Variétés linéaires par morceaux et variétés combinatoires (*)

par Paul Dedecker (Université de Liège)

Au Professeur Enrico Bompiani, pour son Jubilé scientifique, en témoignage de mon admiration.

Résumé. - *On connaît le rôle important joué par la notion de variété combinatoire dans dans les développements récents de la topologie différentielle* [6], [8]. *Une structure combinatoire sur une variété topologique* $\mathfrak{V}$ *s'identifie à une classe de triangulations isomorphes de* $\mathfrak{V}$ *(i. e. deux quelconques d'entre elles sont obtenues à partir de complexes simpliciaux qui admettent des subdivisions isomorphes). Il convient de considerer en outre une relation d'équivalence plus forte définissant des structures de "variétés linéaires par morceaux", une structure combinatoire correspondant à une classe de structures linéaires par morceaux "homéomorphes". Nous montrons que cette notion est équivalente, sur une variété paracompacte, à celle de structure d'espace localement isomorphe à* R^n *munie du pseudogroupe des homéomorphismes locaux linéaires par morceaux. On montre aussi que les variétés linéaires par morceaux forment une catégorie qui admet un foncteur covariant associant à chaque objet* $\mathfrak{V}$ *de la catégorie un espace fibré* $C(\mathfrak{V})$ *de "cônes tangents".*

Introduction. - On connaît le rôle joué par les notions de PL-variété (variété linéaire par morceaux) et de variété combinatoire dans les développements récents de la topologie différentielle. Au sujet des premières E. C. Zeeman [9*a*] et l'auteur [4*b*] ont, indépendamment l'un de l'autre, énoncé le résultat suivant lequel une variété polyédrale $\mathfrak{V}$ peut être définie par un atlas de $\mathfrak{V}$ par rapport à R^n compatible avec le pseudogroups des isomorphismes locaux linéaires par morceaux. On trouvera ci-dessous une démonstration complète de ce résultat. Nous introduisons aussi une notion d'« espace tangent » à une PL-variété: cette notion est liée aux PL-microfibrés de Milnor [6*c*] d'une manière sur laquelle nous reviendrons ailleurs. Enfin nous proposons des définitions précises qui distinguent « PL-variété » et « variété combinatoire ». Elles s'écartent quelque peu de la terminologie

---

(*) Ce travail développe des exposés faits au Séminaire mathématique de l'Ecole de Physique et Mathématique de l'Université Centrale du Vénézuéla (Caracas) en mai 1961. (Voir [4*b*]).

habituelle mais nous paraissent plus conformes aux usage en théorie des structures [5, 4*a*].

Avec nos définitions, une structure de *PL*-variété (resp. de variété combinatoire) est définie sur un espace topologique X sans utiliser une triangulation particulière, tout comme une structure de variété différentiable doit être définie sans faire usage d'une famille particulière de cartes locales. De plus, la notion de variété combinatoire introduite ici est telle que le théorème de J. H. C. WHITEHEAD sur les C^r-triangulations [8*a*, *c*] s'énonce comme suit: ***A toute structure de C^r-variété sur un espace topologique paracompact X correspond canoniquement une structure combinatoire unique sur X.***

De même, la *Hauptvermutung* pour les variétés topologiques (para-compactes) peut s'énoncer: Toute variété topologique admet au plus une structure combinatoire compatible avec sa topologie.

Rappelons que J. H. C. WHITEHEAD appelait «variété combinatoire» une variété munie d'une triangulation fixe astreinte à vérifier une condition locale (étoiles de BROUWER). De même, la définition de MILNOR (voir [6*a*], p. 4) d'une *PL*-variété est relative à una triangulation fixée. En outre il ne fait pas de distinction précise entre une «*PL*-variété» et une «variété combinatoire».

1. Par «complexe» K on entendra un «complexe simplicial abstrait *localement fini*» et on répresentera par $|K|$ l'espace topologique associé, aussi appelé le *polytope* de K [7]. Rappelons que si L est un ensemble de simplexes de K (non nécessairement un sous-complexe), on appelle *étoile* de L dans K (notation $St_K(L)$) le sous-complexe engendré par les simplexes dont une face appartient à L [7]; le sous-espace de $|K|$ réunion des réalisations géométriques des simplexes ouverts de L sera noté $|L|$: si s est un r-simplexe, $|s|$ est donc une r-cellule *ouverte*. Une ***subdivision*** d'un complexe K est un couple (K', h) ou K' est un complexe et h un homéomorphisme (on supposera toujours qu'un homéomorphisme est surjectif) $h: |K'| \to |K|$ satisfaisant à la condition suivante: pour tout simplexe $s' \in K'$, il existe un simplexe $s \in K$ tel que $h(|s'|) \subset |s|$ et tel que la restriction de h à $|s'|$ soit linéaire par rapport aux coordonnées barycentriques dans $|s'|$ et $|s|$. Une subdivision (K', h) est dite ***triviale sur un simplexe*** $s \in K$ s'il existe un $s' \in K'$ (nécessairement de même dimension et unique) tel que la restriction de h à $|s'|$ soit un isomorphisme linéaire sur $|s|$; elle est dite ***triviale sur un sous complexe*** $L \subset K$ si la propriété a lieu pour tout $s \in L$. Si (K'', h') est une subdivision de K', (K'', hh') est une subdivision de K. Si (K_1, h_1), (K_2, h_2) sont deux subdivions de K, on dit que la seconde est ***plus fine*** que la première s'il existe une subdivision (K_2, h) de K_1 telle que $h_2 = h_1 h$.

Tout point $x \in |K|$ est contenu dans un unique simplexe ouvert $|s|$ et on posera $St_K(x) = St_K(s)$: l'espace $|St_K(x)|$ est un voisinage compact de x (le polytope $|K|$ est donc localement compact). On obtient un recouvrement ouvert de $|K|$ par des ouverts relativement compacts en considérant les intérieurs (au sens de la topologie de $|K|$) des $|St_K(a)|$, où a parcourt l'ensemble des sommets de K. Il revient au même de considérer les étoiles ouvertes obtenues en prenant la réunion des simplexes ouverts de sommet a. Manifestement le recouvrement par les $|St_K(a)|$ est de type fini (i.e. chaque ensemble ne rencontre qu'un nombre fini des autres) et il en résulte que $|K|$ est paracompact.

Soit X un espace topologique: un couple (K, h) où h est un homéomorphisme de $|K|$ sur X est appelé *triangulation* de X et le triple (K, h, X) est appelé *espace triangulé* de *base* X; nous dirons que K est le *squelette* de la triangulation ou de l'espace triangulé. Si (K', h') est une triangulation de X elle est dite *plus fine* que (K, h) ou encore, en est appelée une *subdivision*, si $(K', h^{-1}h')$ est une subdivision de K. Si X est un sous-espace de R^n, une triangulatien (K, h) de X est dite *linéaire* si, pour tout simplexe $s \in K$, la restriction de h à $|s|$ est un isomorphisme linéaire sur un simplexe euclidien de R^n. Deux espaces triangulés $X_1 = (K_1, h_1, X)$ de $X_2 = (K_2, h_2, X)$, même base X sont dits *linéairements équivalents* (notation $X_1 \backsim_l X_2$) si les triangulations (K_a, h_a), $a = 1, 2$, admettent une subdivisions commune. Si ces triangulations sont déjà des subdivisions d'une même triangulation (K, h) de X, les espaces triangulés X_a sont linéairement équivalents. Il en résulte que la relation $X_1 \backsim_l X_2$ est une relation d'équivalence. On appelle *structure linéaire par morceaux* ou *PL-structure* sur un espace X, une classe σ d'équivalence linéaire d'espaces triangulés de base X. Muni d'une telle structure, l'espace X s'appelle *espace linéaire par morceaux* ou *PL-espace*. S'il y a lieu de préciser la structure σ, on le note X_σ. Par abus de langage, on parlera souvent du «PL-espace (K, h, X)» au lieu du «PL-espace défini par l'espace triangulé (K, h, X)». Tout squelette d'une triangulation appartenant à σ est appelé *un squelette* du PL-espace X_σ.

Les PL-espaces sont les objets d'une catégorie $\mathcal{E}^{PL}$ dont les morphismes sont les *applications linéaires par morceaux* ou *PL-applications* définies comme suit. Soient X_σ, Y_τ deux PL-espaces et $f\colon X \to Y$ une application continue entre les espaces sous-jacents; l'application f est dite *linéaire par morceaux* s'il existe des espaces triangulés $(K, h, X) \in \sigma$, $(L, k, Y) \in \tau$ jouissant de la propriété suivante: à tout simplexe $s \in K$ correspond un simplexe $t \in L$ tels que $k^{-1}fh(|s|)$ soit contenu dans $|t|$ et que la restriction de $k^{-1}fh$ à $|s|$ soit linéaire par rapport aux coordonnées barycentriques dans $|s|$ et $|t|$. D'aprés un résultat de MILNOR [6c], on peut même trouver des triangulations telles que $k^{-1}fh$ soit une application simpliciale.

Les morphismes inversibles de cette catégorie sont appelés *PL-isomorphismes.*

Soit Δ_n le complexe simple à $n+1$ sommets. Sa réalisation géométrique $|\Delta_n|$, munie de la triangulation (Δ_n, i_n) où i_n est l'application identique de $|\Delta_n|$, fournit l'exemple le plus simple d'espace linéaire par morceaux: on l'appelle le *PL-disque* de dimension n ou *n-disque linéaire par morceaux.* Le bord de $|\Delta_n|$ est un espace $\partial|\Delta_n|$ homéomorphe à la sphère S^{n-1}; la restriction de i_n aux faces de $|\Delta_n|$ définit sur l'espace $\partial|\Delta_n|$ une PL-structure: le PL-espace de base $\partial|\Delta_n|$ ainsi défini est appelé PL-sphère de dimension n-1. Par extension, un PL-espace qui est PL-isomorphe à un PL-n-disque (resp. à une PL-n-sphère) est encore appelé *PL-n-disque* (resp. *PL-n-sphère*). Un PL-espace X_σ est appelé *PL-variété* de dimension n si sa structure contient un triple (K, h, X) tel que, pour tout sommet $a \in K$, $(St_K(a), i, |St_K(a)|)$ soit un PL-disque de dimension n; l'espace X est donc nécessairement une variété topologique avec ou sans bord. Le PL-disque et la PL-sphère sont donc des exemples de PL-variétés. Les PL-variétés et leurs PL-applications forment une sous-catégorie $\mathfrak{V}^{PL}$ de la catégorie $\mathcal{E}^{PL}$.

Un complexe K est dit *brouwérien* (on pourrait aussi dire que K est *à étoiles plates*) s'il satisfait à la condition suivante:

(*BR*) - *Pour tout sommet* $a \in K$ *il existe un ouvert relativement compact* $B_a \subset R^n$ *dont l'adhérence* $\bar{B}_a$ *admet une triangulation linéaire de squelette l'étoile* $St_K(a)$.

Autrement dit: *le polytope du complexe* $S_K(a)$ *admet une représentation* g_a, *linéaire sur chaque simplexe, sur l'adhérence* $\bar{B}_a$ *d'un ouvert* B_a *de* R_n. Une telle triangulation $T_a = (St_K(a), g_a)$ de $\bar{B}_a$ est évidemment une C^r-triangulation au sens de J.H.C. WHITEHEAD ([8c], p. 160). Compte tenu du résultat de J.H.C. WHITEHEAD ([8*a*], p. 818) suivant lequel toute C^r-triangulation d'une variété différentiable fait de celle-ci une PL-variété, on a la propriété suivante: *Si K est un complexe brouwérien,* $(K, i, |K|)$ *est une PL-variété.* La réciproque est inexacte: S.S. CAIRNS a en effet montré que $(K, i, |K|)$ peut être une PL-variété sans que le complexe K soit brouwérien [2]. Plus précisément, CAIRNS a construit pour tout $n \geq 4$ un complexe K, non brouwérien, tel que $(K, i, |K|)$ soit un PL-disque de dimension n. Toutefois, d'après J.H.C. WHITEHEAD [8*b*] la réciproque est vraie sous la forme affaiblie suivante: *Toute PL-variété possède un squellette brouwérien.*

2. Pour la simplicité, nous nous limiterons aux PL-variétés $\mathfrak{V}$ sans bord, c'est-à-dire telles que, pour tout représentant $(K, h, \mathfrak{V})$ et tout sommet $a \in K$, celui-ci soit intérieur à $|St_K(a)|$. Supposons alors que K soit

un complexe brouwérien: on a, pour tout a, une application $g_a\colon \bar{A}_a = | St_K(a) | \longrightarrow \bar{B}_a$ (où A_a est l'intérieur de $| St_K(a) |$) linéaire sur tout simplexe et, si $\bar{A}_{ab} = \bar{A}_a \cap \bar{A}_b$ est non vide, on a une transformation

$$g_{ab} = g_a g_b^{-1}\colon\ \bar{B}_{ba} \longrightarrow \bar{B}_{ab},\ \bar{B}_{ab} = g_a(\bar{A}_{ab}) \neq \bar{B}_{ba} = g_b(\bar{B}_{ab}).$$

Cette transformation est également un isomorphisme linéaire sur tout simplexe (plus précisément sur toute image dans $\bar{B}_{ba}$ d'un simplexe $| s | \subset \bar{A}_{ab},\ s \varepsilon K$).

Rappellons [4a], [5] qu'étant donné un espace topologique E on appelle *homéomorphisme local* de E un homéomorphisme $f\colon\ U \longrightarrow V$ d'un ouvert U de E sur un autre V. Un ensemble Γ d'homéomorphismes locaux constitue un *pseudogroupe* si on a les propriétés suivantes: (1°) si $f\colon$ $U \longrightarrow V$ appartient à Γ, $f^{-1}\colon\ V \longrightarrow U$ y appartient aussi; (2°) si $f\colon\ U \longrightarrow V$, $f'\colon$ $U' \longrightarrow V'$ appartiennent à Γ, le *pseudocomposé* $f'f\colon\ f^{-1}(V \cap U') \longrightarrow f'(V \cap U')$ y appartient aussi; (3°) si $f\colon\ U \longrightarrow V$ est une bijection entre deux ouverts U, V de E et si U est réunion d'une famille U_i d'ouverts plus petits tels que les restrictions $f_i = f \mid U_i$ appartiennent à Γ, alors f y appartient aussi; (4°) les sources U des $f\colon\ U \longrightarrow V$ appartenant à Γ recouvrent E. Soit X un nouvel espace topologique. Un *atlas* $\mathcal{A}$ de X vers E compatible avec Γ (ou Γ-*atlas*) est un ensemble de cartes locales $f\colon\ U \longrightarrow V$ (i.e. d'homéomorphismes d'un ouvert U de X sur un ouvert V de E) dont les sources U recouvrent X et tel que, pour toute autre carte $g\colon\ R \longrightarrow S$ de l'ensemble, le *changement de cartes* $fg^{-1}\colon\ g(U \cap R) \longrightarrow f(U \cap R)$ appartient à Γ. On écrit $\mathcal{A}\colon\ X \longrightarrow (E, \Gamma)$ ou $\mathcal{A}\colon\ X \longrightarrow E$. Deux atlas sont *équivalents* si leur reunion est encore compatible avec Γ; on démontre que la réunion des atlas équivalents à l'un d'eux est un atlas équivalent $\mathcal{A}$ dit *complet* par rapport à Γ (il n'est pas complet par rapport à un pseudogroupe strictement plus grand que Γ). Un Γ-atlas complet ou une classe de Γ-atlas équivalents définit sur X une structure de type spécial dite structure d'*espace localement isomorphe* à (E, Γ). On dit aussi structure de Γ-*espace* ou Γ-*structure*.

Revenons à la PL-variété $\mathfrak{V}$ de représentant $(K, h, \mathfrak{V})$ où K est supposé brouwérien. Désignant par A_a et B_a les intérieurs de $\bar{A}_a$ et $\bar{B}_a$, les *restrictions* $f_a\colon\ A_a \longrightarrow B_a$ des g_a aux A_a constituent un atlas $\mathcal{A}_K$ $\mathcal{A}_K$ de $\mathfrak{V}$ par rapport à R^n compatible avec le pseudogroupe Λ_n formé des homéomorphismes locaux $f\colon\ U \longrightarrow V$ de R^n du type suivant: pour tout $x \varepsilon U$ il existe un voisinage compact $P_x \subset U$ muni d'une triangulation linéaire (L, k) de telle sorte que, pour tout simplexe $s \varepsilon L$, la restriction de $f \circ k$ à $| s |$ soit un isomorphisme linéaire sur un simplexe euclidien de V. (Il revient au même de dire que $(L, f \circ k)$ est une triangulation linéaire de

$f(P_x) \subset V$). Ce pseudogroupe sera appelé le *pseudogroupe des homéomorphismes locaux linéaires par morceaux de* R^n.

Soit $(K', h', \mathcal{V})$ un autre représentant brouwérien de la PL-variété $\mathcal{V}$ à laquelle correspond un autre atlas $\mathcal{A}_K$, de $\mathcal{V}$ par rapport à R^n compatible avec Λ_n. En utilisant une subdivision commune des triangulations (K, h), (K', h') on voit que les atlas $\mathcal{A}_K$ et $\mathcal{A}_{K'}$ sont Λ_n-équivalents, ce qui conduit au résultat suivant.

THÉORÈME 1. – *Pour toute PL-variété* $\varphi\mathcal{V}$ *les atlas* $\mathcal{A}_K : \mathcal{V} \longrightarrow R^n$ *compatibles avec* Λ_n *définissent sur l'espace topologique paracompact* $\mathcal{V}$ *une structure d'espace localement isomorphe à* (R^n, Λ_n) *indépendante du squelette K. V.*

3. Sur une variété topologique paracompacte $\mathcal{V}$, soient $S = S(\mathcal{V})$ l'ensemble des structures d'espace localement isomorphe à (R^n, Λ_n) et $T = T(\mathcal{V})$ l'ensemble des structures de PL-varieté. Le théorème 1 affirme l'existence d'une application ψ: $T \longrightarrow S$ et le théorème suivant d'une application φ: $S \longrightarrow T$ telle que $\psi \circ \varphi$ soit l'identité. Le théorème 4 affirmera que $\varphi \circ \psi$ est aussi l'identité. De là découlera le résultat fondamental (théorème 4), à savoir que ψ et φ sont des bijections inverses l'une de l'autre.

THÉORÈME 2. – *Soient* $\mathcal{V}$ *une variété topologique paracompacte et* $\mathcal{A}$ *un atlas complet de* $\mathcal{V}$ *rapport à* R^n, *compatible avec* Λ_n, *définissant sur* $\mathcal{V}$ *une structure* σ *d'espace localement isomorphe à* (R^n, Λ_n). *Il existe une triangulation brouwérienne* (M, m) *de la variété* $\mathcal{V}$, *munissant celle-ci d'une PL-structure* τ *et telle que l'atlas associé* $\mathcal{A}_M$ *soit équivalent à* $\mathcal{A}$.

La démonstration fait l'objet des nos 4 et 5; elle repose sur un certain nombre de lemmes.

LEMME 1. – *Soient* $B_1, \dots B_k$ *un nombre fini de compacts dans* R^n *et* (K_a, h_a) *des triangulations linéaires de ceux-ci,* $a = 1, 2, \dots, k$. *Il existe une triangulation linéaire* $(\bar{K}, \bar{h})$ *de la réunion* $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ *satisfaisant à la condition suivante: pour tout a, il existe un sous-complèxe* $K'_a \subset \bar{K}$ *et une subdivivion* (K'_a, h'_a) *de* K_a *telle que* $h_a h'_a$ *soit la restriction de* $\bar{h}$ *à* $|K'_a|$.

Il suffit de faire la démonstration pour $k = 2$ en supposant que B_2 et B_2 sont des simplexes, ce qui ne présente pas de difficulté; on passe alors au cas général par récurrence.

LEMME 2. – *Soient $f\colon U \longrightarrow V$ une transformation du pseudogroupe Λ_n et (K, h) une triangulation linéaire d'un compact $B \subset U$. Il existe alors une subdivision (K', h') de K telle que $(K', f\circ h\circ h')$ soit une triangulation linéaire du compact $f(B) \subset V$.*

En vertu de la définition de Λ_n et du lemme précédent, on peut construire un compact B' tel que $B \subset B' \subset U$ et possédant une triangulation linéaire (T, t) telle que (T, ft) soit une triangulation linéaire de $f(B')$. On applique alors à nouveau le lemme précédent pour

$$(K_1, h_1) = (K, h), \# K_2, h_2) = T, t) \# B_1 = B, B_2 = B'$$

et on prend pour K' le sous-complexe des $s \varepsilon \overline{K}$ d'image $\overline{h}(|s|)$ dans B et la restriction h' de h à $|K'|$.

LEMME 3. – (*J. H. C. Whitehead-J. Munkres*). *Soient K un complexe et L un sous-complexe. Pour toute subdivision (L', l') de L, il existe une subdivision (K', k') de K satisfaisant aux conditions suivantes:* (a) *L' est un sous-complexe de K' et l est la restriction de k' à $|L'|$;* (b) *la subdivision (K', k') est triviale sur les simplexes de K n'appartenant pas à $St_K(L)$.*

La démonstration s'effectue en montant sur les squelettes et ne présente pas de difficulté (voir [7], p. 68; voir aussi [8*a*], addendum p. 815).

Soient $\mathfrak{V}$ une variété topologique et $\{O_i\} i \varepsilon N$ une suite croissante de sous-ensembles compacts la recouvrant. Soit, pour tout i, une triangulation (K_i, h_i) de O_i et supposons que K_{i+1} contienne un sous-complexe $K_{i,1}$ auquel corresponde une subdivision $(K_{i,1}, h_{i,1})$ de K_i telle que $h_i h_{i,1}$ soit la restriction de h_{i+1} à $|K_{i,1}|$. Dans K_{i+2} on a dès lors le sous-complexe $K_{i,2} \subset K_{i+1,1}$ formé des simplexes $s \varepsilon K_{i+1,1}$ dont l'image par $h_{i+1,1}$ soit dans $K_{i,1}$; si $h_{i,2}$ désigne la restriction de $h_{i+1,1}$ à $|K_{i,2}|$, $(K_{i,2}, h_{i,2})$ est une subdivision de $K_{i,1}$ et la restriction de h_{i+2} à $|K_{i,2}|$ coïncide avec $h_i \circ h_{i,1} \circ h_{i,2}$. Par induction on définit alors une famille double de complexes $K_{i,p}$ tels que

$$K_{i,p} \subset K_{i+1,p-1} \subset \ldots \subset K_{i+p,0} = K_{i+p}$$

avec des applications

$$h_{i,p} : |K_{i,p}| \longrightarrow |K_{i,p-1}|$$

qui soient les restrictions des $h_{i+1,p-1}$ aux $|K_{i,p}|$: $(K_{i,p}, h_{i,p})$ est donc subdivision de $K_{i,\,p-1}$. En résumé on a le diagramme commutatif ci-après.

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\cap & \cap & \cap & & \cap & \cap \\
K_i \arrow[ddddddddddd, "h_i"] & K_{i,1} \arrow[l, "h_{i,1}"'] & K_{i,2} \arrow[l, "h_{i,2}"'] & \cdots \arrow[l] & K_{i,p} \arrow[l, "h_{i,p}"'] & K_{i,p+1} \arrow[l, "h_{i,p+1}"'] \\
 & \cap & \cap & & \cap & \cap \\
 & K_{i+1} \arrow[ddddddddd, "h_{i+1}"] & K_{i+1,1} \arrow[l, "h_{i+1,1}"'] & \cdots \arrow[l] & K_{i+1,p-1} \arrow[l] & K_{i+1,p} \arrow[l] \\
 & & \cap & & \cap & \cap \\
 & & K_{i+2} \arrow[ddddddd, "h_{i+2}"] & \cdots \arrow[l] & K_{i+2,p-2} \arrow[l] & K_{i+2,p-1} \arrow[l] \\
 & & & & \cap & \cap \\
 & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & \cap & \cap \\
 & & & & K_{i+p} \arrow[ddd, "h_{i+p}"] & K_{i+p,1} \arrow[l, "h_{i+p,1}"'] \\
 & & & & & \cap \\
 & & & & & K_{i+p+1} \arrow[d, "h_{i+p+1}"] \\
O_i \arrow[r, phantom, "\subset"] & O_{i+1} \arrow[r, phantom, "\subset"] & O_{i+1} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\subset"] & O_{i+p} \arrow[r, phantom, "\subset"] & O_{i+p+1}
\end{tikzcd}
$$

LEMME 4. – *Avec les hypothèses précédentes, supposons qu'il existe un* $r > 0$ *tel que, pour* $p \geqq r$, *la subdivision* $(K_{i,\,p+1}, h_{i,\,p+1})$ *de* $K_{i,\,p}$ *soit triviale. Dans ces conditions, il existe une triangulation* (M, m) *de* $\mathcal{V}$ *vérifiant la condition suivante: pour tout* i, *il existe un sous-complexe* $M_i \subset M$ *tel que* (M_i, m_i) *(où* m_i *désigne la restriction de* m *à* $|M_i|$ *) soit une triangulation de* O_i *plus fine que* (K_i, h_i).

Il suffit de définir M comme limite inductive des $K_{i,\,r}$ par rapport aux injections $K_{i,\,r} \rightarrow K_{i+j,\,r}$ obtenues par composition des applications

$$|K_{i,\,r}| \xrightarrow{h^{-1}_{i,\,r+1}} |K_{i,\,r+1}| \longrightarrow \dots \xrightarrow{h^{-1}_{i,\,r+j}} K_{i,\,r+j}| \subset |K_{i+j,\,r}| .$$

On prend alors pour $m: |M| \longrightarrow \mathfrak{V}$ la limite inductive des applications

$$|K_{i,r}| \xrightarrow{h_{i,r}} |K_{i,r-1}| \longrightarrow \dots \xrightarrow{h_{i,1}} |K_i| \xrightarrow{h_i} O_i$$

et pour M_i l'image canonique de $K_{i,r}$ dans M.

4. Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème 2. Il suffit de faire la démonstration dans le cas où $\mathfrak{V}$ paracompacte est *connexe*. On peut alors remplacer l'atlas complet donné par un atlas

$$\mathfrak{A} = \{f_i\colon U_i \longrightarrow V_i \mid i \varepsilon I\},$$

indexé par un ensemble fini ou dénombrable I, satisfaisant aux conditions suivantes: (a) $\overline{U}_i$ et $\overline{V}_i$ sont des compacts de $\mathfrak{V}$ et R^n respectivement; (b) chaque $\overline{U}_i$ ne rencontre qu'un nombre fini des $\overline{U}_j$, $j \varepsilon I$, [1]. Un tel atlas sera appelé *atlas relativement compact et de type fini.* Soit $\mathfrak{U}$ le recouvrement de $\mathfrak{V}$ formé des U_i: il existe un recouvrent $\mathfrak{W}$ de même ensemble d'indices I par des ouverts W_i tels que $W_i \subset \overline{W}_i \subset U_i$; les $\overline{W}_i$ sont compacts. On posera $T_i = f_i(W_i)$ d'où $\overline{T}_i \subset V_i$. On commence par recouvrir $\overline{T}_i$ par un nombre fini de simplexes euclidiens contenus dans V_i et soit Q_i la réunion (compacte) de ces simplexes. En vertu du lemme 1, il existe une triangulation linéaire (L_i, l_i) de Q_i qui donne lieu à une triangulation (L_i, k_i) du compact $P_i = f_i^{-1}(Q_i) \subset U_i$, avec $k_i = f_i^{-1} l_i$. Ces triangulations satisfont à la condition suivante:

(4.1) *pour tout $s \varepsilon L_i$, la restriction de $f_i k_i$ à $|s|$ est un isomorphisme linéaire sur un simplexe euclidien de V_i.*

On se propose de construire une triangulation (M, m) de $\mathfrak{V}$ satisfaisant la condition suivante:

(4.2) *il existe pour tout i un sous-complexe T_i de M tel que, désignant par t_i la restriction de h à $|T_i|$, (T_i, t_i) soit une triangulation de P_i plus fine que (L_i, k_i).*

A cet effet, choisissons un indice $i_0 \varepsilon I$ et soient

$$P_{1,0} = P_{i_0}, \quad P_{1,1}, \dots, P_{1,k_1}$$

les P_i en nombre fini qui rescontrent P_{i_0}; on désignera par O_1 leur réunion. Celle-ci n'est rencontrée que par un nombre fini de P_i distincts des précédents, soient par $P_{2,i_1}, \dots, P_{2,k_2}$. Soit O_2 la réunion de ceux-ci et de O_1.

Par récurrence on définit alors une suite croissante $O_1, \ldots, O_{n-1}, O_n, \ldots$ de compacts, chaque O_n étant la réunion (finie) de O_{n-1} et des P_i qui rencontrent O_{n-1} sans y être contenus; ces P_i sont notés $P_{n,1}, \ldots, P_{nk_n}$. Pour la facilité nous rangerons les P_i dans la suite

$$P_0 = P_{i_0},\ P_1 = P_{1,1},\ \ldots\ P_{k_1} = P_{1,k_1},\ \ P_{k_1+1} = P_{2,1},\ \ldots,\ P_{k_1+k_2} = P_{2,k_2},\ \ldots;$$

de façon générale

$$(4.3) \qquad P_m = P_{j,l},\ 1 \leqq k_j,\ \text{ si }\ m = k_1 + \ldots + k_j + l, \qquad l \leqq k_{j+1}.$$

Ceci revient à supposer que les indices $i \varepsilon I$ sont remplacés par des indices $m \varepsilon N$, l'indexation étant conforme à ce qui précède. A partir de maintenant c'est toujours de cette indexation qu'il s'agira.

Il y a lieu d'observer que la variété $\mathfrak{V}$ étant supposée connexe et les $W_m \subset P_m$ recouvrant la variété, celle-ci est réunion des O_n.

Nous avons déjà construit une triangulation (L_0, K_0) de P_0 satisfaisant à la condition (4.1) ci-dessus pour $i = 0$. Nous poserons

$$P^*_{m=1} = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{m-1}$$

et nous supposerons avoir construit une triangulation $(T^*_{m-1},\ \tau^*_{m-1})$ de P^*_{m-1} satisfaisant aux conditions suivantes:

(4.4, m) *pour tout $r < m$, il existe un sous-complexe $T_r^{m-1} \subset T^*_{m-1}$ tel que la restriction τ_r^{m-1} de τ^*_{m-1} à T_r^{m-1} engendre une triangulation $(T_r^{m-1}, \tau_r^{m-1})$ de P_r plus fine que (L_r, k_r);*

(4.5, m) *Pour tout simplexe $s \varepsilon T^*_{m-1}$ dont l'image $\tau^*_{m-1}(|s|)$ rencontre P_r, cette image est contenue dans U_r, $r < m$.*

De (4.1) et (4.4) il résultera encore que

(4.6, m) *Pour tout simplexe $s \varepsilon T^*_{m-1}$ et tout $r < m$ tel que $\tau^*_{m-1}(|s|)$ soit contenu dans P_r, la restriction de $f_r \tau^*_{m-1}$ à $|s|$ est un isomorphisme linéaire de $|s|$ sur un simplexe euclidien de V_r.*

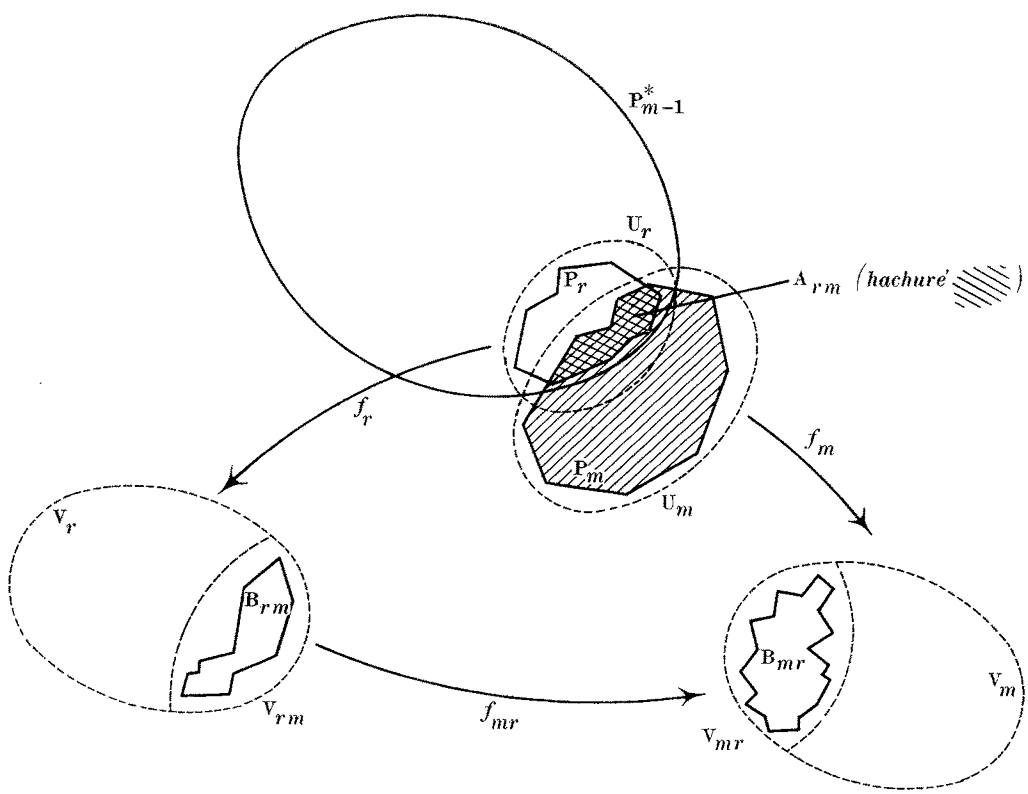
Cela étant nous allons construire au n° 5 une triangulation $(T^*_m,\ \tau^*_m)$ de P^*_m telle que:

(4.7, m) *il existe un sous-complexe $T^\triangle_{m-1} \subset T^*_m$ et une subdivision $(T^\triangle_{m-1},\ \tau)$ de T^*_{m-1} telles que $\tau^*_{m-1}\tau$ soit la restriction de τ^*_m à $|T^\triangle_{m-1}|$;*

(4.8, m) *il existe un sous-complexe $T^m_m \subset T^*_m$ tel que la restriction τ^m_m de τ^*_m à $|T^m_m|$ donne a lieu à une triangulation $(T^m_m,\ \tau^m_m)$ de P_m plus fine que (L_m, k_m).*

(4.9, m) *pour tout simplexe* $s \in T^*_m$ *dont l'image* $\tau^*(|s|)$ *rencontre* P_m, *cette image est contenue dans* U_m.

Il en résultera notamment que (T_m, τ_m) vérifie les conditions (4.4, $m+1$) et (4.5, $m+1$) ce qui permettra de construire $(T^*_{m+1}, \tau^*_{m+1})$ et ainsi de suite.



5. Considérons les intersections non vides $P_m \cap P_r \subset U_r$, $r < m$; elles correspondent à un nombre fini $r_1, \ldots, r_\alpha$ de valeurs de r. Les n-simplexes $s \in T^*_{m-1}$ dont l'image $\tau^*_{m-1}(|s|)$ rencontre $P_m \cap P_r$ (image qui est alors entiérement dans U_r) engendrent un sous complexe

$$T^*_{m-1,\,r} \subset T^*_{m-1} \quad \text{et} \quad \tau^*_{m-1}(|T^*_{m-1,\,r}|)$$

est un compact contenu dans $U_r \cap P^*_{m-1}$ et contenant $P_m \cap P_r$. Soient: A_{rm} l'image de $|T^*_{m-1,\,r}|$ par $\tau^*_{m-1,\,1}$; $\tau^*_{m-1,\,r}$ la restriction de cette application ; B_{rm} l'image de A_{rm} par f_r: $U_r \to V_r$. En remplaçant au besoin $(T^*_{m-1}, \tau^*_{m-1})$ par une triangulation plus fine, on peut supposer que $A_{rm} \subset U_{rm} = U_r \cap U_m$ et donc que $B_{rm} \subset V_{rm} = f_r(U_{rm})$. Dans ces conditions,

$$(T^*_{m-1,\ r},\ g_r), \quad g_r = f_r\ \tau^*_{m-1,\ r}$$

est une triangulation linéaire de B_{rm}. Soit $B_{mr} = f_{mr}(B_{rm})$ où $f_{mr} = f_m f_r^{-1}$ est le changement de la carte f_r vers la carte f_m. En vertu du lemme 2 il existe une subdivision $(T_{m-1,\ r},\ t_r)$ de $T^*_{m-1,\ r}$ telle que $(T_{m-1,\ r},\ f_{mr} g_r t_r)$ soit une triangulation linéaire de B_{mr}. D'après le lemme 3, il existe une subdivision $(T_{m-1},\ t)$ de T^*_{m-1} telle que $T_{m-1,\ r}$ soit un sous-complexe de T_{m-1} et que t_r soit la restriction de t à $|\ T_{m-1,\ r}\ |$. Faisant $r = r_1$, la subdivision $(T_{m-1},\ t)$ sera notée $(T^{(1)}_{m-1},\ t^{(1)})$ et nous remplacerons la triangulation $(T^*_{m-1}.\ \tau^*_{m-1})$ de P^*_{m-1} par $(T^{(1)}_{m-1},\ \tau^{(1)}_{m-1})$, $\tau^{(1)}_{m-1} = \tau^*_{m-1} \circ t^{(1)}$. La même construction appliquée à celle-ci en faisant $r = r_2$ nous conduit à une triangulation encore plus fine $(T^{(2)}_{m-1},\ t^{(2)})$ de T^*_{m-1} et à une triangulation, plus fine également $(T^{(2)}_{m-1},\ \tau^{(2)}_{m-1})$ de P^*_{m-1}. De proche en proche on aboutit finalement à une triangulation $(T^{(\alpha)}_{m-1},\ \tau^{(\alpha)}_{m-1})$ plus fine que les précédentes et vérifiant toujours les conditions (4.4), (4.5) et (4 6), cette dernière étant complétée par la suivante:

(5.1) *pour tout simplexe* $s \varepsilon T^{(\alpha)}_{m-1}$ *dont l'image rencontre* P_m, *celle-ci est contenue dans* U_m *et la restriction de* $f_m \tau^{(\alpha)}_{m-1}$ *à* $|\ s\ |$ *est un isomorphisme linéaire sur un simplexe euclidien de* V_m.

L'ensemble des ces n-simplexes engendre un sous-complexe $S_{m-1} \subset T^{(\alpha)}_{m-1}$ ayant pour images des compacts

$$A_{m-1} = \tau^{(\alpha)}_{m-1}(|\ S_{m-1}\ |) \subset P^*_{m-1} \cap U_m \quad \text{et} \quad B_{m-1} = f_m(A_{m-1}) \subset V_m;$$

ceux-ci admettent des triangulations

$$(S_{m-1},\ a_{m-1}),\ (S_{m-1},\ b_{m-1})$$

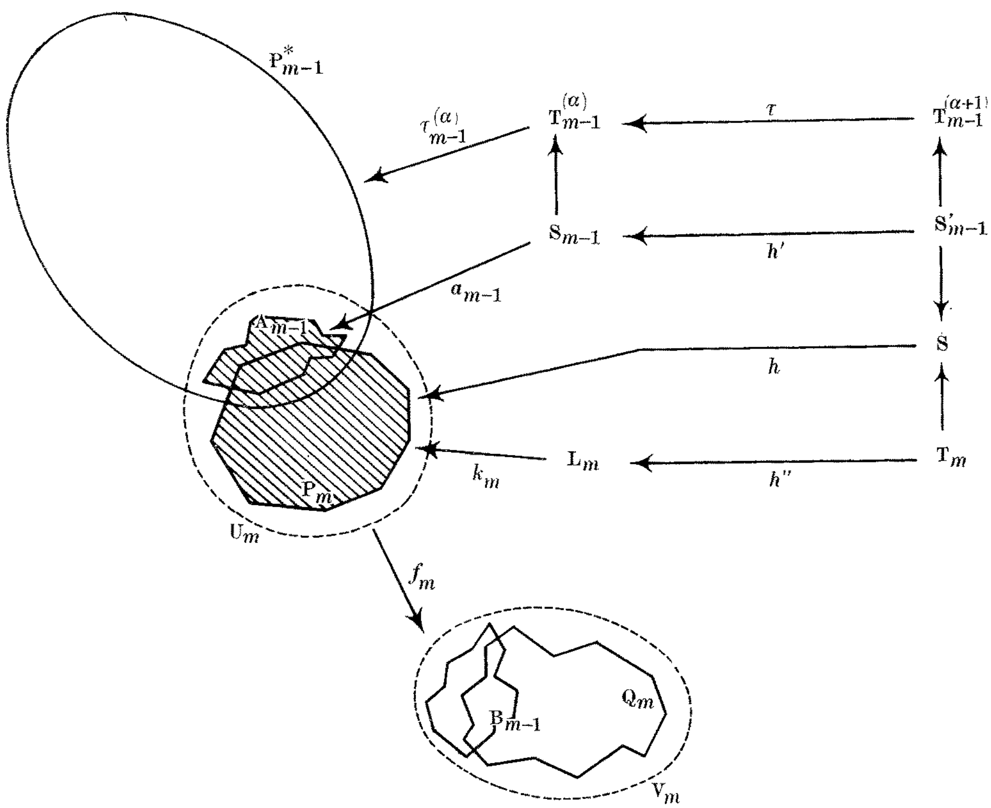
où a_{m-1} est la restriction de

$$\tau^{(\alpha)}_{m-1} \text{ à } |\ S_{m-1}\ | \text{ et ou l'on a } b_{m-1} = f_m \circ a_{m-1};$$

en outre la dernière triangulation est linéaire. Considérant d'autre part les triangulations

$$(L_m,\ k_m) \text{ de } P_m \text{ et } (L_m,\ f_m \circ k_m) \text{ de } Q_m = f_m(P_m),$$

cette dernière étant linéaire, il existe en vertu du lemme 1 une triangulation (S, h) de $A_{m-1} \cup P_m \subset U_m$ satisfaisant aux conditions suivantes:



(a) en composant f_m avec h on obtient une triangulation linéaire $(S, f_m \circ h)$ de $B_{m-1} \cup Q_m \subset V_m$; (b) il existe des sous-complexes S'_{m-1}, T_m de S et des subdivisions (S'_{m-1}, h'), (T_m, h'') de S_{m-1} et L_m respectivement, telles que $a_{m-1} \circ h'$ et $k_m \circ h''$ soient restrictions de h à $|S'_{m-1}|$ et $|T_m|$. Appliquant alors le lemme 3 on obtient une subdivision (T^{Δ}_{m-1}, τ) de $T^{(\alpha)}_{m-1}$ telle que h' soit la restriction de τ à $|S'_{m-1}|$. On supposera les complexes T^{Δ}_{m-1} et S d'intersection réduite à S'_{m-1}; leur réunion T^*_m donne alors lieu à une triangulation

$$(T^*_m, \ \tau^*_m) \ \text{de} \ P^m_* = P^*_{m-1} \cup P_m$$

où τ^*_m coïncide avec $\tau^{(\alpha)}_{m-1} \circ \tau$ sur $|T^{\Delta}_{m-1}|$ et avec h sur $|S|$. Cette triangulation vérifie bien les conditions annoncées. (4.7, m), (4.8, m) et (4.9, m).

Supposons $P_m = P_{j,l}$ comme en (4.3) et donc $P_m \subset O_{j+1}$. Les $P_{r_1}, \ldots, P_{r_\alpha}$ considérés ci-dessus et qui rencontrent P_m appartiennent donc eux-mêmes à O_{j+1}. Notons que chaque fois que l'on est obligé de recourir à une subdivision de la triangulation de P^*_{m-1}, celle-ci subdivise des simplexes dont l'image est dans $P_{r_1} \cup \ldots \cup P_{r_\alpha}$ et, en vertu du lemme 3, on peut la construire telle qu'elle soit triviale sur les simplexes n'appartenant pas à l'étoile des précédents. Il en résulte que l'on ne subdivise pas effectivement les simplexes dont l'image est dans O_{j-2}. On voit donc qu'en se limitant aux triangulations (T^*_m, τ^*_m) correspondant aux valeurs de m telles que P^*_m soit un O_j, (i.e. $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_j$), on est dans les conditions d'aplication du lemme 4 pour $r = 3$. Ceci definit la triangulation cherchée (M, m) de $\mathfrak{V}$; celle-ci définit bien une structure de PL-variété car tout sommet a doit se trouver dans un W_m et la restriction de m à $|St(a)|$ suivie de f_m engendre un C^1-complexe au sens de J. H. C. WHITEHEAD (voir [8*a*], théorème 5, p. 818); la démonstration de WHITEHEAD montre que cette étoile est une PL-cellule. La triangulation est évidemment brouwérienne. On voit en même temps que l'atlas $\mathfrak{A}_M$ est Λ_n-équivalent à l'atlas donné $\mathfrak{A}$.

Si l'on remplace celui-ci par un autre atlas $\mathfrak{A}'$ équivalent et lui aussi localement compact et de type fini (voir le n° 4), on obtient une nouvelle triangulation (M', m') de $\mathfrak{V}$. Pour voir que celle-ci est équivalente à (M, m) on peut considérer l'atlas réunion $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'$ qui est encore du même type. Dans cette réunion on considérera la réunion des familles de compacts P construites pour $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$. Sur ces compacts on considérera les triangulations (L, k) obtenues par restriction des triangulations (M, m) et (M', m'). On construit alors une triangulation (M'', m'') relative à $\mathfrak{A}''$ et vérifiant l'analogue de la propriété (4.2). Il en résulte que (M'', m'') est une subdivision commune de (M, m) et (M', m'). Lorsque $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ le même raisonnement montre que la PL-structure τ définie par (M, m) est indépendante du choix de la famille de compacts P. On voit ainsi que la structure τ ne dépend pas de l'atlas $\mathfrak{A}$ définissant la structure σ et des constructions utilisées sinon de la structure σ elle-même.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

6. THÉORÈME 3. - *Soient $\mathfrak{V}$ une variété topologique munie d'une triangulation brouwérienne (K, h) et σ la structure d'espace localement isomorphe à (R^n, Λ_n) définie pas l'atlas $\mathfrak{A}_K$. La PL-structure τ associée à σ par le théorème précédent coïncide avec la PL-structure définie par (K, h).*

En effet, l'atlas $\mathfrak{A}_K = \{f_a \colon A_a \to B_a \mid a \in K\}$ (voir le n° 2) est relativement compact et de type fini: il peut donc servir immédiatement dans la construction des n^{os} 4 et 5 pour obtenir la structure τ associée à σ. Il est clair que les compacts P_a et les triangulations (L_a, k_a) qui en découlent conformément au n° 4, jouissent de la propriété suivante: à tout simplexe

$t \in L_a$ correspond un simplexe $s \in K$ tel que $h^{-1}k_a(|t|) \subset |s|$ et que la restriction de $h^{-1}k_a$ à $|t|$ soit linéaire. Il s'ensuit que la triangulation (M, m) de $\mathfrak{V}$ construite à partir de l'atlas $\mathfrak{A}_K$ est une subdivision de (K, h).

De là on déduit, comme corollaire, le

THÉORÈME 4. – (*Théorème fondamental*). *Soient* $\mathfrak{V}$ *une variété topologique paracompacte,* S *l'ensemble des structures sur* $\mathfrak{V}$ *d'espace localement isomorphe à* (R^n, Λ_n) *et* T *l'ensemble des PL-structures de* $\mathfrak{V}$. *Les applications* $\psi: T \longrightarrow S$ *et* $\varphi: S \longrightarrow T$ *définies par les théorèmes* 1 *et* 2 *sont des bijections réciproques l'une de l'autre.*

De là on déduit que tout ouvert d'une PL-variété admet une PL-structure induite et qu'est valable le principe du recollement des morceaux: une structure de PL-variété sur un espace X est déterminée par les structures induites dans les ensembles d'un recouvrement ouvert de X. En particulier R^n et ses ouverts sont canoniquement des PL-variétés; les transformations du pseudogroupe Λ_n sont des PL-isomorphismes d'un ouvert de R^n sur un autre. Comparer [9 *a* et *b*].

7. Sur un espace topologique X, une PL-structure est une structure très forte. On introduit une notion plus faible en considérant une relation d'équivalence «faible» entre espaces triangulés

$$X_a = (K_a,\ h_a,\ X), \quad a = 1,\ 2,$$

de même base X. Deux tels espaces sont dits combinatoirement *équivalents* s'il existe des subdivisions (K, k_a) des K_a, à partir d'un même complexe K, sans imposer que h_1k_1 et h_2k_2 soient le même homéomorphisme de $|K|$ sur X comme dans le cas de l'équivalence forte: celle-ci entraîne donc l'équivalence faible. Soit alors f l'homoméomorphisme de X sur lui-même rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} & {|K|} \arrow[dl, "h_1k_1"'] \arrow[dr, "h_2k_2"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

On voit que les espaces triangulés X_a sont combinatoirement équivalents si et seulement s'il existe un homéomorphisme f de X lui-même tel que les triangulations $(K_1, f \circ h_1)$ et (K_2, h_2) admettent une subdivision commune ou telle que f transporte la PL-structure définie par (K_1, h_1) sur celle définie par (K_2, h_2). La *Hauptvermutung* (dans sa forme faible) affirmait que deux PL-structures sur un même espace topologique sont toujours transformables l'une dans l'autre par un homéomorphisme de X sur lui-même. On sait maintenant que cette conjecture est fausse, MILNOR ayant construit deux PL-espaces de dimension 7, homéomorphes mais non PL-isomorphes [6b]. Toutefois ces PL-espaces ne sont pas des variétés et la *Hauptvermutung* limitée aux variétés topologiques demeure ouverte.

Une classe d'équivalence combinatoire d'espaces triangulés de même base X ou, ce qui revient au même, la classe correspondante de PL-espaces, définit sur X une structure d'*espace combinatoire*; on notera que les PL-structures de X dont la réunion constitue une structure combinatoire sont toutes isomorphes entre elles: la PL-structure abstraite correspondante est donc un invariant de la structure combinatoire. Une structure combinatoire sur X peut encore être définie par (*a*) un PL-espace T; (*b*) un homéomorphisme t: $T \to X$; deux triples (T, t, X), (T', t', X) définissent la même structure combinatoire si T et T' sont des isomorphes; PL-espaces . Si T est une PL-variété, l'espace combinatoire défini par (T, t, X) est appelé *variété combinatoire.*

Soit $\mathfrak{V}$ une variété différentiable de classe C^r au moins. Rappelons que l'on appelle C^r-triangulation de $\mathfrak{V}$ une triangulation (K, h), h: $|K| \to \mathfrak{V}$, telle que, pour tout n-simplexe $s \in K$, la restriction de h à l'adhérence σ de $|s|$ est différentiable de classe C^r (i. e. σ étant supposé linéairement plongé dans R^n, $h \mid \sigma$ se prolonge à un voisinage ouvert de σ dans R^n en une application différentiable de classe C^r au sens classique). Un théorème fondamental de J. H. C. WHITEHEAD [8*a*, *c*] s'énonce comme suit.

Si (K_i, h_i), $i = 1, 2$, sont deux C^r-triangulations d'une variété différentiable $\mathfrak{V}$ de classe C^r, $r \geq 1$, alors ces triangulations sont combinatoirement équivalentes.

Compte tenu du théorème de CAIRNS [2*a*] suivant lequel toute variété paracompacte de classe C^r admet une C^r-triangulation, ce résultat est équivalent au suivant.

Soit X un espace paracompact et notons $D^r(X)$ l'ensemble des structures de C^r-variété dont il peut être muni; notons de même $\Gamma(X)$ l'ensemble des structures combinatoires dont il peut être muni. Il existe une application canonique

$$\gamma_X\colon D^r(X) \to \Gamma(X) \tag{7.1}$$

telle que si $\sigma \in D^r(X)$ et si (K, h) est C^r-triangulation de la variété $\mathfrak{V} = X_\sigma$, alors $(K, h, X) \in \gamma_X(\sigma)$.

La structure combinatoire $\gamma_x(\sigma)$ est dite *sous-jacente* à la structure différentiable σ.

Le problème se pose de définir une catégorie des variétés combinatoires (plus généralement des espaces combinatoires). Ce que sont les objets d'une telle catégorie est bien clair, mais il n'en va pas de même pour les morphismes. Compte tenu du théorème ci-dessus de J.H.C. WITHEHEAD, il serait évidemment souhaitable de définir ces morphismes de telle sorte que toute application différentiable d'une variété différentiable $\mathfrak{V}$ dans une autre $\mathfrak{W}$ soit un morphisme pour les structures combinatoires sous-jacentes. Dans ces conditions, l'application γ_X de (7.1) donnerait lieu à un foncteur de la catégorie des variétés différentiablee dans la catégorie des variétés combinatoires. La chose serait aisée si l'on était assuré de pouvoir C^r-trianguler $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$ de manière à ce que f devienne une PL-application pour les PL-structures correspondantes. J'ignore si un tel problème a été étudié jusq'ici.

8. Revenons au pseudogroupe Λ_n et soit $f\colon U \to V$ une de ses transformations. Soient $x \in U$, ξ un vecteur quelconque de R^n et considérons les points $z = x + \lambda \cdot \xi$, λ étant réel et $\geqq 0$: ils appartiennent à U pour λ assez petit et en outre il existe un $\varepsilon > 0$ et un vecteur η de R^n tels que

$$f(x + \lambda \cdot \xi) = f(x) + \lambda \cdot \eta \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \lambda < \varepsilon.$$

Ceci permet de prolonger f en une application $\tilde{f}$ aux vecteurs tangents de telle manière que le vecteur (x, ξ) d'origine x et équipollent à ξ soit transporté sur le vecteur d'origine $f(x)$ équipollent à η:

$$(\tilde{f}(x, \xi) = (f(x), \eta).$$

Dans cette notation un vecteur d'origine dans U (resp. V) est identifié à un point de $U \times R^n$ (resp. $V \times R^n$) et on a $\tilde{f}\colon U \times R^n \to V \times R^n$, transformation qui commute avec la multiplication d'un vecteur (x, ξ) par un scalaire réel $\lambda \geqq 0$: en posant

$$(x, \xi) = \xi_x, \quad \lambda \xi_x = (x, \lambda . \xi),$$

on a

$$\tilde{f}(\lambda . \xi_x) = \lambda . \tilde{f}(\xi_x). \qquad \lambda \geq 0.$$

On a aussi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \times R^n \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & V \times R^n \arrow[d] \\ U \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales représentent les projections sur le premier facteur.

Toutefois, appliquée aux vecteurs d'origine x, l'application $\tilde{f}$ n'est pas linéaire; en particulier $\tilde{f}(-\xi_x)$ n'est pas en général un multiple de $\tilde{f}(\xi_x)$. De plus $\tilde{f}$ est en général discontinue.

Pour $\xi_x \neq 0$ on peut considérer la classe $\{\xi_x\}$ des $\lambda\xi_x$, $\lambda > 0$: l'ensemble de ces classes constitue un espace S_x^{n-1} homéomorphe à S^{n-1} et muni d'une structure naturelle de PL-sphère invariante par les opérations du groupe d'isotropie Π_x du pseudogroupe Λ_n en x; en outre $\tilde{f}$ induit un isomorphisme de S_x^{n-1} sur S_{fx}^{n-1}. On peut considérer l'espace $\{x\} \times R^n$ des vecteurs tangents en x comme un cône $C_x = CS_x^{n-1}$ de sommet x et de base S_x^{n-1}. De nouveau $\tilde{f}$ induit un isomorphisme de C_x sur C_{fx} compatible avec la multiplication par les scalaires ≥ 0. La structure de C_x est celle d'un cône de base une PL-$(n-1)$-sphère et sur lequel opère un groupe Π isomorphe à Π_x; cette structure pour laquelle les génératrices du cône ont un sens intrinsèque (*i.e.* invariant par Π) est plus précise que la structure de PL-n-cellule ouverte qui lui est sous-jacente.

On notera que les applications $\tilde{f}$ opérant sus $R^n \times R^n$ constituent un pseudogroupe $\tilde{\Lambda}_n$ prolongeant holoédriquement le pseudogroupe Λ_n [4c, chap. III. § 1, *A*]. On en déduit que tout atlas $\mathfrak{A}: \mathfrak{V} \to (R^n, \Lambda_n)$ se prolonge canoniquement en un atlas $\tilde{\mathfrak{A}}: C(\mathfrak{V}) \to (R^{2n}, \tilde{\Lambda}_n)$ où $C(\mathfrak{V})$ est un ensemble muni d'une projection p sur $\mathfrak{V}$ compatible avec les cartes de $\mathfrak{A}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}$. Cet ensemble, muni de la structure définie par l'atlas $\tilde{\mathfrak{A}}$ et la projection p, est défini à un isomorphisme près: nous l'appellerons ***l'espace conique des vecteurs tangents*** à la PL-variété $\mathfrak{V}$. Toute transformation $\tilde{f} \in \tilde{\Lambda}_n$ est de la forme

$$(x, y) \to (f(x), \gamma_x \cdot y) \tag{8.1}$$

où γ est une application de la source U de f dans le groupe Π, $\gamma(x) = \gamma_x$. Cette application se déduit canoniquement de f et le $\cdot$ de (8.1) indique l'opération du groupe Π sur $R^n \approx CS^{n-1}$. Les applications γ constituent, au sens de [4c, chap. *V*, § 2, I] une classe locale L d'applications des ouverts de R^n dans le groupe Π opérant sur CS^{n-1}. On en déduit que $C(\mathfrak{V})$ est aussi muni d'une structure L-fibrée de base $\mathfrak{V}$, fibre CS^{n-1} et groupe structural Π. Nous reviendrons ailleurs sur le lien entre cette structure fibrée et le ***PL-microfibré tangent*** à la PL-variété $\mathfrak{V}$ défini par J. MILNOR [6c]. Lui sont associés de façon évidente un espace fibré de fibre S^{n-1} et un espace fibré principal de fibre-groupe Π. On notera encore que l'application $\mathfrak{V} \to C(\mathfrak{V})$ peut être interprétée comme un foncteur covariant de la catégorie $\mathfrak{V}^{PL}$ des PL-variétés dans la catégorie des espace L-fibrés de base une PL-variété, de fibre CS^{n-1} et de groupe structural Π.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Chap. I et IX, Paris, Hermann 1951 et 1958.

[2] S. S. CAIRNS, *a) On the triangulation of regular loci*, «Ann. Math.», 35 (1934), pp. 579-87.
b) Triangulated manifolds which are not Brouwer manifolds, «Annals of Math.», 41 (1940), pp. 792-795.

[3] H. CARTAN, Séminaire de l'E. N. S., lère année, exposé I, Paris, 1948-49,

[4] P. DEDECKER, *a) Quelques aspects de la théorie des structures locales*, «Bull. Soc. Math. Belg.», 1952, pp. 26-43.
b) Variétés trianguloïdes et variétés combinatoires, Universidad Central de Venezuela, Seminario matemático, mai 1961 (multicopié).
c) Variétés différentiables et espaces fibrés, notes multicopiées, Université de Liège, 1962.

[5] C. EHERSMANN, *Structures locales*, Roma, «Istituto Matematico dell' Università», notes polycopiées, 1952.

[6] J. MILNOR, *a) On the relationship between differentiable manifolds and combinatorial manifolds*, mimeographié, Univ. Princeton, 1956.
b) Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, «Annals of Math.», 74 (1961), pp. 575-590.
c) Microbundles and differentiable structures, miméographié, Princeton Univ , Sept. 1961.

[7] J. MUNKRES, *The triangulation of localli triangulable spaces*, «Acta Math.», 97 (1957), pp. 67-93.

[8] J. H. C. WHITEHEAD, *a) On C^1-complexes*, «Annals of Math», 41 (1940). pp. 809-824.
b) Note on manifolds, «Quart. J. Math.» (Oxford), 12 (1941), pp. 26-29.
c) Manifolds with transverse fields in Euclidean space, «Annals of Math.», 73 (1961), pp. 154.212.

[9] E. C. ZEEMAN, *a) Polyhedral manifolds*, Proceedings of the 1961 Topology Institute, Univ. Georgia, 14 août-8 sept. 1961, Prentice Hall Inc.
b) Seminar on Combinatorial Topology, I. H. S. (1963).