caratteristica, e inoltre che soddisfano le condizioni di compatibilità (7), si ha subito il risultato fondamentale, di cui si è parlato nell'introduzione:

Teorema II. — « *Data una superficie* $\Sigma : \mathrm{z} = \mathrm{Z}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *integrale dell'equazione* (I), *dove* $\mathrm{Z}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *è una funzione continua colle sue derivate dei primi tre ordini, e una sua curva caratteristica* Γ_1, Γ_1 *è pure una caratteristica per ogni superficie integrale* S *della* (I), *passante per essa e avente colla superficie* Σ *un contatto del secondo ordine in un punto di* Γ_1; *le superfici* S *e* Σ *hanno un contatto del secondo ordine in ogni punto di* Γ_1. *Esistono effettivamente infinite altre superfici integrali della* (I), *passanti per* Γ_1, *per cui* Γ_1 *è una caratteristica, e aventi colla superficie* Σ *un contatto del secondo ordine nei punti di* Γ_1 ».

([23]) In tutto il presente paragrafo si suppone che i due archi di curva Γ_1 e Γ_2 si incrocino in un punto, interno ad entrambi. Si potrebbe anche supporre che Γ_1 e Γ_2 abbiano un estremo in comune; in questo caso, se Γ_1 e Γ_2 sono entrambe caratteristiche della superficie integrale S richiesta, il problema è certo risolubile in modo unico. Se soltanto Γ_1 è una caratteristica della superficie S, si devono imporre a Γ_2 condizioni del tipo di quelle date nel § 7 di (M).

4. Un sistema di funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$, continue colle loro derivate prime, che soddisfi le (1), costituisce una *striscia caratteristica* (del primo sistema) dell'equazione (II); si dirà che una superficie integrale $z = z(x, y)$ della (II) contiene tale striscia caratteristica, se la curva $y = f_1(x)$ appartiene al campo di definizione della funzione $z(x, y)$ e se è:

$$z[x, f_1(x)] = F_1(x); \quad p[x, f_1(x)] = P_1(x); \quad q[x, f_1(x)] = Q_1(x);$$
$$r[x, f_1(x)] = R_1(x); \quad t[x, f_1(x)] = T_1(x).$$

Una striscia caratteristica dipende da una funzione arbitraria (p. es. nelle (1) si può prendere ad arbitrio $R_1(x)$), e dai valori y_1, z_1, p_1, q_1, t_1, assegnati ad arbitrio per le funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $T_1(x)$ in un punto $x = x_1$ ([24]). Mediante le (1) si determinano dunque tutte le strisce caratteristiche del primo sistema per l'equazione (II). Analoghe considerazioni valgono per le strisce caratteristiche del secondo sistema.

Il TEOREMA I e le considerazioni del presente paragrafo provano che, anche nel campo delle funzioni di variabile reale, vale il risultato, ben noto nel campo analitico ([25]):

TEOREMA III. — « *Data una striscia caratteristica dell'equazione* (II): $f_1(x) \dots T_1(x)$ ([26]), *esistono infinite superfici integrali dell'equazione* (II), *che la contengono; la curva* $y = f_1(x)$, $z = F_1(x)$ *è una caratteristica per tutte queste superfici integrali, che hanno fra loro un contatto del secondo ordine nei punti della curva stessa. Date due strisce caratteristiche dei due diversi sistemi* $f_1(x) \dots T_1(x)$; $f_2(y) \dots T_2(y)$, *aventi un elemento (del secondo ordine)* ([27]) *in comune, esiste una e una sola superficie integrale dell'equazione* (II), *che la contiene; le curve* $y = f_1(x)$, $z = F_1(x)$, *e* $x = f_2(y)$, $z = F_2(y)$ *sono caratteristiche di tale superficie* ».

Risultati analoghi valgono per l'equazione (I).

5. Sia dato un sistema di funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$, definite p. es. per $|x|$ abbastanza piccolo, finite e continue colle loro derivate

---

([24]) Il sistema di valori x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, $R(x_1)$, t_1 deve essere interno al campo di definizione della funzione $f(x, y; z; p, q; r, t)$.

([25]) Cfr. GOURSAT, l. c. alla nota (4), p. 191 e 193.

([26]) Scriviamo qui e in seguito $f_1(x) \dots T_1(x)$ al posto di $f_1(x)$, $F_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $T_1(x)$.

([27]) Nel senso che esista un sistema di valori x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, t_1, interno al campo di definizione della funzione $f(x, y; z; p, q; r, t)$, tali che sia:

$$y_1 = f_1(x_1); \; x_1 = f_2(y_1); \; z_1 = F_1(x_1) = F_2(y_1); \; p_1 = P_1(x_1) = P_2(y_1); \; q_1 = Q_1(x_1) = Q_2(y_1);$$
$$r_1 = R_1(x_1) = R_2(y_1); \; t_1 = T_1(x_1) = T_2(y_1).$$

prime, nulle per $x=0$ (il che non è restrittivo), che soddisfino le relazioni [28]:

$$(8)\qquad \begin{cases} F_1'(x)=P_1(x)+Q_1(x)f_1'(x); \quad P_1'(x)=R_1(x)+f[\ldots]f_1'(x) \ ^{(29)}; \\ Q_1'(x)=f[\ldots]+T_1(x)f_1'(x). \end{cases}$$

Se:

$$(9)\qquad f_1'(x)\neq\rho[\ldots] \ ^{(30)},$$

risultati di vari autori [31] provano che si può risolvere in modo unico il *problema di Cauchy: determinare un integrale* $z=z(x, y)$ *della* (II), *definito almeno per* $|x|$, $|y|$ *abbastanza piccoli, e finito e continuo colle sue derivate dei primi tre ordini, che soddisfa le condizioni*:

$$(10)\qquad z[x, f_1(x)]=F_1(x); \quad q[x, f_1(x)]=Q_1(x).$$

Dalle considerazioni del presente paragrafo si ha subito il risultato che:

TEOREMA IV. — « *Se è*:

$$(11)\qquad f_1'(x)=\rho[\ldots], \quad T_1'(x)\neq\sigma^2[\ldots]R_1'(x)+\Psi[\ldots],$$

il problema di Cauchy non ammette soluzione; se è:

$$(12)\qquad f_1'(x)=\rho[\ldots], \quad T_1'(x)=\sigma^2[\ldots]R_1'(x)+\Psi[\ldots],$$

cioè se il sistema di funzioni $f_1(x) \ldots T_1(x)$ *costituisce una striscia caratteristica della* (II), *il problema di Cauchy ha infinite soluzioni* ».

Questo teorema, che è ben noto nel campo analitico [32], è ora dimostrato anche nel campo reale sotto ipotesi, che non sembrano ulteriormente riducibili. È così completato un punto, che non era ancora stato preso in considerazione, relativamente al problema di CAUCHY nel campo reale per le equazioni di tipo iperbolico *non lineare.*

Dai risultati relativi al problema di CAUCHY per la (I) segue anche che:

TEOREMA V. — « *Se due superfici integrali della* (I): $z=z(x, y)$, $z=Z(x, y)$, *dove* $z(x, y)$ *e* $Z(x, y)$ *sono funzioni continue colle loro derivate dei primi tre ordini, hanno in comune una curva* Γ *avente tangente variabile con continuità,*

---

(28) Ci riferiamo, al solito, all'equazione (II) e supponiamo che siano soddisfatte le ipotesi (7) del § 1, poichè ciò non è restrittivo.

(29) Cfr. per la notazione $f[\ldots]$ la nota (18).

(30) Certamente è $f_1'(x)\neq\sigma[\ldots]$ almeno per $|x|$ piccolo (cfr. più sopra la nota (17bis)).

(31) Cfr. p. es. H. LEWY, *Ueber das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen* (« Math. Ann. », t. 98, 1928, p. 179-191).

V. anche J. HADAMARD, *Le problème de Cauchy* (Paris 1932), Appendice III, p. 487 e seg.

(32) GOURSAT, l. c. alla nota (4), p. 198.

e se nei punti di Γ *le due superfici hanno un contatto del secondo ordine, la curva* Γ *è una caratteristica per entrambe le superfici* ([33]) ».

§ 4. **Equazione quasi-lineare.**

1. Si supponga che, in particolare, l'equazione (I) sia *quasi-lineare,* cioè abbia la forma:

$$\text{(VIII)} \quad A(x, y; z; p, q)r + 2B(x, y; z; p, q)s + C(x, y; z; p, q)t = D(x, y; z; p, q),$$

dove A, B, C, D sono funzioni di x, y, z, p, q definite in un certo campo, ivi finite e continue colle loro derivate parziali dei primi due ordini, e soddisfacenti la relazione:

$$(1) \qquad B^2 - AC > 0,$$

in tutto il campo, in cui sono definite, così che l'equazione (VIII) sia del tipo iperbolico in tutto il campo considerato.

In questo caso si possono semplificare ipotesi e dimostrazione del Teorema I rispetto al caso generale dell'equazione (I).

Precisamente, restando ferme tutte le altre ipotesi fatte al principio del § 1, basta supporre che le funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(y)$, $F_2(y)$ *abbiano derivate seconde lipschitziane* (almeno, rispettivamente, in un conveniente intorno dei punti $x = x_1$, $y = y_1$).

Il Teorema I diviene:

Teorema I'. — *Esiste uno e un solo integrale della* (VIII): $z = z(x, y)$, *definito almeno in un intorno del punto* (x_1, y_1), *finito e continuo colle derivate dei primi due ordini* ([34]), *che si riduce alle funzioni assegnate* $F_1(x)$ *e*

([33]) Questo enunciato precisa una affermazione del Levi, l. c. alla nota ([5]), p. 291; il Levi infatti non enuncia le ipotesi di derivabilità, sotto cui vale il teorema nel campo reale, e inoltre dice semplicemente che la curva Γ è curva di contatto tra le due superfici integrali della (I). Ora per la validità del teorema nel caso generale di una *equazione (I), non lineare neppure soltanto nelle derivate di ordine massimo,* bisogna imporre la condizione che le due superfici integrali della (I) abbiano un *contatto del secondo ordine nei punti di* Γ, e ciò perchè, come si vede con semplici esempi, *due superfici integrali* di una equazione non lineare neppure nelle derivate di ordine massimo, *possono avere in comune una curva* Γ *e avere nei punti di* Γ *un contatto del primo ordine, senza che* Γ *sia una caratteristica per le due superfici.* Si vedrà, alla fine del presente lavoro (cfr. in seguito il § 4, Teorema V') che, *se l'equazione è quasi lineare, è sufficiente supporre che due superfici integrali abbiano, nei punti della curva* Γ *comune, un contatto del primo ordine, perchè* Γ *sia una caratteristica per entrambe le superfici.*

([34]) Anzi le derivate seconde risultano lipschitziane.

$F_2(y)$ ***rispettivamente sugli archi delle curve*** γ_1 *e* γ_2, ***i quali sono contenuti in quell' intorno (in cui è definito l' integrale stesso) e si tagliano nel punto*** (x_1, y_1) ».

2. Come nel § 1, ci si riconduce a supporre che sia $x_1 = y_1 = 0$, che le funzioni $F_1(x)$, $F_2(y)$ siano nulle nell' origine colle loro derivate dei primi due ordini, e che infine sia:

$$(A)_0 = (C)_0 = (D)_0 = 0,$$

così che anche l' integrale cercato si annulli nell' origine colle derivate dei primi due ordini.

Posto:

$$\delta = \sqrt{B^2 - AC}; \quad \rho = \frac{C}{B + \delta}; \quad \sigma = \frac{A}{B + \delta}, \tag{2}$$

come nel § 1 ([35]), la dimostrazione del TEOREMA I' è ricondotta a provare che esiste uno e un solo sistema di soluzioni del:

PROBLEMA *a'*) — « *Determinare un sistema di funzioni* $\mathrm{x}(\lambda, \mu)$, $\mathrm{y}(\lambda, \mu)$, $\bar{\mathrm{z}}(\lambda, \mu)$, $\bar{\mathrm{p}}(\lambda, \mu)$, $\bar{\mathrm{q}}(\lambda, \mu)$, *definite almeno per* $|\lambda|$, $|\mu|$ *abbastanza piccoli, e finite e continue colle loro derivate prime e colle derivate seconde miste, in modo da soddisfare il sistema di equazioni*:

$$\begin{cases} x_\mu = \sigma y_\mu; \quad y_\lambda = \rho x_\lambda; \quad \bar{z}_\mu = \bar{p} x_\mu + \bar{q} y_\mu; \\ A\bar{p}_\lambda + (B + \delta)\bar{q}_\lambda = D x_\lambda; \quad (B + \delta)\bar{p}_\mu + C\bar{q}_\mu = D y_\mu, \end{cases} \tag{3}$$

e costruire sei funzioni: $\varphi(\lambda)$, $\psi(\mu)$, $\mathrm{P}_1(\lambda)$, $\mathrm{Q}_1(\lambda)$, $\mathrm{P}_2(\mu)$, $\mathrm{Q}_2(\mu)$, *finite e continue colle loro derivate prime, in modo da soddisfare le condizioni*:

$$\begin{cases} x[\lambda, \varphi(\lambda)] = \lambda; \quad y[\ldots] = f_1(\lambda); \quad \bar{z}[\ldots] = F_1(\lambda); \quad \bar{p}[\ldots] = P_1(\lambda); \quad \bar{q}[\ldots] = Q_1(\lambda). \\ x\,|\,\psi(\mu), \mu\,| = f_2(\mu); \quad y\,|\ldots| = \mu; \quad \bar{p}\,|\ldots| = P_2(\mu); \quad \bar{q}\,|\ldots| = Q_2(\mu). \\ P_1(\lambda) + f_1'(\lambda) Q_1(\lambda) = F_1'(\lambda); \quad P_2(\mu) f_2'(\mu) + Q_2(\mu) = F_2'(\mu); \\ \qquad \varphi(0) = \psi(0) = P_2(0) = Q_1(0) = 0 \text{ ».} \end{cases} \tag{4}$$

Cogli stessi metodi del § 2 si prova che il PROBLEMA *a'*) ammette uno e un solo sistema di soluzioni, e come in (M) ([36]), si prova che, ricavando dalle funzioni ottenute $x = x(\lambda, \mu)$, $y = y(\lambda, \mu)$ le λ, μ come funzioni di x, y, e sostituendo in z, si ottiene una funzione di x, y finite e continua colle sue

([35]) Cfr. anche (M), § 8, p. 227 e seg.

([36]) Cfr. (M), § 8, p. 227 e seg.

derivate prime e seconde [37], che soddisfa la (VIII), e che per $y = f_1(x)$ si riduce a $F_1(x)$, per $x = f_2(y)$ si riduce a $F_2(y)$.

3. Anche le considerazioni e i risultati del § 3 si semplificano. La condizione necessaria e sufficiente, perchè la curva Γ_1, di equazioni $y = f_1(x)$, $z = F_1(x)$, sia una caratteristica (del primo sistema) per la superficie integrale S richiesta, è ora che esistano due funzioni $P_1(x)$ e $Q_1(x)$, finite e continue colla derivata prima e nulle per $x = 0$, che soddisfino il sistema:

$$(5)\begin{cases} f_1'(x) = \rho[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x)]; \quad F_1'(x) = P_1(x) + f_1'(x)Q_1(x); \\ Q_1'(x) = -\sigma[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x)]P_1'(x) + M[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x)] \end{cases}$$

dove si è posto:

$$M = \frac{D}{B+\delta}.$$

Condizioni analoghe valgono perchè la curva Γ_2 sia una caratteristica (del secondo sistema).

Se Γ_1 e Γ_2 sono entrambe caratteristiche per la superficie integrale S richiesta, le ipotesi del TEOREMA I′ si semplificano ed *è sufficiente che le funzioni* $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(y)$, $F_2(y)$ *abbiano derivate continue dei primi due ordini* (senza l'ipotesi ulteriore che le derivate seconde siano lipschitziane) [38].

4. Come nel § 3, il TEOREMA I′ e le osservazioni fatte ora permettono di risolvere il problema: *data una superficie* Σ *integrale della* (VIII) *di equazione*: $z = Z(x, y)$, *dove* $Z(x, y)$ *ha derivate seconde lipschitziane, e una sua caratteristica* Γ_1, *costruire una superficie* S *integrale della* (VIII) *tangente alla superficie* Σ *in un punto* P *di* Γ_1, *passante per* Γ_1 *e per un' altra curva arbitraria* Γ_2, *avente con* Γ_1 *il punto* P *in comune* (interno a entrambi gli archi Γ_1 e Γ_2) *e ivi non tangente a* Γ_1, quando siano soddisfatte semplici condizioni di compatibilità nel punto P comune a Γ_1 e Γ_2 (se, p. es., tale punto corrisponde a $x = y = 0$ e se ivi $Z(x, y)$ si annulla colle sue derivate prime, il che non è restrittivo, basta che sia $F_2(0) = F_2'(0) = 0$); Γ_1 *è una caratteristica anche per la superficie integrale* S *costruita, e le due superfici* S *e* Σ *hanno ora un contatto del primo ordine nei punti di* Γ_1 (e non necessariamente del secondo ordine, come nel caso generale). *Se* Γ_2 *risulta essere anch' essa una caratteristica per la superficie integrale* S *richiesta, è*

[37] Anzi le derivate seconde sono lipschitziane.

[38] L'integrale della (VIII): $z = z(x, y)$, che si costruisce, ha, in queste ipotesi, derivate continue dei primi due ordini, ma le sue derivate seconde, in generale, non sono lipschitziane.

sufficiente l'ipotesi che Z(x, y) *abbia derivate continue dei primi due ordini* (senza l'ipotesi ulteriore che le derivate seconde siano lipschitziane).

Si giunge così a dimostrare il:

TEOREMA II'. — « *Data una superficie* Σ, *di equazione*: $z = Z(x, y)$, *integrale dell'equazione* (VIII), *dove* Z(x, y) *è una funzione continua colle sue derivate dei primi due ordini, e una sua curva caratteristica* Γ_1, Γ_1 *è pure una caratteristica per ogni superficie integrale* S *della* (VIII), *passante per essa, e avente colla superficie* Σ *un contatto del primo ordine in un punto di* Γ_1; *le superfici* S *e* Σ *hanno un contatto del primo ordine in ogni punto di* Γ_1. *Esistono effettivamente infinite superfici integrali della* (VIII), *passanti per* Γ_1, *per cui* Γ_1 *è una caratteristica, e aventi colla superficie* Σ *un contatto del primo ordine nei punti di* Γ_1 ».

5. Un sistema di funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$, continue colle loro derivate prime, che soddisfi le (5) (39) costituisce una striscia caratteristica (del primo sistema) per l'equazione (VIII); si dirà che una superficie integrale $z = z(x, y)$ della (VIII) contiene tale striscia caratteristica, se la curva $y = f_1(x)$ appartiene al campo di definizione della funzione $z(x, y)$, e se è:

$$z[x, f_1(x)] = F_1(x); \quad p[x, f_1(x)] = P_1(x); \quad q[x, f_1(x)] = Q_1(x).$$

Una striscia caratteristica dipende da una funzione arbitraria (p. es. nelle (5) si può dare ad arbitrio la funzione $P_1(x)$ come funzione derivabile di x) e dai valori y_1, z_1, q_1 dati ad arbitrio per le funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $Q_1(x)$ in un punto $x = x_1$ (40). Le (5) determinano così tutte le striscie caratteristiche del primo sistema; equazioni analoghe determinano le strisce caratteristiche del secondo sistema.

Anche qui vale il:

TEOREMA III'. — « *Data una striscia caratteristica della* (VIII): $f_1(x)$, $F_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$, *esistono infinite superfici integrali dell'equazione stessa, che la contengono; la curva* $y = f_1(x)$, $z = F_1(x)$ *è una caratteristica di tutte queste superfici integrali, che hanno tra loro un contatto del primo ordine nei punti di tale curva. Date due strisce caratteristiche dei due diversi sistemi* $f_1(x)$, $F_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$ *e* $f_2(y)$, $F_2(y)$, $P_2(y)$, $Q_2(y)$ *aventi un elemento (del primo ordine)* (41)

(39) Si vede subito che le funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$ hanno anche derivate seconde continue.

(40) Il sistema di valori x_1, y_1, z_1, $P_1(x_1)$, q_1 deve essere interno al campo di definizione delle funzioni A, B, C, D.

(41) Nel senso che vi sia un sistema di valori x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 tali che sia:

$$y_1 = f_1(x_1), \; x_1 = f_2(y_1); \; z_1 = F_1(x_1) = F_2(y_1); \; p_1 = P_1(x_1) = P_2(y_1); \; q_1 = Q_1(x_1) = Q_2(y_1).$$

in comune, esiste una e una sola superficie integrale, che la contiene; le curve $y = f_1(x)$, $z = F_1(x)$ *e* $x = f_2(y)$, $z = F_2(y)$ *sono caratteristiche di tale superficie* ».

6. Sia dato un sistema di funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$, definite p. es., per $|x|$ abbastanza piccolo, finite e continue colle loro derivate prime, nulle per $x = 0$ (il che non è restrittivo), che soddisfino la relazione: $F_1'(x) = P_1(x) + Q_1(x) f_1'(x)$. Allora se:

$$f_1'(x) \neq \rho[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x)],$$

è ben noto ([42]) che si può risolvere in modo unico per la (VIII) il problema di Cauchy: *determinare un integrale* $z(x, y)$ *della* (VIII), *definito almeno per* $|x|$, $|y|$ *abbastanza piccoli, finito e continuo colle sue derivate prime e seconde, che soddisfi le:*

$$z[x, f_1(x)] = F_1(x);\quad q[x, f_1(x)] = Q_1(x) \text{ ».}$$

Si ha anche qui il:

Teorema IV'. — « *Se è:*

$$f_1'(x) = \rho[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x)];$$
$$Q_1'(x) \neq -\sigma[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x)]P_1'(x) + M[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x)]$$

il problema di Cauchy non ammette soluzioni; se è:

$$f_1'(x) = \rho[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x)];$$
$$Q_1'(x) = -\sigma[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x)]P_1'(x) + M[x, f_1(x);\ F_1(x);\ P_1(x),\ Q_1(x)]$$

cioè se il sistema di funzioni $f_1(x)$, $F_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$ *costituisce una striscia caratteristica della* (VIII), *il problema di Cauchy ammette infinite soluzioni* ».

Si ha infine il:

Teorema V'. — « *Se due superfici integrali della* (VIII): $z = z(x, y)$, $z = Z(x, y)$ *hanno in comune una curva* Γ, *dotata di tangente variabile con continuità, e se nei punti di* Γ *le due superfici hanno un contatto del primo ordine, la curva* Γ *è una caratteristica per entrambe le superfici integrali* ([43]) ».

([42]) Cfr. la nota ([31]).

([43]) Invece, come si è osservato più sopra (cfr. la nota ([33])), nel caso generale, se l'equazione (I) non è lineare neppure nelle derivate di ordine massimo, due superfici integrali possono avere in comune una curva Γ, e avere nei punti di Γ un contatto del primo ordine, senza che Γ sia una caratteristica per le due superfici.