Valor assoluto, variazione, lunghezza in distribuzione (*)

EMILIO BAIADA (a Modena)

a Enrico Bompiani in occasione del suo Giubileo scientifico.

Sunto. - *Vedere introduzione.*

È noto che il concetto di distribuzione, in un certo senso, generalizza quello di funzione. Rimane pertanto utile, specie in alcune applicazioni metriche, poter definire, per le distribuzioni, cosa si debba intendere per valor assoluto.

Data una *distribuzione* $T(\varphi)$, con $\varphi \varepsilon \mathfrak{D}$, questa, seguendo L. SCHWARTZ, è un funzionale lineare, definito sullo spazio vettoriale $\mathfrak{D}$ delle funzioni infinitamente derivabili e a supporto compatto, prendente valore nel campo complesso, continuo rispetto alla convergenza uniforme, separatamente, di tutte le derivate.

Per distribuzione *positiva* si intende una distribuzione che assuma valor positivo o nullo (quindi reale) ogni qualvolta φ sia non negativo (quindi reale).

Il valor assoluto di una distribuzione data $T(\varphi)$, deve essere allora un altra distribuzione (più in generale: un funzionale lineare), $|T|(\varphi)$, positiva. Se si vuole una definizione soddisfacente di $|T|(\varphi)$, bisognerà trovare una corrispondenza tra lo spazio $\mathfrak{D}'$ delle distribuzioni (duale di $\mathfrak{D}$) e il sottospazio di quelle positive, che si riduca all'identità sù questo. Quest'ultima circostanza corrispondendo al fatto che il valor assoluto di una distribuzione positiva deve coincidere con la distribuzione stessa.

Inoltre perchè il concetto di valor assoluto possa essere utile, nella tecnica del calcolo ordinario, bisognerà che sia conservata la nota proprietà triangolare :

$$|T_1 + T_2|(\varphi) \leq \{|T_1| + |T_2|\}(\varphi),$$

relazione che ha senso, trattandosi di distribuzioni positive, quindi suscettibili di ordinamento.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca N. 18 del C. N. R.

Onde non aver contraddizioni pericolose, sarà opportuno pure che, nel caso che la distribuzione T si possa identificare, mediante una data legge con una funzione sommabile, il valor assoluto $|T|$ si identifichi, sempre con la stessa legge, con la funzione presa in valor assoluto.

Non appena sarà trovata questa corrispondenza $T \to |T|$, sarà possibile definire variazione e lunghezza di una curva con coordinate che siano distribuzioni.

Bisogna osservare che la via di definire il valor assoluto mediante l'operazione di estrazzione di radice quadrata del quadrato di una distribuzione non è tentabile perchè non è possibile definire in tutta la generalità il prodotto di due distribuzioni.

Noi seguiremo il metodo di introdurre le distribuzioni dovute essenzialmente da L. Schwartz, ma è ben chiaro che altrettanto si potrà fare mediante quello delle successioni generalizzate.

1. – Sia $\mathfrak{D}$ lo spazio vettoriale delle funzioni $\varphi(x)$ definite su R_n e prendenti valori reali o complessi, infinitamente derivabili e a supporto compatto, (il supporto essendo l'insieme dei punti in cui $\varphi \neq 0$ e i punti d'accumulazione di questi), munito della topologia della convergenza uniforme, separatamente di tutte le derivate. Sia $\mathfrak{D}'$ lo spazio (duale) di tutte le distribuzioni $T(\varphi)$. Una distribuzione di $\mathfrak{D}'$ si dirà *reale* se il valore $T(\varphi)$ è reale quando φ è reale.

Diremo che la distribuzione è *positiva* se è reale e prende valore non negativo se φ è sempre reale e non negativo.

Supporemo sempre (a meno di avviso contrario) che le distribuzioni che interverranno in seguito saranno sempre *reali*.

Definizione a). – Se φ prende soltanto valori reali e non negativi, porremo:

$$|T|(\varphi) = \sup_{|\gamma| < \psi} T(\varphi) \tag{1}$$

dove il sup. è preso rispetto alla classe delle funzioni di $\mathfrak{D}$ *con supporto totalmente interno al supporto di* φ, cioè tali che la distanza euclidea della $\bar{S}_\psi$ (supporto di ψ) dell'insieme $S_\psi = \{x; \psi \neq 0\}$, dal complementare $\mathcal{C}S_\varphi$ dell'insieme $S_\varphi = \{x; \varphi > 0\}$ risulti positiva, e sia $|\psi| < \varphi$, là dove $\varphi > 0$.

Osserviamo subito, che se in un punto x_0, $\varphi(x_0) = 0$, esiste tutto un intorno I_{x_0} di x_0, nel quale ψ è identicamente nullo.

Porremo $|T|(\varphi) = 0$, se φ è identicamente nullo.

1) È evidente che $|T|(\varphi) \geq 0$, se $\varphi \geq 0$.

2) È facile vedere che se $\varphi \geq 0$ è $|T|(k.\varphi) = k.|T|(\varphi)$, con k constante reale non negativa.

3) $|T|(\varphi)$ è crescente con φ positiva.

4) È chiaro che se T è positiva allora $|T| = T$, e ciò a causa della continuità del funzionale lineare rappresentato da T.

Definizione b). Cominceremo con completare la definizione di T anche al caso che φ prenda valori, sempre reali, ma anche negativi.

A questo scopo, se φ prende valori reali, ma anche negativi, prendiamo una funzione ν, che chiameremo ***ausiliaria***, con supporto $\bar{S}_\nu$ che contenga il supporto $\bar{S}_\varphi$ di φ e sia inoltre mai negativa, e tale che $\nu + \varphi$ risulti pure non negativa.

Se esiste una tale funzione ausiliaria ν per la quale ai sensi della definizione precedente sia $|T|(\nu) < +\infty$, porremo, sempre secondo la definizione precedente:

$$|T|(\varphi) = |T|(\nu + \varphi) - |T|(\nu). \tag{2}$$

Ê chiaro che i due termini del secondo membro hanno senso, finito o infinito.

Porremo $|T|(\varphi) = \infty$, se non esiste nessuna funzione ausiliaria ν tale che $|T|(\nu) < +\infty$.

Per assicurare validità alla definizione *b)* dobbiamo provare che il secondo membro della relazione (2) ha valore costante al variare di ν, se $|T|(\nu) < +\infty$. In atre parole se ν' ha supporto contenente il supporto di ν, con $|T|(\nu) < +\infty$. e sia tale che $\nu' + \varphi \geq 0$, allora:

$$|T|(\nu + \varphi) - |T|(\nu) = |T|(\nu' + \varphi) - |T|(\nu'),$$

ossia:

$$|T|(\nu + \varphi) + |T|(\nu') = |T|(\nu' + \varphi) + |T|(\nu),$$

nel senso che se $|T|(\nu + \varphi)$ è finito, lo è pure $|T|(\nu' + \varphi)$, e vice-versa. Quindi se $|T|(\nu + \varphi)$ è infinito lo è pure $|T|(\nu' + \varphi)$.

Dimostreremo tra poco che se φ_1 e φ_2 sono due funzioni di $\mathfrak{D}$, non negative, allora (usufruendo solo della definizione *a)*)

$$|T|(\varphi_1 + \varphi_2) = |T|(\varphi_1) + |T|(\varphi_2),$$

nel senso che se il primo membro è infinito, uno degli addendi del secondo membro è infinito e vice-versa. Quindi:

$$|T|(\nu + \varphi) + |T|(\nu') = |T|(\nu + \varphi + \nu'),$$

$$|T|(\nu' + \varphi) + |T|(\nu) = |T|(\nu' + \varphi + \nu),$$

ed i secondi membri, se sono finiti, essendo eguali, lo sono pure i primi membri.

Osserviamo che se $|T|(\nu + \varphi)$ è infinito (quindi $|T|(\varphi) = \infty$) lo è pure $|T|(\nu' + \varphi + \nu)$ e dalla seconda delle due relazioni dovrà essere $|T|(\nu' + \varphi) = \infty$, perchè $|T|(\nu)$ è finito.

2. - *Additività di $|T|(\varphi)$ per le funzioni positive.* Passiamo a dimostrare la relazione:

$$|T|(\varphi_1 + \varphi_2) = |T|(\varphi_1) + |T|(\varphi_2) \tag{3}$$

per: $\varphi_1 \in \mathfrak{D}$, $\varphi_2 \in \mathfrak{D}$; $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2 \geq 0$.

Indichiamo con $S_\gamma \equiv \{x\colon \gamma \neq 0\}$. La relazione precedente (3) si scrive:

$$\sup_{\substack{|\psi| < \varphi_1 + \varphi_2 \\ S_\psi \mathrel{\bar{\subset}} S_{\varphi_1 + \varphi_2}}} T(\psi) = \sup_{\substack{|\psi_1| < \varphi_1 \\ S_{\psi_1} \mathrel{\bar{\subset}} S_{\varphi_1}}} T(\psi_1) + \sup_{\substack{|\psi_2| < \varphi_2 \\ S_{\psi_2} \mathrel{\bar{\subset}} S_{\varphi_2}}} T(\psi_2); \tag{3'}$$

dove la relazione di inclusione è nel senso forte: $S_1 \mathrel{\bar{\supset}} S_2$ significando, oltre all'inclusione ordinaria, che la distanza tra $\bar{S}_1$ e il complementare di S_2 è positiva.

Proviamo subito che nella relazione da dimostrare vale sempre il segno di maggiore o uguale. Infatti, date φ_1 e φ_2, consideriamo ψ_1 e ψ_2, tali che $|\psi_1| < \varphi_1$, $|\psi_2| < \varphi_2$, con $S_{\psi_1} \mathrel{\bar{\subset}} S_{\varphi_1}$, $S_{\psi_2} \mathrel{\bar{\subset}} S_{\varphi_2}$. Prendiamo: $f = \psi_1 + \psi_2$, è evidentemente:

$$|f| = |\psi_1 + \psi_2| \leq |\psi_1| + |\psi_2| < \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$S_f \subset S_{\psi_1} \cup S_{\psi_2} \mathrel{\bar{\subset}} S_{\varphi_1} \cup S_{\varphi_2} = S_{\varphi_1 + \varphi_2},$$

l'ultima uguaglianza valendo perchè φ_1 e φ_2 sono non negative. La funzione f è in $\mathfrak{D}$ e si trova così, nella classe delle funzioni rispetto alla quale si esegue il sup. del primo membro. Siccome

$$T(f) = T(\psi_1) + T(\psi_2),$$

e ψ_1 e ψ_2 sono arbitrarie nelle rispettive classi in cui si eseguono i sup. del secondo membro, vale il segno $\geq$ nella relazione (3).

Dimostriamo ora che vale la disuguaglianza opposta.

Costruiamo a tale fine le funzioni:

$$\begin{aligned} \psi_1^* &= \psi \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}, \text{ se } \varphi_1 + \varphi_2 > 0; \text{ e } \varphi_1^* = 0, \text{ se } \varphi_1 + \varphi_2 = 0; \\ \psi_2^* &= \psi \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}, \text{ se } \varphi_1 + \varphi_2 > 0; \text{ e } \varphi_2^* = 0, \text{ se } \varphi_1 + \varphi_2 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

è chiaro che $\psi_1^* + \psi_2^* = \psi$, sia se $\varphi_1 + \varphi_2 > 0$, sia se $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$, perchè sono allora nulle ψ_1^* e ψ_2^*. Osserviamo che $|\psi_1^*| = \dfrac{|\psi|}{\varphi_1 + \varphi_2}\,\varphi < \varphi_1$, se $\varphi_1 + \varphi_2 > 0$, quindi pure se $\varphi_1 > 0$, poichè $0 < \dfrac{|\psi|}{\varphi_1 + \varphi_2} < 1$. Lo stesso dicasi per ψ_2^*.

In altre parole la ψ è stata decomposta in due funzioni ψ_1 e ψ_2 la cui somma riproduce ψ. Bisognerà assicurarci ora che siano in $\mathfrak{D}$ e i loro supporti siano totalmente interni ai supporti rispettivamente di φ_1 e di φ_2. Ci converrà distinguere due casi.

Consideriamo un punto x_0 nel quale $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$, che appartenga a $\overline{S}_{\varphi_1+\varphi_2}$ allora, necessariamente $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_2 = 0$, ed esso sarà, o appartenente al supporto di φ_1, o a quello di φ_2, per tanto

$$\overline{S}_{\varphi_1+\varphi_2} = \overline{S}_{\varphi_1} \cup \overline{S}_{\varphi_2}.$$

Consideriamo ora

$$N_{\varphi_1} = \{ x \varepsilon R^n : \varphi_1(x) = 0 \} \quad , \quad N_{\varphi_2} = \{ x \varepsilon R^n : \varphi_2(x) = 0 \} ;$$

avremo

$$N_{\varphi_1+\varphi_2} = N_{\varphi_1} \cap N_{\varphi_2}, \tag{5}$$

perchè $\varphi_1 + \varphi_2$ è nullo solo se lo sono entrambi φ_1 e φ_2.

Osserviamo che

$$\overline{S}_\psi \cap N_{\varphi_1+\varphi_2} = \emptyset, \tag{6}$$

infatti, per definizione, se $\varphi_1 + \varphi_2$ si annulla, allora ψ si annulla identicamente in un intorno e quindi esso non può appartenere al supporto di ψ, e, sia ψ_1^* che ψ_2^*, si annullano identicamente in quest' intorno. Si può per tanto affermare che ψ_1^* e ψ_2^* sono infinitamente derivabili.

Modificazioni di ψ_1^* e di ψ_2^*.

Prima modificazione. Modificheremo ψ_1^* prima in un intorno dell' insieme dei punti in cui $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 > 0$. Osserviamo che $E_1 = N_{\varphi_1} \cap \overline{S}_\psi$ è chiuso, quale intersezione di due chiusi. Così pure $E_2 = N_{\varphi_2} \cap \overline{S}_\psi$.

Questi due insieme chiusi non hanno punti a comune, ossia:

$$E_1 \cap E_2 = (N^{\varphi_1} \cap \overline{S}_\psi) \cap (N_{\varphi_1} \cap \overline{S}_\psi) = \emptyset,$$

e ciò a causa delle (5), (6); essi hanno allora distanza positiva l' uno dal l' altro.

Affermiamo che su E_1 è $\varphi_2 > 0$, perchè altrimenti $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ e ψ sarebbe identicamente nulla in un intorno e non ci troveremmo in $\overline{S}_\varphi$. La differenza

$\varphi_2 - |\psi|$ è continua ed è positiva su E_1, perchè ivi $\varphi_1 = 0$ e φ_2 coincide con $\varphi_1 + \varphi_2$. Sia allora $\sigma > 0$ il minimo di $\varphi_2 - |\psi|$ sù E_1. Indichiamo con 3ε un numero positivo minore di σ. Esiste allora un aperto 0_1 che contiene E_1, tale che su esso sia $\varphi_2 - |\psi| > 2\varepsilon$, $0 \leq \varphi_1 < \frac{1}{2}\varepsilon$, indi un aperto 0_2, contenente $\bar{0}_1$, sul quale sia $\varphi_2 - |\psi| > \varepsilon$, $0 \leq \varphi_1 < \varepsilon$ ed inoltre $0_2 \cap E_2 = \emptyset$. Tutto ciò è chiaramente eseguibile.

Si costruisca ora una funzione $\alpha(x)$, definita su R^n, infinitamente derivabile, con le proprietà:

$$\alpha \equiv 1, \text{ sù } \complement 0_2, \quad \alpha \equiv 0 \text{ sù } 0_1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \text{ sù } 0_2 - 0_1 .$$

Una tale costruzione è possibile (¹). Poniamo allora

$$\bar{\psi}_1 = \alpha . \psi_1^* .$$

Avremo:

$$\bar{\psi} = \psi_1^*, \text{ sù } \complement 0_2; \quad \bar{\psi}_1 = 0, \text{ sù } 0_1; \quad |\bar{\psi}_1| < |\psi_1^*| < \varphi_1 < \varepsilon, \text{ sù } 0_2 - 0_1,$$

quindi pure in virtù della precedente, su tutto 0_2. La funzione $\bar{\psi}_1$ è infinitamente derivabile ed ha supporto completamente interno a quello di φ_1, cioè $\text{dist}(\bar{S}_{\bar{\psi}_1}, \complement S_{\varphi_1}) > 0$. Infatti:

$$S_{\bar{\psi}_1} \subset S_\alpha \cap S_{\psi_1^*} \subset S_{\psi_1^*} - 0_1 ,$$

e, siccome, come si vede dalla (4)

$$S_{\psi_1^*} \subset S_{\varphi_1} \cap S_\psi ,$$

risulta,

$$S_{\bar{\psi}_1} \subset S_{\varphi_1} \cap S_\psi - 0_1 ,$$

quindi anche:

$$\bar{S}_{\bar{\psi}_1} \subset \bar{S}_{\varphi_1} \cap \bar{S}_\psi - 0_1 ,$$

perchè i punti d'accumulazione non possono certo cadere nell'aperto. Ma l'insieme $S_{\varphi_1} \cap \bar{S}_\psi$ ha per frontiera rispetto a $\complement S_{\varphi_1}$ proprio $E_1 = N_{\varphi_1} \cap \bar{S}_\psi$, che è un chiuso contenuto nell'aperto 0_1: è proprio quanto si voleva provare. Osserviamo ancora che $|\bar{\psi}| \leq |\psi_1^*|$.

Poniamo:

$$\bar{\psi}_2 = \psi - \bar{\psi}_1$$

(¹) Vedere, per es. L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, tomo I, pag. 23.

e dimostriamo che $|\overline{\psi}_2| < \varphi_2$. Infatti, su $\mathcal{C}O_2$ è;

$$|\overline{\psi}_2| = |\psi - \overline{\psi}_1| = |\psi - \alpha\psi_1^*| = |\psi - \psi_1^*| = |\psi_2^*| < \varphi_2,$$

mentre sù O_2, ricordando che ivi è $\varphi_2 - |\psi| > \varepsilon$, risulta:

$$\varphi_2 - |\overline{\psi}_2| = \varphi_2 - |\psi - \overline{\psi}_1| \geq \varphi_2 - |\psi| - |\overline{\psi}_1| > \varphi_2 - |\psi| - \varepsilon > 0 .$$

Osserviamo, in quanto ci sarà utile in seguito, che $\overline{S}_{\psi_2^*} = \overline{S}_{\overline{\psi}_2}$, perchè la funzione ψ_2^* è stata modificata soltanto in O_2 là dove quindi era già positiva.

Seconda modificazione. Modifichiamo adesso $\overline{\psi}_2$ in un intorno di $E_2 - N_{\varphi_2} \cap \overline{S}_\varphi$ che escluda $\overline{O}_2$, come abbiamo già fatto per $\overline{\psi}_1^*$ onde ottenere ψ_1. Ricordiamo che sú questo intorno è $\overline{\psi}_1 = \psi_1^* > 0$. In tal modo otteniamo una funzione ψ_2 in $\mathfrak{D}$, con supporto completamente contenuto nel supporto di φ_2. Conseguentemente modifichiamo $\overline{\psi}_1$ in ψ_1, come abbiamo ottenuto $\overline{\psi}_2$ da ψ_2^*, cioè ponendo $\psi_1 = \psi - \overline{\psi}_2$.

Così facendo non si altera il proprio supporto che rimane pertanto totalmente interno a quello di φ_1. Abbiamo così ottenuto due funzioni ψ_1 e ψ_2, di $\mathfrak{D}$, con supporti totalmente interni a S_{φ_1} e S_{φ_2} rispettivamente, e tali che $\psi_1 \geq 0$, $\psi_2 \geq 0$, $\psi_1 + \psi_2 = \psi$, quindi:

$$T(\psi) = T(\psi_1) + T(\psi_2),$$

e nella relazione (3) vale il segno di minore o uguale, e siccome abbiamo visto che vale la disuguaglianza opposta, risulta così dimostrata l'additività del funzionale $|T|$ rispetto alle funzioni non negative di $\mathfrak{D}$.

Osserviamo che, sempre per tali funzioni, se entrambe $|T|(\varphi_1)$ e $|T|(\varphi_2)$ sono finiti, lo è pure $|T|(\varphi_1 + \varphi_2)$, e a causa della crescenza, anche il vice-versa, quindi se $|T|(\varphi_1 + \varphi_2)$ è infinito uno dei due valori, almeno, $|T|(\varphi_1)$, $|T|(\varphi_2)$ non è finito.

3. - Passiamo ora a dimostrare l'addività nel caso φ_1, φ_2, reali in $\mathfrak{D}$ con $|T|(\varphi_1)$, $|T|(\varphi_2)$ finiti, ma per altro qualunque.

Si ha per definizione

$$|T|(\varphi_1) = |T|(\varphi_1 + N_1) - |T|(N_1), \tag{7}$$

$$|T|(\varphi_2) = |T|(\varphi_2 + N_2) - |T|(N_2), \tag{8}$$

dove N_1 e N_2 sono funzioni non negative di $\mathfrak{D}$ che rendono rispettivamente $\varphi_1 + N_1$ e $\varphi_2 + N_2$ non negative. La funzione $N_1 + N_2$ rende non negativa $\varphi_1 + \varphi_2 + (N_1 + N_2)$, inoltre, come abbiamo già visto $|T|(N_1 + N_2) < +\infty$, e per la definizione *b*) e la sua invarianza rispetto alle funzioni ausiliarie:

$$|T|(\varphi_1 + \varphi_2) = |T|(\varphi_1 + \varphi_2 + N_1 + N_2) - |T|(N_1 + N_2),$$

ma, per quanto dimostrato nel paragrafo precedente è:

$$|T|(\varphi_1 + \varphi_2 + N_1 + N_2) = |T|(\varphi_1 + N_1) + |T|(\varphi_2 + N_2)$$

$$|T|(N_1 + N_2) = |T|(N_1) + |T|(N_2).$$

Sommando (7) e (8) si ha la proposizione.

4. - Abbiamo già visto che $|T|$ è omogenea nel caso che φ sia non negativa e rispetto alle costanti pure non negative. Se φ è reale qualunque, k non negativa e $|T|(\varphi) \neq \infty$, in quanto il caso che non sia finito non è espressivo e di dimostrazione banale, sarà:

$$|T|(\varphi) = |T|(N + \varphi) - |T|(N)$$

dove N è una funzione ausiliaria che renda $N + \varphi$ non negativa, con $|T|(N) < +\infty$. La funzione kN è funzione ausiliaria per $k\varphi$, e allora:

$$|T|(k.\varphi) = |T|(k.N + k.\varphi) - |T|(k\,N),$$

e, per quanto sappiamo già:

$$|T|(k.\varphi) = k.|T|(N + \varphi) - k.|T|(N) = k.|T|(\varphi).$$

Il caso in cui k è negativo non è dissimile del precedente, perchè $k.\varphi = (-k).(-\varphi)$ e ci si riporta sempre al caso $k \geq 0$, e si osserva che $|T|(-\varphi) = -|T|(\varphi)$. Infatti se $|T|(\varphi) \neq \infty$, ciò vuol dire che esiste una funzione ausiliaria $N \geq 0$, tale che $|T|(\varphi + N) < +\infty$, $|T|(N) < +\infty$, con $\varphi + N \geq 0$, $N \geq 0$, e allora esiste una funzione N_1, per es. $N_1 = \varphi + N \geq 0$, tale che $-\varphi + N_1 \geq 0$, $N_1 \geq 0$ per cui $|T|(-\varphi + N_1) < +\infty$, $|T|(N_1) < +\infty$, quindi $|T|(-\varphi) \neq \infty$.

Siccome d'altra parte $|T|(0) = 0$ e vale l'additività, si ha l'asserto.

5. - Esistenza e continuità di $|T|(\varphi)$. Abbiamo visto che $|T|(\varphi)$ cresce se φ, positiva, cresce in valore (e quindi in supporto), cioè:

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2,\ \bar{S}_{\varphi_1} \subset \bar{S}_{\varphi_2},\ \text{implicano}\ \ |T|(\varphi_1) \leq |T|(\varphi_2),$$

e quindi, qualora $|T|(\varphi_2)$ è finito lo sarà pure $|T|(\varphi_1)$.

Se $0 \leq |\varphi_1| \leq \varphi_2$, e quindi $\bar{S}_{\varphi_1} \subset \bar{S}_{\varphi_2}$, e $|T|(\varphi_2) < \infty$, allora φ_2 è funzione ausiliaria per φ_1, e:

$$|T|(\varphi_1) = |T|(\varphi_1 + \varphi_2) - |T|(\varphi_2).$$

Siccome $0 \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq 2\varphi_2$, per quanto detto sopra $|T|(\varphi_1 + \varphi_2) < +\infty$, che $|T|(\varphi_1) \neq \infty$, inoltre:

$$||T|(\varphi_1)| \leq |T|(2\varphi_2) - |T|(\varphi_2) = |T|(\varphi_2).$$

Dimostriamo adesso la seguente proposizione:

Siano Φ una funzione (reale) *non negativa di $\mathfrak{D}$ e $\bar{S}_\Phi$ il proprio supporto e per la quale $|T|(\Phi) < +\infty$. Sia $\mathfrak{A}$ un aperto contenuto in $\bar{S}_\Phi$, allora: qualunque funzione φ in $\mathfrak{D}$ con supporto in $\mathfrak{A}$ è tale che $|T|(\varphi) \neq \infty$.*

Sia $0 \leq \alpha \leq 1$ una funzione che valga uno su $\mathfrak{A}$ e zero su $\complement\mathfrak{A}_1$, dove $\mathfrak{A}_1$ è un'altro aperto contenente $\mathfrak{A}$ e contenuto in S_Φ. Osserviamo che Φ risulta sempre positiva in $\mathfrak{A}_1$, quindi esiste un numero positivo t, tale che $\Phi > t$ su $\mathfrak{A}_1$, avremo:

$$\Phi > t.\ \alpha$$

e $t.\alpha$ è in $\mathfrak{D}$ con supporto in $\mathfrak{A}_1$ e contenente $\mathfrak{A}$; per quanto abbiamo detto sopra $|T|(t.\alpha) < +\infty$, quindi anche $|T|(k.\alpha) \neq \infty$ con k qualunque. Sia allora φ una qualunque funzione, reale, di $\mathfrak{D}$ con supporto S_φ in $\mathfrak{A}$, esiste una costante $h > 0$, tale che $|\varphi| \leq h$ quindi,

$$0 \leq |\varphi| \leq h.\alpha \quad , \quad \bar{S}_\varphi \subseteq \bar{S}_\alpha,$$

e per quanto detto sospra $|T|(\varphi) \neq \infty$.

Noi supporremo, d'ora innanzi di considerare T e quindi $|T|$ per le funzioni di $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$, cioè per quelle φ di $\mathfrak{D}$ con supporto in $\mathfrak{A}$.

Per tanto potremo sempre considerare $|T|(\varphi)$, che sarà sempre finito.

Nelle ipotesi della proposizione precedente, essendo:

$$|T|(t.\ \alpha) = t.|T|(\alpha)$$

$|T|(t, \alpha)$ tende a zero con t, quindi se $\varepsilon_n \in \mathfrak{D}$, $S_{\varepsilon_n} \subset \mathfrak{A}, |\varepsilon_n| \to 0, n \to \infty$,

$$|T|(\varepsilon_n) \to 0$$

e il funzionale lineare $|T|$ è allora continuo, con la topologia ordinaria su $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$, e ricordata la sua positività è una *misura* su $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$.

È chiaro che non è possibile ottenere molto di più di quanto affermato dalla proposizione precedente, se $|T|$ fosse, in condizioni generali, una distribuzione, sarebbe immediatamente una misura, quindi continua usando della topologia ordinaria, ma ciò, in generale non è vero.

6. - Sin qui è stata definita $|T|(\varphi)$ per tutte le φ reali, di $\mathfrak{D}$.

Si può, però, estenderne il significato anche per le φ complesse.

Poniamo, a questo fine $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, e volendo che $|T|$ sia lineare, dovrà essere :

$$|T|(\varphi) = |T|(\varphi_1 + i\varphi_2) = |T|(\varphi_1) + i.|T|(\varphi_2)$$

e, l' ultimo membro avendo significato porremo:

Definizione *c*) nel caso che φ sia complessa e φ_1 e φ_2 ne siano la parte reale ed il coefficiente dell' immaginario, porremo, per definizione:

$$|T|(\varphi) = |T|(\varphi_1) + i.|T|(\varphi_2),$$

dove $|T|(\varphi_1)$ e $|T|(\varphi_2)$ hanno il senso delle definizioni *a*) e *b*).

È evidente che $|T|$ risulta allora additivo anche per φ complesso, e omogeneo per k complesso. Esso è anche continuo nel caso di validità del teorema del paragrafo precedente.

È facile vedere che $|T|$ secondo la definizione che abbiamo data soddisfa alla disuguaglianza triangolare:

$$|T_1 + T_2| \leq |T_1| + |T_2|,$$

nel senso che, se $|T_1| < +\infty$, $|T_2 < +\infty$, anche $|T_1 + T_2| < +\infty$, e vale la precedente. In fatti la disuguaglianza precedente ha il seguente significato:

$$|T_1 + T_2|(\varphi) \leq |T_1|(\varphi) + |T_2|(\varphi),$$

per ogni $\varphi \geq 0$ di $\mathfrak{D}$, la quale per definizione è equivalente alla :

$$\sup_{|\psi| < \varphi} (T_1 + T_2)(\psi) \leq \sup_{|\psi_1| < \varphi} T_1(\psi_1) + \sup_{|\psi_2| < \varphi} T_2(\psi_2)$$

e questa relazione è evidentemente vera, e quindi se il secondo membro è finito lo è pure il primo.

Osserviamo esplicitamente che la disuguaglianza triangolare può avere senso solo se $T_1|$ e $|T_2|$ sono distribuzioni (o solo funzionali lineari) positive, e questo avviene solo se T è una distribuzione reale. Infatti, quando T sia non reale, $|T|$ non è definibile, perchè se si vuole che sia rispettata la linearità, allora, se $T = T_1 + i.T_2$, dovrebbe essere:

$$|T|(\varphi_1 + i.\varphi_2) = [|T_1|(\varphi_1) - |T_2|(\varphi_2)] + i[|T_1|(\varphi_2) + |T_2|(\varphi_1)],$$

ma allora $|T|$ sarebbe reale (come è richiesto esplicitamente) solo se $T_2 \equiv 0$.

7. – Sappiamo che T si identifica con una funzione sommabile f se;

$$T(\varphi) = \int f\varphi dx,$$

allora se $\varphi \geq 0$, sarà:

$$|T|(\varphi) = \sup_{|\psi| < \varphi} \int f\psi dx .$$

Nel caso in esame, il secondo membro non cambia, a causa di noti teoremi di approssimazione, se il campo dove si lascia variare la ψ si amplia alla classe delle funzioni sommabili, sempre però, soddisfacenti alla disuguaglianza $|\psi| \leq \varphi$. Ma allora, siccome f è sommabile, anche sign. f è sommabile e qûindi pure ψ sign. f, e questa funzione appartiene all' insieme rispetto al quale viene eseguito il sup., quindi:

$$\sup_{|\psi| \leq \varphi} \int f\psi\, dx \leq \sup_{|\psi . \mathrm{Sign.}\, f| \leq \varphi} \int f.\ \mathrm{sign.}\ f. \psi\, dx = \sup_{|\psi| \leq \varphi} \int |f| \psi\, dx ,$$

inoltre, in questo caso è:

$$\sup_{|\psi| \leq \varphi} \int |f| \psi\, dx \leq \int |f| \varphi\, dx .$$

quindi in definitiva,

$$\sup_{|\psi| \leq \varphi} \int |f| \psi dx \leq \int |f| \varphi dx .$$

D' altra parte,

$$\int |f| \varphi\, dx = \int f.\ \mathrm{sign.} f. \varphi\, dx \leq \sup_{|\psi| \leq \varphi} \int f| \psi\, dx ,$$

perchè sign. f. φ è una particolare ψ. Dalle due disuguaglianze si ha:

$$\int |f| \varphi\, dx = \sup_{|\psi| \leq \varphi} \int f\psi\, dx = |T| (\varphi) ,$$

quindi $|T|$ si dentifica con la funzione sommabile $|f|$.

Possiamo allora affermare che la nozione di valor assoluto di una distribuzione non è in disarmomia con quella di valor assoluto di una funzione.

8. - Siamo ora in grado di dare una definizione di modulo in distribuzione.

Siano n distribuzioni T_i, $(i = 1, 2, \dots n)$, tutte definite per $\varphi \in \mathfrak{D}\mathfrak{A}$.

Queste formano un vettore di R_n con componenti vettoriali T_i e che scriveremo T.

Siano $\alpha_i(x)$, $(i = 1, 2, \dots n)$, n funzioni di $\mathcal{E}$, tali che

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2(x) = 1.$$

Porremo:

$$\| T \| = \sup_{\alpha_i} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i T_i|, \tag{9}$$

dove il sup. è preso rispetto a tutti i possibili vettori di componenti α_i e di modulo 1. $\| T \|$ si dirà il *modulo* del vettore T.

Osserviamo prima che il prodotto $\alpha_i T_i$ ha senso in distribuzione (²), osserviamo dopo che $|\alpha_i T_i|$ essendo distribuzioni positive, anche la somma è una distribuzione positiva e l'operazione di sup. è eseguibile.

Quando le T_i sono identificabili con funzioni sommabili f_i, anche $\alpha_i T_i$ corrispondono a funzioni sommabili e $|\alpha_i T_i| = |\alpha_i f_i|$ come abbiamo visto al paragrafo precedente. Osserviamo adesso che il sup. del secondo membro (9) diventa un operazione puntuale e che (³)

$$\sup_{\Sigma \alpha_i^2 = 1} \sum_i |\alpha_i f_i| = \left\{ \Sigma f_i^2 \right\}^{1/2},$$

e, se mettiamo l'ulteriore ipotesi che le f_i siano sommabili con i propri quadrati, allora $\| T \|$ si identifica con la funzione $\{ \sum_i f_i^2 \}^{1/2}$.

È giustificabile quindi, la seguente definizione:

Definizione: se il vettore T, in distribuzione, è tale che $\| T \| < +\infty$ esso si dirà di *modulo* finito.

Se valgono le ipotesi del paragrafo 5 per ogni T_i, su uno stesso supporto $\bar{S}_\Phi$, indipendentemente da i, allora $\alpha_i T_i$ soddisfa ancora alla stessa condizione e $|\alpha_i T_i| \neq \infty$, qualunque sia i, e per $\mathfrak{A} \subset \bar{S}_\Phi$ è $\| T \| < +\infty$ sù $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$. Infatti, basta osservare, che direttamente dalla definizione:

$$\| T \| \leq \sum_{i=1}^{n} |T_i| .$$

(²) Vedere L. SCHWARTZ, op. cit. pag. 115.

(³) Basta osservare che la somma delle proiezioni dei cateti d'un triangolo rettangolo su una retta non parallela all'ipotenusa è minore dell'ipotenusa stessa.

9. - È facile, ora, definire lunghezza e variazione totale in distribuzione. Sia T un vettore di componenti T_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ad una sola variabile e tutte con supporto compatto K. Si può dire che T rappresenta una curva di E_n, in distribuzione.

Noi porremo:

$$\mathfrak{L}_T = \lim_{h \to 0} \left\{ \left\| \frac{\mathcal{T}_{-h}T - T}{h} \right\| (\varphi) \right\}_{\varphi \equiv 1}$$

ossia, ricordando la definizione di modulo di un vettore (vedi § 8) e di traslata di una distribuzione [4]

$$\mathfrak{L}_T(\varphi) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \sup_{\Sigma \alpha_i^2 = 1} \Sigma_i \alpha_i [\, T_i(\varphi(x + h)) - T_i(\varphi(x))\,] \right\}_{\varphi \equiv 1},$$

e, nel caso che $T_i \equiv f_i$, cioè che le componenti del vettore T siano delle funzioni della sola variabile x:

$$\mathfrak{L}_T = \lim_{h \to 0} \int_K \frac{1}{h} \sup_{\Sigma \alpha_i^2 = 1} \Sigma_i \alpha_i [f_i(x + h) - f_i(x)]\, dx = \lim_{h \to 0} \int_K \left\{ \Sigma_i \left(\frac{f_i(x + h) - f_i(x)}{h} \right)^2 \right\}^{1/2} dx,$$

e noi sappiamo che questo limite fornisce, in generale, la lunghezza [5] della curva $\mathcal{C} \equiv T = \{ x_i = f_i(t) \}$.

Data una distribuzione Φ, definita per le funzioni $\varphi(x)$, con $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, in $\mathfrak{D}$, è immediato porre:

$$\operatorname{grad} \Phi \equiv T,$$

dove T è quel vettore le cui componenti sono [6] le distribuzioni $T_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}$. Prenderà allora un senso, secondo le nostre precedenti definizioni (con valore finito o infinito) l'integrale [7]

$$\int \| \operatorname{grad} \Phi \| = \int \| T \|,$$

dove $\| T \|$ è il modulo di T definito al § 8.

L'integrale del modulo del gradiente è utile in molte questioni e, in particolare, per dare una definizione astratta di perimetro di insieme. [8]

---

[4] Per il significato di traslata, vedere L. SCHWARTZ, loc. cit. pag. 55.

[5] vedere; E. BAIADA; *La variazione totale, la lunghezza d'una curva e l'integrale del calcolo delle Variazioni.* « Rendiconti Acc. Lincei », serie VIII, vol. XXII, fasc. 5, (1957).

[6] vedere: L. SCHWARTZ, op. cit. pg. 35, oppure pg. 78.

[7] per la definizione di integrale di una distribuzione, vedere: L. SCHWARTZ op. cit. pg. 88.

[8] vedere: E. BAIADA - C. VINTI, *Generalizzazioni non Markoviane della definizione di perimetro.* « Celebrazioni Archimedee del XX secolo ». Siracusa, 1961.