Sur l'intégration des systèmes différentiels extérieurs.

Memoria di MENDEL HAIMOVICI (a Jasi, Romania)

À M. Enrico Bompiani pour son Jubilé scientifique.

Résumé. - L'étude des intégrales des systèmes différentiels extérieurs en involution a été commencée par E. CARTAN [3]. Ses mémoires sur ce sujet s'occupent, il est vrai, seulement des systèmes de Pfaff, mais ils contiennent tout ce qui est essentiel pour le cas général.

C'est à E. KAHLER qu'on doit l'extension des résultats de Cartan aux systèmes de degré queconque.

Depuis lors, d'autres auteurs se sont occupés du même probleme. En particulier, on doit d'importants résultats à SCHOUTEN et à VAN DER KULK [12].

Tous ce auteurs étudié surtout les éléments plans intégraux réguliers et les variétés intégrales régulières. Or, il se trouve que, assez souvent, il est intéressant d'étudier aussi les variétés intégrales singulières. Pour prendre un exemple banal, si on considère un système d'équations du I^{er} ordre à une fonction inconnue de k variables indépendantes

$$F_\alpha(x^1,\ x^2, \dots ,\ x^k,\ z\ p_1\ ,\ p_2\ , \dots ,\ p_k) = 0, \tag{1}$$

on peut considérer que l'intégration de ce système revient au système différentiel extérieur formé par (1) et par l'équation de Pfaff

$$dz - p_1 dx^1 - p_2 dx^2 - \dots - p_k dx^k = 0.$$

Si le système n'est pas en involution, alors il peut tout de même avoir des intégrales, mais celles-ci sont singulières.

Ce mémoire étudie des propriétés qui regardent les variétés intégrales des systèmes différentiels extérieurs, régulières aussi bien que singulières. Pour cela il faut d'abord étudier les éléments plans intégraux. Cela comporte l'étude de certaines variétés de plans dans l'espace projectif à un nombre quelconque de dimensions.

Le premier chapitre est consacré a l'étude des plans qui appartiennent à un système d'équations extérieures finies. Les propriétés des éléments plans intégraux, en un point intégral d'un système différentiel, sont, en effet, en partie, les mêmes que celles d'un tel système d'équations finies.

Dans ce même chapitre, nous avons défini les diverses singularités des plans du système fini, analogues aux singularités des éléments plans intégraux d'un système différentiel.

Le plus importants parmi les plans singuliers, que nous avons eu à distinguer, sont ceux que nous avons appelés « de ramification » et les « caractéristiques ». A l'aide de premiers nous séparons diverses branches d'éléments plans intégraux. Les derniers sont situés sur les éléments plans intégraux réguliers.

Une place spéciale a été faite aux systèmes que nous avons appelés normaux et qui jouent un rôle exceptionnel parmi les systèmes différentiels extérieurs.

Les propriétés des systèmes différentiels extérieurs, qui sont propres à ces systèmes et ne sont pas de simples traductions de celles des systèmes finis, sont étudiés dans le 2^{me} chapitre. Les plus importantes de ces propriétés regardent le prolongement des systèmes différentiels et l'étude de la manière dont se prolongent les éléments plans intégraux réguliers ou singuliers. Cela comporte une étude détaillée des propriétés (caractères, genre, etc.) du prolongement d'un système en comparaison avec les propriétés du système donné.

E. CARTAN démontré [3] un théorème, selon lequel, en prolongeant successivement un système différentiel extérieur, on arrive après un nombre fini de prolongements (ou à un système incompatible, ou bien) à un système en involution. Ce théorème a été repris par SCHOUTEN et VAN DER KULK [12] et par MASATAKE KURANISKI [9]. Nous lui donnons ici, au 3^{me} chapitre, une demonstration complète; c'est-à-dire que nous démontrons aussi que toute variété intégrale d'un système différentiel en involulion, peut être obtenue comme variété régulière d'un certain système prolongé, fait qui était resté jusqu'ici sans démonstration [2], [11].

Dans le même chap. III, nous donnons encore une déduction du théorème d'existence de Cartan (sans toutefois le démontrer complètement, c'est-à-dire sans démontrer la convergence du développement Taylorien) et d'un théorème sur l'existence des variétés intégrales passant par une variété caractéristique donnée.

Le contenu de ce mémoire résulte plus en détail des titres des paragraphes.

CHAPITRE I.

Systèmes algébriques extérieurs.

§ 1. - *q-plans solutions d'un système d'équations extérieures. Variété représentée par les conditions de Grassmann. Variété des q-plans solutions et ses composantes irréductibles.*

1. Soit un système d'équations extérieures

$$(S)\quad \begin{cases} \Theta_{\alpha_1} = a_{\alpha_1 i} u^i = 0, & (\alpha_1 = 1, 2, \dots, b_1;\ i = 1, 2, \dots, n) \\ \Theta_{\alpha_2} = a_{\alpha_2 i_1 i_2} u^{i_1} \wedge u^{i_2} = 0, & (\alpha_2 = b_1 + 1, b_1 + 2, \dots, b_2;\ i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ \Theta_{\alpha_l} = a_{\alpha_l i_1 i_2 \dots i_l} u^{i_1} \wedge u^{i_2} \wedge \dots \wedge u^{i_l} = 0, & \\ \qquad (\alpha_l = b_{l-1} + 1, b_{l-1} + 2, \dots, b_l;\ i_1, i_2, \dots, i_l = 1, 2, \dots, n) & \end{cases}$$

défini dans un espace vectoriel à n dimensions sur le corps réel ou sur le corps complexe, selon que les coefficients a sont dans l'un ou l'autre de ces corps,

Un plan à q dimensions P_q (*q-plan*) d'équations (indépendantes)

$$\Phi_\sigma = A_{\sigma i} u^i = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, n - q) \tag{1.1}$$

est dit ***vérifier*** le système (S) ou ***appartenir*** au système (S), si, en vertu des équations (1.1), les équations de ce système sont vérifiées [2] (¹).

Cela veut dire que les formes extérieures Θ appartiennent à l'idéal défini par les formes linéaires φ_σ.

Il est d'ailleurs facile à voir que, si le q-plan P_q est représenté paramétriquement

$$u^i = b^i_\sigma t^\sigma, \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, q) \tag{1.2}$$

alors la condition, pour qu'il appartienne à (S), revient à exprimer que, en remplaçant (1.2) dans (S), on obtient des identités.

2. Si $p^{i_1 i_2 \dots i_q}$ sont les coordonnées grassmanniennes du q-plan, alors

(¹) Première partie, III, pp. 20-26.

la condition, pour que celui-ci appartienne à (S), s'éxprime [2] (2), [3] (3) par les relations

$$(1.3) \qquad \begin{cases} a_{\alpha_1 i_1} p^{i_1 i_2 \dots i_q} = 0, \\ a_{\alpha_1 i_1 i_2} p^{i_1 i_2 \dots i_q} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{\alpha_q i_1 i_2 \dots i_q} p^{i_1 i_2 \dots i_q} = 0. \end{cases}$$

Les variables $p^{i_1 i_2 \dots i_q}$ (symmétriques gauches dans les indices) vérifient le système d'équations de Grassmann (v. p. ex. [11] (4))

$$(G_q) \qquad p^{[i_1 i_2 \dots i_q} p^{d_1] d_2 \dots d_q} = 0.$$

Si nous considérons, dans l'éspace projectif Π à C_n^{q-1} dimensions, un point de coordonnées $p^{i_1 i_2 \dots i_q}$ (ou $i_1, i_2, \dots, i_q$ forment une suite croissante) alors, dans cet espace, les équations déduites de (G_q) par l'arrangement des indices de chaque variable en ordre croissant, représentent une variété algébrique nommée variété grassmannienne G_q [9] (5), [7] (6).

Celle-ci a $q(n-q)$ dimensions et est irréductible et sans points singuliers [8] (7) ou [1] (8). Les q-plans de (S) se représentent donc par les points d'intersection de la variété plane, représentée par le système (1.3) (où nous avons en vue les relations qui en résultent pour les p, à indices en ordre croissant) avec la variété (G_q).

Soit W_q la variété de ces points d'intersection. Elle se décompose en un nombre fini de variétés algébriques *irréductibles. Soit A_q une de celle-ci.* Nous désignerons par P_q un point de W_q et en même temps le q-plan qu'il représente. Nous utiliserons le même terme « variété W_q ou A_q de q-plans », soit pour désigner les variétés W_q ou A_q elles mêmes dans Π, telles que nous les avons définies plus haut, soit pour désigner l'ensemble des q-plans représentés par les points de ces variétés. Dans le premier cas, le terme « q-plan (régulier ou singulier) de la variété » désigne le point représentatif, dans Π, du q-plan.

(2) p. 24.
(3) p. 89.
(4) p. 14.
(5) p. 21-22.
(6) Vol. II, livre IV, chap. XIV, § 1, p. 309-316 (dans l'édition russe pp. 340-348).
(7) p. 14.
(8) p. 45.

3. Remarquons qu'on peut considérer que les equations $\Theta_{\alpha_1} = 0$ sont indépendantes entre elles, qu'aucune des équations $\Theta_{\alpha_2} = 0$ ne fait partie de l'idéal defini par les autres équations $\Theta_{\alpha_2} = 0$ et par $\Theta_{\alpha_1} = 0$ etc. Si (S) a cette propriété, nous disons que ses équations sont algébriquemeut indépendantes. Dans ce cas, l est *le degré* du système (S).

§ 2. - $(q+1)$-*plans du système* (S), *qui contiennent un q-plan donné de* (S). *Droites associées à ce q-plan. Plan polaire. Variété des* $(q+1)$-*plans de* (S), *qui contiennent un q-plan de la variété* A_q. *Plans semi-réguliers, réguliers, ou singuliers de* (S). *Genre. Chaînes de plans de* (S). *Plans singuliers, de ramification et caractéristiques. Caractères. Remarque au sujet des q-plans singuliers de* (S).

1. Cherchons les $(q+1)$-plans du système, qui contiennent un q-plan donné P_q d'une variété A_q. Un tel $(q+1)$-plan — soit P_{q+1} — est déterminé par P_q et par une droite — soit P_1. Nous disons que cette droite est *associée* à P_q. Soient $p^{i_1 i_2 \dots i_{q+1}}$ les coordonnées grassmanniennes de P_{q+1} et u^i les coordonnées de la droite P_1. On a

$$p^{i_1 i_2 \dots i_{q+1}} = u^{i_1} p^{i_2 i_3 \dots i_{q+1}} - u^{i_2} p^{i_1 i_3 \dots i_{q+1}} + \dots + (-1)^q u^{i_{q+1}} p^{i_1 i_2 \dots i_q} . \tag{2.1}$$

2. Si P_{q+1} appartient à (S), ses coordonnées grassmanniennes vérifient un système de relations, analogues à (1.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\alpha_1 i_1} p^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{q+1}} = 0, \\ a_{\alpha_2 i_1 i_2} p^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{q+1}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{\alpha_q i_1 i_2 \dots i_q} p^{i_1 i_2 \dots i_q i_{q+1}} = 0, \\ a_{\alpha_{q+1} i_1 i_2 \dots i_{q+1}} p^{i_1 i_2 \dots i_q i_{q+1}} = 0. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

En vertu des relations (2.1), on obtient de (2.2) un système d'équations linéaires en u^i, appelé *système polaire de* P_q, [2] (9).

Soit $r_q(P_q)$ le rang de ce système pour un P_q donné de A_q. Le plan qu'il représente — appelé *plan polaire de* P_q [13] (10) — a $n - r_q(P_q)$ dimensions. On a toujours, évidemment

$$r_q(P_q) + q \leq n.$$

(9) p. 64-66.
(10) Ch. II, § 30.

Pour que le $(q+1)$-plan cherché P_{q+1} existe, il faut et il suffit que

$$r_q(P_q) + q < n. \tag{2.3}$$

Considérons (sur A_q) un P_q tel que $r_q(P_q)$ y soit maximum et soit r_q ce maximum. Les q-plans P_q, situés sur A_q, pour lesquels $r_q(P_q) < r_q$, forment sur A_q un certain nombre de sous-variétés algébriques. Nous dirons que ces q-plans sont « *singuliers de première espèce du système* (S) ». Cette notion ne se confond pas, en général, avec celle de plan singulier de la variété A_q, représenté par un point singulier de la variété de l'espace Π, définie par le système formé par (G_q) et (1.3). Quand cela ne prètera pas à confusion, nous utiliserons la dénomination de « plan singulier », sans préciser « du système (S) ».

Si $r_q(P_q) = r_q$, nous dirons que P_q est un plan *semi-régulier* du système (S).

Nous appellerons, « *degré de singutarité* » la quantité $r_q - r_q(P_q)$.

3. Remarque. - Pour trouver les coordonnées de la droite P_1 associée à P_q, on peut supposer que ce dernier plan est défini par q droites indépendantes $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}, \dots, P_1^{(q)}$ resp. de coordonnées $u^i_{(1)}, u^i_{(2)}, \dots, u^i_{(q)}$ et exprimer que:

1) P_1 appartient à (S);

2) P_1 est associée à chacune des droites $P_1^{(\alpha)} (\alpha = 1, 2, \dots, q)$ dans le système d'équations du 2me degré, appartenant à (S);

3) P_1 est associée à chaque 2-plan défini par deux de ces droites dans système d'équations du 3me degré appartenant à (S) ...; P_1 est associée à P_q dans le système d'équations de degré $q+1$ appartenant à (S).

C'est la méthode de Cartan-Kähler [2], [8], pour définir une droite associée à un q-plan dans un système (S). (En réalité ces auteurs s'occupent de systèmes différentiels extérieurs et d'éléments plans intégraux par un point, mais cela revient au même (v. aussi [13]).

4. Soit maintenant un q-plan P_q, semi-régulier de (S), situé sur A_q. Supposons remplie la condition (2.3) et soit un $(q+1)$-plan P_{q+1} du système, contenant P_q. P_{q+1} est situé sur la variété W_{q+1} des $(q+1)$-plans du système, définie par le système linéaire (2.2) et par (G_{q+1}).

Il existe sur W_{q+1} un voisinage de $(q+1)$-plans qui contient P_{q+1} et tel que chacun de ses $(q+1)$-plans contienne un q-plan d'un certain voisinage de P_q donné sur A_q. Donc l'ensemble des $(q+1)$-plans de (S), qui contiennent les q-plans semi-réguliers de (S) situés sur A_q, forment une variété algébrique de $(q+1)$-plans, que nous nommons A_{q+1}. Sur cette variété se trouvent aussi des $(q+1)$-plans qui contiennent des q-plans singuliers de (S).

A_{q+1} *est irréductible,* car les q-plans situés sur ses $(q+1)$-plans, forment une variété irréductible A_q.

5. On peut définir pour les $(q+1)$-plans situés sur A_{q+1}, comme pour les q-plans situés sur A_q, les nombres $r_{q+1}(P_{q+1})$ et r_{q+1}. Vu que dans un voisinage quelconque d'un $(q+1)$-plan de A_{q+1}, il y a des $(q+1)$-plans semi-réguliers, il suit que, par un q-plan générique P_q semi-régulier de A_q, il passe un $(q+1)$-plan semi-régulier de A_{q+1}, c'est-à-dire que les q-plans de A_q, qui ont la propriété d'être contenus seulement dans des $(q+1)$-plans singuliers (de première espèce) de (S), forment une sous-variété de A_q.

Par une extension facile de ce raisonnement, on voit qu'on peut trouver, par un P_q générique semi-régulier situé sur A_q, un P_{q+1} semi-régulier générique situé sur A_{q+1}; par P_{q+1} (si $r_{q+1}+q+1<n$), un P_{q+2} semi-régulier générique situé sur une variété A_{q+2}, etc. Il est possible que, pour un P_q particulier et pour un h donné, tous les $(q+h)$-plans, formés de cette manière soient singuliers de première espèce pour (S). Dans ce cas nous dirons que P_q est ***singulier de*** 2^{me} ***espèce pour*** (S). On voit tout de suite que l'ensemble des q-plans P_q singuliers de 2^{me} espèce pour (S) forment un certain nombre de sous-variétés algébriques de A_q.

Si, pour un q-plan P_q semi-régulier, on a pu trouver la suite de plans semi-réguliers jusqu'à l'indice $q+h$ (sans qu'on ait précisé si tous les P_{q+h+1} sont singuliers de première espèce de (S)), nous disons que P_q est semi-régulier entre les indices q *et* $q+h$. Si

$$r_{q+h}+q+h=n$$

l'operation ne peut, évidemment, être continuée. Nous dirons, dans ce cas, que P_q ***est régulier à droite.***

Posons $q+h=p$; donc

$$r_p+p=n.$$

L'indice p est *le genre du système* (S) *sur la suite de variétés* A_q, $A_{q+1}, \dots, A_p$.

6. Supposons $q>1$ et considérons les $(q-1)$-plans situés sur les q-plans d'une variété irréductible A_q. Ces $(q-1)$-plans appartiennent au système (S), v. p. ex. [2] (11). ***Ils forment une variété irréductible de*** $(q-1)$***-plans de*** (S).

(11) p. 23.

Il est possible que cette variété coïncide avec une variété A_{q-1}, irréductible de $(q-1)$-plans. Dans ce cas, les plans de la variété A_q peuvent être générés à l'aide des plans de A_{q-1}, par le procédé exposé dans le no, précédent.

Si $q-1>1$, nous pouvons répéter ces considérations et nous arrivons soit 1) à un indice $q''=q-k$ tel que les $(q''-1)$-plans situés sur les q''-plans de la variété $A_{q''}$ forment une sous-variété d'une variété irréductible $A_{q''-1}$, non coïncidant avec $A_{q''-1}$, soit 2) à des 1-plans ou droites semi-régulières.

Examinons chacun de ces cas.

7. *Premier cas.* - Soit P_q un q-plan semi-régulier de (S). L'hypothèse 1) veut dire que, sur ce q-plan, il existe un $(q-1)$-plan P_{q-1} semi-régulier de (S), sur celui-ci un $(q-2)$-plan P_{q-2} semi-régulier de $(S), \ldots$, jusqu'à un $P_{q''}$ semi-régulier de (S).

L'indice q'', auquel on est arrivé, dépend du choix de la suite de plans $P_{q-1}, P_{q-2}, \ldots$. Posons

$$\min q'' = q'(P_q)+1$$

(il est possible que, pour un choix particulier de la suite $P_{q-1}, P_{q-2}, \ldots$, on arrive à q'', mais qu'il y ait des suites convenablement choisies, pour lesquelles on est dans le II^me^ cas), ensuite, entre les P_q situés sur A_q

$$\min q'(P_q)=q'$$

(il est possible que, pour certains P_q sur A_q, on soit dans le II^me^ cas).

P_q est semi-régulier entre les indices $q'(P_q)$ et q (ou bien, s'il est semi-régulier aussi entre les indices q et $q+h$, alors il est semi-régulier entre $q'(P_q)$ et $q+h$).

Les plans P_q, pour lesquels $q'(P_q)>q'$, forment une sous-variété de A_q, qu'on obtient en exprimant que les $q'(P_q)$-plans situés dans P_q sont singuliers de I^ère^ espèce pour (S). Si $q'(P_p)>q'$, il y a, dans un voisinage de P_q un autre q-plan — soit P^* — de A_q, tel que $q'(P_q)=q'$. Dans ce cas nous dirons encore que P_q *est singulier de III^me^ espèce (ou à gauche) d'indice* $q'(P_q)$. La même dénomination sera utilisée, lorsque $q'(P_q)>0$ et il y a d'autres P_q sur A_q, pour lesquels nous sommes dans le II^me^ cas.

Si $q'(P_q)=q'$ (≥ 1), nous disons que P_q *est régulier à gauche*, jusqu'à l'indice $q'+1$. S'il est encore régulier à droite, nous disons qu'il *est régulier entre les indices* $q'+1$ *et* p.

8. La variété B, des $(q'-1)$-plans situés sur les q-plans de A_q est irréductible et située sur une variété irréductible $\bar{A}_{q'}$, de plans de (S).

Soit $P_{q'}$, un q'-plan de $B_{q'}$. Supposons que, par ce q'-plan, passent des q-plans de (S), qui contiennent des q'-plans de $\bar{A}_{q'}$ non situés sur $B_{q'}$. D'après l'hypothèse, ces q-plans ne peuvent pas être situés sur A_q. Si cette propriété avait lieu pour tous les q'-plans de $B_{q'}$, il resulterait que, dans le voisinage de tout P_q de A_q, il y a des q-plans de (S) non situés sur A_q, ce qui est impossible. On en déduit le

THÉORÈME. - *Les q'-plans de $B_{q'}$, par lesquels passent des q-plans de (S), formés de q'-plans non situés sur $B_{q'}$, forment une sous-variété $B^*_{q'}$ de $B_{q'}$. Par un q'-plan générique de $B_{q'}$ (non situé sur $B^*_{q'}$) passent seulement des q-plans de (S) formés de q'-plans appartenant à $B_{q'}$.*

THÉORÈME. - *Tous les q'-plans de $B_{q'}$ sont singuliers de première espèce pour (S).*

En effet, soit $P_{q'}$ un tel q'-plan. Dans son voisinage, il y a, d'après l'hypothèse, des q'-plans $P'_{q'}$ de $\bar{A}_{q'}$ non situés sur des q-plans de A_q et semi-réguliers. Considérons alors la suite des variétés de plans de (S), $\bar{A}_{q'+1}$, $\bar{A}_{q'+2}, \ldots$. Il est clair que A_q n'est pas située sur une de ces variétés. Il en résulte que, pour une certaine valeur $\bar{q}$, telle que $q' \leq \bar{q} < q$, les $\bar{q}$-plans de (S) contenant $P_{q'}$ ne sont pas semi-réguliers de (S) sur $\bar{A}_{\bar{q}}$. Donc les $\bar{q}$-plans de (S), passant par $P_{q'}$ sont singuliers de I$^{\text{ère}}$ espèce. Puisque, d'autre part, nous avons établi que, si $\bar{q} > q'$, les q-plans situés sur les P_q de A_q forment des variétés $\bar{A}_{\bar{q}}$ — il suit que $\bar{q} = q'$. D'où notre affirmation.

Ces *q'-plans singuliers, qui ont la propriété que, tout en se trouvant sur une variété $\bar{A}_{q'}$ irréductible de q'-plans de (S), les $(q'+1)$-plans de (S), qui les contiennent, forment une variété $A_{q'+1}$ distincte de $\bar{A}_{q'+1}$* (c'est-à-dire de la variété des $(q'+1)$-plans de (S) qui contiennent les $(q'+1)$-plans semi-réguliers situés sur A_q) *seront appelés singuliers de ramification.*

9. *Deuxième cas* - Supposons maintenant qu'on arrive à des 1-plans (droites) semi-régulieres. Les droites appartenant à (S) forment une variété plane donnée par le système d'équations linéaires appartenant à (S), $\Theta_{\alpha_1} = 0$.

Dans ce cas, nous disons que P_q est régulier à gauche jusqu'à l'indice 1, ou, plus brièvement «*régulier à gauche*». S'il est régulier aussi à droite jusqu'à l'indice p, nous disons qu'il est *régulier*.

De ce qui précède, il suit immédiatement:

THÉORÈME. - *Il y a une seule suite de variétés irréductibles d'éléments plans réguliers de (S).*

Cette suite peut être construite, en partant des droites de (S). Donnons encore les définitions suivantes.

Le genre p du système, sur cette suite de variétés, sera appelé plus brièvement *le genre du système* (S) *et nous dirons encore que* (S) *est en* involution à p variables indépendantes [2].

Si, sur un plan *régulier* P_q, *les variables* $u^1, \ldots, u^q$ *sont indépendantes, nous disons que le système* (S) *est en involution aux variables* $u^1, u^2, \ldots, u^q$ *indépendantes ou encore, en involution* $(u^1, u^2, \ldots, u^q)$.

Un q-plan sur lequel les variables $u^1, u^2, \ldots u^q$ sont indépendantes sera encore appelé *q-plan* $(u^1, u^2, \ldots, u^q)$ ou *q-plan* (u).

10. *Chaînes* de plans de (S).. - Considérons une suite de plans de (S), contenus chacun dans le suivant

$$P_{q-k} \subset P_{q-k+1} \subset \cdots \subset P_{q-1} \subset P_q \subset P_{q+1} \subset \cdots \subset P_{q+h-1}\,. \tag{2.4}$$

Nous disons qu'une telle suite forme une *chaîne* du système (S).

On peut construire une chaîne, en partant d'un plan P_{q-k} de (S) et en construisant successivement une droite $P_1{}^{(q-k+1)}$ associée, qui forme avec P_{q-k} un plan P_{k-k+1} de (S), ensuite une droite $P_1{}^{(q-k+2)}$ associée à celui-ci, etc. Pour la construction de ces droites, on peut d'ailleurs employer le procédé décrit plus haut (v. no. 3).

Supposons que $q-k=1$ et que, sur les droites $P_1^{(1)}, P_1^{(2)}, \ldots$, on ait respectivement

$$\begin{array}{ll}
\text{sur } P_1^{(1)}: & u_2 = 0,\ u^3 = 0,\ u^4 = 0, \ldots,\ u^{q+h-1} = 0,\\
\text{sur } P_1^{(2)}: & u^1 = 0,\ u^3 = 0,\ u^4 = 0, \ldots,\ u^{q+h-1} = 0,\\
\ldots & \ldots\\
\text{sur } P_1^{(q+h-1)}: & u_1 = 0,\ u^3 = 0,\ u^4 = 0, \ldots,\ u^{q+h-2} = 0.
\end{array}$$

Sur le plan P_{q+h-1}, les variables $u^1, u^2, \ldots, u^{q+h-1}$ sont indépendantes et nous pouvons les considérer comme coordonnées. Nous dirons que le chaîne (2.4), définie par les droites ci-dessus, est une *chaîne de coordonnées*.

Chaînes régulières ou semi-régulières. Lorsque les plans de la suite (2.4) sont semi-réguliers, nous disons que la chaîne est semi-régulière. On peut évidemment, construire une chaîne semi-régulière par la méthode indiquée plus haut, en supposant d'abord que P_{q-k} est semi-régulier, ensuite que les droites ont été choisies, de manière à satisfaire aux conditions de semi-régularité.

Si $q-k=1$, $q+h-1=p$, nous dirons que la chaîne est *régulière*.

11. Introduisons la notation

$$r_{q'+1} - r_{q'}(P_{q'}) = s_{q'+1}\,,$$
$$r_{q'+2} - r_{q'+1} = s_{q'+2}\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$r_p - r_{p-1} = s_p\;.$$

Ici nous avons désigné par $r_{q'}(P_{q'})$ le rang du système polaire d'un $P_{q'}$ générique situé dans P_p, c'est-à-dire tel que le rang $r_{q'}(P_{q'})$ soit maximum quand P_q varie sur la variété A_q (v. no. 2 plus haut et nos. 7—9 pour le choix de q').

Il s'ensuit, pour $q' < q \leq p$

$$r_q = r_{q'}(P_{q'}) + s_{q'+1} + s_{q'+2} + \dots + s_q \tag{2.5}$$

et encore

$$r_{q'}(P_{q'}) + s_{q'+1} + s_{q'+2} + \dots + s_q + q < n \qquad (q < p), \tag{2.6}$$

$$r_{q'}(P_{q'}) + s_{q'+1} + s_{q'+2} + \dots + s_p + p = n\,. \tag{2.6'}$$

Les nombres s sont *les caractères du système sur la suite de variétés* A_q. Dans le cas des plans réguliers, on a $q' = 1$ et par suite

$$r_q = r_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_q\,.$$

On peut encore écrire

$$r_1 = s_0 + s_1\,, \tag{2.7}$$

où s_0 est le rang du système formé par les équations linéaires de (S). On a donc, dans ce cas

$$\begin{cases} r_q = s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_q\,, \\ s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_p + p = n\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Toujours dans le cas des plans réguliers, les nombres s seront appelés *les caractères de* (S) (sans spécifier la suite des A_q) [2] ([12]) ou [13] ([13]).

([12]) Chap. IV, pp. 61-67.
([13]) Chap. II, pp. 61-70.

Remarquons encore — ce qui est facile à vérifier — que, *dans le cas des systèmes du 2^{me} degré, la suite des caractères $s_{q'+1}, s_{q'+2}, \dots, s_q$ sur une suite quelconque de variétés de plans semi-réguliers, est non croissante* [3].

12. Soit une variété irréductible A^*_p de p-plans de (S), autre que la variété A_p des p-plans réguliers. D'après ce que nous venons d'établir dans les nos. précédents, il y a un entier q $(1 < q < p)$ tel que tous les $(q+1)$-plans, situés sur les p-plans de A^*_p, forment une variété A^*_{q+1} de $(q+1)$-plans semi-réguliers, tandis que les q-plans situés sur le mêmes p-plans soient singuliers de I$^{\text{ère}}$ espèce. Ces q-plans sont situés sur une variété de q-plans semi-réguliers, soit A'_q, et ils y forment une sous-variété algébrique B'_q. Un q-plan générique de A'_q est semi-régulier à gauche jusqu'à l'indice $q'+1$ $(q' < q)$. Cela veut dire que les $(q-1)$-plans, les $(q-2)$-plans, ..., les $(q'+1)$-plans, situés sur les q-plans de A'_q, sont semi-réguliers et forment resp. des variétés $A'_{q-1}, A'_{q-2}, \dots. A'_{q'+1}$ de $(q-1)$-plans, de $(q-2)$-plans, ..., de $(q'+1)$-plans. Sur ces variétés, les $(q-1)$-plans, les $(q-2)$-plans, ..., les $(q'+1)$-plans situés sur les q-plans de B'_q forment des sous-variétés de $A'_{q-1}, A'_{q-2}, \dots, A'_{q'+1}$ de $(q-1)$-plans, de $(q-2)$-plans, ..., de $(q'+1)$-plans.

Tous les q'-plans, situés dans les q-plans de A'_q, sont des q'-plans singuliers de I$^{\text{ère}}$ espèce situés sur une variété de q'-plans semi-réguliers, soit $A''_{q'}$ et y formant une sous-variété $B''_{q'}$. Les q'-plans situés sur les q-plans (singuliers de I$^{\text{ère}}$ espèce, de A'_q), contenus dans les p-plans de A^*_p, ont la même propriété. Ils forment une sous-variété de $B''_{q'}$ — soit $\underset{(1)}{B''_{q'}}$ — de q'-plans qui outre la singularité (de tous les plans de $B''_{q'}$), ont encore la propriété d'être contenus dans des p-plans de A^*_p. Si $q' > 1$, on peut continuer le même raisonnement et on trouve, de cette façon, une suite décroissante de nombres $p, q, q', \dots q^{(i)} \dots q^{(s)}$ ayant les propriétés suivantes:

a) Il y a une variété de $q^{(i)}$-plans semi-réguliers $A^{(i+1)}_{q(i)}$;

b) Un $q^{(i)}$-plan générique de la variété $A^{(i+1)}_{q(i)}$, est régulier à gauche jusqu'à l'indice $q_{(i+1)}+1$. Tous les $q_{(i+1)}$-plans situés dans les $q^{(i)}$-plans de $A^{(i+1)}_{q(i)}$ sont singuliers de I$^{\text{ère}}$ espèce et situés sur une variété de $q^{(i+1)}$-plans semi-réguliers $A^{(i+2)}_{q(i+1)}$ en y formant une sous-variété algébrique $B^{(i+2)}_{(i+1)}$. Les $q^{(i+1)}$-plans situés sur les $q^{(1)}$-plans singuliers de première espèce de $A^{(i+1)}_{q(i)}$ ont la même propriété et forment une sous-variété — soit $\underset{(1)}{B^{(i+2)}_{q(i+1)}}$ — de $B^{(i+2)}_{q(i+1)}$. Tous les $q^{(i+1)}$-plans situés sur les $q^{(i-1)}$-plans de $A^{(i)}_{q(i-1)}$ forment une sous-variété algébrique de $\underset{(1)}{B^{(i+2)}_{q(i+1)}}$, soit $\underset{(2)}{B^{(i+2)}_{q(i+1)}}$, ..., tous les $q^{(i+1)}$-plans situés sur les p-plans de A_p forment une sous-variété algébrique de $\underset{(i+1)}{B}{}^{(i+2)}_{q(i+1)}$, soit $\underset{(i+2)}{B}{}^{(i+2)}_{q(i+1)}$.

c) Un $q^{(\varkappa)}$-plan générique de $A_{q^{(\varkappa)}}^{(\varkappa+1)}$ est régulier.

Il résulte que les $q^{(\varkappa)}$-plans situés sur les p-plans de A_p^* sont singuliers de Ier espèce pour (S) et situés sur la variété des $q^{(\varkappa)}$-plans réguliers. Donc

THÉORÈME. - *Les p-plans de la variété A_p^* sont formés de $q^{(\varkappa)}$-plans singuliers de première espèce pour (S), situés sur la variété des $q^{(\varkappa)}$-plans réguliers* $(q^{(\varkappa)} \geq 1)$.

13. On peut construire un plan P_p de A_p^* et une chaîne de coordonnées sur P_p, de la manière suivante:

On construit d'abord (si $q^{\varkappa} > 1$) une chaîne semi-régulière de coordonnées

$$P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_{q^{(\varkappa)}-1}\,.$$

On construit ensuite une droite $P_1^{(q^{(\varkappa)})}$ associée à $P_{q^{(\varkappa)}-1}$, formant avec $P_{q^{(\varkappa)}-1}$ un $q^{(\varkappa)}$-plan $P_{q^{(\varkappa)}}$ singulier (de première espèce), situé sur la sous-variété $B_{q^{(\varkappa)}}^{(\varkappa+1)}$ de la variété $A_{q^{(\varkappa)}}^{(\varkappa+1)}$. Ainsi, les coordonnées de $P_1^{(q^{(\varkappa)})}$ doivent vérifier, outre les $r_{q^{(\varkappa)}-1}$ relations qui expriment que cette droite est associée à $P_{q^{(\varkappa)}-1}$, encore les relations qui obligent $P_{q^{(\varkappa)}}$ à rester sur $B_{q^{(\varkappa)}}^{(\varkappa+1)}$.

Si $q^{(\varkappa)} = 1$, on commence par construire la droite $P_1^{(1)}$, singulière (de première espèce), située sur la sous-variété $B_1^{(2)}$ de la variété $A_1^{(2)}$.

On continue en construisant la chaîne semi-régulière

$$P_{q^{(\varkappa)}+1} \subset P_{q^{(\varkappa)}+2} \subset \dots \subset P_{q^{(\varkappa-1)}-1}$$

et ensuite une droite $P_1^{(q^{(\varkappa-1)})}$ associée à $(P_{q^{(\varkappa-1)}-1})$ et située sur la sous-variété $B_{q^{(\varkappa-1)}}^{(\varkappa)}$ de la variété $A_{q^{(\varkappa-1)}}^{(\varkappa)}$ et ainsi de suite. Les coordonnées de la droite $P_1^{(q^{(\varkappa-1)})}$ vérifient les $r_{q^{(\varkappa-1)}-1}$ relations qui expriment qu'elle est associée à $P_{q^{(\varkappa-1)}-1}$ et en outre celles qui expriment qu'elle elle est singulière.

Ainsi donc on peut construire les p-plans de A_p^* à l'aide de chaînes semi-régulières et de plans singuliers. La chaîne

$$P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_p\,,$$

construite comme plus haut, peut d'ailleurs être prise comme chaîne de coordonnées.

14. Considérons, sur le plan P_p de A_p^*, une chaîne

$$P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_p ,$$

dans laquelle tous les plans sont semi-réguliers, sauf ceux, dont nous venons d'établir plus haut qu'ils sont singuliers de ramification. Considérons encore la suite des nombres

$$r_1(P_1),\ r_2(P_2), \ldots ,\ r_p(P_p) .$$

Si P_α est semi-régulier alors $r_\alpha(P_\alpha) = r_\alpha$ (sur la variété A_α sur laquelle il se trouve). Si $P_{\alpha+1}$ est singulier de ramification $(\alpha + 1 = q^{(i)})$, nous supposons que $r_{\alpha+1}(P_{\alpha+1})$ ne change pas lorsque $P_{\alpha+1}$ varie dans un voisinage sur la variété $B_{q(i)}^{(i+1)}$ de plans singuliers sur laquelle il se trouve, ce qui s'exprime en disant qu'il est pris d'une façon générique sur cette variété.

Une droite associée au plan P_α et qui forme avec celui-ci un $(\alpha + 1)$-plan situé sur $B_{q(i)}^{(i+1)}$ (singulier de ramification) c'est-à-dire sur un p-plan de A_p^*, vérifie les équations du système polaire de P_α et encore un système de conditions qui expriment cette propriété-là. Le rang du système total des conditions est donc plus grand que $r_\alpha(P_\alpha)$. Soit ce rang $r_\alpha(P_\alpha) + w_\alpha$.

Pour un α quelconque $(< p)$, désignons par ρ_α le rang du système qui exprime qu'une droite est associée à un P_α et située sur un p-plan de la variété A_p. On a

$$\rho^\alpha = r_\alpha(P_\alpha) + w_\alpha , \tag{2.9}$$

où $w_\alpha = 0$, si $P_{\alpha+1}$ est semi-régulier ou si $\alpha = p$; $w_\alpha > 0$ si $P_{\alpha+1}$ est sur $B_{q(i)}^{(i+1)}$ $(\alpha + 1 = q^{(q)})$; $r_\alpha(P_\alpha) = r_\alpha$ si P_α est semi-régulier; $r_\alpha(P_\alpha) < r_\alpha$ si P_α est singulier.

Les nombres

$$\sigma_\alpha = r_\alpha(P_\alpha) - r_{\alpha-1}(P_{\alpha-1}) , \tag{2.10}$$

différences de rangs des systèmes polaires de deux termes successifs, d'une chaîne générique d'un p-plan P_p de A_p^*, s'appelleront le *pseudocaractères* du système sur la variété A_p. Si $P_{\alpha-1}$ est semi-régulier, alors σ_α est égal au caractère s_α.

Il est évident que, *pour que le système soit en involution à q-variables indépendantes, il faut et il suffit que les w_α soient nuls, pour* $\alpha = 1, 2, \ldots, q$.

15. Remarque. - *Si le système est du II^{me} degré, on a toujours*

$$\sigma_{\alpha+1} \leq \sigma_\alpha - w_{\alpha-1} .$$

En effet, considérons les plans P_α et $P_{\alpha+1}$, termes successifs d'une chaîne générique d'un p-plan P_p de A_p^* et supposons que cette chaîne ait été prise comme chaîne de coordonnées. Pour qu'un droite P_1 soit associée à P_α, il faut et il suffit (dans notre hypothèse) qu'elle soit associée aux droites $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}, \dots, P_1^{(\alpha)}$ et le rang du système qu'on obtient en imposant ces conditions est $r_\alpha(P_\alpha)$. Pour qu'elle soit associé à $P_{\alpha+1}$, il faut qu'elle soit encore associée à $P_1^{(\alpha+1)}$; cela veut dire qu'au système polaire de P_α, de rang $r_\alpha(P_\alpha)$, il faut ajouter $\sigma_{\alpha+1}$ relations indépendantes qui expriment que P_1 est associée aussi a $P_1^{(\alpha+1)}$. D'autre part, P_α est situé sur A_p^{**} (variété générée par les α-plans situés les p-plans de A_p^*) et vérifie les $w_{\alpha-1}$ relations qu'il faut ajouter au système polaire de $P_{\alpha-1}$ pour obtenir un P_α situé sur A_α^{**}.

On peut donc dire que, pour que P_1 soit associée à P_α, il faut d'abord qu'elle soit associée à $P_{\alpha-1}$ et que le plan $P_1 \times P_{\alpha-1}$, soit situé sur un A_α^{**} — ce qui implique $r_{\alpha-1}(P_{\alpha-1}) + w_{\alpha-1}$ relations indépendantes et, en plus, $\sigma_\alpha - w_{\alpha-1}$, relations indépendantes. En impossant encore la condition que le $(\alpha+1)$ — plan $P_\alpha \times P_1$ soit situé sur la variété $A_{\alpha+1}^{***}$, qui contient les $(\alpha+1)$-plans de A_p^*, on obtient en tout

$$\tau_\alpha^* = \sigma_\alpha + w_\alpha - w_{\alpha-1}$$

relations indépendantes entre elles et de celles qui expriment que P_1 est associé à $P_{\alpha-1}$ et situé sur A_α^{**}.

Une droite Q_1, associée à $P_{\alpha+1}$ est 1) associée à P_α et 2) associée à $P_1^{(\alpha+1)}$. Les relations qui expriment la condition 2) sont (on le voit comme plus haut) au nombre de $\sigma_{\alpha+1}$ indépendantes entre elles et de celles qui expriment la première condition.

D'autre part, la condition 1) peut se décomposer en

a) la condition d'être associée à $P_{\alpha-1}$;

b) la condition de former avec $P_{\alpha-1}$ un P_α situé sur A_α^{**};

c) la condition d'être associée à $P_1^{(\alpha)}$.

Si on ne retient que les deux premières, c'-à-d. *a*) et *b*), alors il y a, parmi les relations 2) de plus haut, un nombre au moins égal à $\sigma_{\alpha+1}^*$ d'indépendantes. Ce nombre est $\sigma_\alpha - w_{\alpha-1}$. Donc on a la relation de l'éconcé.

16. Étant donnée une variété A_p, on peut se demander, quel est le nombre de paramètres, dont dépend un q-plan ($q \leq p$) de (S), situé sur un p-plan semi-régulier de A_p et qui contient un γ-plan $P_\gamma (\gamma < q)$ donné sur un p-plan de A_p.

Pour y répondre, supposons que, sur un p-plan de A_p, les variables $u^1, u^2, \dots, u^p$ soient indépendantes et que, par suite, on puisse supposer que, sur P_q, les variables u^1, $u^2, \dots, u^q$ soient indépendantes. Supposons que, sur P_γ, u^1, $u^2, \dots, u^\gamma$ soient indépendantes et

$$u^\sigma = l^\sigma_\alpha u^\alpha, \qquad (\sigma = q+1,\ q+2, \dots, n;$$

$$u^{\gamma+1} = u^{\gamma+2} = \dots = u^q = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \dots, \gamma).$$

Notre problème revient à imposer aux coefficients $l^\sigma_{\gamma+1}, l^\sigma_{\gamma+2}, \dots, l^\sigma_q$, la condition que le q-plan d'équations

$$u^\sigma = l^\sigma_\alpha u^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, q)$$

appartienne à (S). Cela revient à déterminer successivement les droites

$$P_1^{(\gamma+1)}(u^1 = u^2 = \dots = u^\gamma = 0,\quad u^{\gamma+2} = \dots = u^q = 0,\quad u^\sigma = l^\sigma_{\gamma+1})$$
associée à P_γ

$$P_1^{(\gamma+2)}(u^1 = u^2 = \dots = u^\gamma = u^{\gamma+1} = 0,\ u^{\gamma+3} = \dots = u^q = 0,\ u^\sigma = l^\sigma_{\gamma+2})$$
associée à $P_{\gamma+1} = P_\gamma \times P_1^{(\gamma+1)}$

. . . .

$$P_1^{(q)}(u^1 = u^2 = \dots = u^{q-1} = 0,\quad u^\sigma = l^\sigma_q)$$
associée à $P_{q-1} = P_{q-2} \times P_1^{(q-1)}$,

ce qui implique, en tenant compte des nos. précédents, un nombre de

$$\rho_\gamma + \rho_{\gamma+1} + \dots + \rho_{q-1}$$

équations indépendantes. Donc le nombre de paramètres $l^\sigma_\alpha (\alpha = \gamma+1, \gamma+2, \dots$ $\dots, q)$, qui restent indépendants, est

$$N_{\gamma,q} = (q-\gamma)(n-q) - (\rho_\gamma + \rho_{\gamma+1} + \dots + \rho_{q-1}). \tag{2.11}$$

D'après (2.9) et (2.10), il résulte d'ici

$$N_{\gamma,q} = (q-\gamma)(n-q) - (q-\gamma)r_{q-1} + \tag{2.12}$$

$$+ (\sigma_{\gamma+1} + 2\sigma_{\gamma+2} + \dots + (q-\gamma-1)\sigma_{q-1}) - (w_\gamma + w_{\gamma+1} + \dots + w_{q-1}).$$

On déduit le

Théorème. - *Pour que les plans de A_q soient semi-réguliers, entre les indices $\gamma+1$ et q, il faut et il suffit que le nombre de paramètres $N_{\gamma,q}$ dont* *dépend ce plan soit égal à*

$$N_{\gamma,\,q} = (q-\gamma)(n-q-r_{q-1}) + (\sigma_{\gamma+1} + 2\sigma_{\gamma+2} + \ldots + (q-\gamma-1)\sigma_{q-1}\,.$$

En général $N_{\gamma,\,q}$ est plus petit que ce nombre.

La démonstration résulte immédiatement du fait que la régularité implique

$$w_\gamma = w_{\gamma+1} = \ldots = w_{q-1} = 0.$$

Pour le cas des plans réguliers, nous retrouvons un théorème connu [2] ([14]).

17. EXEMPLE. - Soit le système

$$u^1 \wedge u^2 \wedge u^3 + u^1 \wedge u^4 \wedge u^5 + u^1 \wedge u^6 \wedge u^7 = 0,$$

$$u^1 \wedge u^2 \wedge u^3 + u^1 \wedge u^4 \wedge u^8 + u^1 \wedge u^6 \wedge u^9 = 0,$$

$$u^1 \wedge u^2 \wedge u^4 = 0, \quad u^1 \wedge u^2 \wedge u^6 = 0.$$

On constate immédiatement que les caractères de ce système sont

$$s_0 = s_1 = 0, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = s_4 = s_5 = 0.$$

Il y a une variété $A_3{}^*$ de 3-plans, donnée par les équations

$$p_{12i} = 0, \quad p_{145} + p_{167} = 0, \quad p_{148} + p_{169} = 0$$

(et les équations de GRASSMANN (G_3)). Tous les 2-plans contenus dans ces 3-plans ont $p_{12} = 0$ (et sont donc singuliers); inversement, un 2-plan avec $p_{12} = 0$ est situé sur un 3-plan de $A_3{}^*$. Les caractéres sur la suite de variétés qui commence avec $A_3{}^*$ sont

$$r_3^* = 3, \quad s_4^* = 2.$$

Le genre sur cette suite de variétés est 4.

Il y a encore une variété $A_4{}^*$ de 4-plans de (S) donnée par les équations

$$p_{1ijk} = 0$$

(et les équations de GRASSMANN (G_4)). Toutes les droites situés sur ces 4-plans ont $x^1 = 0$ et inversement, toute droite avec $x^1 = 0$ est située sur un 4-plan

([14]) p. 77.

de A_4^{**}. Les 3-plans situés sur les mêmes 4-plans sont singuliers. Les caracteres sur la suite de variétés, qui commence avec A_4^{**}, sont

$$r_4^{**} = 1, \quad s_5^{**} = s_6^{**} = s_7^{*} = s_8^{*} = 0.$$

Le genre, sur la même suite, est 8.

18. Considérons un p-plan P_p de (S), régulier entre les indices q' et p, p étant le genre de (S) sur la suite de variétés $A_{q'}$, $A_{q'+1}$, ..., A_p — et les q-plans qu'il contient $(q \geq q')$. Parmi ces q-plans, ceux qui sont singuliers de Ière espèce forment un certain nombre de variétés algébriques irréductibles, soit $C_q^{(1)}$, $C_q^{(2)}$, ..., $C_q^{(f_q)}$. Supposons que, pour P_p, les f_q soient minima pour tout q $(q' \leq q \leq p)$. Alors ces nombres restent constants si, au lieu de P_p, on prend au autre p-plan de (S), contenu dans un certain voisinage de P_p. Les p-plans de A_p, pour lesquels un f_q serait plus grand, forment une sous-variété de la variété A_p. Supposons encore que chacune des variétés $C_q^{(1)}$, $C_q^{(2)}$, ..., $C_q^{(f_q)}$ est de dimension minima pour tout q. Les p-plans de A_p, pour lesquels une ou plusieurs d'entre elles serait de dimension plus grande, forment une sous-variété de p-plans de (S) située sur A_p.

Les q-plans des variétés C_q situées sur les p-plans P_p, sur lesquels les nombres f et les dimensions de ces variétés sont minima, sont des q-plans *caractéristiques de* (S), *situés sur les p-plans* P_p. Les p-plans, pour lesquels un nombre f_q des variétés C_q ou les dimensions de certaines de ces variétés sont plus grands que le minimum, seront appelés *exceptionnels.*

Les q-plans des variétés C_q situées dans les p-plans exceptionnels seront appelés *singuliers spéciaux.*

19. *Remarques au sujet des plans singuliers.* - Nous sommes arrivés, dans ce qui précède, à une classification des plans singuliers de (S). Tout d'abord, nous avons défini trois espèces de plans singuliers. Mais, encore, nous avons été amenés à distinguer les q-plans singuliers (de première espèce, et, par suite aussi des autres deux espèces) *caractéristiques* situés sur les p-plans réguliers entre l'indice q' (minimum) et l'indice p (genre) sur une suite de variétés algébriques $A_{q'}$, $A_{q'+1}$, ..., A_p de (S) et ceux que nous avons appelés q-plans *singuliers de ramification.*

Mais ces plans singuliers ne sont pas les seuls possibles. Nous avons déjà mentionné au no. précédent les plans *singuliers spéciaux*, situés sur des *p-plans* (réguliers entre q' et p) *exceptionnels.* Il peut y avoir encore p ex. des q-plans singuliers situés sur une A_q, tels que les $(q+1)$-plans, qui les contiennent soient tous singuliers et qui pourtant ne sont pas de ramification (c'est-à-dire que ces $(q+1)$-plans sont situés sur A_{q+1}). Nous n'allons pas étudier ici une classification complète des plans singuliers. Nous nous contentons seulement de donner quelques définitions plus loin, au no. 20.

Remarquons encore, à propos des variétés de q-plans singuliers, un autre critère de classification.

Soit, sur une variété A_q de q-plans semi-réguliers, une sous-variété irréductible B_q d'éléments q-plans singuliers de première espèce. Soit $r_q(P_q)$ le rang du système polaire d'un q-plan de B_q et posons

$$\max_{B_q}.\ r_q(p_q) = r^*_{B_q}.$$

Les q-plans sur B_q pour lesquels $r_q(p_q) < r^*_{B_q}$ (s'il en existe) forment une sous-variété de B_q, soit B'_q.

En procédant de la même manière, on obtient des suites de variétés de q-plans, chacune contenant le suivantes, formées de *plans singuliers de première espèce de degrés différents.*

De la même manière on pourrait définir des variétés de plans singuliers d'une espèce quelconque et de degrés plus elevés.

Ces degrés différents de singularités peuvent d'ailleurs être rencontrés, soit qu'il s'agisse de singularités de ramification, soit qu'il s'agisse de singularités caractéristiques, etc.

Dans le premier cas, à partir de deux variétés de plans singuliers (contenus l'une dans l'autre) on construit deux suites différentes de variétés de plans semi-réguliers.

Nous avons dejà rencontré des singularités de degrés plus élevés au no. 12.

20. Nous dirons q'un plan P_q, appartenant à (S), est *générique* à droite, quand il y a un voisinage de P_q, dans lequel, étant donné un q-plan quelconque de (S) — soit P'_q — il y a des homéomorphismes entre les $(q+\varkappa)$-plans de (S) ($\varkappa \geq 0$ arbitraire) qui contiennent P_q et ceux qui contiennent $P_{q'}$, ces homéomorphismes conservant la semi-régularité des plans pour (S) on la régularité des mêmes plans pour les variétés irréductibles sur lesquelles ils se trouvent et faisant se correspondre les intersections des plans correspondants.

Les plans, qui ne sont pas génériques à droite, sont en quelque sorte singuliers. Si l'homéomorphisme n'existe pas pour les $(q+1)$-plans, cette singularité est de I$^{\text{ère}}$ espèce; si elle n'existe pour aucun des $(q+h)$-plans

(h donné > 1) elle est de 2^{me} espèce; il est évident que les plans singuliers définis dans les nos. précédents (caractéristiques ou de ramification) sont singuliers au point de vue de cette dernière définition.

21. Un plan singulier est *semi-générique sur la variété* (B_q, C_q, ...) sur laquelle il se trouve s'il est régulier sur cette variété et si son système polaire est de rang maximum sur cette variété. Il est *générique à droite sur la même variété* s'il remplit, pour *des variations sur la variété* les conditions données plus haut pour les éléments semi-réguliers génériques à droite.

Un plan de (S) est totalement générique s'il est générique à droite et si tout les plans qu'il contient (semi-réguliers ou singuliers) son génériques à droite.

Les plans qui ne sont pas totalement génériques, ont une certaine singularité, qui peut être d'une autre sorte que celles qui ont été définies jusqu'ici ($I^{ère}$, II^{me}, III^{me} espèces).

Lorsque nous dirons « *plan singulier* », sans spécification d'espèce, nous entendrons toujours « *de première espèce* ».

§ 3. – *Systèmes normaux. Leurs p-plans intégraux. Leurs caractères et leurs pseudo-caractères sur une variété A_p. Systèmes quasi-normaux. Plans caractéristiques. Condition d'involution d'un système normal. Forme simplifiée d'un systéme normal.*

1. DÉFINITION. – *Un système extérieur de la forme*

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \theta_\alpha = 0, \\ \varphi_\sigma = v_{\sigma i} \wedge u^i = 0, \end{cases} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, s_0;\ \sigma = 1, 2, \dots, s_1;\ i = 1, 2, \dots, p)$$

où θ_α *sont des formes linéaires indépendantes en* $v_{\sigma i}$ *et* φ_σ *sont, elles aussi, indépendantes entre elles et des* θ, *sera appelé p-normal, ou encore, plus simplement, normal.*

THÉORÈME. – *Un système normal ne peut avoir de plans à plus de p dimension, sur lesquels les variables* u^i *soient indépendantes.*

En effet, s'il y avait un tel plan, soit à $p + h$ dimensions, ses équations pourraient s'écrire

$$v_{\sigma i} = l_{\sigma i j} u^j + l_{\sigma i \tau} t^\tau \qquad (\tau = 1, 2, \dots, h),$$

où t sont des paramètres indépendants. En remplaçant dans (3.1), la condition, pour que celles-ci soient verifiées avec les variables u, t indépendantes, impose $l_{\sigma i \tau} = 0$, ce qui prouve l'affirmation.

2. THÉORÈME. - *Les p-plans de* (3.1) *sur lesquels u^i sont indépendantes (s'il en existe) se trouvent sur une seule variété algébrique irréductible A_p.*

En effet, si on ecrit les équations d'un tel p-plan sous la forme

$$v_{\sigma i} = l_{\sigma ij} u^j \tag{3.2}$$

et si on pose

$$\theta_\alpha = B_{\alpha\sigma i} v_{\sigma i}, \tag{3.3}$$

on obtient de (3.1), — en imposant la condition qu'elles soient vérifiées, les relations

$$\left\{ \begin{aligned} & l_{\sigma ji} - l_{\sigma ij} = 0, \\ & B_{\alpha\sigma i} l_{\sigma ij} = 0. \end{aligned} \right. \tag{3.4}$$

Or, les $l_{\sigma ij}$ peuvent être considérés comme coordonnées du p-plan. En numérotant les $v_{\sigma i}$ avec un seul indice, allant de $p+1$ à $p+ps_1$, on pourra écrire au lieu des équations (3.2)

$$u_\nu = l_{\nu i} u^i \qquad (\nu = p+1,\, p+2, \dots, p+ps_1)$$

et on aura

$$l_{\nu i} = (-1)^{\nu-1} \frac{p_{12 \dots i-1,\, \nu,\, i+1, \dots p}}{p_{12 \dots p}}; \tag{3.5}$$

les autres coordonnées grassmanniennes s'exprimeront par polynômes en $l_{\nu i}$. En partant des équations linéaires (3.4) entre les $l_{\nu i}$, on déduit que toutes les coordonnées grassmanniennes s'expriment en fonction d'une partie d'entre elles, par des polynômes divisés par $p_{12 \dots p}$. De sorte qu'il n'y a pas de p-plan singulier, sur la variété W_p des p-plans de (3.1), avec $u^1, u^2, \dots, u^p$ indépendantes. On voit donc immédiatement que cette variété est connexe et sans p-plans singuliers et, par suite, aussi irréductible.

3. On déduit encore, comme cas particulier, le

THÉORÈME. - *Si le système* (3.1) *admet un p-plan régulier, sur lequel $u^1, u^2, \dots, u^p$ sont indépendantes, alors tous les p-plans sur lesquels les mêmes variables sont indépendantes, sont réguliers.*

En effet, d'après le théorème du no. 9, § 2, il doivent appartenir à la même variété A_p, qui est celle des p-plans réguliers.

4. Si le système a la forme (3.1), dans lequel les équations $\theta_\alpha = 0$ établissent entre les $v_{\sigma i}$ et u^i un certain nombre de relations linéaires — mais laissent indépendantes les variables u^i — nous disons qu'il est *quasi-normal.*

THÉORÈME. – *Un système quasi-normal, qui admet comme solution un p-plan* P_p, *sur lequel les variables* u^i *sont indépendantes, peut être ramené à la forme normale, par une transformation des variables de la forme*

$$v_{\sigma i} = v_{\sigma i}^* + h_{\sigma j i} u^j . \tag{3.6}$$

En effet, soient

$$v_{\sigma i} = e_{\sigma j i} u^j$$

les équations de la solution P_p.

Alors, on n'a qu'à poser

$$h_{\sigma j i} = e_{\sigma j i} \tag{3.7}$$

et on obtient, en tenant compte de (3.4) (c'est-à-dire, dans notre cas $e_{\sigma j i} = e_{\sigma i j}$), des équations du deuxième degré de la forme (3.1),

$$v_{\sigma i}^* \wedge u^i = 0.$$

D'autre part, des hypothèses faites sur les équations $\theta_\alpha = 0$, on a

$$\theta_\alpha = B_{\alpha\sigma i} v_{\sigma i} + C_{\alpha j} u^j ; \tag{3.8}$$

donc, dans les variables transformées

$$\theta_\alpha = B_{\alpha\sigma i} v_{\sigma i}^* + B_{\alpha\sigma i} e_{\sigma j i} u^j + C_{\alpha j} u^j \tag{3.9}$$

et, puisque ce système admet la solution $v_{\sigma i}^* = 0$, sur laquelle les u^i sont indépendantes, il suit

$$B_{\alpha\sigma i} e_{\sigma j i} + C_{\alpha j} = 0$$

et par suite on a

$$\theta_\alpha = B_{\alpha\sigma i} v_{\sigma i}^* ,$$

ce qui prouve l'affirmation.

Notons d'ailleurs que la condition, énoncée plus haut, pour qu'un système quasi-normal puisse être transformé en un système normal, est évidemment aussi nécessaire.

La condition pour que les $v_{\sigma i}$ vérifient les relations $\theta_\alpha = 0$, peut être remplacée par le fait que ces variables s'expriment à l'aide de $ps_1 - s_0$ autres variables v^ν indépendantes entre elles

$$v_{\sigma i} = c_{\sigma i \nu} v^\nu . \tag{3.10}$$

5. Soit un p-plan appartenant au système normal (S), déterminé par p droites indépendantes qu'il contient $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}$, ..., $P_1^{(p)}$, resp. de coordonnées u_1^i, v_1^ν, u_2^i, v_2^ν, ..., u_p^i, v_p^ν. Supposons encore que, sur P_p, les variables u^i soient indépendantes, c'est-à-dire que la matrice des variables u_1^i, u_2^i, ..., u_p^i soit de rang p.

Pour déterminer un q-plan P_q situé sur P_p, on n'a qu'à prendre q droites $Q_1^{(1)}$, ..., $Q_1^{(q)}$ situés sur P_p, indépendantes entre elles. Pour cela on peut prendre d'abord les valeurs des coordonnées u^i de ces droites, soit u_1^{*i}, u_2^{*i}, ..., u_q^{*i}. Ces valeurs, (vu l'indépendance des droites $P_1^{(1)}$, ..., $P_1^{(p)}$) peuvent d'exprimer

$$u_\rho^{*i} = \lambda_\rho^j u_j^i \qquad (\rho = 1, 2, \dots, q\, ;\ j = 1, 2, \dots, p).$$

Une fois les valeurs λ_ρ^j trouvées de ces relations, on trouvera les valeurs $v^{*\nu}$ par les relations analogues

$$v_\rho^{*\nu} = \lambda_\rho^j v_j^\nu .$$

Supposons encore que P_p soit régulier entre $q'+1$ et p et que les $P_{q'}$ situés sur P_p soient singuliers des ramification. Pour que le plan $P_q (q > q')$ situé sur P_p soit singulier, il faut que le rang du système polaire de P_q

$$- c_{\sigma i \nu} v_\rho^{*\nu} u^i + c_{\sigma i \nu} u_\rho^{*i} v^\nu = 0 \tag{3.11}$$

soit plus petit que r_q. Et pour cela, il faut d'abord que le rang de la matrice

$$\| c_{\sigma i \nu} u_\rho^{*i} \| \tag{3.12}$$

(où les indices σ, ρ sont pour les lignes et ν sont les indices des colonnes), soit plus petit que r_q; ce qui s'exprime par un système de conditions algébriques pour λ_ρ^j. D'autre part, sur P_p, on aura

$$v_j^\nu = h_i^\nu u_j^i$$

et par suite

$$v_\rho^{*\nu} = \lambda_\rho^j h_i^\nu u_j^i$$

ou encore

$$v_\rho^{*\nu} = h_i^\nu u_\rho^{*i},$$

ce qui a pour conséqueuce que le rang de la matrice (déduite de (3.11))

$$\| - c_{\sigma i\nu} u_\rho^{*i} \qquad c_{\sigma i\nu} v_\rho^{*\nu} \|$$

est, lui aussi, plus petit que r_q, et que par suite la condition (en λ_ρ^j), exprimée pour le rang de (3.12), est suffisante pour la singularité du plan P_q.

Dans ce cas, le plan P_q ést *caractéristique*. En effet, si P_p varie dans un certain voisinage (de manière qu'il laisse toujours indépendantes les u^i) et qu'on veuille trouver les P_q singuliers qu'il contient dans chaque position, on procèdera comme plus haut. Les p droites indépendantes $P_1^{(i)}$ pourront être prises de manière que les coordonnées u_j^i soient toujours les mêmes et par suite les conditions pour la singularité de P_q sont toujours les mêmes. On déduit notre affirmation (v. § 2 nr. 18).

THÉORÈME. - *Étant donné un système p-normal* (3.1), *un q-plan singulier de ce système, situé sur un p-plan* (*u*) *régulier entre* $q'(<q)$ *et* q *est caractéristique.*

6. Construisons maintenant, sur un p-plan sur lequel $u^1, u^2, \ldots, u^p$ sont indépendantes, une chaîne de coordonnées, comme au no. 13 du § 2 et exprimons les propriétés qui définissent cette chaîne, lorsque P_p varie sur sa variété A_p.

Si $q^{(\varkappa)} > 1$ (v. § 2 no. 12), alors pour $k = 1, 2, \ldots, q^{(\varkappa)} - 1$, une droite associée à un P_k de la chaîne, c'est-à-dire associée aux droites $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}, \ldots, P_1^{k}$, sera donnée par les équations

$$v_{\sigma i} u_j^i - v_{\sigma i}^j u^i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k;\ i = 1, 2, \ldots, p),$$

(où $v_{\sigma i}^j = c_{\sigma i\nu} v_j^\nu$ (v. les notations des nos. 4,5, plus haut) et puisque, la chaîne étant de coordonnées, $u_j^i = \delta_j^i$, on obtient

$$v_{\sigma j} = v_{\sigma i}^j u^i \tag{3.13}$$

et on aura, en comparant avec (3.2) et en tenant compte de (3.4), $v^j_{\sigma i} = l_{\sigma ij} = l_{\sigma ji}$.

Parmi ces équations, il y en a r_k indépendantes. Donc, pour $j = 1, 2, \ldots, k$ on déduit que (en vertu des équations $\theta_\alpha = 0$) parmi les variables $v_{\sigma 1}$ il y en a s_1 indépendantes, parmi les $v_{\sigma 2}$ il y en a s_2 indépendantes entre elles et des précédentes, les autres $v_{\sigma 2}$ s'exprimant en fonction d'elles, ... parmi les $v_{\sigma k}$, il y en a s_k indépendantes entre elles et des précédentes les autres $v_{\sigma k}$ en dépendant linéairement. On peut s'arranger de maniére que les $v_{\sigma 1}$ indépendantes soient $v_{11}, v_{21}, \ldots, v_{s_1 1}$ les $v_{\sigma 2}$ indépendantes soient $v_{12}, v_{22}, \ldots, v_{s_2 2}$, etc. [3].

De plus, si (en vertu des premières (3.1) il y a une relation

$$A_{\sigma j} v_{\sigma j} = 0,$$

alors, puisque, sur P_p, les u^i sont indépendantes et que la droite $P_1^{(k+1)}$, associée à P_k, peut être une quelconque des droites de P_p, on aura aussi identiquement

$$A_{\sigma j} v^j_{\sigma i} = 0.$$

7. Supposons maintenant $k = q^{(\varkappa)} - 1$. Alors, d'après la construction de P_p, il suit que la droite $P_1^{(k+1)} = P_1^{(q^{(\varkappa)})}$ doit être associée à P_k et encore vérifier un nombre de relations, qui expriment que P_k est situé sur $B_{q^{(\varkappa)}}^{(\varkappa+1)}$ (v. no. 13 et 14, § 2). Ces dernières relations sont linéaires en $l_{\sigma ik}$ (no. 2, ce §) et *forment avec le système polaire de P_k un système de rang*

$$r_k + w_k = r_{q^{(\varkappa)}-1} + w_{q^{(\varkappa)}-1} = \rho_{q^{(\varkappa)}-1} = \rho_k.$$

Si $k = q^{(\varkappa)}$, on aura, comme système polaire de P_k, le système (3.13) ou j varie de 1 à $q^{(\varkappa)}$. Le rang de ce système est égal au nombre de variables $v_{\sigma j} (j = 1, 2, \ldots, k)$ qui restent indépendantes en vertu des relations $\theta_\alpha = 0$ et des relations qui expriment que P_k est sur $B_{q^{(\varkappa)}}^{(\varkappa+1)}$. Mais, d'autre part, ce même nombre est égal à $r_k(P_k)$.

Les pseudo-caractères (v. no. 14, § 2) $\sigma_1\ \sigma_2, \ldots, \sigma_{q^{(\varkappa)}-1}$ sont respectivement égaux aux caractères de mêmes indices, tandis que le nombre de variables $v_{\sigma q^{(\varkappa)}}$, qui restent indépendantes entre elles et des $v_{\sigma j} (j = 1, 2, \ldots, q^{(\varkappa)} - 1)$, en vertu de (3.1), est $r_k(P_k) - r_{k-1}(P_{k-1}) = \sigma_k$.

8. On peut continuer de la même manière et on voit aisément que, l étant un indice quelconque, au plus égal à p, si P_l est semi-régulier, alors le rang de son système polaire est r_l et le nombre de variables

$v_{\sigma l}$ indépendantes entre elles et des $v_{\sigma j}(j = 1, 2, .., l-1)$ est égal à $r_l - r_{l-1}(P_{l-1})$ (ce caractère étant considéré, naturellement, sur la suite respective de variétés A_q).

Si P_l est singulier de ramification ($l = q^{(i)}$) la droite P_1 associée à P_{l-1} (et située sur un P_p de A_p) doit vérifier, outre le système polaire de P_{l-1}, encore w_{l-1} relations, qui expriment que P_l est (générique) sur $B_{q(i)}^{(i+1)}$. Ces relations sont linéaires et forment, avec le système polaire de P_{l-1}, un systeme de rang $\rho_{q^{(i)}-1} = r_{q^{(i)}-1}(P_{q^{(i)}-1}) + w_{q^{(i)}-1}$.

THÉORÈME - *Le nombre de variables $v_{\sigma l}$ indépendantes entre elles et des $v_{\sigma j}(j = 1, 2, ..., l-1)$ est égal au pseudo-caractère σ_l.*

En effet, d'après ce qui précède, ce nombre est égal à $r_l(P_l) - r_{l-1}(P_{l-1})$.

D'après le théorème du no. 15 § 2, il suit

THÉORÈME. - *La condition nécessaire et suffisante pour que le système* (3.1) *soit en involution aux variables $u^1, u^2, ..., u^p$ indépendantes est que le nombre de paramètres N_{0p} dont depend un p-plan sur lequel les variables $u^1, u^2, ..., u^p$ sont indépendantes soit égal à*

$$p(n-p) - pr_{p-1} - (\sigma_1 + 2\sigma_2 + ... + (q-1)\sigma_{q-1}).$$

En général N_{0p} est plus petit que ce nombre.

La démonstration résulte immédiatement de ce qui précède, en tenant compte qu'il y a une seule variété A_p, qui contient des plans sur lesquels $u^1, u^2, ..., u^p$ sont indépendantes.

9. Remarquons encore que, si la chaîne de coordonnées est générique, on peut toujours s'arranger de manière que parmi les $v_{\sigma 1}$, ceux qui sont indépendants aient les indices $\sigma = 1, 2, ..., \sigma_1$ parmi les $v_{\sigma 2}$, ceux qui sont indépendants aient les indices $\sigma = 1, 2, ..., \sigma_2$ [2] et de plus, que les $v_{\sigma 2}$ avec $\sigma > \sigma_2$ soient fonctions (linéaires) des $v_{\sigma 1}$ et des $v_{\sigma 2}$ avec $\sigma \leq \sigma_2$, les $v_{\sigma 3}$ avec $\sigma > \sigma_3$ soient fonctions des $v_{\sigma 1}$, $v_{\sigma 2}$ et des $v_{\sigma 3}$ avec $\sigma \leq \sigma_3$, etc. Tout cela revient à des transformations linéaires entre les (3.1) et à des substitutions entre les variables u^i.

Plus encore, supposons que nous ayons arrangé le système de cette manière et considérons le γ-plan $P_\gamma(P_1^{(1)}P_1^{(2)} \times ... \times P_1^{(\gamma)})$ semi-régulier entre γ et un indice $q(> \gamma)$. On peut évidemment faire en sorte que les $v_{s_\gamma+1, \gamma}$, $v_{s_\gamma+2, \gamma}$, ... dépendent seulement des $v_{\sigma, \gamma-1}$, $v_{\sigma, \gamma-2}$, ..., $v_{\sigma 1}$ et ne dépendent pas de $v_{1\gamma}, v_{2\gamma}, ..., v_{s_\gamma \gamma}$. Cela revient à remplacer les (3.1) par des combinaisons linéaires de ces mêmes équations.

Nous allons montrer que, après cet arrangement, les variables

$$v_{s_\gamma+1,\,\beta},\ v_{s_\gamma+2,\,\beta},\ \dots\ (\beta \geq \gamma)$$

dépendent, elle aussi, seulement des

$$v_{\sigma,\,\gamma-1}\, v_{\sigma,\,\gamma-2}\,, \dots\,, v_{\sigma 1}\,.$$

En effet, pour un $\beta > \gamma$, on aura, comme plus haut (v. (3.13))

$$v^{\beta}_{\sigma\gamma} = v^{\gamma}_{\sigma\beta}\,. \tag{3.14}$$

Or, on a, par hypothèse:

$$\underset{(\sigma' > s_\gamma)}{v^{\gamma}_{\sigma'\beta}} = \text{combinaisons linéaires de } v^{\beta}_{\sigma,\,\gamma-1}\,, \dots\,, v^{\beta}_{\sigma 1}\,,$$

donc

$$\underset{(\sigma' > s_\gamma)}{v^{\beta}_{\sigma'\gamma}} = \text{combinaisons linéaires de } v^{\gamma-1}_{\sigma\beta}\,, \dots\,, v^{1}_{\sigma\beta}\,.$$

Mais, d'autre part, on peut supposer que le plan

$$P_{\gamma-1} \times P_1^{(\beta)}\quad (P_{\gamma-1} = P_1^{(1)} \times \dots \times P_1^{(\gamma-)})$$

est aussi semi-régulier et qu'on a, comme pour P_γ,

$$\underset{(\sigma' > s_\gamma)}{v_{\sigma'\beta}} = \text{combinaisons linéaires de } v_{1\beta}\,, \dots\,, v_{s_\gamma \beta} \text{ et de } v_{\sigma,\,\gamma-1}\,, \dots\,, v_{\sigma 1}\,.$$

Par suite de quoi

$$\underset{(\sigma' > s_\gamma)}{v^{\gamma}_{\sigma'\beta}} = \text{combinaisons linéaires de } v^{\gamma-1}_{1\beta}\,, \dots\,, v^{\gamma-1}_{s_\gamma\beta};\ v^{\gamma-1}_{\sigma,\,\gamma-1}\,, \dots\,, v^{\gamma-1}_{\sigma 1};\ \dots\ v^{1}_{\sigma 1}\,. \tag{3.15}$$

D'autre part, le second membre de (3.14) donne, comme plus haut,

$$\underset{(\sigma' > s_\gamma)}{v^{\gamma}_{\sigma'\beta}} = \text{combinaisons linéaires des } v^{\gamma}_{1\beta}\,, \dots\,, v^{\gamma}_{s_\gamma\beta}\,,\ v^{\gamma}_{\sigma,\,\gamma-1}\,, \dots\,, v^{\gamma}_{\sigma 1}\,. \tag{3.16}$$

Il faut maintenant identifier (3.15) avec (3.16). En cela il faut tenir compte que les variables $v^{\gamma}_{1\beta}, \dots, v^{\gamma}_{s_\gamma\beta}$ sont indépendantes des autres variables qui entrent dans les combinaisons des seconds membres, puisque, comme nous l'avons vu, le plan $P_{\gamma-1} \times P_1^{(\beta)}$ est semi-régulier. Donc

$$\underset{(\sigma' > s_\gamma)}{v^{\gamma}_{\sigma'\beta}} = \text{combinaisons linéaires des variables } v^{\gamma}_{\sigma,\,\gamma-1}\,, \dots\,, v^{\gamma}_{\sigma 1}\,.$$

Mais d'ici il résulte notre affirmation, puisque, évidemment, on peut renoncer à l'indice supérieur γ.

On voit que, par suite de cette propriété, si le système est régulier ou bien régulier entre γ et p, alors on peut ranger ses équations de manière que, pour tout $\gamma' \geq \gamma$ (ou encore, s'il est régulier, pour tout γ') les $v_{\sigma'\beta}(\sigma' > s_{\gamma'}, \beta \geq \gamma')$ dépendent linéairement des $v_{\sigma, \gamma'-1}, \ldots, v_{\sigma 1}$, tandis que $v_{\sigma'\beta}$ avec $\sigma' \leq s_{\gamma'}$ sont indépendantes de ces variables.

10. Supposons maintenant que P_γ soit un plan singulier de ramification générique du système, situé sur $P_p(u)$ et que ce dernier plan soit régulier (u) entre $\gamma + 1$ et p. Alors le raisonnement fait plus haut n'est plus valable. On peut pourtant arranger le système comme nous l'avons montré au début du no. précédent et ensuite faire en sorte que $v_{1\gamma}, v_{2\gamma}, \ldots$ $\ldots, v_{\sigma_\gamma \gamma}$ soient indépendants entre eux et des

$$v_{\sigma, \gamma-1}, \; v_{\sigma, \gamma-2}, \; \ldots, \; v_{\sigma 1}$$

et que les $v_{\sigma'\gamma}(\sigma' > \sigma_\gamma)$ dépendent seulement de ces dernières variables.

On peut d'ailleurs remplacer les équations d'indice plus petit ou égal à σ par des combinaisons linéaires de ces mêmes équations de manière que les $v_{\sigma'', \gamma+1}$, avec $s_{\gamma+1} < \sigma'' \leq \sigma_\gamma$, dépendent seulement des $v_{\sigma\gamma}, v_{\sigma, \gamma-1}, \ldots, v_{\sigma 1}$.

Quant aux $v_{\sigma', \gamma+1}$, avec $\sigma' > \sigma_\gamma$, il pourront s'exprimer à l'aide des

$$v_{\sigma 1}, \; v_{\sigma 2}, \; \ldots, \; v_{\sigma, \gamma-1} \quad \text{et des} \quad v_{1, \gamma+1}, \; v_{2, \gamma+1}, \; \ldots, \; v_{\sigma_{\gamma'} \gamma+1}$$

qui sont indépendants entre eux et des précédents.

Cela résulte immédiatement du fait que la chaîne de coordonnées est supposée générique.

Mais, de cette même hypothèse, il résulte encore que les variables

$$v_{1, \gamma+1}, \; v_{2, \gamma+1}, \; \ldots, \; v_{s_{\gamma+1}, \gamma+1}$$

n'entrent pas dans cette expression des $v_{\sigma', \gamma+1}$. En effet, si elles y entraient on pourrait faire une transformation $u_{\gamma+1} = u^*_{\gamma+1} + v u_\gamma$ de manière que dans le système transformé il n'y ait pas que les variables $v_{1\gamma}, v_{2\gamma}, \ldots, v_{\sigma_\gamma \gamma}$ indépendantes des $v_{\sigma, \gamma 1}, \ldots$, mais encore une partie des variables $v_{\sigma'\gamma}$, ce qui voudrait dire que le plan P_γ (pris dans le système initial de coordonnées) n'était pas générique.

On est arrivé ainsi à un système régulier entre $\gamma + 1$ et p, avec la chaîne de coordonnées régulière entre $\gamma + 1$ et p et qui a les propriétés suivantes:

1) Les variables $v_{1\gamma}$, $v_{2\gamma}$, ..., $v_{\sigma_\gamma \gamma}$ sont indépendantes des $v_{\sigma, \gamma-1}$, $v_{\sigma, \gamma-2}$, ..., $v_{\sigma 1}$ et les variables $v_{\sigma' \gamma}$, $(\sigma' > \sigma_\gamma)$ dépendent seulement de ces dernières.

2) Les variables $v_{1, \gamma+1}$, $v_{2, \gamma+1}$, ..., $v_{s_{\gamma+1}, \gamma+1}$ sont indépendantes des $v_{\sigma, \gamma}$ et des $v_{\sigma, \gamma-1}$, ..., $v_{\sigma 1}$; les variables $v_{\sigma'', \gamma+1}(s_{\gamma+1} < \sigma'' \leq \sigma_\gamma)$ dépendent de ces dernières mais sont indépendantes en $v_{1\gamma}$, $v_{2\gamma}$, ..., $v_{\sigma_\gamma \gamma}$; les variables $v_{\sigma', \gamma+1}(\sigma' > \sigma_\gamma)$ s'expriment à l'aide des variables $v_{\sigma'', \gamma+1}$ et des $v_{\sigma, \gamma-1}$, ..., $v_{\sigma 1}$, ou bien à l'aide des variables $v_{\sigma\gamma}$, $v_{\sigma, \gamma-1}$, ..., $v_{\sigma 1}$.

Par suite de ce que nous avons établi plus haut, au no. 9, il résulte que, pour tout $\beta \geq \gamma + 1$, les $v_{s_{\gamma+1}+1, \beta}$, $v_{s_{\gamma+1}+2, \beta}$, ..., pourront s'exprimer à l'aide des $v_{\sigma, \gamma}$, $v_{\sigma, \gamma-1}$, ..., $v_{\sigma 1}$.

Il résulte en particulier que (pour tout $\beta \geq \gamma + 1$) les $v_{\sigma'' \beta}$ peuvent être supposées (en faisant à la rigeur une transformation sur les u) indépendantes entre elles en $v_{1\gamma}$, $v_{2\gamma}$, ..., $v_{\sigma_\gamma \gamma}$. Les $v_{\sigma' \beta}(\sigma' > \sigma_\gamma)$ sont fonctions des $v_{\sigma'' \beta}$ et des $v_{\sigma, \gamma-1}$, $v_{\sigma, \gamma-2}$, ..., $v_{\sigma 1}$.

Lorsque nous aurons rangé ainsi le système, nous dirons qu'ils est sous *forme simplifiée.* Nous emploierons d'ailleurs le même nom pour l'arrangement décrit au no. précédent, lorsque le système normal est régulier.

THÉORÈME. - *Tout système normal* (u) *qui admet des plans* (u) *est susceptible d'être mis sous forme simplifiée.*

11. Supposons le système mis sous forme simplifiée. Désignons, pour simplifier l'écriture, les variables $v_{\sigma, \gamma-1}$, $v_{\sigma, \gamma-2}$, ..., $v_{\sigma 1}$ par v^*. D'après les propriétés établies au no. 10, on pourra ranger les équations du 2^{me} degré d'indices $\sigma_{\gamma+1} + 1$, $\sigma_{\gamma+2} + 2$, ..., σ_γ et faire — au besoin — en plus, une transformation sur les variables u, de manière que, pour un certain τ_1,

1) pour tout $(p \geq) \beta \geq \gamma + 1$, les variables $v_{\tau\beta}$ avec $s_{\gamma+1} < \tau \leq \tau_1 (\tau_1 \leq \sigma_\gamma)$ soient indépendantes (mod v^*) des $v_{s_{\gamma+1}+1, \gamma}$, ..., $v_{\sigma_\gamma \gamma}$.

2) les variables $v_{\tau'\beta}(\beta > \gamma + 1)$ avec $\tau_1 < \tau' \leq \sigma_\gamma$, dépendent (mod v^*) des $v_{s_{\gamma+1}+1, \gamma}$, ..., $v_{\sigma_\gamma \gamma}$ et des $v_{\tau\beta}$ avec $s_{\gamma+1} < \tau \leq \tau_1$.

(Remarquons qu'il n'est pas exclu que les variables de 1) n'existent pas (auquel cas, nous supposons $\tau_1 = \sigma_\gamma$)).

3) les variables $v_{\tau', \gamma+1}$ avec $\tau_1 < \tau' \leq \sigma_\gamma$ dépendent (mod v^*) des $v_{s_{\gamma+1}+1, \gamma}$, ..., $v_{\sigma_\gamma \gamma}$.

Ce procédé peut être répété en considérant les variables $v_{\tau_1+1, \beta}$, ..., $v_{\sigma_\gamma \beta}(\beta \geq \gamma + 1)$ et on arrivera à un système tel que ces variables aient les propriétés, qui se déduisent des propriétés 1), 2), 3) de plus haut, en y remplaçant τ_1 par $(\sigma_\gamma \geq) \tau_2 (\geq \tau_1)$ et ainsi de suite.

Il est clair que, finalement, après un certain nombre (soit h) d'opérations, on arrive à un système où $\tau_h = \tau_{h+1}$, ou bien à un système où $\tau_h = \sigma_\gamma$ (v. la remarque faite plus haut).

12. Nous allons examiner ces deux possibilités. Commençons par la première.

Supposons qu'on ait, pour un certain $\beta > \gamma + 1$,

$$(3.18) \qquad \begin{cases} v_{\sigma'\gamma} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ v^*) \quad (\sigma' > \sigma_\gamma) \\ v_{\sigma',\gamma+1} = A_{\sigma'\sigma''} v_{\sigma'',\gamma+1} \quad (\mathrm{mod}\ v^*) \quad \sigma_\gamma \geq \sigma'' > s_{\gamma+1} \\ v_{\sigma'\beta} = B_{\sigma'\sigma''} v_{\sigma''\beta} \quad (\mathrm{mod}\ v^*) \end{cases}$$

et en plus

$$(3.19) \qquad \begin{cases} v_{\tau,\gamma+1} = C_{\tau\sigma''} v_{\sigma''\gamma} + N_{\tau\mu} v_{\mu\gamma} \ \text{indépendants en} \ v_{\mu\gamma} \\ \qquad\qquad (\mathrm{mod}\ v^*)(s_{\gamma+1} < \tau \leq \tau_1\,;\ \mu \leq s_{\gamma+1}), \\ v_{\tau',\gamma+1} = C_{\tau'\sigma''} v_{\sigma''\gamma} \quad (\mathrm{mod}\ v^*) \quad (\sigma_\gamma \geq \sigma' > s_{\gamma+1}\,,\ \tau_2 \geq \tau' > \tau_1), \\ v_{\tau'',\gamma+1} = C_{\tau''\sigma'''} v_{\sigma'''\gamma} \quad (\mathrm{mod}\ v^*) \quad \sigma_\gamma \geq \sigma''' > \tau_1\,,\ \tau_3 \geq \tau'' > \tau_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_{\tau^{(h-1)},\gamma+1} = C_{\tau^{(h-1)}\sigma^{(h)}} v_{\sigma^{(h)}\gamma} \ (\mathrm{mod}\ v^*) \ (\sigma_\gamma \geq \sigma^{(h)} > \tau_{h-2}\,,\ \tau_h \geq \tau^{(h-1)} > \tau_{h-1}), \\ v_{\tau^{(h)},\gamma+1} = C_{\tau^{(h)}\bar\sigma} v_{\bar\sigma\gamma} \quad (\mathrm{mod}\ v^*) \ (\sigma_\gamma \geq \bar\sigma > \tau_h\,,\ \sigma_\gamma \geq \tau^{(h)} > \tau_h = t). \end{cases}$$

Remarquons qu'on peut faire des combinaisons linéaires entre les équations, de manière à simplifier encore les relations ci-dessus, notamment faire en sorte que

$$(3.20) \qquad \begin{cases} C_{\tau\sigma''} = 0 \\ C_{\tau'\sigma''} = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma'' > \tau_1\,, \\ C_{\tau''\sigma'''} = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma''' > \tau_2\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{\tau^{(h-1)}\sigma^{(h)}} = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma^{(h)} > \tau_{h-1}\,. \end{cases}$$

D'autre part, en faisant une transformation

$$u_\gamma = \bar u_\gamma + \lambda u_{\gamma+1}\,,$$

on aura

$$\bar v_{\sigma,\gamma+1} = v_{\sigma,\gamma+1} + \lambda v_{\sigma\gamma}\,.$$

La seconde des relations (3.18) devient après la transformation

$$\bar{v}_{\sigma',\gamma+1} = \bar{A}_{\sigma'\sigma''}\bar{v}_{\sigma'',\gamma+1} \pmod{v^*} \quad (\sigma_\gamma \geq \sigma'' > \sigma_{\gamma+1})$$

et, par suite de la première de (3.18),

$$v_{\sigma',\gamma+1} = \bar{A}_{\sigma'\sigma''}(\lambda)(v_{\sigma'',\gamma+1} + \lambda v_{\sigma''\gamma})$$

ou encore, par suite de la 2me (3.18),

$$[A_{\sigma'\sigma''} - \bar{A}_{\sigma'\sigma''}(\lambda)]\, v_{\sigma'',\gamma+1} = \lambda \bar{A}_{\sigma'\sigma''}(\lambda)\, v_{\sigma''\gamma}\,.$$

Par suite de (3.18) et (3.19) il résulte alors, en remplaçant $v_{\sigma'',\gamma+1}$ en fonction de $v_{\sigma\gamma}$ et identifiant,

$$(3.21)\qquad \begin{cases} A_{\sigma'\tau} = \bar{A}_{\sigma'\tau}(\lambda) \\ [A_{\sigma'\tau'} - \bar{A}_{\sigma'\tau'}(\lambda)]\, C_{\tau'\tau} = \lambda\, \bar{A}_{\sigma'\tau}(\lambda) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [A_{\sigma'\tau^{(h-1)}} - \bar{A}_{\sigma'\tau^{(h-1)}}(\lambda)]\, C_{\tau^{(h-1)}\tau^{(h-2)}} = \lambda\, \bar{A}_{\sigma'\tau^{(h-2)}}(\lambda) \\ 0 = \lambda\, \bar{A}_{\sigma'\tau^{(h-1)}}(\lambda) \end{cases}$$

et

$$(3.22)\qquad [A_{\sigma'\tau^{(h)}} - \bar{A}_{\sigma'\tau^{(h)}}(\lambda)]\, C_{\tau^{(h)}\bar{\sigma}} = \lambda\, A_{\sigma'\bar{\sigma}}(\lambda)\,.$$

On en déduit, de proche en proche, en partant de la dernière de (3.21) et en tenant compte que $A_{\sigma'\sigma''} = \bar{A}_{\sigma'\sigma''}(0)$

$$\begin{aligned} &\bar{A}_{\sigma'\tau^{(h-1)}}(\lambda) = 0, \\ &\bar{A}_{\sigma'\tau^{(h-2)}}(\lambda) = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &\bar{A}_{\sigma'\tau'}(\lambda) = 0, \\ &\bar{A}_{\sigma'\tau}(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

et par suite, dans (3.18), on a

$$(3.23)\qquad A_{\sigma'\sigma''} = 0, \qquad \text{pour} \qquad \sigma' > \sigma_\gamma, \quad \sigma'' \leq \tau_h = t.$$

Par la même méthode, il résulte que, dans le second cas (c'est-à-dire si $\tau_h = \sigma_\gamma$), on a

$$(3.24)\qquad A_{\sigma'\sigma''} = 0.$$

13. Utilisons maintenant le fait que le système admet des plans réguliers (u) entre $\gamma+1$ et p. Pour un $\beta > \gamma+1$, on a, d'après ce qui a été établi plus haut

$$v_{\tau^{(h)}\beta} = L_{\tau^{(h)}\sigma''} v_{\sigma''\gamma} + M_{\tau^{(h)}\nu} v_{\nu\gamma} \ (\mathrm{mod}\ v^*), \tag{3.25}$$

ou $\tau^{(h)}$ et σ'' prennent les mêmes valeurs qu'au no. précédent et $\nu = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s_{\gamma+1}$. On a, d'autre part

$$v_{\tau^{(h)},\gamma+1} = C_{\tau^{(h)}\bar{\sigma}} v_{\bar{\sigma}\gamma} \ (\mathrm{mod}\ v^*) \tag{3.26}$$

$\bar{\sigma}$ prenant, comme au no. précédent, les mêmes valeurs que $\tau^{(h)}$.

De la régularité du système, il suit qu'on aura

$$v^{\gamma+1}_{\tau^{(h)}\beta} = v^{\beta}_{\tau^{(h)},\gamma+1}$$

par suite des relations existantes entre les $v_{\sigma\alpha}$. Donc on aura

$$L_{\tau^{(h)}\sigma''} v^{\gamma+1}_{\sigma''\gamma} + M_{\tau^{(h)}\nu} v^{\gamma+1}_{\nu\gamma} = C_{\tau^{(h)}\bar{\sigma}} v^{\beta}_{\bar{\sigma}\gamma}.$$

D'autre part, par suite des relations (3.14)

$$v^{\gamma+1}_{\sigma''\gamma} = v^{\gamma}_{\sigma''\gamma+1} \quad \text{et} \quad v^{\beta}_{\bar{\sigma}\gamma} = v^{\gamma}_{\bar{\sigma}\beta}.$$

Donc on déduit, en tenant compte de (3.25), (3.26), (3.19), (3.20)

$$L_{\tau^{(h)}\tau'} C_{\tau'\tau} v^{\gamma}_{\tau\gamma} + L_{\tau^{(h)}\tau''} C_{\tau''\tau'} v^{\gamma}_{\tau'\gamma} + \ldots + L_{\tau^{(h)}\bar{\sigma}} C_{\bar{\sigma}\tau^{(h-1)}} v^{\gamma}_{\tau^{(h-1)}\gamma} +$$

$$+ L_{\tau^{(h)}\tau} N_{\tau\mu} v^{\gamma}_{\mu\gamma} + M_{\tau^{(h)}\nu} v^{\gamma}_{\nu,\gamma+1} = C_{\tau^{(h)}\bar{\sigma}} \left\{ L_{\bar{\sigma}^{(h)}\sigma''} v^{\gamma}_{\sigma''\gamma} + M_{\bar{\sigma}^{(h)}\nu} v^{\gamma}_{\nu\gamma} \right\},$$

où tous les coefficients L, M, C ont été définis dans ce no. et le précédent.

En identifiant, on déduit d'ici d'abord

$$M_{\tau^{(h)}\nu} = 0;$$

ensuite, puisque dans (3.19), $v_{\nu,\gamma+1}$ sont indépendantes en $v_{\mu\gamma}$

$$L_{\tau^{(h)}\tau} = 0$$

et ainsi de suite

$$L_{\tau^{(h)}\tau'} = L_{\tau^{(h)}\tau''} = \ldots = L_{\tau^{(h)}\tau^{(h-1)}} = 0.$$

Donc

$$v_{\tau^{(h)}\beta} = L_{\tau^{(h)}\bar{\sigma}} v_{\bar{\sigma}\gamma} . \tag{3.27}$$

THÉORÈME. - *Un système normal* (u) *régulier entre* $\gamma + 1$ *et* p, *dont les* γ*-plans situés sur la variété de plans* (u) *du système sont singuliers de ramification, peut être rangé sous forme simplifiée de manière qu'on ait*

$$\left\{\begin{array}{ll} v_{\sigma'\gamma} = 0 \pmod{v^*} & (\sigma' > \sigma_\gamma), \\ v_{\sigma'\beta} = \underset{(\beta)}{C_{\sigma'\rho}} v_{\rho\beta} \pmod{v^*} & (\beta \geq \gamma + 1\,;\ \sigma_{\gamma+1} \leq t \leq \rho \leq \sigma_\gamma)\,^{(15)} \\ v_{\rho\beta} = \underset{(\beta)}{L_{\rho\rho'}} v_{\rho'\gamma} \pmod{v^*} & (t < \rho' \leq \sigma_\gamma) \end{array}\right. \tag{3.28}$$

Le système ayant ces propriétés sera dit sous forme *simplifiée réduite.*

CHAPITRE II.

Systèmes différentiels extérieurs.

§ 4. - *Définition d'un système différentiel extérieur. Points intégraux et éléments plans intégraux. Points et éléments plans semi-réguliers ou réguliers ou singuliers. Régularisation. Variétés intégrales.*

1. Nous allons étudier les systèmes différentiels extérieurs de la forme

$$(\Sigma)\quad \left\{\begin{array}{ll} F_\alpha(x) = 0, & (\alpha = 1, 2, \dots, h) \\ \theta_{\alpha_1} = a_{\alpha_1 i}\, dx^i = 0, & (i = h+1,\ h+2, \dots,\ h_1) \\ \theta_{\alpha_2} = a_{\alpha_2 i_1 i_2}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} = 0, & (\alpha_2 = h_1 + 1,\ h_1 + 2, \dots,\ h_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \theta_{\alpha_\rho} = a_{\alpha_\rho i_1 i_2 \dots i_\rho}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_\rho} = 0, & (\alpha_\rho = h_{\rho-1} + 1, h_{\rho-1} + 2, \dots, h_\rho) \\ & (i_1,\ i_2, \dots,\ i_\rho = 1, 2, \dots, n), \end{array}\right.$$

où $F_\alpha(x)$ et les coefficients

$$a_{\alpha_1 i}\,,\ a_{\alpha_2 i_1 i_2}\,, \dots,\ a_{\alpha_\rho i_1 i_2 \dots i_\rho}$$

(15) Les coefficients C dépendent, en général de β. Il va sans dire qu'on ne fait pas la somme pas d'après cet indice.

sont des fonctions des variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$ $(\rho \leq n)$. Nous supposons que ces fonctions sont analytiques et régulières dans un domaine D réel ou complexe de ces variables. A vrai dire, pour la plupart des théorèmes que nous avons à étudier (sauf pour les théorèmes d'existence), si nous sommes dans le domaine réel, il suffirait de supposer que ces fonctions sont de classe $C^{(n)}$ pour un certaine valeur de n (≥ 1) et, dans la suite, cette classe résulterait avec évidence des considérations que nous ferons.

Nous supposons encore que (Σ) est *fermé,* c'ést'-à-dire que

$$dF_\alpha, \; d\theta_\alpha, \; d\theta_{\alpha_1}, \; \ldots, \; d\theta_{\alpha_\rho}$$

appartiennent à l'ideal défini par les premiers membres de (Σ).

Nous supposons encore (*condition A*) *que, dans un voisinage de chaque point P de D, dont les coordonnées vérifient les équations*

$$F_\alpha(x) = 0, \tag{4.1}$$

ces dernières peuvent être résolues par rapport à h d'entre les variables x; autrement parlé, (4.1) représente une *variété analytique régulière* Ω (resp. une variété régulière de classe $C^{(u)}$) à $n-h$ dimensions dans D.

Plus généralement, on pourra supposer (condition A') que le système (4.1) est décomposable en un certain nombre de systèmes d'équations $F_\alpha^{(\nu)}(x) = 0$, dont chacun représente en D une variété régulière analytique à $n - h^{(\nu)}$ dimensions. Nous disons, dans ce cas *que* Ω *est décomposable et que les variétés* $\Omega^{(\nu)}$ *sons ses composantes.*

On pourrait encore supposer que, dans D, et y ait aussi des points qui ne remplissent pas ces conditions. Ce sont des points singuliers, tandis que les autres, où les conditions sont remplies, sont réguliers. Dans tout voisinage de chaque point singulier, il y a des points réguliers et l'ensemble des points régulièrs est ouvert.

2. Un point $P(x)$ dont les coordonnées x vérifient (4.1) est *point intégral.* Un q-plan par $P(x)$ (élément q-plan), qui appartient au système (Σ), est appelé *élément q-plan intégral* [2].

Un point intégral P est *régulier pour* (Σ) *s'il remplit les deux conditions suivantes:*

a) P est régulier sur la variété Ω ou sur une de ses composantes.

b) Il y a un voisinage de P formé de points intégraux réguliers P', tel que, entre les variétés algébriques d'éléments q-plans intégraux par P et par P', il y ait des homéomorphismes qui conservent les éléments plans semi-réguliers pour Σ et pour ces variétés et qui fassent se correspondre les intersections.

Un element q-plan E_q par P est semi-régulier, resp. régulier à gauche, ou à droite, entre deux indices, genérique etc. si:

a') P est régulier pour le système (Σ).

b') sont vérifiées les conditions algébriques, établies, au § 2 du Chap. I, pour la régularité de l'élément q-plan dans l'espace vectoriel des différentielles au point P.

La définition des *chaînes régulièrs,* donnée au no. 10 § 2 Chap. I s'applique de la même manière aux points réguliers. De même, la définition du *genre* sur une suite de variétés A_q d'éléments plans intégraux, la définition du genre du système (Σ) et les définitions des *éléments plans singuliers,* de *ramification* ou *caractéristiques* ou *exceptionnels aux points réguliers* de (Σ), et aussi la notion de *degré de singularité* des éléments plans singuliers de I$^{\text{ère}}$ espece.

Un système de genre p (dans les points intégraux réguliers) est encore dit *en involution à p variables indépendantes.* Si sur un élément p-plan E_p intégral régulier, les formes de PFAFF $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$ sont indépendantes, nous dirons que le système est en *involution aux formes* $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$ *indépenndantes.* Les ω sont supposés à coefficients analytiques réels ou complexes (ou encore de classe $C^{(u)}$) selon que (Σ) a la même propriété.

3. Les points intégraux de (Σ), qui ne sont pas réguliers au sens de la définition donnée plus haut, sont *singuliers pour* (Σ). Supposons que, dans D, ces points singuliers soient donnés par les équations (4.1) et

$$F_{\alpha'}(x) = 0 \tag{4.2}$$

$F_{\alpha'}$ étant des fonctions analytiques (réelles ou complexes selon que les F_α sont réelles où complexes (ou encore de classe $C^{(u)}$ dans le cas où les F_α sont de classe $C^{(u)}$) (4.1) et (4.2) définissent ensemble une variété Ω', éventuellement décomposable en un nombre de variétés régulières, qui peuvent avoir des points singuliers.

Si on ajoute à (Σ) les équations (4.2) et les équations

$$dF_{\alpha'} = 0 \tag{4.3}$$

on obtient un système (Σ'), qu'on peut considérer de la même manière que (Σ). On peut d'ailleurs chercher dans le système (Σ') les points singuliers et construire les variétés de ces points, comme plus haut. Il est evident que, de cette manière, si, chaque fois, comme plus haut, on trouve des sous-variétés de points singuliers, on arrive à un système sans points singuliers ou à un système de points isolés.

L'opération ainsi décrite, par laquelle on décompose un système (Σ) en un certain nombre (fini) de systèmes sans points singuliers, sera appelée *régularisation.* Un système ainsi *régularisé* se compose donc d'un nombre distincts de systèmes sans points singuliers.

Les éléments plans intégraux de (Σ') sont aussi éléments plans intégraux de (Σ), mais le fait d'être semi-réguliers pour (Σ') n'implique pas la semi-régularité pour (Σ). Si on veut étudier tous les éléments plans intégraux, on peut le faire d'abord aux points réguliers de (Σ) et ensuite, séparement, aux points de (Σ'), etc.

4. Soit, par un point P de D, une variété V_q régulière à q dimensions dans D, donnée par les équations

$$f_\lambda(x) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-q).$$

V_q est une variété intégrale de (Σ) si ses points sont des point intégraux et ses éléments q-plans tangents sont intégraux. Si ces éléments q-plans sont semi-réguliers, réguliers à droite ou à gauche, etc, alors nous dirons que la variété a les mêmes propriétés de régularité.

Les variétés intégrales formées par des points intégraux singuliers, dont les coordonnées vérifient (4.2), sont aussi variétés intégrales de (4.3). C'est d'ailleurs pourquoi on a formé le système (Σ') en ajoutant ces dernières relations, c'est-à-dire en fermant le système. Cette règle sera suivie partout: Si on aura à ajouter, au système (Σ), un autre système différentiel exterieur (T), on ajoutera aussi les équations obtenues en annulant les différentielles extérieures des premiers membres de (T), c'est-à-dire en fermant le système obtenu.

§ 5. - *Prolongement des systèmes différentiels. Systèmes normaux. Prolongements successifs.*

1. Les éléments q-plans E_q de (Σ) peuvent être représentés par un système d'équations linéaires

$$\varphi_\sigma = L_{\sigma i}\, dx^i = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n-q) \tag{5.1}$$

supposées indépendantes. Les coefficients $L_{\sigma i}$ dépendent du centre de l'élément plan. Ils doivent remplir certaines conditions, pour que, en vertu de (5.1), les équations différentielles de (Σ) soient vérifiées. Ces conditions s'expriment par un système d'équations algébriques (en $L_{\sigma i}$). Nous nommerons ce système (T_q), mais nous ne l'écrivons pas explicitement. Pour que (Σ) ait des éléments plans intégraux à q-dimensions par chaque point intégral, il faut et il suffit que (T_q) soient compatibles en $L_{\sigma i}$.

Si, sur E_q, les formes de PFAFF $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^q$ sont indépendantes, alors, en nommant $\bar{\omega}^\sigma (\sigma = 1, 2, \ldots, n-q)$ des formes de PFAFF (aux mêmes propriétés de régularité que ω) indépendantes entre elles et des $\omega^\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, q)$, on peut écrire les équations de E_q

$$(5.2) \qquad \psi^\sigma = \bar{\omega}^\sigma - l^\sigma_\alpha \omega^\alpha = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n-q\,;\ \alpha = 1, 2, \ldots, q),$$

où l^σ_α sont fonctions de $L_{\sigma i}$ et des variables x, rationnelles en $L_{\sigma i}$ et analytiques x. Les conditions pour que E_q soit intégral, s'expriment par des relations entières multilinéaires en l^σ_α, qui résultent de (T_q). Le système de ces relations sera désigné aussi par (T_q); cela ne prête pas à confusion. Nous nommerons élément q-plan intégral $(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^q)$ ou élément q-plan integral (ω), un élément plan intégral, sur lequel les formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^q$ sont indépendantes.

2. Le système (T_q) nous donne les variétés A_q en chaque point P. Si nous nous occupons seulement d'éléments q-plans ou bien d'éléments plans situés sur ces éléments q-plans, pour un q donné, alors on peut remplacer (Σ) par un autre système, donné par les équations (5.1), (4.1) et (T_q). C'est le ***prolongement algébrique*** [5], [6], à q-dimensions de (Σ). Les éléments q-plans de ce système définissent les éléments q-plans de (Σ).

Il est clair que le système d'équations finies (4.1) et (T_q) du prolongement algébrique se décompose en plusieurs variétés régulières, si la variété Ω donnée par (4.1) se décompose ou si la variété d'éléments q-plans, définie par (T_q), se décompose. Dans ce dernier cas, nous désignerons pas $(\mathfrak{T}_q)$ les équations d'une composante, que nous aurons choisi, du systeme (T_q).

3. Etant donnée un variété integrale $\mathfrak{V}_q$, à q-dimensions, de (Σ), sur laquelle les formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^q$ sont indépendantes, les conditions, pour que, sur $\mathfrak{V}_q$, soient vérifiées les relations (5.2), déterminent les paramètres l^σ_α et leurs valeurs vérifient (T_q).

Inversement, étant donnée une variété $\mathfrak{V}_q$ intégrale du système formé par (5.2), (4.1) et (T_q) — dans les variables x et l^σ_α — sur laquelle les formes ω sont indépendantes entre elles, les relations entre les variables x imposées par cette variété définissent, dans l'espace de ces variables, une variété $\mathfrak{V}_q$ intégrale de (Σ). Cela suit immédiatement du fait que, en vertu de (5.2) et de (T_q), les (Σ) sont identiquement vérifiées.

4. Le système qu'on obtient en fermant le prolongement algébrique de (Σ) [2] ([16]).

$$(\Sigma') \qquad \begin{cases} F_\alpha = 0, \\ (T_q),\ (T_{q'}), \\ L_{\sigma i}\, dx^i = 0, \quad dL_{\sigma i} \wedge dx^i = 0 \end{cases}$$

sera appelé le ***prolongement à q-dimensions*** fermé de (Σ) [5], [6] ou, plus brièvement, ***le prolongement à q-dimensions*** de (Σ) ou encore le ***q-prolongement de*** (Σ). Par (T'_q) nous désignons le système qu'on obtient en annulant les différentielles des premiers membres de (T_q).

Nous supposerons toujours le système régularisé (v. § 4, no. 3) et, lorsque nous parlerons d'un prolongement, nous entendrons «un quelconque des systèmes distinctes en lesquels se decompose (Σ')».

Le système (Σ') dépend des variables x et des $L_{\sigma i}$ — en nombre total de $n + n\,(n - q)$. Dans un voisinage d'un element q-plan intégral, sur lequel les ω^α sont indépendantes, le nombre des variables peut être reduit à $N = n + q(n - q)$, c'est-à-dire que le système dépend des variables x et l^σ_α. Nous considérons, dans la suite, si (T_q) est compatible en chaque point intégral P de (Σ), que le nombre de variables de (Σ') est N. Cela est, évidemment, permis, puisqu'on peut, dans ce point, trouver un élément plan intégral E_q et q pfaffiens indépendants sur les éléments plans intégraux contenus dans un certain voisinage de E_q.

Etant donné un élément plan intégral de (Σ'), si on retient seulement les coordonnées x et dx, il définit un élément plan intégral de (Σ).

REMARQUE. - On pourra numéroter les variables de 1 à N, en adoptant les indices $1, 2, \ldots, n$ pour les variables x, et en notant les autres variables avec $x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^N$. Nous nous rapporterons plus loin à cette numérotation. Un élément γ-plan du prolongement a N coordonnées

$$x^1,\ x^2, \ldots,\ x^n,\ x^{n+1},\ x^{n+2}, \ldots,\ x^N;$$

on pourra considérer séparément les coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

([16]) p. 50-56.

5. Un système différentiel extérieur fermé sera appelé *q-normal* s'il est algébriquement équivalent à un système de la forme

$$(5.3)\qquad \begin{cases} F_\nu(x) = 0 \\ \theta_\rho = a_{\rho i}\, dx^i = 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, s_0) \\ \theta_\sigma = \bar\omega_{\sigma\alpha} \wedge \omega^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, q\,;\ \sigma = 1, 2, \dots, s_1) \end{cases}$$

les formes θ_ρ étant indépendantes entre elles, ω^α étant q formes PFAFF indépendantes entre elles et des θ_ρ ; $\omega_{\sigma\alpha}$ des formes de PFAFF indépendantes des ω_α, θ_ρ et vérifiant un système de relations identiques de la forme

$$(5.4)\qquad b_{\tau\sigma\alpha}\bar\omega_{\sigma\alpha} = 0 \pmod{\theta}.$$

Si, au lieu de (5.4), on a des relations de la forme

$$(5.4')\qquad b_{\tau\sigma\alpha}\bar\omega_{\sigma\alpha} + b_{\tau\alpha}\omega^\alpha = 0 \qquad \pmod{\theta}$$

(indépendantes en $\bar\omega_{\sigma\alpha}$), le système se dit *q-quasi-normal.* D'aprés ce que nous avons établi antérieurement (Chap. I, § 3, no. 4), un système quasi-normal peut être ramené à un système normal, par un autre choix des formes $\bar\omega_{\sigma\alpha}$, s'il y a, par chaque point, des éléments plans intégraux, sur lesquels les ω sont indépendants.

Lorsque cela ne prêtera pas à confusion, nous disons « système normal » ou « quasi-normal » au lieu de q-normal ou q-quasi-normal.

6. THÉORÈME. – *Si le systéme* (Σ) *admet des éléments q-plans intégraux et si son q-prolongement* (Σ') *admet, par chaque point, des éléments q-plans* E'_q, *dont les composantes* $p^{i_1 i_2 \cdots i_q}$ pour $i_1, i_2, \dots, i_q \leq n$ *(v. l'observation à la fin du no.* 4) *sont les composantes d'éléments q-plans* E_q *de* (Σ), *alors* (Σ') *est quasi-normal.*

En effet, si, sur E_q, les ω^α sont indépendantes, les équations (5.1) sont, pour les éléments q-plans d'une variété de E_q, équivalentes à un système de la forme (5.2) et, par suite, les équations

$$(5.5)\qquad dL_{\sigma i} \wedge dx^i = 0$$

sont équivalentes à

$$(5.6)\qquad -\,d\bar\omega^\sigma + dl^\sigma_\alpha \wedge \omega^\alpha + l^\sigma_\alpha d\omega^\alpha = 0.$$

Dans ces équations, $d\omega^\alpha$, $d\bar{\omega}^\sigma$ sont des formes quadratiques extérieures en ω^α, $\bar{\omega}^\sigma$ et ces dernières, en vertu de (5.2), s'espriment aussi à l'aide des pfaffiens ω. On peut donc écrire

$$d\omega^\alpha = K^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma\,, \qquad d\bar{\omega}^\sigma = H^\sigma_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma\,,$$

où les coefficients $H^\sigma_{\beta\gamma}$, $K^\alpha_{\beta\gamma}$ sont polynômes en l, à coefficients fonctions de x. En vertu de cette relation, on a de (5.6)

$$\bar{\omega}_{\sigma\alpha} \wedge \omega^\alpha = 0, \tag{5.6'}$$

ou

$$\bar{\omega}_{\sigma\alpha} = dl^\sigma_\alpha + l^\sigma_\gamma K^\gamma_{\beta\alpha}\,\omega^\beta - H^\sigma_{\beta\alpha}\,\omega^\beta + h_{\sigma\beta\alpha}\,\omega^\beta \quad (h_{\sigma\alpha\beta} = h_{\sigma\beta\alpha}). \tag{5.7}$$

Les coefficients $h_{\sigma\alpha\beta}$ sont arbitraires. On peut les supposer, pour le moment, nulles.

Entre les formes $\bar{\omega}_{\sigma\alpha}$, il y a des relations linéaires, déduites de (5.7) et de (T_q'). En tenant compte de (5.2), ces relations sont de la forme

$$b_{\tau\sigma\alpha}\,\bar{\omega}_{\sigma\alpha} + c_{\tau\alpha}\,\omega^\alpha = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \psi), \tag{5.8}$$

ce qui prouve notre théorème.

7. Remarquons encore que, par suite du théorème établi au no. 4 du § 3, Chap. I, on pourra ramplacer $\bar{\omega}_{\sigma\alpha}$ par des formes $\bar{\omega}^*_{\sigma\alpha}$ à l'aide de relations

$$\bar{\omega}_{\sigma\alpha} = \bar{\omega}^*_{\sigma\alpha} + k_{\sigma\alpha\beta}\,\omega^\beta$$

avec, pour $k_{\sigma\alpha\beta}$, les conditions

$$b_{\tau\sigma\alpha}\,k_{\sigma\alpha\beta} + c_{\tau\beta} = 0, \qquad k_{\sigma\alpha\beta} = k_{\sigma\beta\alpha} \tag{5.9}$$

(qui sont compatibles en k) et le prolongement deviendra un système *normal*. Cela revient d'ailleurs à prendre dans (5.7) $h_{\sigma\beta\alpha} = k_{\sigma\alpha\beta}$ (ou k est une solution de (5.9)) au lieu de zéro, comme nous l'avions pris d'abord. C'est ce que nous supposerons toujours fait dans un q-prolongement quelconque, qui admet des éléments q-plans intégraux.

8. Des théorèmes démontrés au § 3 nos. 1-3, il suit que, si dans le domaine D, tous les points intégraux d'un système (Σ) q-normal sont réguliers pour (Σ), alors tout élément q-plau intégral, sur lequel les formes ω sont indépendantes, est semi-régulier.

De même, si dans le domaine D, il y a, en chaque point intégral (d'un système q-normal), une variété A_q d'éléments q-plans intégraux réguliers entre les indices γ et q, alors tout autre élément q_1-plan intégral ($\gamma \leq q_1 \leq q$), sur lequel q_1 des pfaffiens ω^α sont indépendants et qui est généré par des éléments γ-plans situés sur les q-plans de A_q, est situé sur une variété A_{q_1} de la suite définie par les éléments q-plans de A_q.

9. Considérons de nouveau un système q-normal, en involution aux ω^α indépendantes. On peut toujours supposer que, sur un E_q régulier, sont réguliers les éléments plans

$$E_\gamma = E_1^{(1)} \times E_1^{(2)} \times \dots \times E_1^{(\gamma)} \qquad (\gamma = 1, 2, \dots, q),$$

où, sur $E_1^{(\beta)}$, on a

$$\omega^1(d_\beta) = 0, \ \omega^2(d_\beta) = 0, \dots, \omega^{\beta-1}(d_\beta) = 0, \ \omega^\beta(d_\beta) \neq 0,$$

$$\omega^{\beta+1}(d_\beta) = 0, \dots, \omega^q(d_\beta) = 0.$$

Dans ce cas, nous dirons *qu'on a, sur E_q, une chaîne regulière de coordonnées.*

Pour qu'un élément linéaire intégral $E_1(\delta)$ soit associé à E_γ, il faut que

$$\bar\omega_{\rho\alpha}(d_\beta)\,\omega_\alpha(\delta) - \omega_\alpha(d_\beta)\,\bar\omega_{\rho\alpha}(\delta) = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \dots, \gamma),$$

et, en y introduisant

$$\omega_\alpha(d_\beta) = \delta_{\alpha\beta},$$

on a

$$\bar\omega_{\rho\beta}(\delta) = \bar\omega_{\rho\alpha}(d_\beta)\,\omega_\alpha(\delta).$$

Parmi ces relation, il y en a r_γ indépendantes entre elles et des équations de PFAFF du système. D'autre part (supposé $\gamma < q$), sur $E_{\gamma+1}$, les formes $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{\gamma+1}$ sont indépendantes, d'après la manière dont nous avons défini la chaîne régulière de coordonnées. Donc, s'il y a une relation de la forme

$$H_\rho\,\bar\omega_{\rho\beta}(\delta) = 0$$

identique, on aurra aussi identiquement

$$H_\rho\,\bar\omega_{\rho\alpha}(d_\beta) = 0.$$

On peut aussi répéter toutes les considérations que nous avons faites sur les systèmes normaux au § 3. Rappelons, par exemple, qu'un système normal, qui admet des éléments plans intégraux (ω), peut être mis sous forme simplifiée ou réduite comme au no. 8, au dit paragraphe.

10. Le prolongement fermé (Σ') d'un système (Σ), peut, à son tour, être de nouveau prolongé. Si ce nouveau prolongement est aussi à q dimensions, nous le nommerons *le deuxième prolongement à q-dimensions.* De la même manière, on définit, de proche en proche, le h-ième prolongement à q-dimensions.

Considérons un élément plan E_q, sur lequel les ω^α sont indépendantes et soient (5.2) les équations du prolongement algébrique, dans un voisinage de E_q. Dans le même voisinage, les équations du II$^{\text{me}}$ degré de la fermeture sont de la forme (5.6') avec (5.7). Nous supposons qu'il y a des éléments plans E'_q intégraux (ω^α) du I—$^{\text{er}}$ prolongement.

Si l'on passe au deuxième prolongement, les équations du prolongement algébrique de (Σ') sont de la forme

$$\bar{\omega}_{\sigma\alpha} - l^\sigma_{\alpha\beta}\,\omega^\beta = 0, \tag{5.10}$$

avec les relations (4.1), (5.2), (T_q), (T'_q) et avec, en plus, le système de relations qui résulte pous $l^\sigma_{\alpha\beta}$ et que nous désignons par $(T_q^{(1)})$, auxquelles on ajoute les équations qui ferment le système obtenu.

11. En continnuant de la même manière, on arrivera au h-ième prolongement de (Σ) (au voisinage de E_q),

$$\bar{\omega}_{\sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}} - l^\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}\beta}\,\omega^\beta = 0, \tag{5.11}$$

avec les relations (5.2), (5.10), ..., avec encore les relations finies (4.1), (T_q), $(T_q^{(1)})$, ... , $(T_q^{(h)})$ et enfin les relations qui ferment le système. Les équations du 2$^{\text{me}}$ degré sont de la forme·

$$\bar{\omega}_{\sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}\beta} \wedge \omega^\beta = 0, \tag{5.12}$$

où

$$\bar{\omega}_{\sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}\beta} = dl^\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}\beta} + \cdots\,, \tag{5.13}$$

les termes non écrits étant des formes en ω^α, qu'on trouve de la même manière que nous l'avons fait pour l'expresion des $\bar{\omega}_{\sigma\alpha}$ au no. 6.

12. Dans la suite, étant donné un système normal (5.3), l'indice ρ des équations du second degré sera appelé *indice* d'*ordre*, tandis que l'indice

α sera appelé *indice de coordonnées.* Dans les équations (5.12), du prolongement d'ordre h, les indices $\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}$ sont indices d'ordre et β, indice de coordonnées.

13. Soit E_q un élément plan intégral déterminé par les éléments linéaires $E_1^{(\beta)}(\beta = 1, 2, \ldots, q)$, chacun avec les composantes (sur E_q) $\omega^\beta(\alpha_\alpha) = \delta^\alpha_\beta$. D'après (5.2), on a

$$\bar{\omega}_\sigma(d_\alpha) = l^\sigma_\alpha . \tag{5.14}$$

En passant au second prolongement, on aura d'après (5.10)

$$\bar{\omega}_{\sigma\alpha}(d_\beta) = l^\sigma_{\alpha\beta} . \tag{5.15}$$

D'autre part, d'apres (5.6'), on a

$$l^\sigma_{\alpha\beta} = l^\sigma_{\beta\alpha} . \tag{5.16}$$

D'après (5.7) et (5.15), on a

$$l^\sigma_{\alpha\beta} = \bar{\omega}_{\sigma\alpha}(d_\beta) = d_\beta l^\sigma_\alpha + l^\sigma_\gamma K^\gamma_{\beta\alpha} - H^\sigma_{\beta\alpha} + h_{\sigma\beta\alpha}$$

et par suite

$$l^\sigma_{\alpha\beta} - l^\sigma_{\beta\alpha} = d_\beta l^\sigma_\alpha - d_\alpha l^\sigma_\beta + l^\sigma_\gamma (K^\gamma_{\beta\alpha} - K^\gamma_{\alpha\beta}) - (H^\sigma_{\beta\alpha} - H^\sigma_{\alpha\beta}) = 0. \tag{5.17}$$

14. Quand on fait un prolongement d'ordre quelconque (v. n. 10, § 5), en tenant compte de la signification des coefficients l, on aura

$$\begin{aligned} l^\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_h\beta} = \bar{\omega}_{\sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_h}(d_\beta) = d_\beta l^\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_h} + l^\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}\gamma} K^\gamma_{\beta\alpha_h} - \\ - H^\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}\beta\alpha_h} + h_{\sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}\beta\alpha_h} , \end{aligned} \tag{5.18}$$

où K a la même signification qu'au § 5 no. 6 et H et h ont des significations analogues à celles qu'on leur a données au même paragraphe: H est le coefficient qui intervient dans la relation

$$d\bar{\omega}^\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}} = H^\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}\beta\alpha_h} \omega^\beta \wedge \omega^{\alpha_h}$$

(en vertu des équations du prolongement) et h, un coefficient. symétrique dans les deux derniers indices et choisi de manière que le prolongement soit un système normal.

Les coefficients K, H, h dépendent de

$$x, \; l^{\sigma}_{\alpha}, \; l^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \; l^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_h\beta}.$$

15. Observons que, de la même manière qu'on l'a montré plus haut, on déduit que

$$l^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_h\beta} = l^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{h-1}\beta\alpha_h}. \tag{5.16'}$$

D'autre part, en changeant entre eux deux indices quelqonques, on peut écrire à partir de (5.18)

$$\begin{aligned} L_{\sigma\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_h\beta} &= l^{\sigma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \ldots \alpha_\mu \ldots \alpha_h\beta} - l^{\sigma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_\mu \ldots \alpha_\nu \ldots \alpha_h\beta} = \\ &= d_\beta \, l^{\sigma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \ldots \alpha_\mu \ldots \alpha_h} - d_\beta \, l^{\sigma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_\mu \ldots \alpha_\nu \ldots \alpha_h} + P^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_h\beta}, \end{aligned} \tag{5.19}$$

où P depend de

$$x, \; l^{\sigma}_{\alpha}, \; l^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \; l^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_h}.$$

Supposons que l'expression

$$L_{\sigma\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_h} = l^{\sigma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \ldots \alpha_\mu \ldots \alpha_h} - l^{\sigma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_\mu \ldots \alpha_\nu \ldots \alpha_h}$$

soit fonction des x et des

$$l^{\sigma}_{\alpha_1}, \; l^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2} \ldots \; l^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{h-1}}.$$

Il s'ensuit que

$$d_\beta L^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_h} = d_\beta \, l^{\sigma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \ldots \alpha_\mu \ldots \alpha_h} - d_\beta \, l^{\sigma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_\mu \ldots \alpha_\nu \ldots \alpha_h}$$

pourra s'exprimer, si nous remplaçons $d_\beta l^{\sigma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \ldots \alpha_\mu \ldots \alpha_h}$ par leurs expressions, qui résultent de (5.19), en fonction des x et des

$$l^{\sigma}_{\alpha_1}, \; l^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \; l^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_h}.$$

Donc l'expression (5.19) dépendra de ces mêmes variables. Or, cela est vrai pour $h = 2$, par suite de (5.16).

Il résulte, en tenant compte aussi de (5.16') que. pour tout h, *la différence*

$$l^{\alpha}_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_h\alpha_{h+1}} - l^{\sigma}_{\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha'_h\alpha'_{h+1}},$$

où les indices α sont les mêmes que les indices α', mais en ordre non croissant, est fonction des variables x et des $l^\sigma_{\beta_1}$, $l^\sigma_{\beta_1\beta_2}$ ... $l^\sigma_{\beta_1\beta_2\,...\,\beta_h}$, où les indices β de chaque paramètre sont en ordre non croissant.

§ **6.** – *Prolongement des éléments plans intégraux. Étude des composantes de ce prolongement. Système polaire du prolongement d'un élément plan. Prolongements d'ordre supérieur.*

1. Considérons le q-prolongement (Σ') de (Σ) et supposons vérifiées les hypothèses du no. 6 § 5, autrement dit, qu'il y ait en chaque point intégral, des éléments γ-plans E'_γ de (Σ') pour tout $(\gamma \leq q)$, dont les composantes grassmanniennes à indices compris entre 1 et n (v. no. 4 § 5) représentent des éléments γ-plans E_γ de (Σ). Dans ce cas, nous dirons que *E'_γ est le prolongement de E_γ* et que *E_γ est la projection de E'_γ*.

Faisons encore l'observation que, si E_γ a un prolongement E'_γ, alors tout élément plan $E_\beta(\beta = 1, 2, 3, ..., \gamma)$ contenu dans E_γ a un prolongement E'_β contenu dans E_γ. Cela résulte avec évidence si l'on suppose que, sur E_γ sont indépendantes les formes ω^1, ω^2, ..., ω^γ et qu'on peut supposer que E_β a été obtenu, en faisant

$$\omega^{\beta+1} = \omega^{\beta+2} = ... = \omega^\gamma = 0 \tag{6.1}$$

(ce qui ne diminue pas la généralité). Alors E'_β s'obtient de E'_γ de E'_γ en imposant sur ce dernier les mêmes conditions (6.1).

2. *Les équations du prolongement d'un élément plan intégral.* – Soit E_γ un élément γ-plan de (Σ), pris d'une façon générique sur un élément q-plan (ω) semi-régulier générique de (Σ). Supposons que E_γ soit déterminé par γ éléments linéaires de coordonnées $E_1^{(1)}$, $E_1^{(2)}$, ..., $E_1^{(\gamma)}$ de même base P — point intégral régulier de Σ. Les équations de E_q peuvent être écrites sous la forme (5.1) ou (5.2). (T_q) étant les équations verifiées par $L_{\sigma i}$, on peut dire que ce sont les équations des éléments q-plans intégraux par P — ou encore, si (T_q) sont les équations vérifiées par l^σ_α, elles sont les équations des éléments plans intégraux (ω) par P. Au lieu de (T_q), nous considérerons les équations qui représentent la variété irréductible A_q sur laquelle se trouve E_q.

Supposons que, sur E_q soient indépendantes les formes ω^α et que E_γ s'obtienne en imposant, sur E_q, les conditions

$$\omega^{\gamma+1} = \omega^{\gamma+2} = ... = \omega^q = 0.$$

Soit $E_{\gamma+1}$, un élément $(\gamma+1)$ — plan intégral semi-régulier, qui contient E_γ et est sur E_q. On peut supposer que $E_{\gamma+1}$ est obtenu en imposant sur E_q les conditions

$$\omega^{\gamma+2} = \omega^{\gamma+3} = \dots = \omega^q = 0.$$

On peut considérer que $E_{\gamma+1}$ est défini par E_γ et un élément linéaire $E_1{}^{(\gamma+1)} = E_1$, situé sur $E_{\gamma+1}$(E_1 est associé à E_γ).

Supposons qu'on connaisse le prolongement E'_γ de $E_\gamma(\gamma < q)$ et cherchons, à partir de celui-ci, le prolongement $E'_{\gamma+1}$ de $E_{\gamma+1}$.

3. Suppossons, comme nous l'avons déjà fait, que les composantes des éléments plans $E_1{}^{(\beta)}$ $(\beta = 1, 2, \dots, \gamma+1)$ sur E_q soient

$$\omega^\beta(d_\alpha) = \delta^\beta_\alpha \quad (\beta = 1, 2, \dots, \gamma+1). \tag{6.2}$$

Désignons par $E_1'^{(\beta)}$ le prolongement de $E_1{}^{(\beta)}(\beta = 1, 2, \dots, \gamma)$. De (5.6') et (5.7), en imposant la condition que E_1 soit associé à chacun des éléments linéaires $E_1'^{(1)}, E_1'^{(2)}, \dots, E_1'^{(\gamma)}$ et en désignant resp. par

$$d_1 l^\sigma_\alpha,\ d_1 x;\ d_2 l^\sigma_\alpha,\ d_2 x;\ \dots;\ d_\gamma l^\sigma_\alpha,\ d_\gamma x;\ d_{\gamma+1} l^\sigma_\alpha = \delta l^\sigma_\alpha,\ d_{\gamma+1} x = \delta x$$

les composantes de ces éléments linéaires, on trouve

$$d_\varepsilon l^\sigma_\varkappa - d_\varkappa l^\sigma_\varepsilon + 2 l^\sigma_\alpha K^\alpha_{\varepsilon\varkappa} - 2H^\sigma_{\varepsilon\varkappa} = 0 \qquad (\varepsilon, \varkappa = 1, 2 \dots, \gamma) \tag{6.3}$$

$$\delta l^\sigma_\varkappa - d_\varkappa l^\sigma_{\gamma+1} + 2 l^\sigma_\alpha K^\alpha_{\gamma+1,\varkappa} - 2H^\sigma_{\gamma+1,\varkappa} = 0. \tag{6.3'}$$

Ces dernières relations définissent $\delta l^\sigma_\varkappa$ et laissent indétermioées

$$\delta l^\sigma_{\gamma+1},\ \delta l^\sigma_{\gamma+2},\ \dots,\ \delta l^\sigma_q.$$

Mais, en dehors des (6.3) et (6.3'), il faut que soient encore vérifiées les relations (T'_q) — ou plutôt $(\mathcal{T}'_q)$ (v. § 5, nos. 2 et 4) si nous nous rapportons à une composante du système (T_q) qui contient des éléments q-plans (ω).

REMARQUE. - Si on cherche un élément plan E'_1, associé à E'_γ et dont les composantes ω soient

$$\left\{\begin{array}{l} \omega^\beta(d_\alpha) = \delta^\beta_\alpha \text{ pour } \alpha = 1, 2, \dots, \gamma, \\ \omega^\beta(\delta) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ pour } \beta = 1, 2, \dots, \gamma, \\ \xi^\beta \text{ pour } \beta = \gamma+1, \gamma+2, \dots, q, \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{6.2'}$$

alors on voit immédiatement, comme plus haut, que les relations sont analogues, seulement qu'au lieu de (6.3'), on obtient

$$\delta l^\sigma_\varkappa - d_\varkappa l^\sigma_\beta \xi^\beta + 2 l^\sigma_\alpha K^\alpha_{\beta\varkappa} \xi^\beta - 2 H^\sigma_{\beta\varkappa} \xi^\beta = 0. \tag{6.3''}$$

4. Séparons dans les relations $(\mathfrak{T}_q)$ celles qui s'en déduisent pour $l^\sigma_1, l^\sigma_2, \ldots, l^\sigma_\gamma$ et supposons qu'elles forment le système $(\mathfrak{T}_{\gamma 1})$, les autres formant le système $(\mathfrak{T}_{\gamma 2})$.

Une partie des équations $(\mathfrak{T}_{\gamma 1})$ exprime que chaque élément linéaire $E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, \ldots, E_1^{(\gamma)}$ est intégral et associé à tous les éléments plans formés par les autres. On peut former ces équations en prenant d'abord un élément linéaire intégral $E_1^{(1)}(t^\sigma_1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, en exprimant ensuite que $E_1^{(2)}$ est associé à $E_1^{(1)}$ ensuite que $E_1^{(3)}$ est associé à l'élément plan formé par $E_1^{(1)}$ et $E_1^{(2)}$, etc. Soit $(\mathfrak{T}^*_{\gamma 1})$ le système qu'on obtient de cette manière.

Une autre partie des équations $(\mathfrak{T}_{\gamma 1})$ est formée par les équations qui expriment que E_γ, ou certains des E_β $(\beta < \gamma)$ contenus dans E_γ, sont singuliers de ramification (v. § 2 no. 13 et suiv.) sur les E_q de la variété A_q que nous étudions. Ces équations seront appelées $(\mathfrak{T}^{**}_{\gamma 1})$. Les équations $(\mathfrak{T}^*_{\gamma 1})$ et $(\mathfrak{T}^{**}_{\gamma 1})$ forment ensemble tout le système $(\mathfrak{T}_{\gamma 1})$.

Si les E_γ de E_q sont réguliers, alors le système $(\mathfrak{T}^{**}_{\gamma 1})$ n'éxiste évidemment pas.

Remarquons d'ailleurs qu'une partie des équations $(\mathfrak{T}^{**}_{\gamma 1})$ peut se déduire des équations $(\mathfrak{T}^*_{\gamma 1})$ et du fait que, sur E_γ, les formes de Pfaff $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^\gamma$ sont indépendantes. Nous n'allons considérer que les équations $(\mathfrak{T}^{**}_{\gamma 1})$ indépendantes de $(\mathfrak{T}^*_{\gamma 1})$.

5. Soient

$$\mathcal{H}_\nu(\bar\omega, \omega) = 0 \tag{6.4}$$

les équations du système (Σ) jusqu'au degré $\gamma + 1$. En y substituant

$$\bar\omega^\sigma = l^\sigma_\alpha \omega^\alpha + \psi^\sigma , \tag{6.5}$$

on trouve les mêmes équations sous la forme

$$\mathfrak{L}_\nu(\psi, \omega) = 0. \tag{6.6}$$

Soit une de ces équations, de degré ρ

$$\mathfrak{L}_\nu = A_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\rho} \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{\alpha_\rho} + A_{\nu\sigma_1\alpha_2\ldots\alpha_\rho} \psi^{\sigma_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{\alpha_\rho} + \ldots , \tag{6.7}$$

où les termes non écrits contiennent au moins deux facteurs ψ.

Remplaçons dans ce système, dans les produits extérieurs, les $\omega^\alpha(d_\beta)$, $\psi^\sigma(d_\beta)$, par les composantes des éléments linéaires $E_1^{(\beta)}(\beta = 1, 2, \dots, \gamma + 1)$ de $E_{\gamma+1}$ (v. plus haut, no. 1, ou no. 9 du § 5). Puisque sur $E_{\gamma+1}$, on a

$$\omega^{\gamma+2} = \omega^{\gamma+3} = \dots = \omega^q = 0, \ \psi^\sigma = 0,$$

on obtient

$$A_{\nu\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\rho} = 0 \qquad (\rho \leq \gamma + 1\,;\ \alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_\rho = 1, 2, \dots, \gamma + 1). \tag{6.8}$$

Ces équations appartiennent au système (T_q). Si, dans (6.4), on considère les équations de A_q, alors, (6.8) appartient à $(\mathcal{T}_q)$. C'est un système en l_1^σ, l_2^σ, ..., $l_{\gamma+1}^\sigma$ qui contient le système $(\mathcal{T}^*_{\gamma+1,\,1})$.

6. Si les $E_{\gamma+1}$, situés sur les E_q de la variété A_q sont réguliers, alors (6.8) appartiennent à $(\mathcal{T}^*_{\gamma+1,\,1})$ (il n'y a pas de système $(\mathcal{T}^{**}_{\gamma+1,\,1})$). Si, pour certaines valeurs de $\beta(\leq \gamma)$, les E_β de E_q sont singuliers (de ramification) de première espèce, alors le système (6.8) implique au moins une partie des relations qui expriment cette propriété, c'est-à-dire que, de ce système, il résulte une partie de $(\mathcal{T}^{**}_{\gamma+1,\,1})$. En effet, si on a donné $E_{\gamma+1}$, celui-ci est sur une certaine variété $A_{\gamma+1}$, ce qui implique la singularité des E_β; $E_{\gamma+1}$ ne peut varier d'une manière continue, sans que cette propriété se conserve.

Si ce sont les $E_{\gamma+1}$ de E_q qui sont singuliers (de ramification), cette propriété s'exprime par des relations qui ne résultent pas de (6.8), puisque ces dernières n'expriment que le fait que $E_{\gamma+1}$ est intégral. Un $E_{\gamma+1}$ de E_q, vérifie — il est vrai — les conditions de singularité, mais il ne résulte pas qu'à une variation continue de cet E_γ, avec conservation de (6.8), l'élément plan reste singulier, sans qu'on lui impose en plus cette condition.

Si, pour certaines valeurs de $\beta(\leq \gamma + 1)$, les E_β de E_q sont singuliers de 2^{me} espèce (v. § 2, no. 12), c'est-à-dire qu'il y ait des chaînes semi-régulieres de (Σ) situées dans E_q,

$$E_\beta \subset E_{\beta+1} \subset \dots \subset E_{\gamma+h} \quad (h \geq 0) \tag{6.9}$$

tous les $E_{\gamma+h+1}$ qui contiennent E_β étant singuliers (de ramification) de I^{ère} espèce — alors les coordonnées de des E_β vérifient certaines conditions, qui ne découlent pas de (6.8). Elles appartiennent à $(\mathcal{T}^{**}_{\gamma 1})$.

7. Remarquons que, (Σ) étant un système fermé, il contient aussi les équations $d\mathcal{H}_\nu = 0$, c'est-à-dire, en vertu de (6.6) et (6.8), les relations

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_\nu = {} & dA_{\nu\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\rho} \wedge \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \omega^{\alpha_\rho} + \\ & + A_{\nu\sigma_1\alpha_2\dots\alpha_\rho}\, d\psi^{\sigma_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \omega^{\alpha_\rho} + \dots , \end{aligned} \tag{6.10}$$

où les termes non écrits contiennent des facteurs ψ. Ces dernières équations seront considérées seulement pour $\rho = 1, 2, \ldots, \gamma$, parce qu'elles se réfèrent à un élément intégral $(\gamma + 1)$-plan et que, par suite, une équation de degré plus grand que $(\gamma + 1)$ y serait trivialement vérifiée.

Les équations (6.10) sont équivalentes à $d\mathcal{H}_\nu = 0$ et sont identiquement vérifiées (en vertu de (6.4)), sur un élément $(\gamma + 1)$-plan $E_{\gamma+1}$, si on tient compte de (6.5), (6.8).

Pour le prolongement $E'_{\gamma+1}$ de $E_{\gamma+1}$ en supposant $\psi^\sigma = 0$ et $d\psi_\sigma = 0$, on déduit de (6.6), des relations entre $d_\varepsilon l^\sigma_\chi$, δl^σ_χ, notamment (6.3) et (6.3'). D'autre part, de (6.10), on déduit, pour $\psi^\sigma = 0$, $d\psi^\sigma = 0$,

$$d\,A_{\nu\alpha_1\alpha_2\,\ldots\,\alpha_\rho} \wedge \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{\alpha_\rho} = 0 \quad (\rho = 1, 2, \ldots, \gamma).$$

Cette relation est identiquement vérifiée sur $E'_{\gamma+1}$, si celui-ci existe. Mais on a

$$d_1 A_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\rho} = d_2 A_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\rho} = \ldots = d_\gamma A_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\rho} = 0,$$

dans les directions de $E_1'^{(1)}$, $E_1'^{(2)}$, ..., $E_1'^{(\gamma)}$, puisque ces dernières sont contenues dans E'_γ, qui est le prolongement de E_γ, supposé connu. Il s'ensuit que l'on a aussi

$$\delta A_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\rho} = 0 \quad (\rho = 1, 2, \ldots, \gamma). \tag{6.11}$$

Cette condition est donc imposée par (6.8) considéré avec $\gamma \leq \rho$, c'est-à-dire par le système qu'on obtient en annulant les différentielles des 1$^{\text{ers}}$ membres de ces relations. Elle est d'ailleurs identiquement vérifiée en vertu de (6.3'), c'est-à-dire ne nous offre aucune relation nouvelle.

8. Si nous sommes dans les cas où les équations $(\mathcal{T}^{**}_{\gamma 1})$ se déduisent toutes de (6.8), alors les équations $(\mathcal{T}'^{**}_{\gamma 1})$ (qu'on déduit de $(\mathcal{T}^{**}_{\gamma 1})$ par différentation) se déduisent de (6.11) et le système polaire de E'_γ se compose seulement des équations (6.3') et des équations $(\mathcal{T}'_{\gamma 2})$ qu'on obtient de $(\mathcal{T}_{\gamma 2})$ par différentation. C'est, en particulier, le cas si E_γ est régulier. C'est aussi le cas, si tous les $E_{\gamma+1}$ de E_q sont semi-réguliers et si, pour tout $\beta < \gamma + 1$ les E_β contenus dans E_q ne sont pas singuliers à droite dans le sens precisé à la fin du no. 6.

Théorème. - *Dans l' hypothèse ci-dessus, le système polaire de E'_γ est formé des équations* (6.3') *et des équations* $(\mathcal{T}'_{\gamma 2})$ *qu'on obtient de* $(\mathcal{T}_{\gamma 2})$ *par différentation.*

Précisons pourtant qu'il est possible, même s'il existe un système $(\mathfrak{T}_{\gamma 1}^{**})$ independant de (6.8), que le système $(\mathfrak{T}_{\gamma 1}'^{**})$ soit identiquement vérifié en vertu de (6.3').

§ 7. - *Prolongement des éléments γ-plans réguliers. Cas où le prolongement d'un élément γ-plan est régulier.*

1. De ce qui précède, on peut tirer certaines conclusions pour le cas où E_γ est régulier.

Tout d'abord, on déduit que, si $E_\gamma(\gamma < q)$ admet un prolongement E'_γ, il en est de même de $E_{\gamma+1}$ (v. no. 8, § 6). On voit aisément que, dans les mêmes hypothèses, *E'_γ est semi-régulier.* En effet, le système polaire de E'_γ, étant composé, comme nous l'avons vu (v. no. 8 § 6), son rang ne varie pas, quand E_γ est remplacé par un autre élément γ-plan intégral-voisin. Cela résulte du fait que: 1) E_γ étant régulier, le rang du système polaire de E_γ ne varie pas; 2) Le rang de (6.3') est évidemment constant et 3) le rang de $(\mathfrak{T}'_{\gamma 2})$ est le même que le rang du système $(\mathfrak{T}_{\gamma 2})$, considéré comme système d'équations finies en

$$l^\sigma_{\gamma+1},\ l^\sigma_{\gamma+2},\ \dots,\ l^\sigma_q$$

et ce dernier ne varie pas avec E'_γ, puisqu'il détermine le nombre de paramètres dont dépend un E_q régulier qui contient E_γ.

De plus, il résulte avec évidence que, *si nous considérons une chaîne régulière*

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_\gamma\,, \tag{7.1}$$

alors la chaîne des prolongements

$$E_1' \subset E_2' \subset \dots \subset E_\gamma' \tag{7.1'}$$

est aussi régulière. On en tire

THÉORÈME. - *Si* (Σ) *est involution avec les formes* $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^q$ *indépendantes, son prolongement* (Σ') *est aussi en involution avec les mêmes formes indépendantes* [3], [17] [11], [5]. *Les éléments plans d'une chaîne régulière se prolongent d'après des éléments plans qui forment une chaîne régulière.*

2. Supposons que E_γ soit semi-régulier et ait un prolongement E'_γ et que le système $(\mathfrak{T}_{\gamma 1}'^{**})$ n'existe pas indépendamment de (6.3'); alors on voit

(17) Chap. I, pp. 159-175.

immédiatement, de la même façon que plus haut, que $E'_{\gamma+1}$ existe et que E'_γ est semi-régulier.

Si E_γ est régulier à droite, on peut prolonger les éléments plans de la chaîne semi-regulière

$$E_\gamma \subset E_{\gamma+1} \subset \dots \subset E_q\,, \tag{7.2}$$

dans ceux de la chaîne (semi-réguliere)

$$E'_\gamma \subset E'_{\gamma+1} \subset \dots \subset E'_q\,. \tag{7.2'}$$

Soit E_γ régulier à gauche jusqu'à l'indice $\eta+1$, tous les E_η contenus en E_γ étant singuliers de ramification et se trouvant sur une variété A^*_η d'éléments plans intégraux. Considérons la chaîne (7.1) et supposons qu'à cette chaîne appartienne la suite d'éléments plans E_η, E_{η_1}, ..., singuliers de ramification, formée comme au no. 12 du § 2. Supposons, de plus, que les éléments plans E_η, E_{η_1}, ... soient génériques sur les variétés d'éléments plans (singuliers de ramifications) sur lesquels ils se trouvent (v. § 2, no. 21) — dans ce sens que le système polaire de chacun ces éléments plans est de rang maximum, entre tous les éléments plans de la même variété.

THÉORÈME. - *Dans ces hypothèses, si le système* ($\mathfrak{T}'^{**}_{\gamma 1}$) *n'existe pas indépendamment de* (6.3), *la chaîne* (7.1) *est semi-régulière.*

Soit, en effet, un E_β contenu dans E_γ. Si E_β est semi-régulier, alors il suit, comme plus haut, que son prolongement l'est aussi. Si E_β est un des éléments plans singuliers de ramification E_η, E_{η_1}, ..., alors, on voit tout aussi aisément que le prolongement est semi-régulier. En effet, comme plus haut, on voit que son système polaire se compose du système (6.3') — dont le rang est constant — et de ($\mathfrak{T}'_{\beta 2}$).

Le rang de celui-ci ne varie pas dans un voisinage de E_β sur la variété des éléments plans (singuliers de ramification) sur laquelle il se trouve, puisque, par suite du fait que E_q reste sur A_q, E_β doit rester sur cette variété d'éléments plans (définie par ($\mathfrak{T}^*_{\beta 1}$)) et que nous l'y avons supposé générique.

Si de plus, *la chaîne* (7.1) *peut être prolongée à droite jusqu'à l'indice q avec les mêmes propriétés, il résulte que la suite* (7.1) *peut aussi être prolongée et* E'_γ *est régulier.*

On peut encore énoncer:

THÉORÈME. - *Si* (Σ) *admet une variété* A_q *d'éléments plans intégraux* (ω) *et si, pour tout* γ *le système* ($\mathfrak{T}'^{**}_{\gamma 1}$) *n'est pas indépendant de* (6.3'), *alors* (Σ') *est en involution aux formes* ω *indépendantes et la chaîne* (*génerique sur* A_q)

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_q\,. \tag{7.3}$$

se prolonge dans la chaîne régulière.

(7.3') $$E_1' \subset E_2' \subset \dots \subset E_q' .$$

3. REMARQUE. - Considérons un prolongement (Σ') à q dimensions de Σ et un élément plan intégral (ω) E'_q est de (Σ'). E'_q alors le prolongement d'un élément plan intégral E_q de (Σ). Il appartient à une variété A'_q d'éléments plans semi-réguliers de (Σ'), qui sont aussi prolongements d'éléments plans de (Σ) appartenant à une variété A_q.

(Σ') a aussi des éléments q-plans intégraux $\mathcal{E}'_q$, qui ne sont pas prolongements d'éléments plans intégraux de (Σ), mais sur ces $\mathcal{E}'_q$ les formes ω ne sont pas indépendantes. Inversement, on voit que si, sur un élément q-plan intégral de (Σ'), les ω ne sont pas indépendantes, alors cet élément plan n'est pas prolongement d'un élément q-plan (ω) intégral de (Σ).

§ 8. *Caractères du q-prolongement d'un système, dans les cas précédents.*

1. Soit un élément γ-plan intégral E_γ de (Σ) régulier entre les indices 1 et q et examinons l'ensemble des éléments plans E_q qui contiennent E_γ $(\gamma < q)$. Cela peut être fait en examinant le q-prolongement algébrique de (Σ).

Supposons E_γ défini par les γ éléments linéaires $E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, \dots, E_1^{(\gamma)}$ de coordonnées

$$\omega^\alpha(d_\beta) = \delta^\alpha_\beta \quad (\alpha = 1, 2, \dots, q\,;\ \beta = 1, 2, \dots, \gamma)\,;\ \ \bar{\omega}^\sigma(d_\alpha) = l^\sigma_\alpha;$$

supposons encore qu'il soit contenu dans l'élément q-plan (ω) régulier, E_q.

Cet E_q peut être défini par les éléments linéaires intégraux $E_1^{(\beta)}(\beta = 1, 2, \dots, q)$ de coordonnées $\omega^\alpha(d_\beta) = \delta^\alpha_\beta$, $\bar{\omega}^\sigma(d_\beta) = l^\sigma_\beta$. Ceux des l^σ_β, dont l'indice β est au plus égal à γ, sont donnés du fait que E_γ est donné. Les autres sont pour le moment indéfinis et on sait seulement qu'il satisfont aux équations $(\mathcal{T}_q)$ de la variété A_q des q-plans réguliers.

2. D'après ce qui a été établi au no. 16 du § 2, un élément q-plan intégral régulier qui passe par un élément γ-plan intégral (régulier) donné depend de

(8.1) $$N_{\gamma, q} = (q-\gamma)(n-q) - (q-\gamma)r_{q-1} + \\ + (s_{\gamma+1} + 2s_{\gamma+2} + \dots + (q-\gamma-1)s_{q-1})$$

paramètres.

À partir de cette formule, les caractères du q-prolongement peuvent être facilement trouvés:

Supposons qu'on ait, dans E_q, une chaîne régulière de coordonnées (v. § 5 no. 12) et soit E'_γ le prolongement de E_γ.

Le prolongement (Σ') de (Σ) est à $n + q(n-q)$ variables et ses relations finies sont les relations finies de (Σ) et le système (T_q). Pour trouver le nombre r'_γ de relations (linéaires) indépendantes auxquels doivent satisfaire les coordonnées d'un élément linéaire $E_1'^{(\gamma+1)}$ pour être associé à E'_γ il faut tenir compte que le système de ces relations est formé par: 1) les relations (6.3') au nombre de $\gamma(n-q)$ (indépendantes); 2) les relations (5.2) au nombre de $n-q$ (indépendantes) et 3) les relations $(\mathcal{C}'_{\gamma 2})$ entre $\delta l^\sigma_{\gamma+1}, \delta l^\sigma_{\gamma+2}, \ldots, \delta l^\sigma_q$. Le nombre de relations indépendantes parmi ces différentielles est égal au nombre total des paramètres $l^\sigma_{\gamma+1}, l^\sigma_{\gamma+2}, \ldots, l^\sigma_q$ dont on déduit le nombre de paramètres indépendants dont dépend $l'E_q$ contenant E_γ, c'est-à-dire $(q-\gamma)(n-q) - N_{\gamma, q-\gamma}$. Donc,

$$r_\gamma' = \gamma(n-q) + (n-q) + (q-\gamma)(n-q) - N_{\gamma, q-\gamma}$$

et, en partant de (8.1),

$$r_\gamma' = (\gamma+1)(n-q) + (q-\gamma) r_{q-1} - s_{\gamma+1} - \\ - 2s_{\gamma+2} - \ldots - (q-\gamma-1) s_{q-1}\,. \tag{8.2}$$

On déduit d'ici, pour les caractères (en tenant compte de (2.5) et (2.8))

$$s_\gamma' = r_\gamma' - r'_{\gamma-1} = s_\gamma + s_{\gamma+1} + \ldots + s_p + p - q \quad (\gamma \geq 1). \tag{8.3}$$

En particulier, pour $q = p$, $\gamma = p$

$$s'_p = s_p\,. \tag{8.4}$$

3. Dans les mêmes hypothèses qu'au no. précédent, on voit aisément que, parmi les coefficients l^σ_1, il en est $n - s_0 - q$ indépendants; les paramètres l^σ_2 doivent satisfaire encore à s_1 conditions linéaires indépendantes (pour que is $E_1^{(2)}$ soit associé à $E_1^{(1)}$) et par suite, il en reste $n - s_0 - s_1 - q$ indépendants, etc.

On peut encore dire autrement: parmi les coefficients l^σ_1, il en est

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_p + p - q$$

indépendants, et les autres en dépendent (outre que des variables x); parmi les coefficients l^σ_2 il en est $s_2 + s_3 + \ldots + s_p + p - q$ indépendants et les autres dépendant de ceux-ci et des l_1^σ; ... parmi les coefficients l_γ^σ il en est

$$s_\gamma + s_{\gamma+1} + \dots + s_p + p - q$$

indépendants et les autres s'expriment à l'aide de ceux-ci et des $l_1^\sigma, l_2^\sigma, \dots, l_{\gamma-1}^\sigma$.

Si l'on construit le prolongement fermé et qu'on introduit les formes $\varpi_{\sigma\alpha}$ comme en (5.7), on voit tout de suite expliquée l'expression (8.3) des valeurs des caractères du prolongement.

4. Supposons maintenant que les éléments q-plans intégraux E_q appartenant à A_q soient semi-réguliers entre les indices $k+1$ et q, tandis que les éléments plans à k dimensions $(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k)$ contenus dans ceux-là sont singuliers (de ramification). Alors, entre les coordonnées des k éléments linéaires $E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, \dots, E_1^{(k)}$ de coordonnées

$$\omega^\alpha(d_\beta) = \delta_\beta^\alpha \ (\beta = 1, 2, \dots, k; \ \alpha = 1, 2, \dots, q),$$

il y a un système de relations qui impose cette singularité. Si nous considérons un élément $(k-1)$-plan E_{k-1} contenu dans E_k et ne contenant pas $E_1^{(k)}$, alors ce dernier élément linéaire vérifie, outre les relations qui résultent du fait qu'il est associé à E_{k-1}, encore un système qui résulte des relations de singularité de E_k. Les éléments linéaires $E_1^{k+1}, E_1^{k+2}, \dots, E_1^{(q)}$ de E_q (de coordonnées

$$\omega^\alpha(d_\beta); \ \beta = k+1, \ k+2, \dots, q; \ \alpha = 1, 2, \dots, q),$$

ou un élément linéaire quelconque $E_1(\delta)$ contenu dans E_q, vérifient des relations analogues, qui résultent des mêmes relations de singularité, lorsq'on considère l'élément k-plan (contenu dans E_q) défini par E_{k-1} et un des éléments linéaires ci-dessus.

Il faut toutefois remarquer que *ces dernières relations sont vérifiées par suite du fait que $E_1(\delta)$ est associé à E_k.* En effet, E_k étant élément plan singulier de ramification, tous les éléments k-plans, contenus dans un $(k+h)$-plan passant par E_k, sont singuliers de ramification.

5. Considérons maintenant les éléments plans de coordonnées

$$E_1^{(1)}, \ E_2 = E_1^{(1)} \times E_1^{(2)}, \ E_3 = E_2 \times E_1^{(3)}, \dots, \ E_q = E_{q-1} \times E_1^{(q)},$$

construits comme au no. 12 du § 2, c'est-à-dire de manière que — dans la chaîne (7.3) les éléments plans

$$E_k,\ E_{k_1},\ \dots,\ E_{k_h}\quad (q > k > k_1 > \dots > k_h)$$

soient singuliers de ramification, les autres étant semi-réguliers.

Si l'on considère un élément h-plan intégral E_h de cette chaîne, et qu'on cherche un élément linéaire E_1 associé à E_h, alors les paramètres de cet E_1 verifient un système linéaire dont le rang est $r_h(E_h)$.

Observons encore que, si $h = k_\nu - 1$, l'élément linéaire associé à E_h formera avec celui-ci un E_{h+1}. qui est encore soumis à un certain nombre de relations, qui imposent a E_h d'être singulier de ramification (v. no. précédent) Alors, pour qu'un élément linéaire soit associé à E_h et situé sur un E_q de la variété A_q considérée, les paramètres de cet E_1 seraient soumis à un système de relations linéaires de rang $r_h(E_h)$ et encore à un nombre, soit w_h de relations (non nécessairement linéaires) indépendantes entre elles et des précédentes. Soit en total le nombre de ces relations $\rho_h = r_h(E_h) + w_h$.

Dans le cas où E_{h+1} est semi-régulier, on a $\rho_h = r_h(E_h)$.

6. Supposons maintenant que nous soyons dans le cas étudié au no. 2, § 7, où la chaîne (7.3'), prolongement de (7.3), est régulière. Alors, pour établir les caractères du système prolongé, on peut procéder comme plus haut (v. no. 2). On voit d'abord, de la même manière, que, pour un γ quelconque, on aura

$$r'_\gamma = (\gamma + 1)(n - q) + (q - \gamma)(n - q) - \nu_{\gamma,\, q-\gamma}\,,$$

où $\nu_{\gamma,\, q-\gamma}$ désigne le nombre de paramètres indépendants, dont dépend un élément q-plan A_q passant par E_γ.

Ce nombre $\nu_{\gamma,\, q-\gamma}$ peut être trouvé, comme nous l'avons fait au no. 16 du § 2.

On a donc

$$\begin{aligned} r'_\gamma = {} & (\gamma + 1)(n - q) + (q - \gamma)\rho_{q-1} - \sigma_{\gamma+1} - 2\sigma_{\gamma+2} - \\ & - \dots - (q - \gamma - 1)\sigma_{q-1} + w_{\gamma+1} + w_{\gamma+2} + \dots + w_{q-1} \end{aligned} \tag{8.5}$$

et

$$s'_\gamma = r'_\gamma - r'_{\gamma-1} = \sigma_\gamma + \sigma_{\gamma+1} + \dots + \sigma_q - w_\gamma\,. \tag{8.6}$$

§ 9. - *Prolongement des éléments plans intégraux. Cas général.* (suite).

1. Soient de nouveau les hypothèses des nos. 1, 2, § 6, avec les mêmes notations, et occupons-nous encore du problème énoncé à la fin du no. 2 du même paragraphe. Nous avons établi que les composantes δx, δl de E_1', prolongement de l'élément plan E_1, associé à E_γ, doivent vérifier, outre le système polaire de E_γ dans (Σ), les relations (6.3'), $(\mathcal{T}'^{*}_{\gamma 1})(\mathcal{T}'^{**}_{\gamma 1})$ et $(\mathcal{T}'_{\gamma 2})$. Nous avons vu que les $(\mathcal{T}'^{*}_{\gamma 1})$ sont identiquement vérifiées en vertu de (6.3') et nous avons examiné le cas où $(\mathcal{T}'^{**}_{\gamma 1})$ n'existe pas indépendamment de (6.3'). Si ce système offre des équations nouvelles (ce qui — nous l'avons vu — implique que E_γ n'est pas régulier à gauche que jusqu'à un certain indice $\gamma' \geq 1$), ces équations, en vertu de (6.3'), imposent des conditions pour E_γ, nécessaires pour l'existence du prolongement de E_1, c'est-à-dire de $E_{\gamma+1} = E_\gamma \times E_1$.

Désignons par

$$\varphi_\nu(x\,;\ l_1^\sigma,\ l_2^\sigma, \ldots,\ l_\gamma^\sigma) = 0$$

les relations, décrites au nos. 4, 5 § 8, qui expriment que certains éléments plans contenus dans E_γ sont singuliers de ramification. Ce sont les relations $(\mathcal{T}^{**}_{\gamma 1})$. En employant (6.3''), on obtient de $(\mathcal{T}'^{**}_{\gamma 1})$ le système

$$\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial\omega^\beta}\,\xi^\beta + \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial l_\varkappa{}^\sigma}\,(d_\varkappa l_\beta^\sigma \xi^\beta - 2 l_\alpha^\sigma K^\alpha_{\beta\varkappa}\,\xi^\beta + H^\sigma_{\beta\varkappa}\,\xi^\beta) = 0. \tag{9.1}$$

Si les ξ^α sont donnés, alors (9.1) représente un système de relations en $d_\varkappa l_\beta^\sigma$, qui donnent les conditions pour l'existence de $E'_{\gamma+1}$, avec les ω donnés par (6.2').

Si l'on veut que ces relations (9.1) soient vérifiées, quels que soient les ξ, alors on à les conditions

$$\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial\omega^\beta} + \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial l_\varkappa{}^\sigma}\,(d_\varkappa l_\beta^\sigma - 2\, l_\alpha^\sigma K^\alpha_{\beta\varkappa} + H^\sigma_{\beta\varkappa}) = 0 \tag{9.2}$$

$$(\beta = \gamma + 1,\ \gamma + 2, \ldots,\ q\,;\ \varkappa = 1,\ 2, \ldots,\ \gamma),$$

pour que tout élément $(\gamma + 1)$-plan (ω), $E_{\gamma+1}$ contenant E_γ ait un prolongement $E'_{\gamma+1}$ contenant E'_γ.

REMARQUE. - Le rang du système polaire de $E_{\gamma-1} (= E_1^{(1)} \times \ldots \times E_1^{(\gamma-1)}$, dans lequel on suppose que les éléments linéaires $E_1^{(1)}, \ldots, E_1^{(\gamma-1)}$ forment une chaîne de coordonnées) étant $r_{\gamma-1}(E_{\gamma-1})$ supposons que, parmi les équations $\varphi_\nu = 0$, il y en ait $w_{\gamma-1}$ indépendantes en l_γ^σ. Supposons encore que le système formé par les équations $\varphi_\nu = 0$ et le système polaire de $E_{\gamma-1}$ puisse être résolu par rapport à

$$\rho_{\gamma-1} = r_{\gamma-1}(E_{\gamma-1}) + w_{\gamma-1}$$

des paramètres l_γ^σ, notamment $l_\gamma^{\sigma_1}$, $l_\gamma^{\sigma_2}$, ..., $l_\gamma^{\sigma_{\gamma-1}}$. Si on considère les équations auxquelles doivent satisfaire les parametres $l^{\sigma}_{\gamma+1}, l^{\sigma}_{\gamma+1}, \ldots, l^{\sigma}_{q}$, pour que $E_1^{(\gamma+1)}, \ldots, E_1^{(q)}$ soient associés à $E_{\gamma-1}$ et situés sur l'élément q-plan E_q de A_q, il est clair que, $E_{\gamma-1}$ étant générique de A_q, on trouvera des systèmes que vérifient les l^{σ}_{γ} et on peut supposer, sans restreindre le généralité qu'ils seront résolubles resp. par rapport à

$$l^{\sigma_1}_{\beta}, l^{\sigma_2}_{\beta}, \ldots, l^{\sigma_{\rho_{\gamma-1}}}_{\beta} \quad (\beta = \gamma+1, \gamma+2, \ldots, q)$$

avec les mêmes indices $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\rho_{\gamma-1}}$.

2. *Cas* I. - Supposons que, E_q étant situé sur une variété A_q, $E_{\gamma}(\subset E_q)$ soit ou bien semi-régulier sur une variété A'_{γ} d'éléments γ-plans semi-réguliers, ou bien singulier de ramification sur une variété B_{γ} d'éléments γ-plans singuliers de ramification; dans ce dernier cas, nous supposerons qu'il est générique, c'est-à-dire régulier sur la variété B_{γ} et tel que son système polaire soit de rang maximum (v. no. 20 du § 2).

Supposons encore que les (9.2) soient compatibles en $d_x l^{\sigma}_{\beta}$, en tenant compte de $(\mathcal{T}'_{\gamma 2})$ et qu'il y ait dans (9.2) des relations indépendantes de $(\mathcal{T}'_{\gamma 2})$. Alors ces équations expriment que E'_{γ} est singulier, — ou bien que certains éléments plans contenus dans E'_{γ} soient singuliers, puisque — si elles sont vérifiées — il passe par lui des éléments plans, qui n'existent pas, si elles ne sont pas satisfaites. Remarquons encore qu'il s'agit de singularité de ramification, puisque tout E'_{γ} situé dans $E'_{\gamma+1}$ remplit, évidemment, les mêmes conditions.

Si les (9.1) sont compatibles avec $(\mathcal{T}'_{\gamma 2})$ seulement pour certaines valeurs de ξ, alors les éléments plans $E_{\gamma+1}$ formés par E_{γ} et les éléments linéaires définis par ces valeurs de ξ admettent des prolongements. Ces éléments plans sont, eux aussi, évidemment, singuliers de ramification.

3. Supposons que l'élément plan E_q soit semi-régulier entre les indices $\gamma+1$ et q, que E_{γ} ait un prolongement — soit E'_{γ} — et que l'élément plan $E_{\gamma+1}$ soit défini par E_{γ} et un élément linéaire E_1 quelconque de E_q. $E_{\gamma+1}$ étant semi-régulier à droite jusqu'à l'indice q, il suit que les systèmes (6.3′) et $(\mathcal{T}'_{\gamma 2})$ nous donneront successivement une chaîne régulière jusqu'à E_q.

En effet, supposons, ce qui ne diminue pas la généralité, que $E_{\gamma+1}$ soit défini par

$$E_{\gamma} \text{ et } E_1^{(\gamma+1)}(\omega^1 = \omega^2 = \ldots = \omega^{\gamma} = 0, \ \omega^{\gamma+2} = \ldots = \omega^q = 0).$$

Nous savons que $E'_{\gamma+1}$ existe. D'autre part, les conditions

$$\varphi_{\nu}(x, l^{\sigma}_1, l^{\sigma}_2, \ldots, l^{\sigma}_{\gamma+1}) = 0$$

pour $E_{\gamma+1}$ ne sont pas autres que celles que nous avons eu pour E_γ, puisque de celles-là et des conditions $\mathfrak{C}_{\gamma 1}$, qui expriment que $E_1^{(\gamma+1)}$ est associé à E_γ, il suit que tout élément plan situé dans $E_{\gamma+1}$ est singulier (de ramification). Donc le système analogue à (9.2) et correspondant à $E_{\gamma+1}$, n'est que le même système (9.2)

TÉORÈME. – *E_q étant régulier entre les indices $\gamma+1$ et q, si E_γ a un prolongement E_γ' et si* (9·2) *sont compatibles avec $\mathfrak{C}'_{\gamma 2}$, alors les éléments de la chaîne régulière*

$$E_{\gamma+1} \subset E_{\gamma+2} \subset \dots \subset E_q$$

ont des prolongements, formant une chaîne régulière pour (Σ'). *Ces conditions sont aussi nécessaires pour l'existence du prolongement.*

4. *Cas* II. – Supposons maintenant que le système (9.2) implique, pour l'existence des solutions en $d_\varkappa l^\sigma_{\gamma+1}$, des relations en x, l, soit

$$\psi_\mu(x,\ l_1^\sigma,\ l_2^\sigma, \dots,\ l_q^\sigma) = 0. \tag{9.3}$$

Cela veut dire que les éléments q-plans intégraux de (Σ), qui admettent un prolongement dans (Σ') ne sont pas quelconques. Leurs coordonnées doivent vérifier, outre les équations des variétés A_q, encore les équations (9.3). Les E_q qui remplissent cette condition forment une sous-variété de A_q.

Les (9.3) peuvent d'ailleurs être compatibles entre elles (en tenant, bien entendu, compte aussi de $\mathfrak{C}_q$) en l^σ_α, ou bien peuvent impliquer des conditions en x.

Si on entend se limiter aux éléments plans de (Σ) qui vérifient les (9.3), alors, dans le prolongement, il faut considérer le système formé par par (Σ') et par (9.3) constuit pour tout γ de 0 à q). Le système ainsi obtenu n'est pas en général, fermé. Pour le fermer (v. § 4, no. 4) il faut lui ajouter encore les relations qu'on obtient en annulant les différentielles des Iers membres des (9.3). Le système ainsi obtenu soit désigné par (Σ_1').

5. (Σ_1') peut être de nouveau étudié de la même manière que (Σ'). D'abord, on peut trouver ses suites de variétés irréductibles d'éléments plans. Pour notre but, qui est d'étudier les q-prolongements des éléments plans intégraux de (Σ) dans (Σ'), il ne sera intéressant d'étudier que les suites qui aboutissent à des variétés d'éléments q-plans prolongements de E_q de (Σ), c'est-à-dire, (pour les formes ω^α que nous avons choisies) d'éléments q-plans (ω).

Il est possible que (Σ_1') n'admette pas, par chaque point intégral (de coordonnées x, l), des éléments q-plans (ω), mais qu'il en admette par certains points intégraux qui vérifient, outre le système (Σ_1') encore un autre système d'équations. Ou encore, que par les points, qui vérifient un certain système d'équations, il y ait des variétés d'éléments q-plans (ω), qui n'existent pas par chaque point intégral. Alors, tous ces systèmes d'équations représentent des variétés de points intégraux singuliers de notre système, et il faut les considérer comme au § 4 no. 3, c'est-à-dire régulariser le système. *A la fin on arrive, ou à des systèmes qui n'admettent pas d'éléments q-plans* (ω), *ou bien à d'autres qui n'admettent que des points intégraux réguliers et en chaque point un élément plan* (ω).

§ 10. - *Pseudo-caractères du système prolongé, sur une suite de variétés d'éléments plans intégraux. Remarques sur l'arbitrariété des éléments plans intégraux du système prolongé. Relations entre les coefficients l du prolongement: d'involution, supplémentaires, de compatibilité. Leur forme.*

1. Si les prolongements des éléments q-plans E_q de Σ ne sont pas réguliers, comme il a été supposé au § 8, alors il y a lieu de chercher les psedo-caractères du prolongement.

Considérons un $E_\gamma(\subset E_q$: v. no. 1, § 9) et supposons (Cas I, du § 9) que le système (9.2) soit compatible en $d_\varkappa l_\beta^\sigma$ (en tenant compte de ($\mathfrak{T}_{\gamma 2}'$)). Alors, ces équations constituent des conditions de singularité pour l'élément plan E_γ' du système prolongé. D'après les notations établies au § 2 no. 15, en désignant par $\rho'_{\gamma-1}$ le rang du système formé par le système polaire de $E_{\gamma-1}'$ (prolongement de $E_{\gamma-1}$) et par les conditions (9.2), on aura

$$\rho'_{\gamma-1} = r'_{\gamma-1}(E'_{\gamma-1}) + w'_{\gamma-1},$$

où $r'_{\gamma-1}(E'_{\gamma-1})$ est le rang du système polaire de $E'_{\gamma-1}$.

En cherchant ensuite l'expression de $r'_\gamma(E_\gamma')$, arrive à la formule (8.5). (Il est vrai que (8.5) avait été établie au § 8, où il s'agissait du cas sans système ($\mathfrak{T}'^{**}_{\gamma-1}$), mais cette hypothèse n'y entrait pas). Donc

$$\text{10.1)}\qquad \rho'_{\gamma-1} = \gamma(n-q) + (q-\gamma+1)\rho_{q-1} - \sigma_\gamma - 2\sigma_{\gamma+1} - \dots - (q-\gamma)\sigma_{q-1}) + \\ + w_\gamma + w_{\gamma+1} + \dots + w_{q-1} + w'_{\gamma-1}$$

et

$$\text{(10.2)}\qquad \sigma_\gamma' = \sigma_\gamma + \sigma_{\gamma+1} + \dots + \sigma_{q-1} - w_\gamma.$$

Le nombre de formes indépendantes, parmi les $\bar{\omega}_{\sigma\gamma}$ est σ_γ', comme nous l'avons vu au no. 7 § 3

2. Ces considérations peuvent étendues, de la même manière à des prolongements d'ordre quelconque.

Établissons d'abord un ordre entre les coefficients

$$l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\,\ldots\,\beta_{h-1}\beta_k} \quad (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \;\ldots \geq \beta_{k-1} \geq \beta_h)$$

des prolongements d'ordre h: Un coefficient $l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\,\ldots\,\beta_h}$ est dit *de rang plus petit* que ou *antérieur* à un autre $l^{\sigma'}_{\beta'_1\beta'_2\,\ldots\,\beta'_{h'}}$ si 1) $h < h'$ ou si 2) $h = h'$ et, pour un certain $\varkappa$ ($1 \leq \varkappa \leq h$ on a

$$\beta'_\varkappa > \beta_\varkappa, \quad \beta'_{\varkappa+1} = \beta_{\varkappa+1}, \quad \ldots, \quad \beta'_{h-1} = \beta_{h-1}, \quad \beta'_h = \beta_h .$$

Si tous les indices inférieurs sont respectivement égaux

$$\beta'_1 = \beta_1, \;\ldots, \;\beta'_h = \beta_h ,$$

le coefficient antérieur est celui dont l'indice supérieur est plus petit. On voit aisément que si

$$l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_h} \text{ ant. } l^{\sigma'}_{\beta_1\beta_{\prime 2}\ldots\beta'_{h'}} \quad \text{et} \quad l^{\sigma'}_{\beta_{\prime}\beta'_2\,\ldots\,\beta_{h'}} \text{ ant. } \beta^{\sigma''}_{\beta''_1\beta''_2\,\ldots\,\beta''_{h''}},$$

alors

$$l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\,\ldots\,\beta_h} \text{ ant. } l^{\sigma''}_{\beta''_1\beta''_2\,\beta''_{h''}}.$$

Si $l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\,\ldots\,\beta_h}$ est antérieur à $l^{\sigma'}_{\beta'_1\beta_{\prime 2}\,\ldots\,\beta'_{h'}}$, alors ce dernier sera dit *postérieur* au premier ou *de rang plus élevé.*

Si, de plus, tous les indices β sont plus petits que touts les indices β', nous dirons que $l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\,\ldots\,\beta_h}$ est *totalement antérieur* à $l^{\sigma'}_{\beta'_1\beta'_2\,\ldots\,\beta_{h'}}$.

3. D'après ce qu'on a vu au § 3 no. 9 et suiv. et au § 5 no. 9, 10, on peut amener le système prolongé (Σ') à la forme simplifiée ou simplifiée réduite. Cela revient à faire dans (Σ'), sur les équations (5.6'), ou dans (5.3), sur les équations $\theta_\sigma = 0$, ou encore sur les formes $\omega_{\sigma\alpha}$, une transformation linéaire d'après l'indice σ et éventuellement une transformation sur les formes ω^α.

Dans le cas particulier, ou les équations de (Σ) sont linéaires en $\bar{\omega}^\sigma$ (ce qui arrive p. ex. si le système (Σ) est lui-même quasi-normal), les relations $\mathcal{C}_q$ sont linéaires en l^{σ}_{α}. Il en résulte qu'à toute relations linéaire entre les $\bar{\omega}_{\sigma\alpha}$, il correspond une *relation linéaire entre les* l^{σ}_{α} (à coefficients fonctions de x).

Par suite des transformations mentionnées ci-dessus, vue l'expression (5.7) des $\bar{\omega}_{\sigma\gamma}$ en fonction de dl^{σ}_{γ}, on voit alors aisément que, parmi les l^{σ}_{γ} pour un γ donné, il y en a σ'_γ, d'indépendants entre eux et des $l^{\sigma}_{\gamma-1}$, $l^{\sigma}_{\gamma-2}, \ldots, l^{\sigma}_{1}$ et qu'ils ont l'indice σ, allant de 1 à σ'_γ. Les autres l^{σ}_{γ} dépendent seulement de $l^{\sigma}_{\gamma-1}$, $l^{\sigma}_{\gamma-2}, \ldots, l^{\sigma}_{1}$.

Si on passe au 2me prolongement, on voit qu'entre les $\bar{\omega}_{\sigma\gamma}$, il y a des relations, dont on peut déduire des relations entre les l^{α}_{β} qui, avec les les relations de symétrie $l^{\sigma}_{\alpha\beta} = l^{\sigma}_{\beta\alpha}$ (v. no. 12 et suiv. § 5) forment les relations $(\underset{(2)}{\mathcal{T}_q})$ — c'est-à-dire les relations qui correspondent à $(\mathcal{T}_q)$ dans le second prolongement. Ces relations se déduisent de $(\mathcal{T}'^{*}_{\gamma 1})$, $(\mathcal{T}'^{**}_{\gamma 1})$ et $(\mathcal{T}'_{\gamma 2})$ en tenant compte de (6.3') et de (5.15). Celles qui proviennent des relations $(\mathcal{T}^{*}_{\gamma 1})$ et $(\mathcal{T}'_{\gamma 2})$ pour toutes les valeurs de γ seront appelées *relations d'involution;* celles qu'on deduit de $(\mathcal{T}'^{**}_{\gamma 1})$ seront appelées *relations supplémentaires.*

β et γ étant donnés $(\beta \geq \gamma)$, si nous tenons compte seulement des relations d'involution, il reste parmi les $l^{\sigma}_{\beta\gamma}$ exactement σ'_{β} indépendantes entre elles et des précédentes. Cela résulte immédiatement des relations $(\mathcal{T}_q)$ entre $l^{\sigma}_{\beta\alpha}$, en tenant compte des relations entre les formes $\bar{\omega}_{\sigma\beta}$ ce qui, d'après (5.7) revient à des relations entre dl^{σ}_{β}, et enfin entre $d_{\gamma} l^{\sigma}_{\beta}$ ou $\bar{\omega}_{\sigma\beta}(d_{\gamma}) = l^{\sigma}_{\beta\gamma}$. Le fait d'avoir remplacé les formes $\bar{\omega}_{\sigma\gamma}$ par des combinaisons linéaires indépendantes d'après l'indice σ (en vue d'amener le système à la forme simplifiée) ne change, évidemment, pas cette conclusion).

Si on veut tenir compte aussi des relations supplémentaires, alors il faut observer que ces relations proviennent de (9.2) et qu'elles impliquent pour $l^{\sigma}_{\beta\gamma}$ un nombre de relations, que nous désignons par $w'_{\gamma-1,\,\beta}$, de manière que le nombre restant de valeurs $l^{\sigma}_{\beta\gamma}$ indépendantes entre elles et des valeurs antérieures, est $\sigma'_{\beta} - w'_{\gamma-1,\,\beta}$. On a

$$w'_{\gamma-1,\,\gamma} + w'_{\gamma-1,\,\gamma+1} + w'_{\gamma-1,\,\gamma+2} + \dots + w'_{\gamma-1,\,q} = w'_{\gamma-1}.$$

4. Supposons que les éléments plans (ω) de (Σ) soient réguliers entre $\gamma + 1$ et q, les E_{γ} (de E_q) étant singuliers de ramification. Supposons encore qu'on prolonge le système et que les relations supplémentaires soient compatibles.

Si le prolongement a été amené à la forme (normale) simplifiée (§ 3 nos. 9 et 10), alors, par suite des relations $(\mathcal{T}'^{*}_{\gamma 1})$ et $(\mathcal{T}'^{**}_{\gamma 1})$ (ces dernières sont les relations $\varphi_{\nu} = 0$ (v. § 9, no. 1))

1) les $\bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma}+1,\,\gamma}$, $\bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma}+2,\,\gamma}$, $\dots$, $\bar{\omega}_{n-q,\,\gamma}$ dépendent des $\bar{\omega}_{\sigma,\,\gamma-1}, \dots \bar{\omega}_{\sigma 1}$,

2) les $\bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma}+1,\,\beta}$, $\bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma}+2,\,\beta}$, $\dots$, $\bar{\omega}_{n-q,\,\beta}(\beta \geq \gamma + 1)$ sont fonctions des

$$\bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma+1}+1,\,\beta},\ \bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma+1}+2,\,\beta}, \dots, \bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma}\beta} \text{ et des } \bar{\omega}_{\sigma,\,\gamma-1}, \dots \bar{\omega}_{\sigma 1},$$

3) les $\bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma+1}+1,\,\beta}$, $\bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma+1}+2,\,\beta}$, $\dots$, $\bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma}\beta}$ sont fonctions des $\bar{\omega}_{\sigma\gamma}$, $\bar{\omega}_{\sigma\gamma}$, $\dots$ $\dots$, $\bar{\omega}_{\sigma 1}$, indépendantes en $\bar{\omega}_{1\gamma}$, $\bar{\omega}_{2\gamma}$, $\dots$, $\bar{\omega}_{\sigma_{\gamma}\gamma}$.

(D'après l'observation faite au no. 3 plus haut, il en résulte, au cas où les équations de (Σ) seraient linéaires en $\bar{\omega}^{\sigma}$, des relations linéaires en l^{σ}_{α}).

5. Cherchons maintenant le second prolongement et construisons, pour celui-ci, les relations supplémentaires. Pour cela il faut, comme nous l'avons vu (§ 9), remplacer dans $d_{\beta}\varphi_{\nu}$, les quantités $d_{\beta}l^{\sigma}_{\gamma}$, $d_{\beta}l^{\sigma}_{\gamma-1}, \ldots d_{\beta}l^{\sigma}_{1}$ resp. par $d_{\gamma}l^{\sigma}_{\beta}$, $d_{\gamma-1}l^{\sigma}_{\beta}$, ..., $d_{1}l^{\sigma}_{\beta}$, ce qui revient à remplacer

$$\bar{\omega}_{\sigma\gamma}(d_{\beta}),\ \bar{\omega}_{\sigma,\,\gamma-1}(d_{\beta}),\ \ldots,\ \bar{\omega}_{\sigma 1}(d_{\beta})$$

resp. par

$$\bar{\omega}_{\sigma\beta}(d_{\gamma}),\ \ \bar{\omega}_{\sigma\beta}(d_{\gamma-1}),\ \ldots,\ \bar{\omega}_{\sigma\beta}(d_{1})$$

à l'aide de (6.3'). $\varphi_{\nu}=0$ étant $w_{\gamma-1}$ relations indépendantes en l^{σ}_{γ}, cela nous donne un système de $w_{\gamma-1}$ relations indépendantes et on ne diminue pas la généralité en supposant qu'elles peuvent être résolues par rapport à

$$\bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma}+1,\ \beta}(d_{\gamma}),\ \bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma}+2,\ \beta}(d_{\gamma}),\ \ldots,\ \bar{\omega}_{\sigma'_{\gamma}+w_{\gamma-1},\ \beta}(d_{\gamma}).$$

Or, d'après l'arrangement fait plus haut, tous les $\bar{\omega}_{\sigma\beta}(d_{\gamma})(\sigma > \sigma'_{\gamma})$ s'expriment linéairement à l'aide des

$$\bar{\omega}_{\sigma''\beta}(d_{\gamma})\ \ (\sigma'_{\gamma+1} < \sigma'' \leq \sigma'_{\gamma})$$

et des

$$\bar{\omega}_{\sigma 1}(d_{\gamma}),\ \ldots,\ \bar{\omega}_{\sigma,\gamma-1}(d_{\gamma}).$$

À leur tour, les $\bar{\omega}_{\sigma''\beta}(d_{\gamma})$ s'expriment à l'aide des $\bar{\omega}_{\sigma 1}(d_{\gamma}), \ldots, \bar{\omega}_{\sigma,\,\gamma-1}(d_{\gamma})$ et des $\bar{\omega}_{\sigma\gamma}(d_{\gamma})$. En écrivant maintenant $l^{\sigma}_{\alpha\alpha'}$ au lieu de $\bar{\omega}_{\sigma\alpha}(d_{\alpha'})$ et en remplaçant tout dans les relations supplémentaires, celles-ci deviennent des relations en $l^{\sigma}_{\gamma\gamma}$ et les $l^{\sigma}_{\alpha\alpha'}$ totalement antérieurs. Parmi ces relations supplémentaires, celles qui contiennent effectivement $l^{\sigma}_{\gamma\gamma}$ (et sont indépendantes des relations d'involution) sont au nombre d'au plus $w_{\gamma-1}$ pour chaque β. Il peut y en avoir qui contiennent seulement des $l^{\sigma}_{\alpha\alpha'}$ totalement antérieurs aux $l^{\sigma}_{\gamma\gamma}$.

Théorème. - *Si le système admet des éléments plans* (ω) *réguliers entre* $\gamma+1$ *et* q *et si les relations supplémentaires du* $II-e$ *prolongement sont compatibles avec les relations d'involution, alors les relations supplémentaires se réduisent à des relations en* $l^{\sigma}_{\gamma\gamma}$ *et des variables totalement antérieures à celles-ci.*

Si le système prolongé a été mis sous forme simplifiée réduite (§ 3 no. 13), on voit tout de suite le

THÉORÈME. – *Les relations supplémentaires entre $l^{\sigma}_{\gamma\gamma}$ impliquent seulement les variables $l^{\rho}_{\gamma\gamma}(\sigma_{\gamma+1} \leq \rho_1 \leq \rho \leq \sigma_\gamma)$ pour une certaine valeur de ρ_1 et les variables totalement antérieures à $l^{\sigma}_{\gamma\gamma}$.*

6. Rappelons que le I[er] prolongement a été obtenu en considérant une variété A_q de q-plans (ω) semi-réguliers de (Σ), plus précisément, d'une branche régularisée de (Σ).

Si on prolonge encore une fois, il faut remarquer que certains points de (Σ') (de coordonnées x, l) peuvent être singuliers et qu'il faudrait régulariser ce système. Cela veut dire ajouter à (Σ') des équations finies (en x, l) (v § 4, no. 3). Nous examinerons plus tard cette operation. Pour le moment, nous considérons seulement les points de $(\Sigma')(x, l)$ où le rang du système en $l^{\sigma}_{\gamma\gamma}$ est maximum, (l'élément plan E_γ étant un élément plan générique, contenu dans un élément q-plan générique E_q de A_q).

7. Si on passe maintenant au prolongement suivant, on deduira (par le même moyen que nous avons employé pour le 2[me] prolongement) des relations supplémentaires en $l^{\sigma}_{\gamma\gamma}$ (au nombre de $\sigma'_\gamma - w'_{\gamma-1}$ indépendantes) des relations en $d_\beta l^{\sigma}_{\gamma\gamma}(\beta > \gamma)$ ou encore en $\bar\omega_{\sigma\gamma\gamma}(d_\beta)$. Mais, d'après le résultat du no. 14, § 5, il suit d'ici des relations en $\bar\omega_{\sigma\gamma\beta}(d_\gamma)$ qui seront les nouvelles relations supplémentaires.

Supposons qu'elles soient toujours compatibles en $\bar\omega_{\sigma\gamma\beta}(d_\gamma)$. Du fait que les $\bar\omega_{\rho\gamma\beta}$ sont fonction des $l^{\sigma}_{\gamma\gamma}$ (v. plus haut no. 5), il suit que les relations supplémentaires en $\bar\omega_{\sigma\gamma\beta}(d_\gamma)$ se transforment en relations en $\bar\omega_{\sigma\gamma\gamma}(d_\gamma)$) ou bien en $l^{\sigma}_{\gamma\gamma\gamma}$.

De plus, on voit aisément que ces relations impliquent seulement les $l^{\rho}_{\gamma\gamma\gamma}(\rho_1 \leq \rho \leq \sigma_\gamma)$ et des variables totalement antériures aux $l^{\sigma}_{\gamma\gamma\gamma}$.

8. Ce raisonnement peut être continué tant que les relations supplémentaires sont compatibles. Ces relations supplémentaires impliquent d'abord $w_{\gamma-1}$ — relations entre l^{σ}_{γ}, ensuite $w'_{\gamma-1}$ relations entre $l^{\sigma}_{\gamma\gamma}$ etc. Si on est arrivé, dans le prolongement d'un certain ordre h à un $w^{(h-1)}_{\gamma-1} = 0$, alors, dans ce prolongement les éléments intégraux p-plans (ω) sont réguliers entre un indice inférieur à $\gamma + 1$ et q. D'autre part le nombre de relations supplémentaires $w^{(h-1)}_{\gamma-1}$ ne peut pas être toujours positif, puisque, après le h-ième prolongement le nombre de variables $l^{\sigma}_{\gamma\gamma\,\ldots\,\gamma}$ restées indépendantes est $\rho_1 - w'_{\gamma-1} - w''_{\gamma-1} - \ldots - w^{(h-1)}_{\gamma-1}$. On arrivera donc certainement ou 1) à un système en involution ou 2) à un système dont les éléments q-plans (ω) sont réguliers entre un nombre inférieur à $\gamma + 1$ et q ou encore 3) à un système où on est dans le cas II, c'est-à-dire tel que le système (9.2) n'est compatible que s'il y a des conditions (9.3).

Dans la deuxième de ces éventualités, on peut d'ailleurs continuer le prolongement et on arrive à l'une des autres.

THÉORÈME. – *En prolongeant successivament* (ω) *un système différentiel extérieur, on arrive ou à un système en involution, ou bien à un système dont les relations supplémentaires ne sont pas compatibles.*

9. Supposons qu'on soit dans *le cas* II. Plus généralement, supposons qu'on soit arrivé au h-ième prolongement, de la manière décrite plus haut et qu'après un ou plusieurs prolongements de plus, on soit arrivé, en éliminant les $l^{\sigma}_{\gamma\gamma\,\ldots\,\gamma}$, des relations supplémentaires, à des relations entre les coefficients $l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\,\ldots\,\beta_h}$ et les coefficients à moins de h indices inférieurs et les variables x. Ces relations seront appelées *relations de compatibilité.* Elles forment un système algébrique qui se décompose en général en un certain nombre de systèmes irréductibles.

Considérons le système des relations d'involution et des relations supplémentaires de $(\Sigma^{(h)})$, supposé résolu par rapport au plus grand nombre possible de variables $l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\,\ldots\,\beta_h}$ et du rang le plus élevé possible. Ajoutons ensuite un système — soit (C^*) — irréductible de relations de compatibilité remplaçons dans celui-ci les solutions trouvées ci-dessus et ensuite résolvons et ensuite résolvons le système par rapport au plus grand nombre possible de variables $l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\,\ldots\,\beta_h}$, du plus grand rang possible.

Soit C le système ainsi trouvé.

10. Supposons qu'il y ait un nombre de variétés A_q d'éléments q-plans (ω) de $(\Sigma_1^{(h)})$ (v. § q, no. 4) et considérons une d'entre elles.

On peut construire une chaîne générique d'éléments plans contenus dans un élément q-plan de A_q, de la même manière que nous l'avons fait pour le système $(\Sigma^{(h)})$. Pour la construction d'un élément linéaire associé à un E_γ donné, on a à considérer le système (6.3′) (ou, plus précisément, le système qui lui correspond dans notre $(\Sigma_1^{(h)})$, avec $l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\,\ldots\,\beta_h}$) et le système qu'on obtient des relations supplémentaires et des relations de compatibilité. Cela nous donne de nouveaux éléments plans singuliers de ramification.

Remarquons encore qu'en faisant une transformation linéaire sur les formes ω et une autre entre les équations de (Σ), les coefficients changent et les relations de compatibilité, comme celles de singularité et celles d'involution se transforment. Si la transformation est faite de manière que la chaîne de coordonnées reste générique, alors les relations d'involution et celles supplémentaires gardent la propriété de laisser indépendantes les variables l aux mêmes indices et de pouvoir être résolues par rapport aux mêmes variables l qu'avant la transformation.

Il est possible qu'après une telle transformation, le système (C^*) soit résoluble par rapport à des variables l, de rang plus élevé qu'avant la transformation.

Il est clair que nous pouvons supposer avoir transformé, dès le début, le système de manière qu'une nouvelle transformation quelconque n'amène pas de changement du système (C), de ce point de vue.

11. Soient

$$l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{h-1}\varepsilon} = f^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{h-1}\varepsilon}(l, x) \quad (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_{h-1} \geq \varepsilon) \tag{10.3}$$

(pour certaines valeurs des σ et des β, ε) une partie des relations de compatibilité, résolues par rapport aux l dont le dernier indice inférieur — ε — est le plus grand possible. Nous allons montrer que tous les indices inférieurs dans (10.3) sont égaux à ε.

Supposons en effet que — dans ces équations (10.3), avec ε fixé et le plus grand de tous — on en considère celles dans lesquelles β_{h-1} est le plus grand; ceux-ci, celles dans lesquelles β_{h-2} est le plus grand, etc. On peut supposer sans restreindre la généralité que, par suite des relations d'involution, supplémentaires et de compatibilité, les $l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{h-1}\varepsilon}$ choisis de cette manière avec $\sigma = 1, 2, \ldots \varkappa_1$ sont indépendants entre eux et des l antérieurs et que, dans (10.3), (pour les valeurs fixées des β) l'indice σ va de $\varkappa_1 + 1$ à $\varkappa_2$. Les relations d'involution et supplémentaires lient les

$$l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{h-1}\varepsilon}$$

($\sigma > \varkappa_2$) aux variables antérieures.

Tous les l postérieurs à ceux des premiers membres de (10.3) sont soumis seulement aux relations d'involution et supplémentaires. On déduit que, si on ne considère que ces relations, les $l^{\sigma}_{\beta_1\ldots\beta_{h-1}\varepsilon}$ avec $\sigma = 1, 2, \ldots, \varkappa_2$ sont indépendants entre eux et des antérieurs. En effet, s'il y avait une relation entre elles et les l^{σ}_{α} antérieurs, cette relation nous en donnerait une entre les $l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{h-1}\varepsilon}$ et les antérieurs, outre les relations de compatibilité.

Supposons encore que

$$\beta_{h-1} = \beta_{h-2} = \ldots = \beta_{k+1} = \varepsilon,$$

les

$$\beta_k, \ldots, \beta_1$$

étant plus grands que ε et faisons la substitution

$$\omega^{\beta_1} = \omega^{*\beta_1} + \alpha\omega^{\varepsilon}.$$

Il est clair que, par cette substitution, en tenant compte des relations d'involution et supplémentaires, les nouvelles variables $l^{*\sigma}_{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{h-1}\varepsilon}$ s'expriment comme combinaisons linéaires des

$$l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_k\varepsilon\varepsilon \ldots \varepsilon}, \quad l^{\sigma}_{\beta_1\beta_1\beta_2 \ldots \beta_k\varepsilon\varepsilon \ldots \varepsilon}, \quad l^{\sigma}_{\beta_1\beta_1\beta_1\beta_2 \ldots \beta_k\varepsilon \ldots \varepsilon}, \ldots, \quad l^{\sigma}_{\beta_1\beta_1\beta_1 \ldots \beta_1\beta_2 \ldots \beta_k}$$

(chacun de ces coefficients ayant h indices inférieurs) et d'expressions impliquant des variables antérieures. Or, toutes ces variables sont indépendantes entre elles, en vertu des relations d'involution, supplémentaires et de compatibilité et il en résulte que $l^{*\sigma}_{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{h-1}\varepsilon}$ avec $\sigma = \varkappa_1 + 1, \ldots, \varkappa_2$ deviennent indépendants des précédents. D'ailleurs, les relations (10.3), dans ce cas, deviennent des relations contenant des l postérieurs à $l^{\sigma}_{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{h-1}\varepsilon}$, ce qui, d'après l'opération faite au no. précédent, est impossible.

On en conclut que les relations de compatibilité d'ordre le plus élevé sont de la forme

$$l^{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon \ldots \varepsilon} = f^{\sigma}_{\varepsilon}(l, x), \tag{10.4}$$

avec

$$\sigma = \varkappa_1 + 1,\ \varkappa_1 + 2,\ \ldots,\ \varkappa_2$$

Il s'ensuit que, au nombre de relations $w^{(h-1)}_{\varepsilon-1}$, il faut ajouter le nombre obtenu plus haut, soit $w^{(h-1)}_{\varepsilon-1}$ $(= \varkappa_2 - \varkappa_1)$ et le pseudo-caractère $\sigma^{(h)}_{\varepsilon}$ est diminué de ce nombre.

12. Cherchons maintenant les prolongements dans $(\Sigma^{(h)})$ des éléments plans de (Σ), qui appartiennent à $(\Sigma_1^{(h)})$, c'est-à-dire les éléments q-plans (ω) de $(\Sigma_1^{(h)})$. La méthode à suivre est la même que celle suivie pour $(\Sigma^{(h)})$, c'est-à-dire de chercher successivement, les éléments d'une chaîne d'éléments plans contenus dans un E_q intégral. Cela nous donnera aussi les éléments plans singuliers de ramification.

Soit γ la plus grande dimension d'un élément plan (ω) de ramification de $(\Sigma^{(h)})$. Il est clair que, si $\gamma < \varepsilon$, il y aura, en général, des éléments ε-plans singuliers de ramification de (Σ_1), qu'on obtient par la méthode employée plus haut, pour le cas où il s'agissait des prolongements de γ-plans singuliers de ramification. D'ailleurs, de ce que nous avons montré plus haut, les relations de singularité, qui suivent des relations (10.4) de compatibilité, ont la même forme, que si elles suivaient de relations supplémentaires.

Si $\gamma = \varepsilon$, on peut en dire autant, seulement que, au nombre $w^{(h-1)}_{\gamma-1}$ de relations supplémentaires il faut en ajouter $w_{\gamma-1}^{*(h-1)}$, qui proviennent des ralations de compatibilité (10.4).

Dès lors, il suit qu'on peut procéder pour le système $(\Sigma_1^{(h)})$ comme pour le système $(\Sigma^{(h)})$.

Si $\gamma > \varepsilon$, alors les relations de compatibilité ne changent pas les opérations, que nous avons décrites plus haut, pour le prolongement des élements plans singuliers de ramification de dimensions la plus élévée.

13. Rapportons nous maintenant à la remarque faite au no. 6, plus haut. Il est possible que les équations qui donnent les relations supplémentaires, pour un prolongement d'ordre plus grand que h, deviennent singulières pour certains points du prolongement d'ordre h, qui satisfont à un certain système d'équations. Ce système sera appelé, lui aussi, système d'équations de compatibilité.

On peut alors procéder avec ce système, de la même manière que nous l'avons fait plus haut, et on arrive aux mêmes conclusions. Mais nous n'allons pas le faire ici, puisque ce serait répéter les mêmes choses.

§ 11. - *Prolongement des éléments plans intégraux caractéristiques.*

1. Soit maintenant un élément plan intégral (ω) E_q semi-régulier entre $\gamma+1$ et q et considérons dans E_q une chaîne générique de coordonnées.

Supposons que le prolongement (dans (Σ')) d'un élément q-plan (ω) de A_q, semi-régulier, existe et soit E'_q ce prolongement. Supposons qu'on soit dans le premier cas étudié plus haut, où il n'y a pas de relations de compatibilité pour les éléments plans prolongés. Nous allons démontrer le

THÉORÈME. - *Dans ces hypothèses, le prolongement d'un élément k-plan caractéristique* $(k > \gamma)$ *est un élément k-plan caractéristique.*

Supposons que E_k soit formé par $E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, \ldots, E_1^{(k)}$ et soit E'_k son prolongement, formé par $E_1'^{(1)}, E_1'^{(2)}, \ldots, E_1'^{(k)}$.

E_k se trouve sur la variété A_k des k-plans situés sur les E_q et les γ-plans qu'il contient sont singuliers de ramification. Il s'ensuit, par le même raisonnement qu'on a fait au § 6 no. 8, que, pour un élément linéaire $E_1^{(k+1)}$ associé à E_k, il n'y a pas de relations $(\mathfrak{T}_{k1}^{**})$. Par suite, $E_1^{(k+1)}$ est donné seulement par les équations (6.3') et $(\mathfrak{T}_{k2})$.

Le rang de (6.3') est évidemment constant quand E_k varie. Occupons-nous de $(\mathfrak{T}'_{k2})$. Et pour cela, d'abord de $(\mathfrak{T}_{k2})$.

2. Écrivons la condition pour qu'un élément linéaire $E_1(\delta)$ soit associé à un élément plan integral E_β de (Σ). Ce sont des conditions linéaires, de la forme

$$(11.1) \qquad A_{\rho\sigma}(E_\beta)\,\bar{\omega}^\sigma(\delta) + B_{\rho\alpha}(E_\beta)\,\omega^\alpha(\delta) = 0,$$

où ρ varie de 1 à $r_\beta(E_\beta)$. Pour trouver les relations $\mathcal{C}_{k2}$ il faut exprimer, à l'aide de (11.1), que l'élément linéaire $E_1^{(k+1)}$

$$\omega^1(d_{k+1}) = \dots = \omega^k(d_{k+1}) = 0, \quad \omega^{k+1}(d_{k+1}) = 1, \quad \omega^{k+2}(d_{k+1}) = \omega^q(d_{k+1}) = 0$$
$$\bar{\omega}^\sigma(d_{k+1}) = l_{\sigma,\,k+1}$$

est associé à E_k, ce qui revient à un système linéaire de la forme

$$(11.2) \qquad A^{(1)}_{\rho_1\sigma} l^\sigma_{k+1} + B^{(1)}_{\rho_1,\,k+1} \qquad (\rho_1 = 1, 2 \dots, r_k),$$

où $A_{\rho_1\sigma}$, $B_{\rho_1\sigma,k+1}$ dépendent de x et de $l_1^\sigma, \dots, l_k^\sigma$, c'est-à-dire de E_k; ensuite, que l'élément linéaire $E_1^{(k+2)}$

$$\omega^1(d_{k+2}) = \dots = \omega^{k+1}(d_{k+2}) = 0, \ \omega^{k+2}(d_{k+2}) = 1, \ \omega^{k+3}(d_{k+2}) = \dots = \omega^q(d_{k+2}) = 0$$
$$\bar{\omega}^\sigma(d_{k+2}) = l^\sigma_{k+2}$$

est associé à $E_{k+1} = E_1^{(k+1)} \times E_k$, c'est-à-dire un système de la forme

$$(11.3) \qquad A^{(2)}_{\rho_2\sigma} l^\sigma_{k+2} + B^{(2)}_{\rho_2,\,k+2} = 0 \qquad (\rho_2 = 1, 2, \dots, r_{k+1});$$

... ensuite, que l'élément linéaire $E_1^{(k+1)}$

$$\omega^1(d_{k+t}) = \dots \omega^{k+t-1}(d_{k+t}), \ \omega^{k+t}(d_{k+t}) = 1, \ \omega^{k+t+1}(d_{k+t}) = \dots = \omega^q(d_{k+t}) = 0,$$
$$\omega^\sigma(d_{k+t}) = l^\sigma_{k+t}$$

est associé à $E_{k+t-1} = E_1^{(k+t-1)} \times E_{k+t-2}$, c'est-à-dire un système de la forme

$$(11.4) \qquad A^{(t)}_{\rho_t\sigma} l^\sigma_{k+t} + B^{(t)}_{\rho_t,\,k+t} = 0 \qquad (\rho_t = 1, 2, \dots, r_{k+t-1};\ t = 1, 2, \dots, q-k).$$

3. E_k est, par hypothèse, caractéristique (de première ou de deuxième espèce). Supposons qu'il en soit de même pour tous les éléments $(k+1)$-plans, pour tous les élements $(k+2)$-plans, ... pour tous les éléments $(k+h-1)$-plans contenus dans E_q et passant par E_k, tandis qu'il y a dans E_q un E_{k+h} régulier à droite $(k+h \leq q)$. Cette hypothèse est justifiée par le fait que E_q est semi-régulier.

Alors, les systèmes (11.2), (11.3), ... (11.4) sont compatibles et leurs rangs sont respectivement

$$r_k(E_k),\ r_{k+1}(E_{k+1}),\ \dots,\ r_{k+h-1}(E_{k+h-1}).$$

Cela résulte du fait que le système (11.1) (pour

$$\beta = k,\ k+1,\ \dots,\ k+h-1)$$

est de rang $r_\beta(E_\beta)$ et qu'il laisse indépendantes les variables $\omega(\delta)$. D'après nos hypothèses, on a

$$(11.5) \qquad r_k(E_k) \leq r_k,\ \dots,\ r_{k+h-2}(E_{k+h-2}) \leq r_{k+h-2},\ r_{k+h-1}(E_{k+h-1}) < r_{k+h-1}$$

et pour des éléments k-plans, $(k+1)$-plans ... voisins de E_k, E_{k+1}, ... les rangs des systèmes polaires changent.

Cela veut dire qu'il y a des relations

$$(11.6) \qquad \begin{cases} H^{(1)}_{c_1\rho_1} A^{(1)}_{\rho_1\sigma} = 0,\ \dots,\ H^{(h)}_{c_h\rho_h} A^{(h)}_{\rho_h\sigma} = 0, \\ H^{(1)}_{c_1\rho_1} B^{(1)}_{\rho_1 k+1} = 0,\ \dots,\ H^{(h)}_{c_h\rho_h} B^{(h)}_{\rho_h,\ k+h} = 0, \end{cases}$$

dont les coefficients $H^{(1)}_{c_2\rho_1}$, $H^{(2)}_{\rho_2\rho_2}$, ..., $H^{(h)}_{c_h\rho_h}$ dépendent resp. de E_k, E_{k+1}, ... E_{k+h-1}.

A une variation de E_q sur A_q, (11.2), ..., (11.4) restent vérifiées; on aura donc

$$(11.7) \qquad \begin{cases} A^{(1)}_{\rho_1\sigma}\delta l^\sigma_{k+1} + l^\sigma_{k+1}\delta A^{(1)}_{\rho_1\sigma} + \delta B^{(1)}_{\rho_1,\ k+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^{(t)}_{\rho_t\sigma}\delta l^\sigma_{k+t} + l^\sigma_{k+t}\delta A^{(t)}_{\rho_t\sigma} + \delta B^{(t)}_{\rho_t,\ k+t} = 0 \quad (t = 1,\ 2,\ \dots,\ q-k). \end{cases}$$

Par suite de (11.6), on aura donc aussi

$$(11.8) \qquad \begin{cases} (a_1)\ H^{(1)}_{c_1\rho_1} l^\sigma_{k+1}\delta A^{(1)}_{c_1\sigma} + H^{(1)}_{c_1\rho_1}\delta B^{(1)}_{\rho_1,\ k+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_h)\ H^{(h)}_{c_h\rho_h} l^\sigma_{h+h}\delta A^{(h)}_{\rho_h\sigma} + H^{(h)}_{c_h\rho_h}\delta B^{(h)}_{\rho_h,\ k+h} = 0. \end{cases}$$

4. Cherchons maintenant le rang du système polaire de E'_k. On voit tout d'abord, que le système (11.7) a le rang

$$r_k(E_k) + r_{k+1}(E_{k+1}) + \dots + r_{k+h-1}(E_{k+h-1}) + r_{k+h} + \dots + r_{q-1}$$

et il faut lui ajouter le système (6.3′) de rang $k(n-q)$ et le système (5.2), de rang $n-q$. Donc en tout, pour le moment, nous avons

$$(11.9)\qquad N_1 = (k+1)(n-q) + r_k(E_k) + \dots + r_{k+h-1}(E_{k+h-1}) + r_{k+h} + \dots + r_{q-1}$$

équations indépendantes, pour le système polaire de E_k.

Mais il y a encore les relations (11.8). Remarquons que dans (11.6), on peut supposer que

c_1 prend $r_k - r_k(E_k)$ valeurs, soit $c_1 = 1, 2, \dots, r_k - r_k(E_k)$,

c_2 prend $r_{k+1} - r_{k+1}(E_{k+1})$ valeurs, soit $c_2 = 1, 2, \dots, r_{k+1} - r_{k+1}(E_{k+1})$,

. . . .

c_h prend $r_{k+h-1} - r_{k+h-1}(E_{k+h-1})$ valeurs, soit $c_h = 1, 2, \dots, r_{k+h-1} - r_{k+h-1}(E_{k+h-2})$.

Ce sont donc les mêmes valeurs, que ces indices prennent dans (11.8).

5. Remarquons encore que, dans (11.8, a_1), interviennent les différentielles δx et $\delta l_1^\sigma, \delta l_2^\sigma, \dots, \delta l_k^\sigma$, donc, par suite de (6.3″) $d_1 l_\alpha^\sigma, d_2 l_\alpha^\sigma, \dots, d_k l_\alpha^\sigma$, c'est-à-dire le prolongement, supposé connu, E_k' de E_k.

Ensuite, dans (11.8, a_2), interviennent, outre ces quantités, encore δl_{k+1}^σ. Le nombre de relations, indépendantes entre elles et de (11.7), en ces dernières quantités, soit désigné par $\mu_{2,k+1}$.

Ce raisonnement peut être continué. Des relations (11.8 a_3), on peut déduire un nombre de relations, dans lesquelles n'interviennent que $\delta l_1^\sigma, \delta l_2^\sigma, \dots, \delta l_k^\sigma$, d'autres, dans lesquelles interviennent δl_{k+1}^σ, sans qu'interviennent $\delta l_{k+2}^\sigma, \dots$, enfin d'autres, dans lesquelles interviennent ces dernières, ... Des relations (11.8, a_m), on peut déduire:

1) des relations dans lesquelles interviennent seulement $\delta l_1^\sigma, \dots, \delta l_k^\sigma$,

2) des relations dans lesquelles interviennent les variables précédentes et δl_{k+1}^σ; soit $\mu_{m,k+1}$ le nombre de relations en δl_{k+1}^σ indépendantes entre elles et de celles qu'on a obtenues de (11.7) et de (11.8, a_2) ... (11.8, a_{m-1}), entre $\delta l_1^\sigma, \delta l_2^\sigma, \dots, \delta l_{k+1}^\sigma$,

3) des relations dans lesquelles interviennent les précédentes et δl_{k+2}^σ; soit $\mu_{m,k+2}$ le nombre de relations en δl_{k+2}^σ indépendantes entre elles et de celles qu'on a obtenues de (11.7) et de (11.8, a_3) ... (11.8, a_{m-1}), entre $\delta l_1^\sigma, \delta l_2^\sigma, \dots, \delta l_{k+2}^\sigma, \dots$,

m) des relations dans lesquelles interviennent les précédentes et δl_{k+m-1}^σ; soit $\mu_{m,k+m-1}$ le nombre de relations indépendantes entre elles et de celles qu'on a obtenues entre $\delta l_1^\sigma, \delta l_2^\sigma, \dots, \delta l_{k+m-1}^\sigma, \dots$.

Si $h = 1$, alors les relations 2) ... n'existent pas. Si $h \geq 2$ alors $m = 2, 3, \dots, h$.

6. Le rang du système polaire de E'_k est

$$
\begin{aligned}
N = N_1 + \mu_{2,\, k+1} + \mu_{3,\, k+1} + \dots + \mu_{h,\, k+1} & + \\
\mu_{3,\, k+2} + \dots + \mu_{h,\, k+2} & + \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\mu_{h,\, k+h-1} & .
\end{aligned}
\tag{11.10}
$$

D'autre part, vu que nnus avons pris les éléments plans de la chaîne

$$E_{k+1} \subset E_{k+2} \subset \dots \subset E_{k+h}$$

avec la seule condition d'être situés sur un E_q générique de A_q, il suit que les éléments linéaires

$$E_1^{(k+1)},\ E_1^{(k+2)},\ E_1^{(k+h)},$$

qui, avec E_k, forment cette chaîne, ne sont soumis qu'à la condition d'être, chacun, associé à l'élément plan formé par les précédents avec E_k et, par suite, las relations (11.8) ne donnent aucune nouvelle relation en

$$\delta l^\sigma_{k+1},\ \delta l^\sigma_{k+2},\ \dots,\ \delta l^\sigma_{\sigma+h},$$

c'est-à-dire qu'on a

$$
\begin{aligned}
\mu_{2,\, k+1} + \mu_{3,\, k+1} + \dots + \mu_{h,\, k+1} &= 0 \\
\mu_{3,\, k+2} + \dots + \mu_{4,\, k+2} &= 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\mu_{h,\, k+h} &= 0.
\end{aligned}
$$

On en déduit pour le rang du système polaire de E'_k

$$\rho'_k = N_1,$$

ou bien

$$\rho'_k = (k+1)(n-q) + r_k + r_{k+1} + \dots + r_{q-1} -$$

$$-(r_k - r_k(E_k)) - \dots - (r_{k+h-1} - r_{k+h-1}(E_{k+h-1}))$$

et, puisque

$$r_{k+1} = r_k + s_{k+1}\,,\ \dots,\ r_{q-1} = r_{q-2} + s_{q-1}\,,$$

on obtient

$$r_k + r_{k+1} + \dots + r_{q-1} = (q-k)r_{q-1} - s_{k+1} - 2s_{k+2} - \dots - (q-k-1)s_{q-1}$$

et. par suite de (8.2),

$$\rho'_k = r'_k - (r_k - r_k(E_k)) - \dots - (r_{k+h-1} - (r_{k+h-1}(E_{k+h-1})). \tag{11.11}$$

On en conclut te théorème énoncé au no. 1 et plus précisément, le

THÉORÈME. - *Étant donné le q-prolongement* (Σ') *de* (Σ), *supposé sans relations de compatibilité, et, dans un q-plan de* (Σ) *régulier entre* $k+1$ *et* q, *un élément k-plan* E_k *caractéristique de première ou de seconde espèce, le prolongement* E'_k *de* E_k *est caractéristique de première espèce; son degré de singularité est au moins le degré de singularité de* E_k *si celui-ci est de première espèce. En désignant par* $k+h$ *la dimension la plus petite d'un élément plan de* (Σ) *situé sur un* $E_q(\omega)$, *contenant* E_k *et régulier à droite, le degré de singularité de* E'_k *est est égal à la somme des degrés de singularité des éléments plans d'une chaîne générique d'éléments plans intégraux contenant* E_k

$$E_k \subset E_{k+1} \subset \dots \subset E_{k+h-1}.$$

7. Considérons un système normal (Σ') (qui peut être le prolongement de (Σ)) et formons le système polaire d'un élément plan E'_k de coordonnées (prolongement de E_k). Les équations de ce système sont (outre celles qui proviennent des équations de PFAFF de Σ)

$$\bar\omega_{\sigma\gamma}(\delta) - \bar\omega_{\sigma\alpha}(d_\gamma)\omega_\alpha(\delta) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, q;\ \gamma = 1, 2, \dots, k) \tag{11.12}$$

Si E'_k est caractéristique, alors, parmi les formes $\bar\omega_{\sigma\alpha}$, il y a moins de r_k indépendantes et il en résulte des conditions, que doivent vérifier les $\bar\omega_{\sigma\alpha}(d_\gamma)$ pour $\alpha > k$, c'est-à-dire des conditions en $l^\sigma_{\gamma\alpha}$, ou bien en $l^\sigma_{\alpha\gamma}$, qui appartiennent à $\mathcal{C}'^{**}_{k1}$) (v. § 6 no. 4).

Remarquons que, parmi ces relations, il peut y en avoir qui contiennent seulement des $l^{\sigma}_{\gamma\gamma'}(\gamma, \gamma' \leq k)$. Cela veut dire que, si on considère les k-prolongements successifs $(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k)$ de (Σ'), les prolongements des éléments k-plans de (Σ') ne sont pas nécessairement contenus dans des prolongements q-plans de (Σ').

8. Nous appellerons élément k-plan caractéristique *simple relatif à un q-prolongement* $(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^q)$, un élément k-plan E_k caractéristique $(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k)$ tel que son k-prolongement soit contenu dans un q-prolongement d'un élément q-plan (ω) E_q contenant E_k.

Nous appellerons *caractéristique régulier* un élément k-plan caractéristique de Σ qui contient un élément $(k-1)$-plan régulier et est contenu dans un élément $(k+1)$-plan régulier.

Il est facile, en utilisant les résultats du no. 8, d'établir le

Théorème - *Le prolongement d'un élément plan caractéristique simple (dans un q-prolongement donné* (ω) *de* (Σ)) *est un élément plan caractéristique simple.*

Chapitre III.

Théorèmes concernant les variétés intégrales.

§ 12. - *Démonstration complète du théorème du prolongement, de E. Cartan.*

1. Considérons un voisinage d'éléments plans E_q d'un système différentiel extérieur analytique (Σ) et ses q-prolongements successifs. On a constaté au § 10 que, après un nombre fini de prolongements, si on n'a pas obtenu un système en involution, on arrive nécessairemeut à un prolongement, qui admet un système de relations de compatibilité. Ce système se décompose en un nombre fini de systèmes irréductibles, et dans chacun de ces derniers, les équations du degré le plus élevé ont la forme (10.4). Chacun de ces systèmes peut être prolongé de nouveau et, en partant du système donné (Σ), après un certain nombre N de prolongements, en considérant (chaque fois que les relations de compatibilité se décomposent) toutes les composantes — on arrivera à un certain nombre fini de systèmes prolongés. Supposons qu'on puisse choisir une suite infinie de prolongements successifs dans lesquels les éléments q-plans intégraux d'un certain voisinage aient des prolongements.

Supposons encore que, pour $N \geq N_1$, les relations de compatibilité ou supplémentaires ne contiennent plus des variables l à indices inférieurs plus grands que ν.

Alors ces indices inférieurs n'atteindront cette valeur que pour un nombre fini de prolongements.

En effet, parmi les quantités $l^{\sigma}_{\nu\nu\,\ldots\,\nu}$ (le nombre d'indices inférieurs étant N), un certain nombre sont indépendantes et ce nombre diminue chaque fois.

Donc après un nombre fini de prolongements, on arrivera à diminuer le nombre ν et finalement on arrivera à un système en involution, les prolongements des éléments q-plans considérés étants réguliers.

2. Supposons que le système (Σ) admette une variété intégrale $\mathfrak{V}_q$ à q-dimensions, sur laquelle les formes ω sont indépendantes. Sur cette variété, les formes $\bar{\omega}_{\sigma}$ dépendent linéirement des ω et les coefficients l^{σ}_{α} sont déterminés. dl^{σ}_{α} sont aussi, sur $\mathfrak{V}_q$, fonctions linéaires des ω et par suite $\bar{\omega}_{\sigma\alpha}$ et les coefficients $l^{\sigma}_{\alpha\beta}$ sont déterminés, et ainsi de suite. Cela veut dire que les éléments plans tangents à $\mathfrak{V}_q$ admettent des prolongements d'un ordre quelconque. Il y a donc une suite infinie de prolongements successifs de (Σ) et, dans ceux-ci, les prolongements des éléments plans tangents à $\mathfrak{V}_q$. D'après ce que nous venons de montrer au no. précédent, il suit qu'on arrivera à un système en involution, dont le prolongement de $\mathfrak{V}_q$ est l'intégrale. Donc le théorème du prolongement, de E. CARTAN.

THÉORÈME. – *Étant donné un système* (Σ) *et une suite de q-prolongements successifs de celui-ci, si on considère un voisinage d'éléments q-plans E_q de* (Σ), *après un nombre fini de prolongements, on arrive ou bien à un prolongement dans lequel les éléments plans E_q n'admettent plus de prolongement, ou bien à un système en involution dans lequel les prolongements de E_q sont réguliers.*

En particulier, si parmi les E_q considérés il en a qui sont tangents à une variété intégrale $\mathfrak{V}_q$ de (Σ), on obtient le

THÉORÈME. – *Toute variété intégrale V_q de* (Σ) *peut être obtenue comme intégrale régulière d'un prolongement de* (Σ) *en involution.*

§ 13. – *Théorème d'existence de Cartan.*

1. Soit un système Σ en involution à p variables indépendantes. Soit $\mathfrak{V}_q$ une variété intégrale régulière analytique de Σ $(q < p)$. Nous cherchons un élément de variété intégrale analytique régulière $\mathfrak{V}_{q+1}$ à $q+1$ dimensions contenant $\mathfrak{V}_q$.

Supposons que, dans un voisinage de $\mathfrak{V}_q$, les variables $x^1, x^2, \ldots, x^q$ soient indépendantes et soient

(13.1) $$x^{q+1} = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^q), \quad x^\sigma = \varphi^\sigma(x^1, x^2, \ldots, x^q),$$
$$(\sigma = q+2, q+3, \ldots, n)$$

les équations de $\mathfrak{V}_q$ dans ce voisinage.

Supposons encore que chaque élément plan E_q tangent à $\mathfrak{V}_q$, dans le voisinage considéré, soit contenu dans un élément $(q+1)$-plan E_{q+1} intégral régulier sur lequel $dx^1, dx^2, \ldots, dx^q, dx^{q+1}$ sont indépendants. Nous allons chercher l'élément de $\mathfrak{V}_{q+1}$ de manière que cette variété contienne des éléments plans E_q.

Pour cela, construisons un $q+1$ prolongement (Σ') $(dx^1, dx^2, \ldots, dx^{q+1})$ de Σ, que nous écrivons

(13.2) $$dz^\sigma = l^\sigma_\alpha dx^\alpha \qquad (\sigma = q+2, \ldots, n; \ \alpha = 1, 2, \ldots, q+1),$$

où nous avons noté dz^σ au lieu de dx^σ. C'est notamment le $(q+1)$-prolongement, contenant les éléments $(q+1)$-plans, qui prolongent les éléments $(q+1)$-plans réguliers de (Σ). Le caractère s'_{q+1} de (Σ') est, d'après (8.3)

$$s'_{q+1} = s_{q+1} + s_{q+2} + \ldots + s_p + p - q - 1$$

et on peut s'arranger (en faisant au besoin une transformation sur les variables z, v. § 3, no. 9 et suiv.) de manière que, par suite des relations $(\mathfrak{T}_{q+1})$ si $s'_1 > 0$,

$$l_1^{q+2}, \ l_1^{q+3}, \ \ldots, \ l^{q+s'_1+1}$$

soient indépendantes, les autres $l^{q+z_1+2} \ldots, l_1^n$ étant fonctions de ceux-là (et des x); si $s'_2 > 0$,

$$l_2^{q+2}, \ l_2^{q+3}, \ \ldots, \ l_2^{q+s'_2+1}$$

soient indépendants entre eux et des l_1^σ, les $l_2^{q+s'_2+2}, \ldots, l_2^n$ etant fonctions de ceux-la

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

si $s'_{q+1} > 0$,

$$l_{q+1}^{q+2}, \ l_{q+1}^{q+3}, \ \ldots, \ l_{q+1}^{q+s'_q+1}$$

soient indépendants entre eux et des $l_1^\sigma, \ldots, l_q^\sigma$, les $l_{q+1}^{q+s'_{q+1}+1}, \ldots \ l_{q+1}^n$ étant fonctions de ceux-là.

2. Le système (13.2) (ou mieux dit, sa fermeture) est en involution $(dx^1, dx^2, \ldots, dx^{q+1})$ et il reste tel si on remplace $l_{q+1}^{q+2}, \ldots l_{q+1}^{q+s'_{q+1}+1}$ par des fonctions de $x^1, x^2, \ldots, x^{q+1}$ arbitraires

$$l_{q+1}^{q+2} = \Phi_{q+1}^{q+2}(x^1, x^2, \ldots, x^{q+1}), \ldots, l_{q+1}^{q+s'_{q+1}+1} = \Phi_{q+1}^{q+s'_{q+1}+1}(x^1, x^2, \ldots, x^{q+1}). \tag{13.3}$$

Les autres paramètres $l_{q+1}^{q+s'_{q+1}+2}, \ldots, l_{q+1}^{n}$ sont fonctions de

$$x^1, x^2, \ldots, x^q, l_1^\sigma, l_2^\sigma, \ldots, l_q^\sigma.$$

On peut faire

$$x^{q+1} - \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^q) = z^{q+1},$$

après quoi, la fonction φ dans (13.1) est identiquement nulle. Si on fait alors dans (13.2)

$$x^{q+1} = 0, \ z^\sigma = \varphi^\sigma,$$

on trouve $l_\alpha^\sigma (\alpha = 1, 2, \ldots, q)$ comme fonctions de $x^1, x^2, \ldots, x^q$, vérifiant les conditions qui résultent pour elles $(\mathcal{T}_{q+1})$. Prenons les fonctions Φ dans (13.3), de manière que. pour $x = 0$, c'est-à-dire sur $\mathfrak{V}_q$, l'élément plan défini par les éléments linéaires de coordonnées

$$E_1^{(1)}(d_1x^1 = 1, \ d_1x^2 = \ldots = d_1x^{q+1} = 0, \ d_1z^\sigma \equiv l_1^\sigma), \ldots$$
$$\ldots, E_1^{(q)}(d_qx^1 = 0, \ldots, d_qx^{q-1} = 0, \ d_qx^q = 1, \ d_qx^{q+1} = 0, \ d_qz^\sigma = l_q^\sigma),$$
$$E_1^{(q+1)}(d_{q+1}x^1 = \ldots = d_{q+1}x^q = 0, \ d_{q+1}x^{q+1} = 1, \ d_{q+1}z^\sigma = l_{q+1}^\sigma)$$

soit l'élément plan donné E_{q+1}. Cela est évidemment toujours possible.

Désignons par (Σ'^*) le système qu'on obtient en remplaçant (13.3) dans (Σ').

Si nous construisons une intégrale de (Σ') qui, pour $x^{q+1} = 0$, donne pour z^σ les fonctions φ^σ et, par suite, pour $l_\alpha^\sigma (\alpha = 1, 2, \ldots, q+1)$, les fonctions qui en résultent, c'est-à-dire

$$l_\alpha^\sigma = \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q)$$

et (13.3), alors nous avons une solution du problème à résoudre. Nous avons donc ramené ce problème à celui d'un système $(q+1)$-normal avec $s_{q+1} = 0$.

3. Ce n'est d'ailleurs pas la seule manière de le faire. On peut évidemment, donner les fonctions

$$z^{q+2}, \ldots, z^{q+s'_{q+1}+1} \text{ de } x^1, x^2, \ldots, x^{q+1}$$

(si $s'_{q+1} \geq \Lambda$) de manière à satisfaire (13.1) pour $x^{q+1} = 0$ et que l'élément plan formé par les éléments linéaires

$$E_1^{(1)}(d_1 x^1 = 1, \dots, d_1 x^q = 0, \; d_1 x^{q+1} = 0; \; d_1 z^{q+} = \frac{\partial z^{q+2}}{\partial x^1}, \dots$$

$$\dots, \; d_1 z^{q+s'_{q+1}+1} = \frac{\partial z^{q+s'_{q+1}+1}}{\partial x^1}; \; d_1 z^\sigma = l_1^\sigma \;\; (\sigma > q + s'_{q+1}),$$

. . . .

$$E_1^{(q)}(d_q x^1 = 0, \; d_q x^2 = 0, \; \dots, \; d_q x^q = 1, \; d_q x^{q+1} = 0;$$

$$d_q z^{q+2} = \frac{\partial z^{q+2}}{\partial x^q}, \; \dots, \; d_q z^{q+s'_{q+1}+1} = \frac{\partial z^{q+s'_{q+1}+1}}{\partial x^q}; \; d_q z^\sigma = l_q^\sigma \; (\sigma > q + s'_{q+1} + 1),$$

$$E_1^{(q+1)}(d_{q+1} x^1 = 0, \; d_{q+1} x^2 = 0, \; \dots, \; d_{q+1} x^q = 0, \; d_{q+1} x^{q+1} = 1;$$

$$d_{q+1} z^{q+2} = \frac{\partial z^{q+2}}{\partial x^{q+1}}, \dots, \; d_{q+1} z^{q+s'_{q+1}+1} = \frac{\partial z^{q+s'_{q+1}+1}}{\partial x^{q+1}};$$

$$d_{q+1} z^\sigma = l_{q+1}^\sigma \quad (\sigma > q + s'_{q+1} + 1),$$

pour $x^{q+1} = 0$, soit l'élément $(q+1)$-plan intégral de $\mathfrak{D}_{q+1}$. Dans ce cas, les l_α^σ, pour $\sigma = q+2, \dots, q + s'_{q+1} + 1$, sont déterminées en fonction des x^α; du système (Σ') il reste les équations d'indice $\sigma > q + s'_{q+1} + 1$, qui est en involution $(dx^1, dx^2, \dots, dx^{q+1})$ et dont les caractères sont égaux à ceux de (Σ') diminués de s'_{q+1}.

Ainsi de nouveau le problème a été ramené au cas $s_{q+1} = 0$.

4. Supposons donc que nous soyons, dans ce cas.

En prolongeant successivement le système (Σ) on trouve toujours des systèmes normaux en involution $(dx^1, dx^2, \dots, dx^{q+1})$ dont le dernier caractère est zéro. Puisque nous connaissons $\mathfrak{D}_q(x^{q+1} = 0)$, nous connaissons aussi les coefficients successifs

$$l_\alpha^\sigma, \; l_{\alpha_1\alpha_2}^\sigma, \; \dots \; (\alpha \leq q; \;\; \alpha_1, \alpha_2 \leq q, \; \dots),$$

comme fonctions de $x^1, x^2, \dots, x^q$, pour x^{q+1}. D'ailleurs, d'ici il résulte les fonctions

$$l_{q+1}^\sigma, \; l_{q+1, \alpha}^\sigma, \; l_{q+1, \alpha_1, \alpha_2}^\sigma, \; \dots \; (\alpha \leq q+1, \;\; \alpha_1, \alpha_2 \leq q+1, \; \dots)$$

pour $x^{q+1} = 0$.

Dans le voisinage d'un point $P(x^\sigma_\alpha, z^\alpha_\sigma)$ de $\mathfrak{V}_q$, si la variété $\mathfrak{V}_{q+1}$ cherchée existe, elle pourra être donnée par le dévelloppement

$$z^\sigma = z^\sigma_0 + l^\sigma_\alpha(x^\alpha - x^\alpha_0) + \frac{1}{2} l^\sigma_{\alpha_1\alpha_2}(x^{\alpha_1} - x^{\alpha_1}_0)(x^{\alpha_2} - x^{\alpha_2}_0) + \dots .$$

Le fait, que cette série est convergente dans un voisinage de P et qu'elle représente effectivement une solution, se démontre aisément à l'aide des majorantes.

§ **14.** - *Variétés intégrales passant par une variété caractéristique simple et régulière.*

1. Supposons que $\mathfrak{V}_q$ soit une variété caractéristique simple et régulière (v. § 11, no. 8). En construisant le $(q+1)$-prolongement de (Σ), comme au § précédent, on constate, comme plus haut, qu'on peut ranger les variables z^σ de manière qu'il y ait une solution, dans laquelle $z^{q+2}, z^{q+3}, \dots, z^{q+s'_{q+1}+1}$ sont des fonctions arbitraires de $x^1, x^2, \dots, x^{q+1}$, vérifiant (13.1).

Si ces fonctions sont données, il reste encore non déterminés h des coefficients l^σ_{q+1} (h étant le dégre de singularité des éléments q-plans tangents à $\mathfrak{V}_q$) soit $l^\tau_{q+1}(\tau = \sigma', \sigma'', \dots, \sigma^{(h)})$.

Mais en tenant compte que la variété est caractéristique simple et et régulière, on voit que les relations (11.15) détérminent les coefficients $l^\tau_{q+1,q}$ du 2$^{\text{me}}$ prolongement.

Ensuite, en tenant compte que le prolongement d'un élément plan caractéristique simple et régulier — est, à sont tour, caractéristique simple et régulier (v. § 11, no. 8, 9), il suit qu'on pourra répéter le procédé.

Restent donc non déterminées seulement les quantités $l^\tau_{q+1}, l^\tau_{q+1,q+1}, \dots$.

On en déduit que, pour déterminer un développement formel d'une intégrale passant par $\mathfrak{V}_q$, il faut encore donner, outre les fonctions

$$z^{q+2}, z^{q+3}, \dots, z^{q+s'_{q+1}+1} \text{ de } x^1, \dots, x^{q+1},$$

dans le voisinage d'un point de $\mathfrak{V}_q$, les relations

$$z^\tau_{q=0} = f^\tau(x^1, x^2, \dots, x^{q-1}, x^{q+1}, \tag{14.1}$$

où f sont soumises à la condition que (14.1) soient vérifiées sur $\mathfrak{V}_q$.

La convergence du développement qu'on trouve et le fait que ce développement est la solution du problème peuvent être démontrés à l'aide de majorantes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BERTINI, *Geometria proiettiva degli iperspazi*, Messina, 1923.

[2] E. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, « Actualités scientifiques et industrielles, Exposés de Géométrie », Paris, Hermann & Cie, 1945.

[3] E. CARTAN, *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, « Ann. de l'Ecole Normale Sup, », (3) 21. 1904, pp. 153-206. Oeuvres Complètes, Partie II, vol. 2, pp. 571-624.

[4] S. P. FINIKOV, *Méthode des formes extérieures de Cartan dans la Géométrie Différentielle*, Moscou-Léningrade 1948.

[5] M. HAIMOVICI, *Despre prelungirile partiale ale sistemelor diferentiale*, «Studii si cercetări stiintifice, Academia RPR Filiala Iasi », X (1958) fasc. 2, pp. 199-221.

[6] M. HAIMOVICI, *Sur les prolongements des systèmes différentiels extérieurs*, «Pubblicationes Mathematicae », Debrecen, T. 7 (1960), pp. 137-149.

[7] W. V. D. HODHE & D. PEDOE, *Methods of algebraic geometry*, 3 vol. «Cambridge Univ. Press.», 1952, 1954.

[8] E. KÄHLER, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*, Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1934.

[9] MASATAKE KURANISHI, *On Cartan's prolongation theorem of exterier differential systems*, « Amer. Journ. of Math. », LXXIX (1957), pp. 1-47.

[10] YOZÔ MATSUSHIMA, *On a theorem concerning the prolongation of differential systems*, «Nagoya Math. Journ.», vol. 6, 1953, pp. 1-16.

[11] J. A SCHOUTEN AND W.V.D. KULK, *Pfaff's problem and its generalisation*, «Oxford at the Clarendon Press », 1949.

[12] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, Vol. I, Roma, « Docet » Edizioni Universitaire, 1951.

[13] W. SLEBODZINSKI, *Formes extérieures et leurs applications*, vol. I, « Monografie Matematyczne », t. XXI Warszawa 1954.